УДК 517.546

Д. Кирьяцкис

О ЛИНЕЙНОМ ОДНОРОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И СИСТЕМЕ ЧЕБЫШЕВА

В данной работе изучаются свойства однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка, фундаментальная система решений которого является системой Чебышева. В связи с этим рассматривается класс аналитических в круге функций, каждая из которых имеет n нулей в этом круге. Устанавливаются для функций этого класса оценки модулей производных. Используется аппарат разделенных разностей. Приводятся также некоторые свойства систем Чебышева и примеры дифференциальных уравнений чебышевского типа.

1. Система вещественных функций $u_1(t),...,u_n(t)$, определенных на отрезке $[a,b]$, называется системой Чебышева порядка n на $[a,b]$, если для любых действительных значений $c_1,...,c_n$ (случай $c_1 = ... = c_n = 0$ исключается) каждый обобщенный многочлен $P(t) = c_1u_1(t) + ... + c_nu_n(t)$ имеет на $[a,b]$ не более $n-1$ попарно различных корней.

Системы Чебышева встречаются во многих областях математического анализа, например, в теории аппроксимации, в теории интерполяции, в задачах, связанных с осцилляционными решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. С различными интересными свойствами систем Чебышева можно познакомиться в [1]. Что касается различных приложений, то заслуживает внимания [2].

Вместе с тем теория чебышевских систем, определяемых в различных классах функций комплексного переменного, развивается пока не очень быстрыми темпами. Здесь можно упомянуть о классических результатах А. Хаара, Л. Тоннелли, В. Виденского, Е. Ремеза о наилучших приближениях на заданных множествах в комплексной плоскости [3].

Дадим определение системы Чебышева для аналитических в области D функций. Система аналитических и линейно независимых в области D функций

$$y_1(z),..., y_n(z) \tag{1}$$

называется системой Чебышева (чебышевской системой) в области D, если для любых комплексных чисел $c_0, c_1,..., c_n$, не равных одновременно нулю, любая функция вида (обобщенный многочлен)

$$y(z) = c_1y_1(z) + ... + c_ny_n(z) \tag{2}$$

имеет в области D не более $n-1$ попарно различных корней. Очевидно, что система функций (1) есть система Чебышева в области D, если для любых комплексных чисел $c_0, c_1,..., c_n$, не равных одновременно нулю, уравнение

$$c_1y_1(z) + ... + c_ny_n(z) = 0$$

имеет в области D не более $n-1$ попарно различных корней.

Примером системы Чебышева в любой области комплексной плоскости является система, состоящая из функций $1, z,..., z^n$, где n – любое натуральное число. Другим примером системы Чебышева в области D, имеющая многочисленные применения в различных областях математики, является система функций $y_1(z) \equiv 1$, $y_2(z) \equiv f(z)$, где $f(z)$ – однолистная в области D функция. Приведем несколько элементарных свойств систем Чебышева, часть из которых мы используем в дальнейшем.

Свойство 1. Функции (1), образующие систему Чебышева в области D, не могут иметь общего корня в области D [1].

Свойство 2. Если $y(z) \in A(D)$ и $y(z) \neq 0$ в области D, причем функции (1) образуют систему Чебышева в области D, то функции $y(z)y_1(z), y(z)y_2(z),..., y(z)y_n(z)$ также образуют систему Чебышева в области D.

Свойство 3. Пусть функции (1) образуют систему Чебышева в области D_0 и функция $y(z) \in A(D)$ взаимно однозначно отображает область D на область D_0. Тогда функции $y_1(y(z)), y_2(y(z)),..., y_n(y(z))$ также образуют систему Чебышева в области D.

Свойство 4 в некотором смысле дополняет определение системы Чебышева.

Свойство 4. Если система функций (1) есть система Чебышева в области D, то любой обобщенный многочлен вида (2) имеет не более $n-1$ корней в области D, считая кратность каждого корня. Кроме того, существует обобщенный многочлен вида (2), имеющий ровно $n-1$ корней в области D, считая кратность каждого корня [4]. С другими свойствами систем Чебышева можно познакомиться в [5], [6].

2. Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(z) + g_1(z)y^{(n-1)}(z) + ... + g_{n-1}(z)y^{(1)}(z) + g_n(z)y(z) = 0, \tag{3}$$

где $g_1(z),..., g_n(z)$ – аналитические в области D функции. Функции, удовлетворяющие уравнению (3), ищем также среди аналитических в области D функций. Хорошо известно, что если $y_1(z),..., y_n(z)$ – линейно независимые в области D частные решения уравнения (3), то любая функция, представимая в виде линейной комбинации функций $y_1(z),..., y_n(z)$, удовлетворяет уравнению (3). В этом случае говорят, что система функции $y_1(z),..., y_n(z)$ образует фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения (3), а общее решение имеет следующий вид:

$$y(z) = c_1 y_1(z) + ... + c_n y_n(z),$$

где $c_1,..., c_n$ – произвольные комплексные числа. Функцию тождественно равную нулю в области D назовем нулевой функцией. Очевидно, нулевая функция всегда удовлетворяет уравнению (3).

Уравнение (3) назовем дифференциальным уравнением чебышевского типа в области D, если любая фундаментальная система решений этого уравнения является системой Чебышева в области D. Другими словами, любая ненулевая функция, удовлетворяющая уравнению (3) имеет в области D не более $n-1$ корней, считая кратность каждого корня.

