УДК 517.9

Е.М. Радыно, А.Г. Сидорик

ХАРАКТЕРИСТИКА ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

Мы рассматриваем преобразование Фурье векторнозначных функций на локально компактной абелевой группе G, принимающих значения в банаховом пространстве X, квадратично интегрируемых по Бохнеру. Если G конечная группа, то преобразование Фурье является ограниченным оператором. Если G бесконечна, то преобразование Фурье $F: L_2(G,X) \to L_2(\hat{G},X)$ является ограниченным оператором тогда и только тогда, когда банахово пространство X изоморфно гильбертову пространству.

В работе Ж. Петре [1] исследовалось обобщение теоремы Хаусдорфа-Юнга об образе пространства X под действием преобразования Фурье. Автор рассматривал векторнозначные функции $x \in L_p(R,X)$ $x \in L_p(R,X)$, $1 \le p \le 2$, на действительной оси, принимающие значения в банаховом пространстве X и интегрируемые в смысле Бохнера [2], т.е. слабо измеримые с конечной нормой

$$\|x\|_{L_p(R,X)} = (\int_R \|x(t)\|_X^p dt)^{1/p}.$$

Ж. Петре было отмечено, что при $p=2$ во всех известных ему случаях преобразование Фурье

$$F: L_2(R,X) \to L_2(R,X), \qquad F(x)(s) = \int_R x(t) e^{-2\pi i s t} dt$$

оказывалось ограниченным, только если X изоморфно гильбертовому пространству. В работе [3] польский математик С. Квапень подтвердил наблюдение Ж. Петре. Фактически, он доказал следующую теорему.

<u>Теорема 1.</u> Следующие утверждения эквивалентны:

1) Банахово пространство X изоморфно гильбертову.
2) Существует $C>0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n} \in X$
$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i s t} \cdot x_k \right\|^2 dt \le C \sum_{k=-n}^{n} \|x_k\|^2 .$$
3) Существует $C>0$ такое, что для любого натурального n и $x_0, x_1, x_{-1}, \ldots, x_n, x_{-n} \in X$
$$C^{-1} \sum_{k=-n}^{n} \|x_k\|^2 \le \int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi i s t} \cdot x_k \right\|^2 dt .$$
4) Преобразование Фурье F, заданное на плотном в $L_2(R,X)$ подпространстве
$$D_F = \{x(t) = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}(t) \cdot x_k\},$$

где A_k – измеримые непересекающиеся подмножества конечной меры в R, I_{A_k} – функции-индикаторы (равны 1 на A_k и 0 в остальных точках), $x_k \in X$, является ограниченным оператором со значениями в $L_2(R,X)$.

Определим оператор Фурье на векторных функциях целочисленного аргумента формулой

$$F_Z : L_2(Z,X) \to L_2(T,X) : \ (x_k) \mapsto \sum_{k \in Z} e^{-2\pi i k t} \cdot x_k .$$

Здесь T означает одномерный тор $T = R/Z$, который как пространство с мерой изоморфен единичному отрезку прямой.

Неравенство в пункте 2 теоремы 1 превращается в утверждении об ограниченности композиции $F_Z I_Z$ (здесь I_Z – изометрический оператор замены переменной $I_Z : (x_k) \mapsto (x_{-k})$). Отсюда следует ограниченность самого оператора F_Z на плотном в $L_2(Z, X)$ подпространстве функций с конечным носителем. Последнее означает, что F_Z непрерывно продолжается на все $L_2(Z, X)$.

Аналогично, пункт 3 в теореме 1 эквивалентен ограниченности обратного преобразования Фурье

$$F_Z^{-1} : L_2(T, X) \to L_2(Z, X).$$

Естественной проблемой в данном направлении является исследование преобразования Фурье в пространстве квадратично интегрируемых по Бохнеру векторнозначных функций на локально компактной абелевой группе G:

$$F : L_2(G, X) \to L_2(\hat{G}, X), \qquad F(x)(\xi) = \int_G \langle \xi, t \rangle_G \, x(t) d\mu_G(t),$$

где X – банахово пространство, $\hat{G}$ – группа двойственная к G по Понтрягину (группа характеров), $\langle \xi, t \rangle_G$ - каноническое спаривание $\hat{G}$ и G, μ_G – мера Хаара.

