МАТЭМАТЫКА

УДК 517.98

Н.П. Андросенко, А.И. Кашпировский

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВСЕЙ ОСИ

Для ограниченных на действительной оси решений линейного дифференциального уравнения с неограниченным операторным коэффициентом доказана возможность приближения кубическим сплайном на основе метода сплайн-коллокации. Проведено исследование свойств решений разностной системы уравнений, определяющих параметры коллокационного сплайна. Показано, что порядок приближения ограниченного решения дифференциального уравнения в изучаемом случае совпадает с порядком приближения интерполяционным сплайном.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается операторно-дифференциальное уравнение

$$\Lambda y = y' - Ay = f(t), \qquad (1)$$

где $y = y(t)$ – неизвестная вектор-функция, принимающая значения в H, $t \in R^1 = (-\infty, +\infty)$, $f(t)$ – заданная $H-$значная вектор-функция, A-нормальный ($A^*A = AA^*$) не обязательно ограниченный оператор в H с разложением единицы $E(\lambda)$ с областью определения $D(A)$.

Для $m \in N$ на $D(A^m)$ области определения оператора A^m определим скалярное произведение

$$(g,h)_{H^m} = \left(A^m g, (A^*)^m h\right)_H + (g,h)_H = \int\limits_{\sigma(A)} \left(|\lambda|^{2m} + 1\right) d\left(E_\lambda g, h\right)_H,$$

где $\sigma(A)$ – спектр оператора A. Относительно этого скалярного произведения множество $D(A^m)$ образует позитивное гильбертово пространство H_m ($H_m \subset H$).

Обозначим через $C(R^1, H)$ пространство всех ограниченных непрерывных по t $H-$значных функций $f(t)$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in R^1} \|f\|_H$ и через $C^m(R^1, H_m, H)$ – пространство всех ограниченных и непрерывных по t H_m-значных вектор-функций $f(t)$, имеющих ограниченную и непрерывную в H производную порядка m с нормой

$$\|f\|_{C^m(R^1, H_m, H)} = \sup_{t \in R^1} \left(\|f(t)\|_{H_m} + \left\|f^{(m)}(t)\right\|_H \right).$$

Предполагая, что в уравнении (1) вектор-функция $f(t)$ принадлежит $C(R^1, H)$, назовем вектор-функцию $y(t)$ из $C^1(R^1, H_1, H)$ ограниченным решением уравнения (1), если для всех $t \in R^1$ вектор-функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1).

Обобщая известную теорему М.Г. Крейна [1, с.119] на случай неограниченного нормального оператора A, получаем, что необходимым и достаточным условием существования единственного ограниченного решения уравнения (1) является отделимость в $\overline{C^1}$ спектра $\sigma(A)$ оператора A от мнимой оси $iR^1 = (-i\infty, +i\infty)$, т.е.

$$d = \inf_{\substack{\lambda\in\sigma(A),\\ t\in R^1}} |\lambda - it| > 0. \tag{2}$$

Для неограниченного секториального оператора в банаховом пространстве такое обобщение получено М.Ф. Городним [2].

Из условия (2) следует, что спектр $\sigma(A)$ оператора A распадается на два спектральных множества $\sigma_+(A)$ и $\sigma_-(A)$, лежащих в правой и левой полуплоскостях.

Обозначим через V_+ и V_- – инвариантные подпространства оператора A, а через P_+ и P_- – соответствующие ортопроекторы. Ограниченное решение уравнения (1) допускает интегральное представление [1, с.120].

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s) f(s)\, ds, \tag{3}$$

где $G(t) = \begin{cases} -e^{At}P_-, & \text{åñëè } t \ge 0, \\ e^{At}P_+, & \text{åñëè } t < 0 \end{cases}$ – главная функция Грина уравнения (1).

Представление (3) запишем в виде суммы двух несобственных интегралов [1]:

$$y(t) = y_-(t) + y_+(t), \tag{4}$$

где $y_+(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)} P_+ f(s)\, ds$, $y_-(t) = \int_{t}^{+\infty} e^{-A(t-s)} P_- f(s)\, ds$.

Из условия (2) следует, что полугруппы операторов $e^{-At}P_+$ и $e^{At}P_-$ ($t \ge 0$) являются сжимающимися с показателем d. Поэтому несобственные интегралы в (4) абсолютно сходятся. Непосредственной проверкой можно показать, что при $f \in C^m\left(R^1, H_m, H\right)$ решение $y(t) = \left(\Lambda^{-1} f\right)(t)$ принадлежит пространству $C^{m+1}\left(R^1, H_{m+1}, H\right)$

Если снять условие ограниченности решений уравнения (1), то теряется единственность решения. При этом методами, используемыми В.И. Горбачук и М.Л. Горбачуком [3], можно показать, что произвольное решение уравнения (1) допускает представление $y(t) = y_+(t) + y_-(t) + e^{-At}h$, где $h \in H_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ – целый вектор оператора A, т.е. $\sum_{n=1}^{\infty} s^n \frac{\left\|A^n h\right\|}{n!} < \infty$ для произвольного $s > 0$.