3. Рассмотрим некоторые простейшие линейные однородные дифференциальные уравнения и выясним, являются ли они уравнениями чебышевского типа.

Пример 1. Уравнение $y^{(n)}(z) = 0$ является дифференциальным уравнением чебышевского типа в любой области D.

В самом деле, все функции, удовлетворяющие этому уравнению, содержатся в формуле $y(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_{n-1} z^{n-1}$, где $c_0,..., c_n$ – произвольные постоянные. Очевидно, любая ненулевая функция указанного вида имеет в области D не более $n-1$ корней.

Пример 2. Уравнение $y'(z)+y(z)=0$ является дифференциальным уравнением чебышевского типа в любой области D. Действительно, общее решение этого уравнения имеет вид: $y(z)=c_1e^{-z}$.
Очевидно, любая ненулевая функция указанного вида не имеет в области D корней.

Пример 3. Уравнение $y^{(n)}(z)+C_n^1y^{(n-1)}(z)+\ldots+C_n^{n-1}y^{(1)}(z)+y(z)=0$,
где $C_n^1,\ldots,C_n^{n-1}$ – биномиальные коэффициенты, будет дифференциальным уравнением чебышевского типа в любой ограниченной области D.

Докажем это утверждение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^n+C_n^1\lambda^{n-1}+\ldots+C_n^{n-1}\lambda+1=0$$

или $(\lambda+1)^n=0$. Отсюда $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=-1$. Значит, общее решение имеет вид:

$$y(z)=e^{-z}\left(c_1+c_2z+\ldots+c_nz^{n-1}\right).$$

Отсюда видно, что любая ненулевая функция имеет в области D не более $n-1$ корней.

Пример 4. Пусть $n\geq 2$. Уравнение $y^{(n)}-2^{n+1}3\pi\, iy^{(n-1)}-2^{2n+3}\pi^2y^{(n-2)}=0$ не является чебышевского типа в круге $|z|<1$.

Докажем это утверждение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^n-2^{n+1}3\pi\, i\lambda^{n-1}-2^{2n+3}\pi^2\lambda^{n-2}=0,$$

корни которого $\lambda_1=2^{n+2}\pi i$, $\lambda_2=2^{n+1}\pi i$, а остальные равны нулю. Возьмем функцию $y(z)=e^{\lambda_1 z}-e^{\lambda_2 z}$. Эта функция удовлетворяет нашему дифференциальному уравнению. Если $z_k=1/2^k$, то $|z_k|<1$ и $y(z_k)=0$, $k=1,\ldots,n$. Это говорит о том, что данное дифференциальное уравнение не является дифференциальным уравнением чебышевского типа в круге $|z|<1$.

Пример 5. Уравнение $y''(z)-y'(z)=0$ будет чебышевского типа в круге $|z|<1$ и не будет чебышевского типа в круге $|z|<7$. В самом деле, любая функция, удовлетворяющая данному уравнению, представима формулой $y(z)=c_1+c_2e^z$. При любых значениях c_1,c_2, кроме $c_1=0$, $c_2=0$ такая функция имеет не более одного корня в круге $|z|<1$ и может иметь два корня в круге $|z|<7$.

Примеры показывают, что линейно однородное дифференциальное уравнение n может быть как чебышевского типа, так и нечебышевского типа. Это зависит от поведения его коэффициентов $a_1,\ldots,a_n$, а также от размеров и вида области D.

4. В теории интерполяции известно следующее утверждение.

Если дифференцируемая n раз функция $x(t)$ *имеет n нулей* $a_1,\ldots,a_n$ *на отрезке* $[a,b]$, *то справедливы неравенства* $\left|x^{(k)}(t)\right|\leq\dfrac{1}{(n-k)!}\mu(b-a)^{n-k}$, $a\leq t\leq b$, $k=0,1,\ldots,n-1$, *где* $\mu=\max\limits_{a\leq t\leq b}\left|x^{(n)}(t)\right|$.

Доказательство этой теоремы довольно сложное и основано на следующем представлении функции $x(t)$:

$$x(t)=(a_n-t)(a_{n-1}-t)\ldots(a_2-t)\int\limits_{a_0}^{t}\frac{1}{(a_2-t_1)^2}dt_1\int\limits_{a_2}^{t_1}\frac{(a_2-t_2)}{(a_3-t_2)}dt_2\ldots$$

$$\ldots\int\limits_{a_{n-1}}^{t_{n-2}}\frac{(a_{n-1}-t_{n-1})^{n-2}}{(a_2-t_1)^2}dt_{n-1}\int\limits_{a_n}^{t_{n-1}}(a_n-t_n)^{n-1}x^{(n)}(t_n)dt_n. \qquad (4)$$

Приведенное утверждение используется обычно для оценки остаточного члена интерполяционной формулы Лагранжа и его производных, например, в работах [7; 8]. Представление (4) применялось также в комплексной плоскости для голоморфных в круге функций в работах [9; 10] при изучении свойств производной Шварца и систем Чебышева. Ниже мы сформулируем и докажем более общую интерполяционную теорему, в которой существенную роль играют разделенные разности различных порядков [11; 12].