Прежде чем приступать к разбору общей задачи приведем необходимые сведения. За доказательствами результатов из области гармонического анализа мы отсылаем к [5], из области структурной теории локально компактных групп – к [6], теория пространств Брюа-Шварца изложена в [7].

Будем считать далее, что на $\hat{G}$ задана двойственная мера Хаара $\mu_{\hat{G}}$ такая, что выполняется скалярное равенство Стеклова-Парсеваля

$$\|\varphi\|^2_{L_2(G)} = \int_G |\varphi|^2 d\mu_G = \int_{\hat{G}} |F\varphi|^2 d\mu_{\hat{G}} = \|F\varphi\|^2_{L_2(\hat{G})}.$$

В качестве начальной области задания для преобразования Фурье удобно рассматривать всюду плотное подпространство $D_F = L_2(G) \otimes X \subset L_2(G, X)$, где преобразование Фурье действует по формуле

$$F\Big(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \cdot x_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} ((F\varphi_k)(\xi) \cdot x_k).$$

Плотность D_F вытекает из того, что в пространстве $L_2(G, X)$ плотны конечные линейные комбинации вида

$$\sum_{k=1}^{n} I_{A_k}(t) \cdot x_k \in L_2(G) \otimes X = D_F,$$

где A_k – измеримые непересекающиеся подмножества конечной меры в G, I_{A_k} – функции-индикаторы (равны 1 на A_k и 0 в остальных точках), $x_k \in X$.

Другим полезным подпространством в $L_2(G, X)$ является $S(G) \otimes X$, где $S(G)$ пространство Брюа–Шварца «гладких, быстро убывающих» функций на группе G. Оно также плотно в $L_2(G, X)$, поскольку $S(G) \subset L_2(G)$ и плотно в нем.

В силу того, что скалярное преобразование Фурье является биекцией $L_2(G)$ в $L_2(\hat{G})$ и с $S(G)$ в $S(\hat{G})$ сужение векторнозначного преобразования на $L_2(\hat{G}) \otimes X$ является биекцией в $L_2(\hat{G}) \otimes X$, а сужение на $S(G) \otimes X$ – в $S(\hat{G}) \otimes X$.

Для того, чтобы рассмотреть случай бесконечной группы нам понадобится теорема о строении локально компактных групп [6].

<u>Теорема 2</u>. Пусть G – локально компактная абелева группа. Тогда G представима в виде объединения открытых компактно-порожденных подгрупп H с топологией

индуктивного предела. В свою очередь каждая компактно-порожденная группа H представима в виде проективного предела факторгрупп H/K, где $K \subset H$ – компактная подгруппа, а фактор-группа H/K элементарна, т.е. изоморфна произведению

$$H/K \cong R^{a_{H,K}} \times T^{b_{H,K}} \times Z^{c_{H,K}} \times F_{H,K},$$

где $F_{H,K}$ – конечная группа.

Определение 1. Будем говорить, что группа G содержит R-составляющую, если при некоторых H, K из теоремы 2 в элементарной фактор-группе $R^{a_{H,K}} \times T^{b_{H,K}} \times Z^{c_{H,K}} \times F_{H,K}$ показатель $a_{H,K} > 0$.

Аналогичным образом определяется смысл выражений «группа G содержит Z-составляющую», «G содержит T-составляющую».

Перед формулировкой общей теоремы докажем ряд необходимых лемм.

Лемма 1. Допустим банахово пространство X изоморфно гильбертовому, т.е. существует скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ на X такое, что для некоторого $C > 0$ выполняется неравенство

$$C^{-1}(x,x)_X^{1/2} \le \|x\|_X \le C(x,x)_X^{1/2}.$$

Тогда преобразование Фурье $F : L_2(G,X) \to L_2(\hat{G},X)$ ограниченно.