Целью данной работы является исследование возможности приближения ограниченных решений уравнения (1) с помощью кубических сплайнов минимального дефекта [4]. Для построения таких приближений используется метод сплайн-коллокации. Ранее этот метод применялся в [4] для аппроксимации решений краевых задач на конечном интервале для уравнений 2-го порядка.

В рассматриваемом случае задача определения параметров сплайна сводится к решению бесконечной трёхдиагональной системы разностных уравнений, являющейся дискретным аналогом уравнения (1). Для ограниченных решений этой системы уравнений получено явное представление, являющееся дискретным аналогом (3). Получены оценки приближения ограниченных решений уравнения (1) кубическими сплайнами и дано сравнение с оценками приближений этих решений, полученных в [2; 5; 6], где задача приближения ограниченных решений уравнения (1) также сведена к поиску ограниченных решений трёхдиагональной системы разностных уравнений.

Основные результаты

На прямой R^1 зададим равномерную сетку узлов $\Delta(h)=\{t_n : t_n = nh, n\in Z\}$, $h>0$. Ищем сплайн-приближение ограниченного решения $y(t)$ уравнения (1) в виде разложения

$$S(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n B_n(t) \tag{5}$$

по базисным $B-$сплайнам $B_n(t)$, которые с помощью операций сжатия и сдвига выражаются через стандартный $B-$сплайн $B_n(t)=B\left((t-t_n)h^{-1}\right)$, где

$$B(x)=\frac{1}{6}\left(2-|x|\right)_+^3-\frac{2}{3}\left(1-|x|\right)_+^3,\ \left(\alpha-|x|\right)_+^3=\begin{cases}\left(\alpha-|x|\right)^3, & при\ \ |x|<\alpha,\\ 0, & при\ \ |x|\ge\alpha\end{cases}.$$

Учитывая финитность сплайна $B_n(t)$ ($\operatorname{supp} B_n(t)=\left[t_{n-2,}t_{n+2}\right]$), при каждом $t\in R^1$ ряд (7) содержит не более четырех слагаемых отличных от нуля, а в узлах t_n ненулевых слагаемых – три. Неизвестные коэффициенты a_k в разложении (5) являются векторами из H_1. В соответствии с методом сплайн-коллокации [4] в узлах сетки $\Delta(h)$ сплайн должен удовлетворять уравнению (1):

$$\Lambda\left(S(t_n)\right)=S'(t_n)-AS(t_n)=f(t_n),\quad n\in Z. \tag{6}$$

Подставляя в (6) разложение (5), с учетом свойств $B-$сплайнов получим систему разностных уравнений относительно a_n:

$$\frac{a_{n+1}-a_{n-1}}{2h}=A\left(\frac{1}{6}a_{n+1}+\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}a_{n-1}\right)+f(t_n),\quad n\in Z. \tag{7}$$

Умножая каждое уравнение системы (7) на $-6h$, получим эквивалентную систему разностных уравнений

$$(Ah-3I)a_{n+1}+4Aha_n+(Ah+3I)a_{n-1}=-6hf(t_n),\quad n\in Z, \tag{8}$$

где I – единичный оператор в H. Системы (7) и (8) являются дискретными аналогами (1). При этом ограниченному решению $y(t)$ уравнения (1) отвечает ограниченное решение $\overline{a}=\{a_n : n\in Z, a_n\in H_1\}$ систем (7) и (8), определение которого дано в [2].

Пространство всех последовательностей $\overline{a}=\{a_n : n\in Z, a_n\in H_m\}$ обозначим через $s(Z,H_m)$, $m\in Z_+=N\cup\{0\}$. Пространство всех ограниченных последовательностей $\overline{a}=\{a_n : n\in Z, a_n\in H_m\}$ обозначим через $l_\infty(Z,H_m)$ и введем в нем норму

$$\|\overline{a}\|_{l_\infty(Z,H_m)}=\sup_{n\in Z}\|a_n\|_{H_m},\ m\in Z_+.$$

Для последовательностей $\overline{a}$ из $s(Z,H_m)$, $m\in Z_+=N\cup\{0\}$ и $l_\infty(Z,H_m)$ определим представление в виде формального ряда Лорана [2]

$$\overline{a}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n\omega^n, \tag{9}$$

