УДК 512.535

Т.В. Волошина

О ТОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУПП

В работе рассматриваются инверсные полугруппы, каждая убывающая цепочка идемпотентов которых обрывается. Для таких полугрупп доказано, что представление на множестве правых ω-классов по замкнутой инверсной подполугруппе H будет точным только в том случае, когда наименьший идемпотент H является примитивным для полугруппы S. Доказано также, что инверсные полугруппы с конечным числом идемпотентов и единственным примитивным обладают точным транзитивным представлением только в том случае, когда являются либо группами, либо группами с нулем.

Введение

Пусть S – инверсная полугруппа, а ω – обозначает естественный частичный порядок на ней: $a\omega b :\Leftrightarrow aa^{-1} = ab^{-1} \Leftrightarrow a^{-1}a = a^{-1}b$. Замыканием $H\omega$ множества $H \subseteq S$ называется множество $H\omega := \{h \in S : \exists \pi \in H \ \pi\omega h\}$. Если $H\omega = H$, то H называют *замкнутым*.

Подстановочным представлением на множестве X инверсной полугруппы S называется произвольный ее гомоморфизм в инверсную симметрическую полугруппу $IS(X)$. Представление называется *точным*, если оно инъективно. Для каждой инверсной полугруппы Вагнер [1] и Престон [2] построили точное представление частичными подстановками множества ее элементов. Этот факт является аналогом теоремы Кэли.

Пусть $\varphi_i : S \to IS(X_i)$, $i \in I$ – семейство представлений полугруппы S и множества X_i попарно не пересекаются. *Прямой сумой представлений* φ_i называется представление $\varphi : S \to IS(X)$, где $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, и $\varphi(s)|_{X_i} = \varphi_i(s)$ для каждого $i \in I$. Два представления $\varphi: S \to IS(X)$ и $\psi : S \to IS(Y)$ называются *эквивалентными*, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества X на Y, что для $x, x' \in X$ и $s \in S$ равенство $x^{\varphi(s)} = x'$ выполняется в том и только в том случае, когда $(\theta(x))^{\psi(s)} = \theta(x')$. Представление $\varphi : S \to IS(X)$ инверсной полугруппы S называют *транзитивным*, если для каждой пары элементов $x_1, x_2 \in X$ существует такая частичная подстановка $h \in \varphi(S)$ множества X, что $h(x_1) = x_2$, и *эффективным*, если $\bigcup_{x\in\varphi(S)} dom\, x = X$.

Естественно, сначала ограничимся рассмотрением только транзитивных представлений, так как каждое эффективное представление является прямой суммой транзитивных [3]. В 1962 году Шайном [4] было доказано, что каждое эффективное транзитивное представление инверсной полугруппы S эквивалентно представлению, построенному следующим образом. Для замкнутой инверсной подполугруппы H инверсной полугруппы S рассмотрим частичную правую конгруэнцию $\pi_H := \{(s,t) \in S \times S \mid st^{-1} \in H\}$ на множестве S. Классами эквивалентности этого отношения являются множества $(Hs)\omega$, где $ss^{-1} \in H$, в частности, H – единственный π_H-класс, содержащий идемпотенты. Очевидно, $s \in (Hs)\omega$ [5]. На множестве X классов эквивалентности конгруэнции π_H действие $\varphi_H(S)$ определяется правилом: для $x \in X$

и $s \in S$ $x^{\varphi_H(s)} = (xs)\omega$. Классы эквивалентности конгруэнции π_H на S будем называть *правыми ω-классами по замкнутой инверсной подполугруппе H*. Эти множества являются обобщением понятия правых смежных классов группы по подгруппе для случая инверсной полугруппы. Представление $\varphi_H : S \to IS(X)$ будем называть *представлением полугруппы S на правых ω-классах по замкнутой инверсной подполугруппе H*. Область определения конгруэнции π_H будем обозначать $D_H := \left\{ s \in S \,\middle|\, ss^{-1} \in H \right\} = \left\{ s \in S \,\middle|\, \exists x \in X : s \in x \right\}$.

