УДК 517.5

И.В. Кальчук, У.З. Грабова, Т.А. Степанюк

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ВЕЙЕРШТРАССА НА КЛАССАХ $W_\beta^r H^\alpha$

Работа посвящена решению одной из задач теории приближения – задачи об исследовании аппроксимативных свойств интегралов Вейерштрасса на классах $W_\beta^r H^\alpha$. Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонений функций классов $W_\beta^r H^\alpha$ от интегралов Вейерштрасса.

1. Постановка задачи и некоторые дополнительные утверждения

Пусть C – пространство 2π-периодических функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_∞ – пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$; L – пространство 2π-периодических суммируемых на периоде функций, в котором норма определена равенством $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Пусть $r > 0$ и β – фиксированное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r \left[a_k \cos\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right]$$

есть рядом Фурье некоторой суммируемой функции φ, то такую функцию называют (r,β)-производной функции f в смысле Вейля-Надя и обозначают $f_\beta^r(\cdot)$. Множество функций, которые удовлетворяют такому условию, обозначают через W_β^r.

Если $f \in W_\beta^r$ и при этом $f_\beta^r \in H^\alpha$, то есть f_β^r удовлетворяет условию Липшица порядка α:

$$\left| f_\beta^r(x+h) - f_\beta^r(x) \right| \le |h|^\alpha, \quad h \in R, \quad 0 < \alpha \le 1,$$

то говорят, что f принадлежит классу $W_\beta^r H^\alpha$. При $\alpha = 0$ полагают, что $W_\beta^r H^0 = W_\beta^r$.

Через W^r обозначают множество 2π-периодических функций, которые имеют абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и $\left\| f^{(r)}(t) \right\|_\infty \le 1$.

Пусть $f \in L$. Величину

$$W(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} \cos kt \right\} dt, \quad 0 \le \rho < 1,$$

принято называть интегралом Вейерштрасса функции f. Положив $\rho = e^{-\frac{1}{\delta}}$, интеграл Вейерштрасса запишем в виде [1].

$$W_\delta(f; x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k^2}{\delta}} \cos kt \right\} dt, \quad \delta > 0.$$

В данной работе изучается асимптотическое поведение величин

$$\mathrm{E}(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = \sup_{f \in W_\beta^r H^\alpha} \left\| f(x) - W_\delta(f; x) \right\|_C, \quad \delta \to \infty.$$

Если в явном виде найдена функция $g(\delta) = g(W_\delta; \delta)$, такая, что при $\delta \to \infty$

$$\mathrm{E}(W_\beta^r H^\alpha; W_\delta)_C = g(\delta) + o(g(\delta)),$$

то, следуя А.И. Степанцу [2], будем говорить, что решена задача Колмогорова-Никольского для интеграла Вейерштрасса W_δ на классе $W^r_\beta H^\alpha$ в равномерной метрике.

Для интеграла Вейерштрасса введем функцию

$$\tau(u) = \tau_\delta(u) = \begin{cases} \left(1-e^{-u^2}\right)\delta^{\frac{r}{2}}, & 0 \le u \le \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}, \\ (1-e^{-u^2})u^{-r}, & u \ge \dfrac{1}{\sqrt{\delta}}. \end{cases} \tag{1}$$

Приведем некоторые дополнительные определения и утверждения, которые будут необходимы нам для дальнейшей работы.

Определение 1′[2]. Пусть функция $\tau(u)$ задана на $[0,\infty)$, абсолютно непрерывна, $\tau(\infty)=0$ и $0 \le \alpha \le 1$. Говорят, что функция $\tau(u) \in \mathrm{E}_\alpha$, если производную $\tau'(u)$ в тех точках, где она не существует, можно доопределить так, чтобы существовали интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|, \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\left|d\tau'(u)\right|.$$

Далее договоримся через K, K_i, $i=1,2,...$ – обозначать постоянные, вообще говоря, не одни и те же в разных соотношениях.

Теорема 1′[2]. Пусть $\tau(u) \in \mathrm{E}_\alpha \quad (0 \le \alpha < 1)$, $\sin\dfrac{\beta\pi}{2}\tau(0)=0$ и

$$\xi(A,B) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}|A|, & |B| \le |A|, \\ |A|\arcsin\left|\dfrac{A}{B}\right|, & |B| > |A|. \end{cases}$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha,\tau)$ *вида*

$$A(\alpha,\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^\alpha \left|\int_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right| dt \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{\tau(u)}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du,$$