Определим разделенную разность $n-$ го порядка аналитической в области D функции $f(z)$ для попарно различных точек $z_0, z_1, ..., z_n \in D$ рекуррентной формулой

$$[f(z); z_0, z_1, ..., z_n]=\frac{[f(z); z_0, z_1, ..., z_{n-1}]-[f(z); z_1, z_2, ..., z_n]}{z_0-z_n},$$

где положено

$$[f(z); z_0]=f(z_0), \quad [f(z); z_0, z_1]=\frac{[f(z); z_0]-[f(z); z_1]}{z_0-z_1}=\frac{f(z_0)-f(z_1)}{z_0-z_1}.$$

Для попарно различных $z_0, z_1, ..., z_n$ имеет место также формула:

$$[f(z); z_0, ..., z_n]=\sum_{m=0}^{n}\frac{f(z_m)}{\eta'_n(z_m)}, \text{ где } \eta_n(z)=\prod_{p=0}^{n}(z-z_p). \qquad (5)$$

Разделенную разность $n-1$-го порядка аналитической в области D функции $F(z)$ можно определить с помощью контурного интеграла следующим образом:

$$[f(z); z_0, z_1, ..., z_n]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)(\xi-z_1)\ldots(\xi-z_n)}, \qquad (6)$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий в области D и охватывающий все точки $z_0, ..., z_n \in D$. В формуле (6) среди точек $z_0, z_1, ..., z_n$ могут быть и совпадающие между собой точки. Если $z_0=z_1=...=z_n=\zeta$, то

$$\left[f(z); \underbrace{\zeta, ..., \zeta}_{n+1}\right]=\frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.$$

Пусть D – выпуклая область. Тогда разделенную разность $n-$ го порядка аналитической в области G функции $f(z)$ можно представить в следующем виде:

$$[f(z); z_0 z_1, ..., z_n]=\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}f^{(n)}(\zeta)dt_1\ldots dt_n, \qquad (7)$$

где $z_0, z_1, ..., z_n \in D$ и

$$\zeta=z_0+t_1(z_1-z_0)+...+t_n(z_n-z_{n-1})\in D,$$
$$0\le t_1\le 1,\ 0\le t_2\le t_1, ..., 0\le t_n\le t_{n-1}.$$

В частности, если $f^{(n)}(z)\equiv 1$, то

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^{t_1}\ldots\int\limits_0^{t_{n-1}}dt_1\ldots dt_n=\frac{1}{n!!}. \qquad (8)$$

В формуле (6) среди точек $z_0, z_1, ..., z_n$ могут быть и совпадающие между собой точки.

Теорема 1. *Пусть аналитическая в области* D *функция* $f(z)$ *имеет* n *нулей* $a_1,...,a_n$, *которые все расположены в некоторой ограниченной области* $G \subset D$. *Пусть также*

$$M_n = \max_{z \in \overline{Q}} \left| f^{(n)}(z) \right|, \text{ где } \overline{G} - \text{замыкание области } G.$$

Тогда для модуля k *- ой производной функции*

$$(z - z_1)...(z - z_m)[f(z); a_1,..., a_n, z]$$

справедливо неравенство:

$$\left| \left((z - a_1)...(z - a_m)[f(z); a_1,..., a_n, z] \right)^{(k)} \right| \le \left(|z| + R \right)^{n-k} \frac{A_m^k M_n}{n!}, \quad \forall z \in \overline{G}, \tag{9}$$

где $2d$ *– диаметр замкнутой области* $\overline{G}$ *и*

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}, \quad 0 \le k \le m \le n \text{ и } m \ne 0.$$

Доказательство. Так как функция $f(z)$ имеет n нулей в замкнутой области $\overline{G}$, то ее можно представить в виде $f(z) = (z - a_1)...(z - a_n)\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в области D функция. Пользуясь формулами (7) и (8), получим

$$\left| [f(z); a_1,..., a_n, z] \right| \le \frac{M_n}{n!}, \quad \forall z \in \overline{G}. \tag{10}$$

Для удобства дальнейших рассуждений возьмем в плоскости uOv прямоугольную трапецию с вершинами в точках $A(1;0)$, $B(n;0)$, $C(n;n)$, $D(1;1)$. Далее рассматриваем внутри трапеции $ABCD$ и на ее границе множество $\{(m;k)\}$ точек с целыми неотрицательными координатами. Для фиксированного n легко убедиться в существовании взаимно однозначного соответствия между множеством точек (m,k) и множеством неравенств (9). Нам надо доказать, что для каждой точки (m,k) трапеции $ABCD$ имеет место неравенство (9). Так как для любого $z \in \overline{G}$ справедливо неравенство

$$\left| (z - a_1)...(z - a_m) \right| \le \left(|z| + R \right)^m, \text{ где } 1 \le m \le n,$$

то из (10) легко следует неравенство

$$\left| (z - a_1)...(z - a_m)[f(z); a_1,..., a_n, z] \right| < \left(|z| + d \right)^m \frac{A_m^0 M_n}{n!}, \quad \forall z \in \overline{G}, \ 1 \le m \le n. \tag{11}$$

Это значит, что для всех точек $(m;0)$, $m = 1,...,n$, лежащих на стороне AB трапеции $ABCD$, имеет место неравенство (9).