Доказательство. Рассмотрим векторнозначное равенство Стеклова–Парсеваля

$$(F\varphi, F\varphi)_{L_2(\hat{G},X)} = \int_{\hat{G}} (F\varphi(\xi), F\varphi(\xi)) d\mu_{\hat{G}}(\xi) = \int_G (\varphi(t), \varphi(t)) d\mu_G(t) = (\varphi,\varphi)_{L_2(G,X)},$$

которое легко проверяется для функций $\varphi \in L_2(G) \otimes X$ с помощью аксиом скалярного произведения, скалярного равенства Стеклова–Парсеваля и равенства кросс-нормы

$$(\varphi_1 \otimes x_1, \varphi_2 \otimes x_2)_{L_2(G,X)} = (\varphi_1,\varphi_2)_{L_2(G)} \otimes (x_1,x_2)_X.$$

Тогда на плотном подпространстве верно неравенство

$$\|F\varphi\|_{L_2(\hat{G},X)} = C(F\varphi,F\varphi)_{L_2(\hat{G},X)} = C(\varphi,\varphi)_{L_2(G,X)} \le C^2 \|\varphi\|_{L_2(G,X)},$$

что позволяет распространить F по непрерывности на все $L_2(G,X)$. Лемма доказана.

В случае конечной группы G пространство $L_2(G,X)$ изоморфно конечному декартовому произведению X^G. Группа $\hat{G}$, двойственная по Понтрягину к G, изоморфна самой G. Самодвойственная мера Хаара обладает свойством $\mu_G(G) = \sqrt{|G|}$. Преобразование Фурье, известное также как дискретное преобразование Фурье, принимает вид

$$(F\varphi)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{t \in G} \langle \xi, t \rangle \varphi(t)$$

Теорема 3. Если G – конечная группа, то преобразование Фурье $F : L_2(G,X) \to L_2(\hat{G},X)$ ограничено для любого банахова пространства X.

Доказательство. Следует из неравенства

$$\|F\varphi\|_{L_2(\hat{G},X)} = \sum_{\xi \in \hat{G}} \left\| \frac{1}{\sqrt{|G|}} \sum_{t \in G} \langle \xi, t \rangle \varphi(t) \right\|_X^2 \le \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \hat{G}} \Big(\sum_{t \in G} |\langle \xi, t \rangle| \|\varphi(t)\|_X\Big)^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{\xi \in \hat{G}} \Big(\sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X\Big)^2 =$$

$$= \Big(\sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X\Big)^2 \le |G| \sum_{t \in G} \|\varphi(t)\|_X^2 = |G| \|\varphi\|_{L_2(G,X)}^2.$$ Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению бесконечных групп.

Лемма 2. Допустим группа G содержит R-составляющую, T-составляющую или Z-составляющую. Тогда ограниченность преобразования Фурье

$$F : L_2(G,X) \to L_2(\hat{G},X)$$

влечет изоморфность банахова пространства X гильбертову.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда группа G содержит R-составляющую. Тогда в G имеются открытая компактно-порожденная подгруппа H и компактная подгруппа $K \subset H$ такие, что $H/K \cong R^a \times T^b \times Z^c \times F$, где $a \geq 1$.

Пусть $\tau_1 : H \to H/K$ – каноническая проекция, $\tau_2 : H/K \to R$ проекция на первую координату R^a, $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$.

Рассмотрим вспомогательные функции $\psi_{R,i} \in L_2(R)$, $2 \leq i \leq a$, $\psi_{T,j} \in L_2(T)$, $1 \leq j \leq b$, $\psi_{Z,k} \in L_2(Z)$, $1 \leq k \leq c$, $\psi_F \in L_2(F)$, каждая из которых имеет в соответствующем пространстве норму равную 1. Рассмотрим вложение

$$J : \varphi \to ((\varphi \circ \tau) \otimes (\bigotimes_{i=2}^{a} \psi_{R,i}) \otimes (\bigotimes_{j=1}^{b} \psi_{T,j}) \otimes (\bigotimes_{k=1}^{c} \psi_{Z,k}) \otimes \psi_F).$$

Вложение J, как легко видеть, является изометрическим. Существует единственное вложение $\hat{J} : L_2(R, X) \to L_2(\hat{H}, X)$, которое также является изометрическим, и для которого будет коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} L_2(R,X) & \xrightarrow{F_R} & L_2(R,X) \\ \downarrow_J & & \downarrow_{\hat{J}} \\ L_2(H,X) & \xrightarrow{F_H} & L_2(\hat{H},X) \end{array}$$

Пространство $L_2(H, X)$ можно отождествить в силу открытости подгруппы H с замкнутым подпространством $L_2(G, X)$, продолжив функции с H на G нулем. Пространство $L_2(\hat{H}, X)$ можно отождествить с замкнутым подпространством $L_2(\hat{G}, X)$, состоящим из функций постоянных на классах смежности по $H^{\perp}$.