при этом справедливы оценки:

$$\left|A(\alpha,\tau) - \frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty \xi\left(\sin\frac{\beta\pi}{2}\tau(u), |\tau(a+u)-\tau(a-u)|\right)\frac{du}{u^{1+\alpha}}\right| \le KH(\alpha,\tau);$$

$$\left|A(\alpha,\tau) - \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du\right| \le K\left(\int_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du + H(\alpha,\tau)\right); \tag{3}$$

$$\left|A(\alpha,\tau) - \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du\right| \le K\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^\infty \frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du + H(\alpha,\tau)\right);$$

где

$$H(\alpha,\tau) = |\tau(0)| + |\tau(1)| + \int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| + \int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\tau'(u)\right|. \tag{4}$$

Утверждение 1′[3]. *Если* $\tau(u) \in \mathrm{E}_\alpha \quad (0 \le \alpha < 1)$*, то*

$$|\tau(u)| \le KH(\alpha,\tau), \qquad \int_0^\infty |\tau'(u)|du \le KH(\alpha,\tau),$$

где величина $H(\alpha,\tau)$ *определяется равенством (4),* K *– некоторая постоянная.*

Теорема 2′[2]. *Пусть* $\tau(u)\in \mathrm{E}_\alpha$ $(0\le\alpha<1)$, $u\to\infty$ *и интеграл* $A(\alpha,\tau)$ *сходится. Если при* $r=\beta=0$ $\tau(u)=\lambda(u)$. *Тогда при* $\delta\to\infty$

$$\mathrm{E}(W^r_\beta H^\alpha;U_\delta)_C=\frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{r+\alpha}}A(\alpha,\tau)+O\left(\frac{1}{\delta^{r+\alpha}}a(\alpha,\tau)\right),$$
$$2^{\alpha-1}\le\gamma(\alpha)\le 1,$$

где

$$a(\alpha,\tau)=\int\limits_{|t|\ge\frac{\delta\pi}{2}}|t|^\alpha\left|\int\limits_0^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt.$$

2. Приближение функций с классов $W^r_\beta H^\alpha$ их интегралами Вейерштрасса

В принятых выше обозначениях имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Для функции* $\tau(u)$, *определенной при помощи соотношения (1), при* $r+\alpha\le 2$ *и* $\delta\to\infty$ *имеет место равенство*

$$\mathrm{E}(W^r_\beta H^\alpha;W_\delta)_C=\frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}}A(\alpha,\tau)+O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1+r}{2}}}+\frac{1}{\delta^2}\right),\qquad(5)$$
$$2^{\alpha-1}\le\gamma(\alpha)\le 1,$$

где величина $A(\alpha,\tau)$ *определена при помощи соотношения (2) и для нее справедлива оценка*

$$A(\alpha,\tau)=\begin{cases}O(1), & r+\alpha<2,\\ O(\ln\delta), & r+\alpha=2.\end{cases}\qquad(6)$$

Доказательство.

Для сходимости интеграла $A(\alpha,\tau)$, согласно теореме 1', достаточно показать сходимость интегралов

$$\int\limits_0^{\frac12}u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|,\qquad \int\limits_{\frac12}^{\frac32}|u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|,\qquad \int\limits_{\frac32}^{\infty}(u-1)\left|d\tau'(u)\right|,\qquad(7)$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^\infty\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du,\qquad \int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du.\qquad(8)$$

Для оценки первого интеграла с (7) разобьем промежуток $\left[0,\frac12\right]$ на две части: $\left[0,\frac{1}{\sqrt\delta}\right]$ и $\left[\frac{1}{\sqrt\delta},\frac12\right]$.

Так как при $u\in\left[0,\frac{1}{\sqrt\delta}\right]$ $\tau''(u)=2e^{-u^2}\delta^{\frac r2}(1-2u^2)\ge 0$ и учитывая неравенство

$$e^{-u^2}\le 1,\quad u\in R,$$

получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt\delta}}u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|=\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt\delta}}u^{1-\alpha}d\tau'(u)\le 2\delta^{\frac r2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt\delta}}(u^{1-\alpha}-2u^{3-\alpha})du=O\left(\frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right).\qquad(9)$$

Пусть теперь $u\in\left[\frac{1}{\sqrt\delta},\frac12\right]$. Положим

$$\tau_1(u)=(1-e^{-u^2}-u^2)u^{-r},\qquad \tau_2(u)=u^{2-r},$$

тогда

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| \le \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau_1'(u)\right| + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau_2'(u)\right|. \tag{10}$$

Найдем оценку первого интеграла в правой части неравенства (10). Так как

$$\tau_1''(u) = r(1+r)(1-e^{-u^2}-u^2)u^{-r-2} - 4ru^{-r}(e^{-u^2}-1) + 2(e^{-u^2}-2u^2e^{-u^2}-1)u^{-r},$$