Для точки $(n;n)$ неравенство (9) справедливо. Действительно,

$$(z - a_1)...(z - a_n)[f(z); a_1,..., a_n, z] \equiv f(z)$$

и поэтому

$$\left| \left((z - a_1)...(z - a_n)[f(z); a_1,..., a_n, z] \right)^{(n)} \right| = \left| f^{(n)}(z) \right| \le \frac{A_n^n M_n}{n!}, \ \forall z \in \overline{G}. \tag{12}$$

Для точек $(m;m)$, $m = 1,...,n-1$, неравенство (9) справедливо. В самом деле,

$$\left| \left((z - a_1)...(z - a_m)\varphi(z) \right)^{(m)} \right| = \left| \left([f(z); a_{m+1},...a_n] \right)^{(m)} \right| = m! \left| \left[f(z); a_{m+1},..., a_n, \underbrace{z,...z}_{m+1} \right] \right| \le \frac{A_m^m M_n}{n!} \tag{13}$$

для любого $z \in \overline{G}$. Из (11), (12), (13) следует, что неравенство (9) справедливо для всех точек, лежащих на сторонах AB, AD, DC трапеции $ABCD$. Теперь мы докажем справедливость неравенства (9) для всех точек, лежащих внутри трапеции $ABCD$, а также для всех точек, расположенных на стороне BC. Будем пользоваться индукцией. Для точек, лежащих на стороне AD, неравенство (9), как уже известно, справедливо. Пусть неравенство (9) имеет место для всех точек трапеции $AEFD$, где сторона EF состоит из точек $(m;k)$, $k=0,1,...,m-1,m$. Докажем тогда, что

$$\left|\left((z-a_1)...(z-a_{m+1})[f(z);a_1,...,a_n,z]\right)^{(k)}\right| \le (|z|+d)^{n-k}\,\frac{A_{m+1}^k M_n}{n!},\ \forall z\in\overline{G} \tag{14}$$

справедливо для всех точек $(m+1;k)$, $k=0,1,...,m,m+1$, расположенных на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D, содержащей трапецию $AEFD$.

Как уже известно, для крайних точек $E_1(m+1;0)$ и $F_1(m+1;m+1)$ стороны E_1F_1 неравенство (13) справедливо. Докажем справедливость неравенства (14) для остальных точек стороны E_1F_1. Возьмем на стороне E_1F_1 произвольным образом внутреннюю точку $(m+1;k)$, где $1\le k\le m$, и докажем справедливость неравенства (14) для этой точки.

Действительно, имеем

$$\left|\left((z-a_1)...(z-a_{m+1})\varphi(z)\right)^{(k)}\right| = \left|\left((z-a_1)...(z-a_{m-k+1})(z-a_{m-k+2})\varphi(z)\right)^{(k)}\right| =$$

$$=\sum_{p=0}^{k} C_k^p\left|\left((z-a_1)...(z-a_{m-k+1})\right)^{(k-p)}\right|\cdot\left|\left((z-a_{m-k+2})...(z-a_{m+1})\varphi(z)\right)^{(p)}\right|,\ \forall z\in\overline{G}\ .$$

Здесь C_k^p – биномиальные коэффициенты. Нетрудно убедиться в том, что

$$\left|\left((z-a_1)...(z-a_{m-k+1})\right)^{(k-p)}\right| \le A_{m-k+1}^{k-p}(|z|+d)^{m-2k+1+p},\ \ \forall z\in\overline{G}\ .$$

Далее обозначим для удобства $b_1=a_{m-k+2}$, $b_2=a_{m-k+3},...,b_k=a_{m+1}$. Тогда получим

$$\left((z-a_{m-k+2})...(z-a_m)\varphi(z)\right)^{(p)} = \left((z-b_1)...(z-b_k)\varphi(z)\right)^{(p)},\ \forall z\in\overline{G}\ .$$

Так как точка $(k;p)$ принадлежит трапеции $AEFD$, то

$$\left|\left((z-b_1)...(z-b_k)\varphi(z)\right)^{(p)}\right|(|z|+d)^{k-p}\,\frac{A_k^p M_n}{n!},\ \forall z\in\overline{G}\ .$$

Таким образом, для любого z из области G имеем

$$\left|\left((z-a_1)...(z-a_{m+1})\varphi(z)\right)^{(k)}\right| \le (|z|+d)^{m+1-k}\,\frac{M_n}{n!}\sum_{p=0}^{k}C_k^p\cdot A_{m-k+1}^{k-p}\cdot A_k^p = (|z|+d)^{m-k+1}\,\frac{M_n}{n!}A_{m+1}^k\ . \tag{15}$$

Докажем комбинаторное равенство:

$$\sum_{p=0}^{k}C_k^p\cdot A_{m+1-k}^{k-p}\cdot A_k^p = A_{m+1}^k\ . \tag{16}$$

Действительно, так как $z^{m+1}=z^{m+1-k}z^k$, то

$$\left(z^{m+1}\right)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k}C_k^p\left(z^{m+1}-k\right)^{(k-p)}\left(z^k\right)^{(p)}$$

или

$$A_{m+1}^k z^{m+1-k} = \sum_{p=0}^{k}C_k^p A_{m+1}^{k-p}z^{m+1-2k+p}A_k^p z^{k-p}\ . \tag{17}$$

Полагая в (17) $z=1$, получим (16). Пользуясь (15) и (16), получим (14).