Постановка задачи

Описание всех точных представлений для произвольной инверсной полугруппы – еще нерешенная задача. Представление Вагнера–Престона в общем случае нетранзитивно. С другой стороны, каждое транзитивное представление инверсной полугруппы с точностью до эквивалентности определяется некоторой замкнутой инверсной подполугруппой. В нашей работе рассматриваются необходимые условия, которые должна удовлетворять замкнутая инверсная подполугруппа, чтобы соответствующее представление было точным. Изучение точных транзитивных представлений инверсных полугрупп является важным этапом исследования таких полугрупп а также их представлений.

Вспомогательные результаты

Если полугруппа содержит 0, то он является неподвижной точкой представления Вагнера–Престона для всех элементов полугруппы. Поэтому в этом случае можно перейти к индуцированному представлению полугруппы S частичными подстановками множества $S \setminus \{0\}$, которое остается точным. Пусть инверсная полугруппа точно действует на множестве N. Для $M \subseteq N$ обозначим $S_M = \left\{ s \in S \,\middle|\, M^s = M \right\}$. Для $a \in S$ через $dom\, a$ и $ran\, a$ обозначим соответственно область определения и область значений a как частичной подстановки. Множество идемпотентов полугруппы S обозначим через $E(S)$.

Идемпотент $e \in S$ называют *примитивным*, если он ненулевой и такой, что для каждого ненулевого идемпотента f из $f\omega e$ следует $f = e$. Через $E_{\min}$ будем обозначать *множество всех примитивных идемпотентов* инверсной полугруппы S. Если $|E_{\min}| = 1$, то единственный элемент из $E_{\min}$ обозначим $e_{\min}$.

Лемма 1. Пусть S – инверсная полугруппа, каждая убывающая цепочка идемпотентов которой обрывается, $f \in E(S)$ – ненулевой. Тогда существует такой $e \in E_{\min}(S)$, что $e\omega f$.

Доказательство. Если $f \in E_{\min}(S)$, то утверждение леммы тривиально. Пусть $f \notin E_{\min}(S)$. Поскольку $f \neq 0$, существует такой ненулевой идемпотент f_1, что $f_1 < f$. Если $f_1 \in E_{\min}(S)$, то лемма доказана. В противном случае для $f_1 \neq 0$ существует такой ненулевой идемпотент f_2, что $f_2 < f_1 < f$. Так как каждая убывающая цепочка идемпотентов S обрывается, на некотором шаге получим такой ненулевой идемпотент f_i, что для каждого ненулевого идемпотента $\varepsilon \in E(S)$ из $\varepsilon \leq f_i$ следует $\varepsilon = f_i$. Отсюда $f_i \in E_{\min}(S)$. При этом $f_i < \cdots < f_2 < f_1 < f$. Таким образом, $e := f_i \omega f$.

Следствие. Если S – инверсная полугруппа, каждая убывающая цепочка идемпотентов которой обрывается, то $E_{\min}(S) \neq \varnothing$.

Лемма 2. Пусть S – инверсная полугруппа. Каждая убывающая цепочка идемпотентов из S вида $e_1 > e_2 > ... > e_k > ...$ обрывается тогда и только тогда, когда каждая замкнутая инверсная подполугруппа S содержит наименьший идемпотент.

Доказательство. Предположим, что существует H – такая замкнутая инверсная подполугруппа S, у которой отсутствует наименьший идемпотент. Тогда $0 \notin H$. Рассмотрим произвольный идемпотент $e_0 \in H$. Для него найдется такой идемпотент $f \neq e_0$, что либо $f < e_0$, либо f и e_0 – несравнимы. Обозначим $e_1 := e_0 f < e_0$. Поскольку $e_1 \in H$ и $0 \notin H$, $e_0 > e_1 \neq 0$. Для идемпотента e_1 найдется такой идемпотент $f_1 \neq e_1$, что либо $f_1 < e_1$, либо f_1 и e_1 – несравнимы. Обозначим $e_2 := e_1 f_1 < e_1$. Поскольку $e_2 \in H$ и $0 \notin H$, $e_0 > e_1 > e_2 \neq 0$. Повторяя процедуру бесконечное количество раз, можно построить бесконечную убывающую цепь идемпотентов в замкнутой инверсной подполугруппе H, а следовательно, и в самой полугруппе S.