и учитывая неравенства

$$e^{-u^2}+u^2-1 \le \frac{u^4}{2}, \quad 1-e^{-u^2} \le u^2, \quad 2u^2e^{-u^2}-e^{-u^2}+1 \le 3u^2, \tag{11}$$

получим

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau_1'(u)\right| \le r(1+r)\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{-1-r-\alpha}(-1+e^{-u^2}+u^2)du + 4r\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha}(1-e^{-u^2})du +$$

$$+2\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha}(-e^{-u^2}+2u^2e^{-u^2}+1)du \le \frac{r(1+r)}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha}du + 4r\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha}du + 6\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha}du =$$

$$= O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right) = O(1). \tag{12}$$

Найдем оценку второго интеграла в правой части неравенства (10). Так как $\tau_2''(u) = (2-r)(1-r)u^{-r} > 0$, то

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau_2'(u)\right| \le (2-r)(1-r)\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha}du = \begin{cases} O\left(1+\dfrac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right), r+\alpha<2 \\ O(\ln\delta), \quad r+\alpha=2 \end{cases} = \begin{cases} O(1), & r+\alpha<2, \\ O(\ln\delta), & r+\alpha=2. \end{cases} \tag{13}$$

Учитывая (8), (9), (11) и (12), имеем

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| = \begin{cases} O(1), & r+\alpha<2, \\ O(\ln\delta), & r+\alpha=2. \end{cases} \tag{14}$$

Оценим второй интеграл с (7). Учитывая, что согласно (1) при $u \ge \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau''(u) = (2-4r)e^{-u^2}u^{-r} - 4e^{-u^2}u^{2-r} + r(1+r)(1-e^{-u^2})u^{-2-r}, \tag{15}$$

а также неравенства

$$e^{-u^2} \le 1, \quad 1-e^{-u^2} \le u^2, \tag{16}$$

получим, что

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| \le \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right| = O(1). \tag{17}$$

Используя соотношение (15) и неравенства

$$1-e^{-u^2} \le 1, \quad u^2e^{-u^2} \le K_1, \quad u^4e^{-u^2} \le K_2,$$

оценим третий интеграл с (7)

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\left|d\tau'(u)\right| \le \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u\left|d\tau'(u)\right| = O(1). \tag{18}$$

Для оценки первого интеграла с (8) разобьем промежуток $[0,\infty)$ на три части: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$, $[1,\infty)$.

Пусть $u\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$. Учитывая (1) и второе неравенство из (11), будем иметь, что

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\frac{(1-e^{-u^2})\delta^{\frac{r}{2}}}{u^{1+\alpha}}du\le\delta^{\frac{r}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}u^{1-\alpha}du=O\left(\frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right)=O(1). \tag{19}$$

Согласно (1), в случае, когда $u\in\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$, получим

$$\left|\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du-\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}}du\right|\le\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|1-e^{-u^2}-u^2\right|}{u^{1+\alpha}}u^{-r}du\le\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{u^4}{2u^{1+\alpha}}u^{-r}du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right)=O(1).$$

Отсюда,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{u^{2-r}}{u^{1+\alpha}}du+O(1)=\begin{cases}O\left(1+\frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right), & r+\alpha<2\\ -\frac{1}{2}\ln\delta+O(1), & r+\alpha=2\end{cases}=\begin{cases}O(1), & r+\alpha<2,\\ -\frac{1}{2}\ln\delta+O(1), & r+\alpha=2.\end{cases} \tag{20}$$

Пусть, наконец, $u\in[1,\infty)$. Так как имеет место первое неравенство с (11), то

$$\left|\int_1^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du-\int_1^{\infty}\frac{u^{-r}}{u^{1+\alpha}}du\right|\le\int_1^{\infty}\frac{e^{-u^2}}{u^{1+\alpha}}u^{-r}du\le\int_1^{\infty}u^{-1-r-\alpha}du=O(1).$$

Отсюда,

$$\int_1^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int_1^{\infty}\frac{u^{-r}}{u^{1+\alpha}}du+O(1)=O(1). \tag{21}$$

Соединив формулы (18)–(20) , получим

$$\int_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u^{1+\alpha}}du=\begin{cases}O(1), & r+\alpha<2,\\ -\frac{1}{2}\ln\delta+O(1), & r+\alpha=2.\end{cases} \tag{22}$$