Мы доказали справедливость неравенства (9) для произвольно фиксированной точки $(m+1;k)$, взятой на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D. Но тогда мы доказали справедливость неравенства (9) для любой точки, взятой на стороне E_1F_1 трапеции AE_1F_1D. Продолжая указанный процесс, убедимся в справедливости неравенства (9) для любой точки трапеции $ABCD$.

Следствие 1. *Пусть* $f(z)$ *голоморфная в области* D *функция имеет* n *нулей* $a_1,\ldots,a_n$, *которые все расположены в ограниченной области* $G \subset D$. *Пусть* $\overline{G}$ *– замыкание области* G *и* $2d$ *– диаметр замыкания* $\overline{G}$. *Пусть также*

$$M_n = \max_{z\in\overline{G}}\left|f^{(n)}(z)\right|.$$

Тогда для любого z *из замыкания* $\overline{G}$ *справедливо неравенство*

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le \frac{(|z|+d)^{n-k}}{(n-k)!}M_n, \quad 0 \le k \le n.$$

В самом деле, пусть $m = n$. Тогда легко видеть, что

$$(z-a_1)\ldots(z-a_n)[f(z);a_1,\ldots,a_n,z] \equiv f(z).$$

Применяя (8) для случая $m = n$, получим:

$$\left|f^{(k)}(z)\right| \le (|z|+d)^{n-k}\,\frac{A_n^k M_n}{n!} = (|z|+d)^{n-k}\,\frac{M_n}{(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n, \ \forall z \in \overline{G}.$$

Следующая теорема указывает на условия, которые являются достаточными для того, чтобы линейное дифференциальное уравнение было чебышевского типа. Эти условия касаются коэффициентов этого уравнения.

Теорема 2. *Пусть* $g_0(z),\ldots,g_{n-1}(z)$ *– аналитические в области* D *функции. Если для любого* z *из ограниченной области* $G \subset D$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(|z|+d)^{n-k}}{(n-k)!}|g_k(z)| \le 1, \tag{18}$$

где $2d$ *– диаметр замыкания* $\overline{G}$, *то дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)}(z) + g_{n-1}(z)y^{(n-1)}(z) + \ldots + g_1(z)y^{(1)}(z) + g_0(z)y(z) = 0 \tag{19}$$

является дифференциальным уравнением чебышевского типа в области G. *Другими словами*, *при выполнении условия* (18) *фундаментальная система решений уравнения* (19) *является системой Чебышева в области* G.

Доказательство. Предположим временно, что уравнение (19) не является дифференциальным уравнением чебышевского типа в области G. Тогда найдется аналитическая в области G функция $f(z)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (19), т.е.

$$f^{(n)}(z) + g_{n-1}(z)f^{(n-1)}(z) + \ldots + g_1(z)f^{(1)}(z) + g_0(z)f(z) = 0, \ \forall z \in G, \tag{20}$$

и имеет по крайней мере n корней $a_1,\ldots,a_n$ в области G. Из (20) легко следует неравенство

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \sum_{k=0}^{n-1}|g_k(z)|\left|f^{(k)}(z)\right|, \ \forall z \in G. \tag{21}$$

Ясно, что существует область $Q \subset G$ такая, что $a_1,\ldots,a_n \in Q$ и $\overline{Q} \subset G$. Обозначим $M_n = \max_{z\in\overline{Q}}\left|f^{(n)}(z)\right|$. Применяя теорему 2 к правой части неравенства (21), получим

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le M_n\sum_{k=0}^{n-1}|g_k(z)|\frac{(|z|+d_1)^{n-k}}{(n-k)!}. \quad \forall z \in \overline{Q}, \tag{22}$$

где $2d_1$ – диаметр области Q. Далее, существует такая точка $\xi \in \overline{Q}$, что $\left|f^{(n)}(\xi)\right| = M_n$. Значит, из (22) следует неравенство

$$1 \le \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(\xi)| \frac{(|\xi| + d_1)^{n-k}}{(n-k)!}$$

Так как $d_1 < d$, то

$$1 < \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(\xi)| \frac{(|\xi| + d)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Но точка ξ. принадлежит области G. Мы получили противоречие с условием (18). Из этого противоречия вытекает, что уравнение (19) является дифференциальным уравнением чебышевского типа в области G.

Применим теорему 2 для дифференциальных уравнений второго порядка.

Следствие 2. *Пусть $g_0(z)$, $g_1(z)$ – аналитические в круге $|z| < R_1$ функции. Если в круге $|z| \le R < R_1$ выполняется неравенство*

$$|g_0(z)| + 2|g_1(z)| \le \frac{1}{R}, \tag{23}$$

то дифференциальное уравнение

$$y''(z) + g_1(z)y'(z) + g_0(z)y(z) = 0 \tag{24}$$

будет уравнением чебышевского типа в круге $|z| < R$.

Замечание 1. Пусть $y_1(z)$, $y_2(z)$ – линейно независимые частные решения дифференциального уравнения (24) и коэффициенты $g_1(z)$, $g_0(z)$ удовлетворяют неравенству (23). Тогда следствие 2 утверждает, что любая ненулевая функция $y(z) = c_1y_1(z) + c_2y_2(z)$ имеет в круге $|z| < R$ не более одного корня. Но тогда функция $f(z) = \dfrac{y_1(z)}{y_2(z)} + c_2$ будет однолистной функцией в круге $|z| < R$ с возможным простым полюсом в единственной точке.