Преобразование Фурье F_H является сужением F_G и, таким образом, ограничено. Преобразование Фурье $F_R = (\hat{J})^{-1} F_H J$ будет непрерывно как композиция непрерывных. По теореме 1 пункт 4 пространство X изоморфно гильбертову.

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда группа G содержит T-составляющую или Z-составляющую. Лемма доказана.

Перейдем к рассмотрению случая, когда группа G не содержит R-, Z- или T-составляющих. В этом случае все компактно-порожденные подгруппы $H \subset G$ являются проективными пределами конечных подгрупп с дискретной топологией, т.е. являются *профинитными* группами. Профинитные группы характеризуются в следующей лемме [9].

Лемма 3. Топологическая группа H является профинитной тогда и только тогда, когда она:

a) хаусдорфова;

b) компактна;

c) вполне несвязна, т.е. для всех $x, y \in H$ существует открыто-замкнутое подмножество $U \subset H$ такое, что $x \in U$ и $y \notin U$.

Любая профинитная группа H либо дискретна (и тогда конечна в силу компактности), либо недискретна (и тогда бесконечна).

Рассмотрим недискретную профинитную группу H. Меру Хаара на H будем нормировать условием $\mu_H(H) = 1$. Группа H является пространством Лебега, т.е. изоморфно как пространство с мерой интервалу [0, 1] с длиной, см. [5], [8]. Данный факт можно доказать, выбрав последовательность компактных подгрупп $K_n \subset H$ таких, что $K_1 \subset K_2 \subset ...$ и мощность фактор-групп $M_n := | H / K_n |$ стремится к $+\infty$. Пронумеровав должным образом классы смежности по K_n, мы сможем отождествить их с точностью до меры 0 с интервалом отрезка с длиной $1/M_n$.

В силу сказанного на группе H можно задать систему функций $(r_i)_{i=1,2,...}$, аналогичную системе функций Радемахера на отрезке [0,1]. Это ортогональная система функций, которые принимают значения $\{+1,-1\}$ на подмножествах меры $1/2$. Говоря теоретико-вероятностным языком, функции r_i будут являться реализациями независимых в совокупности случайных величин, принимающих значения $\{+1,-1\}$ с вероятностью $1/2$.

Нам понадобится критерий, доказанный в [3].

Теорема 4. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Банахово пространство X изоморфно гильбертову.

2) Существует константа $C>0$ такая, что для произвольного конечного набора векторов $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ верно двухстороннее неравенство

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \le E\left\|\sum_{i=1}^{n} r_i x_i\right\|^2 = \int_H \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2 dt \le C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2,$$

где r_i – независимые случайные величины, принимающие значения $\{+1,-1\}$ с вероятностью $1/2$, символ E означает математическое ожидание.

Следуя [3], мы сформулируем лемму, которая демонстрирует важность системы (r_i) на H и позволит перейти к рассмотрению базисов в $L_2(H)$. Меру Хаара на H будем также обозначать символом dt.

Лемма 4. Пусть X – банахово пространство, (f_i) – ортонормированная полная система в $L_2(H)$. Если для некоторого $C>0$ и для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ верно неравенство

$$\int_H \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i\right\|^2 dt \le C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \quad \left(\text{соотв.}, C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \le \int_H \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i\right\|^2 dt\right).$$

Тогда для той же константы $C>0$ и для любого набора $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ также имеем

$$\int_H \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2 dt \le C\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \quad \left(\text{соотв.}, C^{-1}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 \le \int_H \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)x_i\right\|^2 dt\right).$$

Доказательство. В силу ортонормальности системы Радемахера (r_i) и полноты (f_k) мы для заданного $\varepsilon>0$ можем найти возрастающие последовательность индексов (k_j), (m_j) и ортонормированную последовательность (h_j) такую, что

$$h_j = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}(h_j, f_k)\cdot f_k, \int_H \left|h_j(t) - r_{m_j}(t)\right|^2 dt < \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Для фиксированного n и для фиксированных $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ имеем

$$\int_H \left\|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\cdot x_i\right\|^2 dt = \int_H \left\|\sum_{i=1}^{n} r_{m_j}(t)\cdot x_i\right\|^2 dt.$$