С другой стороны, если инверсная полугруппа S содержит бесконечную убывающую цепочку идемпотентов $e_1 > e_2 > ... > e_k > ...$, то в ней содержится замкнутая инверсная подполугруппа $H := (\{e_1, e_2, ..., e_k, ...\})\omega$ без наименьшего идемпотента.

Лемма 3. Пусть инверсная полугруппа S точно действует на множестве N и $M = \bigcap_{e \in E(S)} dom e$. Тогда M – максимальное относительно включения подмножество N, для которого равенство $M^s = M$ выполняется для всех $s \in S$.

Доказательство. Из $M = \bigcap_{e \in E(S)} dom e$ следует $M \subseteq dom e$ для всех $e \in E(S)$. Поэтому для каждого $s \in S$ $dom s = dom(ss^{-1}) \supseteq M$.

Если $|E(S)| = 1$, то инверсная полугруппа S является группой, и утверждение леммы очевидно. Пусть теперь $|E(S)| \neq 1$ и существуют такие $s \in S$ и $i \in M$, что $s(i) = j \notin M$. Тогда для $j \notin M = \bigcap_{e \in E(S)} dom e$ найдется такой $f \in E(S)$, что $j \notin dom f$. Для элемента $sf \in S$ выполняется $i^{sf} = (i^s)^f = j^f = \varnothing$. Тогда $i \notin dom(sf)$, и M не содержится в $dom(sf)$, что противоречит доказанному выше. Поэтому $M^s \subseteq M$ для всех $s \in S$. Из того, что $M^{s^{-1}} \subseteq M$ и $M = M^{ss^{-1}} = (M^s)^{s^{-1}} \subseteq M^{s^{-1}} \subseteq M$, получаем $M^s = M$ для всех $s \in S$. Максимальность множества M вытекает из того, что для $j \notin M = \bigcap_{e \in E(S)} dom e$ существует такой $f \in E(S)$, что $j \notin dom f$.

Лемма 4. Пусть φ_H – точное представление инверсной полугруппы S с нулем 0 на множестве правых ω-классов по некоторой замкнутой инверсной подполугруппе H, а $D_H := \{ s \in S \mid ss^{-1} \in H \}$ – область определения главной частичной правой конгруэнции π_H на S, соответствующей подполугруппе H. Если $((Hs)\omega)^{\varphi_H(x)} = \varnothing$ для всех $s \in D_H$, то $x = 0$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный $t \in S$. Тогда для всех $s \in D_H$ $((Hs)\omega)^{\varphi_H(tx)} = ((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)\varphi_H(x)} = (((Hs)\omega)^{\varphi_H(t)})^{\varphi_H(x)} = \varnothing$. Из того, что $((Hs)\omega)^{\varphi_H(x)} = \varnothing$ для всех $s \in D_H$, и из точности представления φ_H следует равенство $tx = x$ для всех $t \in S$. Отсюда x является правым нулем в S. Поэтому $x = 0$.

Лемма 5. Пусть φ_H – представление инверсной полугруппы S на множестве правых ω-классов по некоторой замкнутой инверсной подполугруппе H и $e \in E(S)$. Тогда элемент $\varphi_H(e)$ действует на своей области определения тождественно.

Доказательство. Для произвольного правого ω-класса $(Hs)\omega$ по теореме 7.10 [5] элемент $s \in (Hs)\omega$ и $(Hs)\omega^{\varphi_H(e)} = \begin{cases} (Hse)\omega & , \text{ если } ses^{-1} \in H \\ \varnothing & , \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Поскольку, по лемме 7.11 [5], каждый правый ω-класс – замкнут, то из $se\omega s$ и $se \in (Hse)\omega$ следует $s \in (Hse)\omega$. Поэтому $(Hs)\omega = (Hse)\omega$.

Лемма 6. Если S – инверсная полугруппа с нулем и H – ее собственная замкнутая инверсная подполугруппа, то $\varphi_H(0)$ – пустая подстановка.

Доказательство. Если $0 \in H$, то из замкнутости H следует $H = S$, так как $0\omega\, s$, для всех $s \in S$. Поскольку H – собственная подполугруппа S, то $0 \notin H$. Для произвольного $s \in S$ $s0s^{-1} = 0 \notin H$. Следовательно, $(Hs)\omega^{\varphi_H(0)} = \varnothing$ для всех правых ω-классов.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть S – инверсная полугруппа, каждая убывающая цепочка идемпотентов которой обрывается, а φ_H – ее точное представление на множестве правых ω-классов по замкнутой инверсной подполугруппе H. Тогда наименьший идемпотент подполугруппы H является примитивным для полугруппы S.