Рассмотрим некоторые частные случаи дифференциальных уравнений второго порядка. Опираясь на следствие 2, приходим к следующим утверждениям.

Дифференциальные уравнения Эйри и Вебера [13]

$$y''(z) - z \cdot y(z) = 0, \quad y''(z) - z^2 \cdot y(z) = 0$$

будут чебышевского типа в круге $|z| < 1$. Дифференциальное уравнение Матье [13]

$$y''(z) - \cos z \cdot y(z) = 0$$

будет чебышевского типа в круге $|z| < R$, где $R(e^R + e^{-R}) = 2$.

В процессе доказательства теоремы 2 мы установили также следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^{n} g_{n-k}(z) y^{(n-k)}(z) = 0, \tag{25}$$

где $g_k(z)$, $k = 1,...,n$, – аналитические в области D функции. Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (25) и имеет n корней $a_1,...,a_n$, расположенных в некоторой ограниченной области $G \subset D$, диаметр которой равен $2d$. Тогда в области G существует такая точка ξ, для которой

$$1 < \sum_{k=0}^{n-1} |g_k(\xi)| \frac{(d + |\xi|)^{n-k}}{(n-k)!} \tag{26}$$

В самом деле, из условия теоремы 3 следует, что дифференциальное уравнение (25) не является дифференциальным уравнением чебышевского типа. Тогда, рассматривая доказательство теоремы 2, приходим к справедливости неравенства (26).

В следующей теореме рассматривается линейное однородное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Теорема 4. *Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)}(z)+a_{n-1}y^{(n-1)}(z)+...+a_1y^{(1)}(z)+a_0y(z)=0 \tag{27}$$

с комплексными коэффициентами $a_0,...,a_{n-1}$. *Если*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!}|a_k|\le 1, \tag{28}$$

то (27) *будет дифференциальным уравнением чебышевского типа в круге* $|z|<R$.

Действительно, для любого z из круга $|z|<R$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(R+|z|)^{n-k}}{(n-k)!}|a_k|<\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!}|a_k|\le 1$$

и по теореме 3 приходим к справедливости нашего утверждения.

Следствие 3. *Если*

$$|a_k|\le\frac{1}{e^{2R}-1},\quad k=1,...,n, \tag{29}$$

то дифференциальное уравнение (27) *является уравнением чебышевского типа в круге* $|z|<R$.

В самом деле, опираясь на условие (29), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!}|a_k|\le\frac{1}{e^{2R}-1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2R)^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{1}{e^{2R}-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2R)^k}{k!}<\frac{1}{e^{2R}-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2R)^k}{k!}=1$$

и по теореме 4 убеждаемся в справедливости нашего утверждения.

Замечание 2. В качестве области D возьмем единичный круг $|z|<1$. Тогда следствие 3 говорит о том, что уравнение вида (27) будет уравнением чебышевского типа, если коэффициенты по модулю не превышают числа $1/7$.

Лемма 1. *Для того чтобы уравнение* $y^{(n)}(z)+\sum_{k=1}^{n}g_{n-k}(z)y^{(n-k)}(z)=0$

было чебышевского типа, необходимо и достаточно, чтобы определитель Хаара, образованный из фундаментальной системы аналитических в области D *функций* $y_1(z),...,y_n(z)$, *был отличен от нуля, т.е.*

$$H(y_1,...,y_n;z_1,...,z_n)=\begin{vmatrix} y_1(z_1) & \cdots & & y_n(z_1)\\ y_1(z_2) & \cdots & & y_n(z_2)\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ y_1(z_n) & \cdots & & y_n(z_n)\end{vmatrix}\ne 0,\ \forall z_1,...,z_n\in D.$$

В самом деле, составим систему

$$c_1u_1(z_k)+...+c_nu_n(z_k)=0,\ k=1,...,n \tag{30}$$

однородных линейных уравнений относительно $c_1,...,c_n$, где $z_1,...,z_n$ – фиксированные точки из области D. Если функции $y_1(z),...,y_n(z)$ образуют систему Чебышева в области D, то система (30) имеет только нулевое решение, т.е. $c_1=...=c_n=0$, и тогда определитель Хаара отличен от нуля. Если функции $y_1(z),\dots,y_n(z)$ не образуют систему Чебышева в области D, то система (30) имеет ненулевое решение, т.е. $c_1=\dots=c_n\neq 0$, и тогда определитель Хаара равен нулю.

Составим определитель из разделенных разностей аналитических в области D функций $y_1(z),\dots,y_n(z)$ следующим образом:

$$\Re\left(y_1,\dots,y_n;z_0,\dots,z_n\right)=\begin{vmatrix} y_1(z_1) & \cdots & y_{n-1}(z_1) & y_n(z_1)\\ [y_1(z);z_1,z_2] & \cdots & [y_{n-1}(z);z_1,z_2] & [y_n(z);z_1z_2]\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ [y_1(z);z_1,\dots,z_n] & \cdots & [y_{n-1}(z);z_1,\dots,z_n] & [y_n(z);z_1,\dots,z_n]\end{vmatrix}. \qquad (31)$$