где ω – комплексная переменная. Представление (9) будем называть $\omega-$представлением последовательности $\overline{a}$. Учитывая, что умножение ряда на ω означает сдвиг нумерации координат вектора $\overline{a}$ на одну позицию вправо, будем обозначать соответствующий оператор сдвига буквой Ω. Тогда для $j \in Z$ оператор Ω^j будет означать сдвиг нумерации координат на j позиций вправо при $j > 0$ и на $-j$ позиций влево при $j < 0$. Тождественный оператор в $s(Z, H_m)$ и $l_\infty(Z, H_m)$ обозначим буквой Е ($\mathrm{E}\overline{a} = \overline{a}$). Пользуясь $\omega-$представлением (9), запишем систему (8) в виде операторно-разностного уравнения:

$$L\overline{a} = -6h\overline{f}, \tag{10}$$

где $\overline{f} = \{f(t_n) : n \in Z\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n)\omega^n$, $L = L(A, \Omega, h) = (Ah - 3I)\Omega + 4Ah\mathrm{E} + (Ah + 3I)\Omega^{-1}$.

Последовательность $\overline{a}$ из $l_\infty(Z, H_1)$, удовлетворяющую уравнению (10) при $\overline{f} \in l_\infty(Z, H)$, назовем ограниченным решением уравнения (10) и соответственно систем (7) и (8). Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченного решения уравнения (10), т.е. условия существования ограниченного обратного оператора L^{-1}.

Теорема 1. *Для того, чтобы существовал ограниченный в* $l_\infty(Z, H)$ *оператор* $L^{-1} = L^{-1}(A, \Omega, h)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\sigma(A)$ *– спектр оператора* A *не пересекался с интервалом* $J = \left[-i\sqrt{3}h^{-1}, +i\sqrt{3}h^{-1}\right]$, *лежащим на мнимой оси.*

Доказательство

Теорема 1 является следствием [2]. Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что множество точек $\lambda \in C^1$, для которых характеристическое уравнение

$$L(\lambda, z, h) = (\lambda h - 3)z + 4\lambda h + (\lambda h + 3)z^{-1} = 0 \tag{11}$$

имеет относительно z корни с равным единице модулем, совпадает с интервалом J.

Для этого найдем выражение для λ из (11) $\lambda = \dfrac{3(z - z^{-1})}{h(4 + z + z^{-1})}$ и подставим вместо z равную по модулю единице величину $e^{i\varphi}, 0 \le \varphi < 2\pi$:

$$\lambda = \frac{3(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})}{h(4 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})} = \frac{3i\sin\varphi}{h(2 + \cos\varphi)}. \tag{12}$$

Учитывая, что при $\varphi \in [0, 2\pi]$ выражение $\sin\varphi(2 + \cos\varphi)^{-1}$ изменяется в промежутке $\left[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}\right]$, приходим к выводу, что принадлежащим единичной окружности $S = \{z \in C^1 : |z| = 1\}$ корням характеристического уравнения (11) отвечают значения $\lambda \in J$. При этом, если рассматривать J как объединение левого берега J_- и правого берега J_+, то соотношение (12) устанавливает между J и S взаимно-однозначное соответствие. Теорема 1 доказана.

Умножением уравнения (11) на z, преобразуем это уравнение в квадратное

$$(\lambda h - 3)z^2 + 4\lambda hz + (\lambda h + 3) = 0. \tag{13}$$

Фиксируя значение параметра $h > 0$, определим функцию $w = w(\lambda h) = \sqrt{3\lambda^2 h^2 + 9}$ комплексного аргумента $\lambda \in C^1 \setminus J$ так, чтобы $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \dfrac{w(\lambda h)}{\lambda} = \sqrt{3}h$. Пользуясь этой функцией, запишем выражение для корней уравнения (13):

$$z_1 = z_1(\lambda h) = -\frac{\lambda h + 3}{2\lambda h + w(\lambda h)}, \quad z_2 = z_2(\lambda h) = \left(z_1(-\lambda h)\right)^{-1}.$$

Из доказательства теоремы 1 следует, что функции $z_1(\lambda h)$ и $z_2(\lambda h)$ осуществляют взаимно-однозначное отображение J на S. Тогда, вследствие принципа соответствия границ [7, с. 208], получим:

Теорема 2. *Функция* $z_1 = z_1(\lambda h)$ *осуществляет конформное отображение* $C^1 \setminus J$ *во внутренность единичного круга* $\{z : |z| < 1\}$ *(*$z_1(-3) = 0$, $z_1(\infty) = \sqrt{3} - 2$, $z_1(3) = 0{,}5$*). Функция* $z_2 = z_2(\lambda h)$ *осуществляет конформное отображение* $C^1 \setminus J$ *во внешность единичного круга* $\{z : |z| > 1\}$ *(*$z_2(-3) = 2$, $z_2(\infty) = -\sqrt{3} - 2$, $z_2(3) = \infty$ *).*

Для того, чтобы получить явное представление ограниченного решения уравнения (10), найдем сперва ограниченное решение $\overline{G} = \sum\limits_{n\in Z} G_n \omega^n$ системы типа (8) при $H = C^1$, $A = \lambda \in C^1 \setminus J$ и дельта-подобной правой частью

$$(\lambda h - 3)G_{n+1} + 4\lambda h G_n + (\lambda h + 3)G_{n-1} = \delta_{n0}, \; n \in Z. \tag{14}$$

Решение $\overline{G}$ «сконструируем» из прогрессий z_1^n и z_2^n, $n \in Z$ по формуле:

$$G_n = \begin{cases} c z_1^n, & \text{åñëè} \quad n \geq 0, \\ c z_2^n, & \text{åñëè} \quad n < 0. \end{cases}$$

В силу теоремы 2 $\overline{G} = \{G_n, n \in Z\}$ – ограниченная последовательность. Поскольку z_1 и z_2 корни характеристического уравнения (11), то члены последовательности $\overline{G}$ будут удовлетворять всем уравнениям системы (14), кроме уравнения с номером $n = 0$. Константу c определим так, чтобы удовлетворялось уравнение с номером $n = 0$, т.е.

$$c\left[(\lambda h - 3)z_1 + 4\lambda h + (\lambda h + 3)z_2^{-1}\right] = 1, \; c = 0.5 w(\lambda h)^{-1}.$$

Таким образом, для $\lambda \in C^1 \setminus J$ получим

$$G_n = 0{,}5 w(\lambda h)^{-1} \begin{cases} \left(-\dfrac{\lambda h + 3}{2\lambda h + w(\lambda h)}\right)^n, & \textit{если} \quad n \geq 0, \\ \left(-\dfrac{\lambda h - 3}{2\lambda h + w(\lambda h)}\right)^{-n}, & \textit{если} \quad n < 0. \end{cases} \tag{15}$$

Для операторно-разностного уравнения (10) функция $G_n = G(n, \lambda h)$ играет такую же самую роль, как и функция Грина $G(t)$ для уравнения (1).

Следующая теорема дает представление оператора $L^{-1}(A, \Omega, h)$, аналогичное (3).

Теорема 3. *Если нормальный в H оператор A удовлетворяет условию (2), то оператор $L^{-1}=L^{-1}(A,\Omega,h)$ осуществляет непрерывное отображение $l_\infty(Z,H)$ в себя. Его действие на $\overline{b}=\sum\limits_{n\in Z}b_n\omega^n$ задается выражением*

$$\overline{a}=\sum_{n\in Z}\left(\sum_{k\in Z}G_{n-k}b_k\right)\omega^n,$$

а его норма допускает оценку

$$\left\|L^{-1}\right\|\le Ch^{-1}. \tag{16}$$

Доказательство

Существование оператора L^{-1} следует из теоремы 1. Представление (15) является следствием представления (14) ограниченного решения уравнения (13). Оценим норму оператора L^{-1}:

$$\left\|L^{-1}\right\|=\sup_{\substack{\overline{b}\in l_\infty(Z,H),\\ \|\overline{b}\|_{l_\infty(Z,H)}=1}}\left\|L^{-1}(A,\Omega,h)\overline{b}\right\|_{l_\infty(Z,H)}=\sum_{n\in Z}\sup_{\substack{b_n\in H,\\ \|b_n\|_H=1}}\left\|G(n,Ah)b_n\right\|_H=\sum_{n\in Z}\left\|G(n,Ah)\right\|_{L(H)}.$$

Отсюда, учитывая, что A – нормальный оператор, получим

$$\left\|L^{-1}\right\|\le\frac{1}{2}\sup_{|\mathrm{Re}\,\lambda|\ge d}\left|w(\lambda h)\right|^{-1}\sum_{n\in Z}q^{|n|}\le\frac{1+q}{6(1-q)},$$

где $q=\sup\limits_{|\mathrm{Re}\,\lambda|\ge d}\left(\left|z_1(\lambda h)\right|,\left|z_2^{-1}(\lambda h)\right|\right)=\sup\limits_{\mathrm{Re}\,\lambda=d}\left|z_1(\lambda h)\right|=\left|z_1(dh)\right|$.