По неравенству треугольника имеем

$$\left(\int_H \left\|\sum_{j=1}^{n} r_{m_j}(t)\cdot x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \le \left(\int_H \left\|\sum_{j=1}^{n} (r_{m_j}(t) - h_j(t))\cdot x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} +$$

$$+\left(\int_H \left\|\sum_{j=1}^{n} h_j(t)\cdot x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2} \le \sqrt{\varepsilon}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2\right)^{1/2} + \left(\int_H \left\|\sum_{j=1}^{n} h_j(t)\cdot x_j\right\|^2 dt\right)^{1/2}$$

Поскольку $1 = h_j^2 = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}(h_j, f_k)^2$, получаем

$$\int_H \left\|\sum_{j=1}^{n} h_j(t)\cdot x_j\right\|^2 dt = \int_H \left\|\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}(h_j, f_k)\cdot f_k\right)x_j\right\|^2 dt \le C\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1}\left|(h_j, f_k)\right|^2 x_j^2 = C\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

Таким образом,

$$\int_H \left\| \sum_{i=1}^{n} r_i(t)\cdot x_i \right\|^2 dt \le (\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{C})^2 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Устремляя ε к нулю, получаем требуемое неравенство. Неравенство в обратную сторону доказывается независимо и аналогично. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть X – банахово пространство, (f_i) – ортонормированная полная система в $L_2(H)$. Тогда X изоморфно гильбертову пространству если и только если существует такая константа $C>0$, что для любого набора $x_1,x_2,...,x_n \in X$ верно неравенство

$$C^{-1}\sum_{i=1}^{n} \|x_i^2\| \le \int_H \left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(t)\cdot x_i \right\|^2 dt \le C\sum_{i=1}^{n} \|x_i^2\|$$

В следствии 1 изоморфность X гильбертову пространству вытекает из *двойного* неравенства. Структурные особенности профинитных групп позволят нам переходить от оценок снизу к оценкам сверху и наоборот.

Отметим, что пространство функций Брюа–Шварца на профинитной группе H и на двойственной группе $\hat{H}$ состоят из локально постоянных функций с компактными носителями. Пространства $S(H)$ и $S(\hat{H})$ можно представить в виде индуктивного предела конечномерных пространств. В силу этого они несут сильнейшую локально выпуклую топологию [7].

Теперь мы готовы рассмотреть важный частный случай преобразования Фурье векторнозначных функций на профинитной недискретной группе.

Так как H компактная бесконечная группа, то двойственная $\hat{H}$ будет дискретной бесконечной группой.

Лемма 5. Пусть X – банахово пространство, H – профинитная недискретная группа. Следующие утверждения эквивалентны:

1) X изоморфно гильбертову пространству.

2) Существует такая константа $C>0$, что для произвольного конечного набора векторов $x_1,...,x_n \in X$ и характеров $\xi_1,...,\xi_n \in \hat{H}$ верно неравенство

$$\int_H \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle \xi_k, t\rangle x_k \right\|^2 dt \le C\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 .$$

2)′ Преобразование Фурье $F_{\hat{H}} : L_2(\hat{H}, X) \to L_2(H, X)$ и $F_H^{-1} = I_H F_H$ ограничены. Здесь I_H – изометричный оператор замены переменной $x(t) \mapsto x(-t)$.

3) Существует такая константа $C>0$, что для произвольного конечного набора векторов $x_1,...,x_n \in X$ и характеров $\xi_1,...,\xi_n \in \hat{H}$ верно неравенство

$$C^{-1}\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \le \int_H \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle \xi_k, t\rangle x_k \right\|^2 dt .$$

3)′ Обратное преобразование Фурье $F_{\hat{H}}^{-1} : L_2(H, X) \to L_2(\hat{H}, X)$ и $F_H = I_H F_H^{-1}$ ограничены.

Доказательство. Лемма 1 дает импликации $1) \Rightarrow 2)'$, $1) \Rightarrow 3)'$.