Назовем этот определитель разделено-разностным определителем. В случае совпадения всех точек $z_1,\dots,z_n$, т.е. $z_1=\dots=z_n=\zeta$ он превращается в определитель

$$\widetilde{V}(y_1,\dots,y_n;\zeta)=\frac{1}{1!2!\dots(n-1)!}\begin{vmatrix} y_1(\zeta) & \cdots & y_{n-1}(\zeta) & y_n(\zeta)\\ y_1^{(1)}(\zeta) & \cdots & y_{n-1}^{(1)}(\zeta) & y_n^{(1)}\zeta\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(\zeta) & \cdots & y_{n-1}^{(n-1)}(\zeta) & y_n^{(n-1)}(\zeta)\end{vmatrix},$$

который отличается от определителя Вронского $V(y_1,\dots,y_n;z_1,\dots,z_n)$ множителем $(1!2!\dots(n-1)!)^{-1}$. Таким образом, определитель $\Re\left(y_1,\dots,y_n;z_0,\dots,z_n\right)$ можно рассматривать как естественное обобщение определителя Вронского. Запишем определитель Вандермонда

$$W(z_1,\dots,z_n)=\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1\\ z_1 & \cdots & z_{n-1} & z_n\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ z_1^{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} & z_n^{n-1}\end{vmatrix}.$$

Известно [14], что

$$W(z_1,\dots,z_n)=((z_n-z_1)(z_n-z_2)\dots(z_n-z_{n-1}))\dots((z_3-z_1)(z_3-z_2))(z_2-z_1). \qquad (32)$$

Перепишем формулу (5) для попарно различных точек $z_1,\dots,z_n\in D$ следующим образом:

$$[f(z);z_1,\dots,z_n]=\sum_{m=1}^{n}\frac{f(z_m)}{\eta'_n(z_m)},\ \text{где}\ \eta_n(z)=\prod_{p=1}^{n}(z-z_p) \qquad (33)$$

Опираясь на формулу (32), легко установить для определителя Вандермонда также формулу

$$W(z_1,\dots,z_n)=\eta'_1(z_1)\eta'_2(z_2)\dots\eta'_n(z_n) \qquad (34)$$

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$\Re(y_1(z),\dots,y_n(z);z_1,\dots,z_n)=\frac{H(y_1,\dots,y_n;z_1,\dots,z_n)}{W(z_1,\dots,z_n)}. \qquad (35)$$

Действительно, пользуясь формулами (31), (32), получим

$$\Re\left(y_1,\dots,y_n;z_0,\dots,z_n\right)=\begin{vmatrix} y_1(z_1) & \cdots & y_{n-1}(z_1) & y_n(z_1)\\ [y_1(z);z_1,z_2] & \cdots & [y_{n-1}(z);z_1,z_2] & [y_n(z);z_1z_2]\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ [y_1(z);z_1,\dots,z_n] & \cdots & [y_{n-1}(z);z_1,\dots,z_n] & [y_n(z);z_1,\dots,z_n]\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(z_1) & \cdots & y_{n-1}(z_1) & y_n(z_1) \\ \dfrac{y_1(z_1)}{\eta'_2(z_1)}+\dfrac{y_1(z_2)}{\eta'_2(z_2)} & \cdots & \dfrac{y_{n-1}(z_1)}{\eta'_2(z_1)}+\dfrac{y_{n-1}(z_2)}{\eta'_2(z_2)} & \dfrac{y_n(z_1)}{\eta'_2(z_1)}+\dfrac{y_n(z_2)}{\eta'_2(z_2)} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{y_1(z_1)}{\eta'_n(z_1)}+\ldots+\dfrac{y_1(z_n)}{\eta'_n(z_n)} & \cdots & \dfrac{y_{n-1}(z_1)}{\eta'_n(z_1)}+\ldots+\dfrac{y_{n-1}(z_n)}{\eta'_n(z_n)} & \dfrac{y_n(z_1)}{\eta'_n(z_1)}+\dfrac{y_n(z_n)}{\eta'_n(z_n)} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{H(y_1,\ldots,y_n;z_1,\ldots,z_n)}{\eta'_1(z_1)\eta'_2(z_2)\ldots\eta'_n(z_n)}=\frac{H(y_1,\ldots,y_n;z_1,\ldots,z_n)}{W(z_1,\ldots,z_n)}.$$

Пользуясь леммами 1 и 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 5. *Для того чтобы линейное однородное дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)}(z)+\sum_{k=1}^{n} g_{n-k}(z)y^{(n-k)}(z)=0$$

было уравнением чебышевского типа в области D*, необходимо и достаточно, чтобы определитель* $\Re\left(y_1,\ldots,y_n;z_0,\ldots,z_n\right)$ *фундаментальной системы функций* $y_1(z),\ldots,y_n(z)$ *был отличен от нуля для любых попарно различных* $z_1,\ldots z_n \in D$.

Назовем линейное однородное дифференциальное уравнение локально чебышевского типа в области D, если для любой точки z из области D найдется окрестность этой точки, в которой фундаментальная система функций образует систему Чебышева.