Для того, чтоб оценить второй интеграл с (8), отметим, что при $\bar{\lambda}(u)=e^{-u^2}$ и $\delta\to\infty$ имеет место равенство

$$\int_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int_0^1\frac{\left|\bar{\lambda}(1-u)-\bar{\lambda}(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du+$$

$$+\left(|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int_0^{\frac{1}{2}}u^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}|u-1|^{1-\alpha}\left|d\tau'(u)\right|+\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\tau'(u)\right|\right). \tag{23}$$

И, так как

$$\int_0^1\frac{\left|\bar{\lambda}(1-u)-\bar{\lambda}(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du=O(1), \tag{24}$$

то, учитывая соотношения (12), (15)–(16),(21)–(22), получаем

$$\int_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=\begin{cases}O(1), & r+\alpha<2,\\ O(\ln\delta), & r+\alpha=2.\end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, в силу теоремы 1′, преобразование Фурье функции $\tau(u)$, заданной в виде (1), суммируемое на всей числовой оси. С неравенств (3) и с учетом формул (22), (25), (14), (17), (18) получим соотношение (6).

Так как для функции $\tau(u)$, заданной при помощи соотношения (1), выполняются все условия теоремы 2′, а именно, согласно выше доказанного, функция $\tau(u)=\tau_\delta(u)\in \mathrm{E}_\alpha$ $(0\le\alpha<1)$ и интеграл $A(\alpha,\tau)$ сходится. Поэтому, согласно теоремы 2′, будет иметь место равенство

$$\mathrm{E}(W_\beta^r H^\alpha;W_\delta)_C=\frac{\gamma(\alpha)}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}}A(\alpha,\tau)+O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}}a(\alpha,\tau)\right), \tag{26}$$

$$2^{\alpha-1}\le\gamma(\alpha)\le 1,$$

где

$$a(\alpha,\tau)=\int\limits_{|t|\ge\frac{\delta\pi}{2}}|t|^\alpha\left|\int_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt. \tag{27}$$

Оценим интеграл $a(\alpha,\tau)$ виду (27). Для этого представим преобразование Фурье $\hat{\tau}(t)$ в виде

$$\hat{\tau}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty\right)\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{28}$$

Проинтегрируем дважды по частям интегралы в правой части равенства (28)

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{t}(1-e^{-\frac{1}{\delta}})\delta^{\frac{r}{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}+\frac{\beta\pi}{2}\right)+\frac{2}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{1}{\delta}}\delta^{\frac{r}{2}}\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{t^2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \tag{29}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{-1}{t}(1-e^{-\frac{1}{\delta}})\delta^{\frac{r}{2}}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}+\frac{\beta\pi}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{2}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}e^{-\frac{1}{\delta}}-r\delta^{\frac{1+r}{2}}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\right)\frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}+\frac{\beta\pi}{2}\right)--\frac{1}{t^2}\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{30}$$

Подставив (28), (29) в (27), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{\pi t^2}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}+\frac{\beta\pi}{2}\right)r\delta^{\frac{1+r}{2}}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)-\frac{1}{\pi t^2}\int_0^\infty\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du.$$

Отсюда

$$\left|\int_0^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|\le\frac{1}{\pi t^2}\int_0^\infty|\tau''(u)|\,du+\frac{1}{t^2}\frac{K}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}. \tag{31}$$

Для оценки интеграла с правой части неравенства (31) разобьем промежуток $[0,\infty)$ на три части: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$, $[1,\infty)$ и проведем размышления аналогичные, как и при оценке первого интеграла с (9).

Учитывая, что $\tau''(u)\ge 0$ на $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ и первое неравенство с (16), получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\left|\tau''(u)\right|du=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\tau''(u)du=2\delta^{\frac{r}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}e^{-u^2}(1-2u^2)du\le 2\delta^{\frac{r}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}(1-2u^2)du=O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right) \quad (32)$$

Пусть $u\in\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$. Размышляя, как и при оценивании первого интеграла с (7) на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$, можно показать справедливость оценки

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\left|\tau''(u)\right|du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right),\quad \delta\to\infty. \quad (33)$$

Если $u\in[1,\infty)$, то

$$\int_1^{\infty}\left|\tau''(u)\right|du=O(1). \quad (34)$$

Объединив формулы (31)–(34), получим

$$\left|\int_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|=\frac{1}{t^2}O\left(1+\frac{1}{\delta^{\frac{1-r}{2}}}\right).$$

Отсюда,

$$\int_{|t|\ge\frac{\delta\pi}{2}}|t|^{\alpha}\left|\int_0^{\infty}\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|dt=O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-\alpha}{2}}}+\frac{1}{\delta^{\frac{2-(r+\alpha)}{2}}}\right). \quad (35)$$

Из соотношений (26), (35) вытекает равенство (5). Теорема доказана.