Отсюда для малых значений h следует

$$\left\|L^{-1}\right\|\le\frac{3dh+3\sqrt{3(dh)^2+9}}{6\left(dh-3+\sqrt{3(dh)^2+9}\right)}\le(dh)^{-1}\left(1+\frac{dh}{2}+\frac{d^2h^2}{4}\right).$$

Теорема 3 доказана.

Следующая теорема дает оценку приближения ограниченного решения уравнения (1) методом сплайн-коллокации.

Теорема 4. *Если нормальный в H оператор A удовлетворяет условию (2) и вектор-функция $f(t)$ принадлежит $C^4(R^1,H_4,H)$, то ограниченное решение $\overline{a}=-6h\,L^{-1}\overline{f}$ определяет кубический сплайн $S(t)$, приближающий ограниченное решение $y(t)=(\Lambda^{-1}f)(t)$ с точностью $O(h^4)$.*

Доказательство

Поскольку $f(t),y(t)$ принадлежат $C^4(R^1,H_4,H)\subset C^4(R^1,H,H)$, то сплайн $S(y,t)$, интерполирующий решение $y(t)$ в узлах сетки $\Delta(h)$, приближает $y(t)$ с точностью $O(h^4)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что $S_\delta(t)=S(y,t)-S(t)=O(h^4)$.

Согласно [4, с. 232] разность $\delta_n=y'(t_n)-S'(t_n)$ равномерно по $n\in Z$ оценивается величиной $O(h^4)$ и сплайн $S_\delta(t)$ с учетом (6)–(8) соответствует решению уравнения (10) с правой частью $-6h\overline{\delta}$. Тогда в соответствии с (16) норма $\overline{a}_\delta=-6hL^{-1}\overline{\delta}$ в $l_\infty(Z,H)$ оценивается величиной $O(h^4)$. Отсюда следует, что $\left\|S_\delta\right\|_{C(R^1,H)}=O(h^4)$. Теорема 4 доказана.

Выводы

Предлагаемая модификация метода сплайн-коллокации адаптирована на случай приближения кубическими сплайнами ограниченных решений уравнения (1). При этом задача поиска ограниченных решений уравнения сводится к задаче поиска ограниченных решений бесконечной системы разностных уравнений (10) с трехдиагональной матрицей. Учитывая, что эта матрица вообще говоря не имеет диагонального преобладания, для изучения разрешимости этой системы получено явное представление (16). При достаточной гладкости вектор-функции $f(t)$ относительно дифференцируемости по t и относительно оператора A ($f \in C^4(R^1, H_4, H)$) предлагаемый метод обеспечивает максимально возможную по порядку точность $O(h^4)$ приближения кубическими сплайнами. Для достижения такой точности приближения решений краевых задач для уравнений второго порядка в [4] построены пятидиагональные системы разностных уравнений.

Аппроксимация ограниченных решений уравнения (1), рассмотренная в [2; 5; 6], сведена к поиску ограниченных решений трехдиагональной системы разностных уравнений типа (10). При достаточной гладкости $f(t)$ получаемая точность приближения $O(h^2)$ отвечает точности приближения производной центральной разделенной разностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Далецкий, Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.

2. Городний, М.Ф. Свойства решений разностных и дифференциальных уравнений и их стохастических аналогов в банаховом пространстве : автореф. дис. … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / М.Ф. Городний. – Киев, 2004. – 32 с.

3. Gorbachuk, M.L. Boundary-value problems for operator-differential equations / M.L. Gorbachuk, V.I. Gorbachuk. – Dordrecht : Kluwer, 1991. – 364 p.

4. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. − М. : Наука, 1980. − 352 с.

5. Чайковский, А.В. Функции от оператора сдвига и их применение к разностным уравнениям // Украинский математический журнал. – 2010. – № 10. – С. 1408–1419.

6. Романенко, В.Н. Приближение ограниченных решений разностных и дифференциальных уравнений в абстрактных пространствах решениями соответствующих задач Коши : автореф. дисс. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / В.Н. Романенко. – Киев, 2011. – 20 с.

7. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1969. – 576 с.

M.P. Androsenko, O.I. Kashpirovskyi. **On Application of Spline Collocation Method for Approximation of Bounded Solutions for Differential Equations**

The possibility of approximation by cubic splines on base of spline collocation method for bounded on real axes solutions of linear differential equations with unbounded operator coefficients is proved. Properties of solutions of difference equation systems defining parameters of collocational spline are studied. It is shown that approximation order of bounded solution to differential equation coincides with the approximation order with interpolation splines.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 30.04.2012