Теорема 6. *Для того чтобы линейное однородное дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)}(z)+\sum_{k=1}^{n} g_{n-k}(z)y^{(n-k)}(z)=0 \qquad (36)$$

было локально чебышевского типа в области D*, необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского* $V(y_1,\ldots,y_n;z)\neq 0$, $\forall z\in D$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $V(y_1,\ldots,y_n;z)\neq 0$, $\forall z\in D$. Ясно, что

$$\lim_{z_1,\ldots,z_n\to z}\Re(y_1,\ldots,y_n;z_1,\ldots,z_n)=\widetilde{V}(y_1,\ldots,y_n;z). \qquad (37)$$

Возьмем в области D любую точку ξ. Согласно (35), существует такая окрестность $O(\xi)$ точки ξ, в которой $\Re(y_1,\ldots,y_n;z_1,\ldots,z_n)\neq 0$, $\forall z_0,\ldots,z_n\in D$. Но тогда, по теореме 8, следует, что уравнение (34) является чебышевского типа в области $O(\xi)$. Так как точка ξ была выбрана произвольным образом, то достаточность установлена.

Необходимость. Пусть уравнение (36) является локально чебышевского типа в области D. Согласно свойству 3, функции $y_1(z),\ldots,y_n(z)$ не могут иметь общего корня в области D. Возьмем в области D любую точку ξ и ее окрестность $O(\xi)$. В этой окрестности функции $y_1(z),\ldots,y_n(z)$ образуют систему Чебышева. Значит, хотя бы одно из чисел $y_1(\xi),\ldots,y_n(\xi)$ не равно нулю. Пусть это будет число $y_1(\xi)$. Окрестность $O(\xi)$ подберем такую, чтобы $y_1(z)\neq 0$ в $O(\xi)$. Предположим, что $V(y_1,\ldots,y_n;\xi)=0$. Система уравнений $c_1y_1^{(k)}(\xi)+\ldots+c_ny_n^{(k)}(\xi)=0$, $k=0,1,\ldots,(n-1)$ имеет ненулевое решение $\widetilde{c}_1,\ldots,\widetilde{c}_n$. Тогда обобщенный многочлен $P(z)=\widetilde{c}_1y_1(z)+\ldots+\widetilde{c}_ny_n(z)$ имеет в точке ξ корень, кратность которого не менее n. Функция $f(z)=\dfrac{P(z)}{y_1(z)}$ также имеет корень ξ той же кратности. Отсюда следует, что внутри окрестности $O(\xi)$ существует такая окрестность $O_1(\xi)$, что функция $f(z)$ принимает достаточно малое по модулю значение s не менее чем в n попарно различных точках $z_1,....,z_n$. Таким образом, многочлен $P(z;s)=(\widetilde{c}_1-s)y_1(z)+\widetilde{c}_2y_2(z)+...+\widetilde{c}_ny_n(z)$ имеет в окрестности $O_1(\xi)$ не менее n корней. Но тогда система функций $y_1(z),...,y_n(z)$ не является локально чебышевского типа в области D. Полученное противоречие доказывает необходимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн, М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука. – 1973.– 552 с.
2. Карлин, С. Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике / С. Карлин, В. Стадден. – М. : Наука. – 1975. – 568 с.
3. Смирнов, В.И. Конструктивная теория функций комплексного переменного / В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев. – М. : Наука. – 1964. – 439 с.
4. Кирьяцкис, Д. О некоторых свойствах аналитических функций, образующих систему Чебышева / Д. Кирьяцкис // Веснік Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2. – 2011. – № 2 (111). – С. 5–14.
5. Кирьяцкис, Д. Об одной чебышевской системе рациональных функций / Д. Кирьяцкис // Системы компьютерной математики и их приложения : материалы междунар. конф. – Смоленск, 2005. – С. 131–132.
6. Кирьяцкис, Д. О системе Чебышева в расширенной комплексной плоскости / Д. Кирьяцкис, Э. Кирьяцкий // IX Белорусская математическая конференция : тезисы докладов. – Гродно, 2004. – С. 34–35.
7. Бессмертных, Г.А. О некоторых оценках дифференцируемых функций одной переменной / Г.А. Бессмертных, А.Ю. Левин // Доклады АН СССР. – 1962. – Т. 144. – № 3. – С. 471–474.
8. Krein, M. Studia Math. / M. Krein, D. Milman, 9, 133 (1940).
9. Kim, W. On a theorem of Pokornyi / W. Kim // Prof. Amer. Math. Soc. 1969. – Vol. 23, № 9. – P. 343–346.
10. Kim, W. The schwarzian derivative and multivalence / W. Kim // Pacific J. Math. – 1969. – Vol. 31. P. 707–724.
11. Гельфонд, А.О. Исчисление конечных разностей / А.О. Гельфонд // М. : Наука. – 1967. – 376 с.
12. Ибрагимов, И.И. Методы интерполяции функции и некоторые их применения / И.И. Ибрагимов. – М. : Наука. – 1971. – 519 с.
13. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.Ф. Федорюк, М.И. Шабунин – М. : Наука. – 1982. – 488 с.
14. Гончаров, В.А. Теория интерполирования и приближения функций / В.А Гончаров. – М. : Наука. – 1954. – 328 с.

***D. Kirjackis.* About Linear Homogeneous Differential Equation and Chebyshev System**

In present paper we study the properties of a homogeneous linear differential equation of n-th order fundamental system of solutions of which is a system of Chebyshev. In this connection we consider a class of functions analytic in the circle, each of which has n zeros in this circle. For functions of this class the estimates for the moduli of derivatives are established. The apparatus of divided differences is used. We also give some properties of Chebyshev systems.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 02.02.2012