Доказательство. По лемме 2, H содержит наименьший идемпотент e_H. Если $e_H = 0$, то из замкнутости H следует равенство $H = S$, а соответствующее представление φ_H – неточно. Поэтому $e_H \neq 0$. Обозначим $dom e_H = M$.

По лемме 1, для $e_H \neq 0$ найдется такой $e \in E_{\min}(S)$, что $e\omega e_H$. Очевидно, при этом $E_{\min}(S) \neq \varnothing$. Из точности представления φ_H и леммы 4 следует, что для $e \neq 0$ существует такой $s \in S$, что $ss^{-1} \in H$ и $\left((Hs)\omega\right)^{\varphi_H(e)} \neq \varnothing$. Тогда, по лемме 5, $\left((Hs)\omega\right)^{\varphi_H(e)} = (Hs)\omega$, откуда $ses^{-1} \in H$.

Поскольку e_H – наименьший идемпотент в H, $M = dom\, e_H = \bigcap\limits_{e \in E(H)} dom\, e$. По лемме 3, M – максимальное относительно включения множество, для которого $M^{\tau} = M$ для всех $\tau \in H$. Поэтому $M \subseteq dom ss^{-1} = dom s$ и $M \subseteq dom(ses^{-1}) = dom(se)$.

Рассмотрим $s^* = e_H s \in (Hs)\omega$. Для него $s^*(s^*)^{-1} = e_H(ss^{-1})e_H = e_H$ и $dom s^* = dom(s^*(s^*)^{-1}) = M$. По теореме 7.10 [5], $(Hs)\omega = (Hs^*)\omega$. Поэтому $\left((Hs^*)\omega\right)^{\varphi_H(e)} = \left((Hs)\omega\right)^{\varphi_H(e)} = (Hs)\omega = (Hs^*)\omega$. Следовательно, $s^*e(s^*)^{-1} \in H$. Поскольку $M \subseteq dom(s^*e(s^*)^{-1})$ и $dom(s^*(s^*)^{-1}) = dom s^* = M$, имеем $s^*(s^*)^{-1} \leq s^*e(s^*)^{-1}$. С другой стороны, $s^*e(s^*)^{-1} \leq s^*(s^*)^{-1}$. Поэтому $s^*e(s^*)^{-1} = s^*(s^*)^{-1}$ и $(s^*)^{-1}s^* = (s^*)^{-1}s^*(s^*)^{-1}s^* = (s^*)^{-1}(s^*e(s^*)^{-1})s^* = (s^*)^{-1}s^*e$. Отсюда вытекает $(s^*)^{-1}s^* \leq e$. Поскольку $e \in E_{\min}(S)$, имеем равенство $(s^*)^{-1}s^* = e$. Тогда из $e\omega e_H$ и $s^* = e_H s$ следует $(s^*)^{-1}s^* \leq s^*(s^*)^{-1} = e_H$ и выполняется $ran\, s^* \subseteq dom\, s^* = M$.

Для $\tau = (s^*)^{-1} \cdot (s^*)^{-1}$ тогда $dom\,\tau \subseteq dom(s^*)^{-1} = dom\, e$.

Из $ran\, s^* \cap dom\, s^* = ran\, s^* = dom\, e \neq \varnothing$ получаем $\tau \neq 0$. Поскольку $e \in E_{\min}(S)$, $e = \tau\tau^{-1}$. Предположим, что $M \setminus ran\, s^* \neq \varnothing$ и пусть $i \in M \setminus ran\, s^*$. Тогда, с одной стороны, $s^*(i) \in ran\, s^* = dom\, e = dom\, \tau$, а с другой – $\tau(s^*(i)) = (s^*)^{-1}\left((s^*)^{-1}(s^*(i))\right) = (s^*)^{-1}(i) = \varnothing$. Следовательно, предположение ложно и $dom\, s^* = ran\, s^*$, откуда $e_H = e \in E_{\min}$.