Чтобы получить эквивалентности $2)' \Leftrightarrow 2)$, $3)' \Rightarrow 3)$ достаточно рассмотреть функции вида

$$h = \sum_{k=1}^{n} I_{\{\xi_k\}} \cdot x_k \in S(\hat{H}) \otimes X ,$$

где $\xi_k \in \hat{H}$, $x_k \in X$, $n \in N$. Из определения преобразования Фурье $F : L_2(\hat{H}, X) \to L_2(H, X)$ и выбора нормировки меры Хаара на H сразу получаем

$$\|h\|^2_{L_2(\hat{H},X)}=\sum_{k=1}^n\|x_k\|^2,\ \|Fh\|^2_{L_2(H,X)}=\int_H\left\|\sum_{k=1}^n\langle\xi_k,t\rangle x_k\right\|^2 dt\,.$$

Эквивалентности следуют из плотности $S(\hat{H})\otimes X$ в $L_2(\hat{H},X)$, $S(H)\otimes X$ в $L_2(H,X)$ и биективности $F_{\hat{H}}$, F_H на соответствующих подпространствах.

По следствию 1 мы имеем импликацию $2)\,\&\,3)\Rightarrow 1)$.

Допустим, имеет место ограниченность $2)'$. Исследуем преобразование Фурье F_H на подпространстве $S(H)\otimes X$. Для этого рассмотрим произвольную компактную подгруппу $K\subset H$, где $|H/K|<+\infty$. Функции постоянные на классах смежности по K мы отождествим с элементами $S(H/K)\otimes X$.

В силу конечности H/K существует изоморфизм $\alpha:H/K\to H/K$. Он индуцирует сопряженный изоморфизм $\alpha^*:H/K\to H/K$ по формуле

$$\langle\xi_1,\alpha(\xi_2)\rangle_H=\langle\alpha^*(\xi_1),\xi_2\rangle_{\hat{H}}.$$

Определим оператор

$$R_\alpha:S(H/K)\otimes X\to S(H/K)\otimes X:(R_\alpha\psi)(\xi')=\psi(\alpha(\xi'))\cdot|H/K|^{-\frac12}\,.$$

Он является изометрией в силу равенства

$$\|R_\alpha\psi\|^2=\sum_{\xi'\in H/K}\|R_\alpha\psi(\xi)\|^2\,\mu_{H/K}(\xi)=\sum_{\xi'\in H/K}\|\psi(\alpha(\xi'))\|^2\cdot|H/K|^{-\frac12\cdot 2}=$$
$$=[t:=\alpha(\xi')]=\sum_{t\in H/K}\|\psi(t)\|^2\cdot|H/K|^{-1}=\sum_{t\in H/K}\|\psi(t)\|^2\,\mu_{H/K}(t)=\|\psi\|^2\,.$$

Далее имеем

$$(F_{\hat{H}}R_\alpha\psi)(t')=\sum_{\xi'\in H/K}\langle t',\xi'\rangle_{H/K}\,(\psi(\alpha(\xi'))\,|H/K|^{-\frac12}),$$
$$(R_{(\alpha^*)}F_{\hat{H}}R_\alpha\psi)(\xi)=(\sum_{\xi'\in H/K}\langle\alpha^*(\xi),\xi'\rangle_{H/K}\,\psi(\alpha(\xi'))\,|H/K|^{-\frac12})\,|H/K|^{-\frac12}=[t:=\alpha(\xi')]=$$
$$=(\sum_{t\in H/K}\langle\alpha^*(\xi),\alpha^{-1}(t)\rangle_{H/K}\,\psi(t))\,|H/K|^{-1}=\sum_{t\in H/K}\langle\alpha^*(\xi),\alpha(\alpha^{-1}(t))\rangle_{H/K}\,\psi(t)\,|H/K|^{-1}=$$
$$=\sum_{t\in H/K}\langle\xi,t\rangle_{H/K}\,\psi(t)\mu_{H/K}(t)=(F_H\psi)(\xi)$$

Таким образом, сужение F_H на $S(H/K)\otimes X$ имеет ту же константу ограниченности, что и $F_{\hat{H}}$. В силу произвольности K это значит, что F_H непрерывен на $L_2(H,X)$, и верна импликация $2)\Rightarrow 3)$. Импликация $3)\Rightarrow 2)$ доказывается аналогично. Доказанных импликаций достаточно, чтобы утверждать эквивалентность пунктов теоремы. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда преобразование Фурье действует в пространстве векторонозначных функций на произвольной локально компактной абелевой группе G.