Теорема 2. Инверсная полугруппа S с конечным количеством идемпотентов и единственным примитивным идемпотентом имеет точное эффективное транзитивное представление, тогда и только тогда, когда S является группой или группой с нулем.

Доказательство. Точным эффективным транзитивным представлением группы или группы с нулем будет представление Кэли, эквивалентное представлению на множестве правых смежных классов по единичной подгруппе.

Пусть теперь S не является ни группой, ни группой с нулем. Предположим, что точное эффективное транзитивное представление этой полугруппы существует. Тогда оно эквивалентно представлению φ_H полугруппы на множестве правых ω-классов по некоторой замкнутой инверсной подполугруппе H, которое, очевидно, также точно. Тогда H – собственная подполугруппа, откуда получаем, что $0 \notin H$, иначе выполнялось бы равенство $H = S$. Из конечности $E(S)$ следует, что $e_H = \prod_{e \in E(H)} e \in H$ – наименьший идемпотент подполугруппы H. По теореме 1, $e_H \in E_{\min}(S)$.

Рассмотрим произвольный правый ω-класс $(Hs)\omega$ по замкнутой инверсной подполугруппе H и произвольный ненулевой идемпотент f полугруппы S. Так как при этом $ss^{-1} \in H$ и $0 \notin H$, то $s \neq 0$. Поскольку $|E_{\min}(S)| = 1$, то $E_{\min}(S) = \{e_H\}$ и, по лемме 1, $e_H \omega f$. Рассмотрим идемпотент sfs^{-1} и предположим, что $sfs^{-1} = 0$. Тогда $se_H s^{-1} \leq sfs^{-1} = 0$. Поэтому $se_H s^{-1} = 0$. Отсюда в свою очередь вытекает, что $(s^{-1}s)e_H = s^{-1}(se_H s^{-1})s = 0$. Поскольку $s \neq 0$, идемпотент $s^{-1}s$ также ненулевой. Из $E_{\min}(S) = \{e_H\}$, по лемме 1, $s^{-1}s \geq e_H$. Тогда $e_H = (s^{-1}s)e_H = 0$, что противоречит примитивности e_H. Следовательно, $sfs^{-1} \neq 0$, и, по лемме 1, из равенства $E_{\min}(S) = \{e_H\}$ получаем $sfs^{-1} \geq e_H$. Из замкнутости H следует $sfs^{-1} \in H$. Поэтому $(Hs)\omega^{\varphi_H(f)} \neq \varnothing$ и, по лемме 5, $(Hs)\omega^{\varphi_H(f)} = (Hs)\omega$. Следовательно, все ненулевые идемпотенты полугруппы S действуют на множестве правых ω-классов по H тождественно. Поскольку S не является группой либо группой с нулем, то в ней найдется по крайней мере два разных ненулевых идемпотента e_1 и e_2, для которых $\varphi_H(e_1) = \varphi_H(e_2)$, что противоречит предположению о точности представления φ_H.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вагнер, В.В. Обобщенные группы / В.В. Вагнер // Доклады АН СССР. – 1952. – № 84. – С.1119–1122.

2. Preston, G.B. Representations of inverse semigroups / G.B. Preston // J. London Math. Soc. – 1954. – № 29. – P.411–419.

3. Понизовский, И.С. О представлениях инверсных полугрупп частичными взаимно однозначными преобразованиями / И.С. Понизовский // Известия АН СССР. Сер. Математика. – 1964. – Т. 28. – С. 989–1002.

4. Шайн, Б.М. Представление обобщенных групп / Б.М. Шайн // Известия вузов. «Математика». – 1962. – Т. 28, № 3. – С. 164–176.

5. Клиффорд, А. Алгебраическая теория полугрупп : в 2 т. / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Мир, 1972.

T.V.Voloshyna. **On Exact Representations of Inverse Semigroups**

In paper inverse semigroups, in which every decreasing idempotent chain is ending, are considered. For these semigroups is proved, that the representation on a set of the right ω-classes on the closed inverse subsemigroup H is exact only in case, when the least idempotent of H is a primitive for semigroup S. Are proved also, that inverse semigroups with a finite number of idempotents and with a single primitive idempotent have exact representation only in case, when they are group or group with zero.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 20.04.2012