<u>Теорема 5</u>. Пусть X – банахово пространство, G – бесконечная локально компактная абелева группа. Пространство X изоморфно гильбертову тогда и только тогда, когда ограничено преобразование Фурье

$$F:L_2(G,X)\to L_2(\hat{G},X).$$

<u>Доказательство</u>. Достаточность условия изоморфности для ограниченности F показана в лемме 1.

Обратно, допустим преобразование Фурье ограниченно.
Если группа G содержит R-, T- или Z-составляющую, то изоморфность X гильбертову пространству следует из леммы 2 и доказательство в этом случае закончено.

Будем далее считать, что группа G не содержит R-, T- или Z-составляющих. В этом случае все открытые компактно-порожденные подгруппы $H \subset G$ являются профинитными.

Если среди подгрупп H найдется недискретная, то мы рассмотрим пространство $L_2(H,X)$ как замкнутое подпространство $L_2(G,X)$, продолжая функции за пределом H нулем. Пространство $L_2(\widehat{H},X)$ отождествим с пространством $L_2(\widehat{G},X)$ функций, постоянных на классах смежности по аннулятору $H_G^{\perp} \subset \widehat{G}$. Преобразование Фурье на $L_2(H,X)$ является сужением преобразования Фурье с $L_2(G,X)$ и, таким образом, ограниченно. Изоморфность X гильбертову пространству следует из леммы 5 **(**пункт 3)$'$. Доказательство в этом случае закончено.

Если же все рассматриваемые подгруппы $H \subset G$ являются дискретными (в силу компактности отсюда следует их конечность), то по структурной теореме 2 группа G является индуктивным пределом конечных дискретных подгрупп. В силу свойств двойственности Понтрягина, двойственная группа $\widehat{G}$ является проективным пределом групп $\widehat{H}$. Группы $\widehat{H}$ двойственны к конечным дискретным группам H, изоморфны им, и сами являются конечными дискретными. Таким образом, группа $\widehat{G}$ является профинитной. Поскольку G является бесконечной, то $\widehat{G}$ недискретна.

Утверждение об ограниченности преобразования Фурье $F: L_2(G,X) \to L_2(\widehat{G},X)$ эквивалентна ограниченности обратного преобразования $F_{\widehat{G}}^{-1}$ для профинитной недискретной группы $\widehat{G}$. Изоморфность X гильбертову пространству в этом последнем случае следует из леммы 5 пункт 2)$'$. Конец доказательства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Peetre, J. Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles / J. Peetre // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 1969. – Vol. 42. – P.15–26.
2. Mikusinski, J. The Bochner integral // J. Mikusinski. – Acad. Press, 1978.
3. Kwapień, S. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients / S. Kwapień // Studia mathematica. – 1972. – Vol. XLIV. – P.583–595.
4. Радыно, Е.М. Характеристика гильбертовых пространств с использованием преобразования Фурье на поле p-адических чисел / Е.М. Радыно, Я.В. Радыно, А.Г. Сидорик // Докл. НАН Беларуси. – 2007. – Т.48, №5. – С. 17–22.
5. Хьюит, Э. Абстрактный гармонический анализ / Э. Хьюит, К. Росс – Т.1. – М : Наука, 1975.
6. Моррис, С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп / С. Моррис – М : Мир, 1980.
7. Bruchat, F. Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des representations des groupes p-adiques / F. Bruchat // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – Vol. 89. – P.43–75.
8. Леонов, Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н.Н. Леонов – Минск, 2002.
9. Lenstra, H. Profinite groups // Электронный документ: http://websites.math.leidenuniv.nl/ algebra/Lenstra-Profinite.pdf

***Ya.M. Radyna H.G. Sidoryk.* The Fourier Transform of Vector-valued Functions on Locally Compact Groups**

We consider Fourier transform of vector-valued functions on a locally compact group G taking value in Banach space X, and square-integrable in Bochner sense. If G is a finite group then Fourier

transform is a bounded operator. If G is an infinite group then Fourier transform $F: L_2(G, X) \to L_2(\hat{G}, X)$ is a bounded operator if and only if Banach space X is isomorphic to a Hilbert one.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 04.10.2010 г.