Теорема 2. *При* $r>2$, $0\le\alpha<1$ *и* $\delta\to\infty$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathrm{E}(W_{\beta}^{r}H^{\alpha};W_{\delta})_C=\frac{1}{\delta}\sup_{f\in W_{\beta}^{r}H^{\alpha}}\left\|f''(x)\right\|_C+O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}}+\frac{1}{\delta^2}\right). \quad (36)$$

Доказательство. Подадим функцию $\tau(u)$, заданную при помощи соотношения (1), в виде $\tau(u)=\varphi(u)+\mu(u)$, где

$$\varphi(u)=\begin{cases}u^2\delta^{\frac{r}{2}}, & 0\le u\le\frac{1}{\sqrt{\delta}},\\ u^{2-r}, & u\ge\frac{1}{\sqrt{\delta}},\end{cases} \quad (37)$$

$$\mu(u)=\begin{cases}(1-e^{-u^2}-u^2)\delta^{\frac{r}{2}}, & 0\le u\le\frac{1}{\sqrt{\delta}},\\ (1-e^{-u^2}-u^2)u^{-r}, & u\ge\frac{1}{\sqrt{\delta}}.\end{cases} \quad (38)$$

Убедимся в суммируемости преобразований $\widehat{\varphi}(t)$ и $\widehat{\mu}(t)$ функций $\varphi(u)$ и $\mu(u)$ вида

$$\widehat{\varphi}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\widehat{\varphi}(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du, \quad (39)$$

$$\widehat{\mu}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\widehat{\mu}(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \quad (40)$$

Для сходимости интеграла $A(\alpha,\varphi)$, согласно теореме 1', достаточно показать сходимость интегралов

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\varphi'(u)\right|, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left|u-1\right|^{1-\alpha}\left|d\varphi'(u)\right|, \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\varphi'(u)\right|, \tag{41}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^{\infty}\frac{\left|\varphi(u)\right|}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int_0^1 \frac{\left|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du. \tag{42}$$

Для первого интеграла с (41) имеем

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\varphi'(u)\right| = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha}\left|d\varphi'(u)\right| + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\left|d\varphi'(u)\right| = 2\delta^{\frac{r}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha}du + (2-r)(1-r)\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-r-\alpha}du =$$

$$= O\left(1+\frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \tag{43}$$

Так как функция $\left|u-1\right|^{1-\alpha}\left|d\varphi'(u)\right|$ непрерывная на отрезке $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$, то она ограниченная на этом отрезке. Поэтому

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left|u-1\right|^{1-\alpha}\left|d\varphi'(u)\right| = O(1). \tag{44}$$

Оценим третий интеграл с (41):

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty}(u-1)\left|d\varphi'(u)\right| \le \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u\left|d\varphi'(u)\right| = (2-r)(1-r)\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u^{1-r}du = O(1). \tag{45}$$

Для оценки первого интеграла с (42) разобьем промежуток $[0,\infty)$ на три части: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$, $[1,\infty)$. Получим

$$\int_0^{\infty}\frac{\left|\varphi(u)\right|}{u^{1+\alpha}}du = \delta^{\frac{r}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha}du + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^{1-r-\alpha}du + \int_1^{\infty} u^{1-r-\alpha}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^{1-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \tag{46}$$

Для второго интеграла с (42) имеет место равенство

$$\int_0^1 \frac{\left|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du = \delta^{\frac{r}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\frac{\left|(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|(1-u)^{2-r}-(1+u)^{2-r}\right|}{u^{1+\alpha}}du.$$

Так как

$$\frac{\left|(1-u)^{2-r}-(1+u)^{2-r}\right|}{u} \le K,$$

то

$$\int_0^1 \frac{\left|\varphi(1-u)-\varphi(1+u)\right|}{u^{1+\alpha}}du \le K\left(\delta^{\frac{r}{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\right)u^{-\alpha} = O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{1-r-\alpha}{2}}}\right). \tag{47}$$

Таким образом, учитывая соотношения (42)–(47), в силу теоремы 1′ преобразование Фурье функции $\varphi(u)$, заданное в виде (39), суммируемо на всей числовой оси.

Для того, чтоб оценить величину $A(\alpha,\mu)$, согласно сформулированной выше теореме 1´, достаточно найти оценки следующих интегралов:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\,|d\mu'(u)|, \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\,|d\mu'(u)|, \qquad \int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\,|d\mu'(u)|, \tag{48}$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right| \int_0^{\infty} \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du, \qquad \int_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \tag{49}$$

Исследуем первый интеграл с (48). Для этого разобьем промежуток $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ на две части: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$. Учитывая третье неравенство с (11) и то, что при $u\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ $\mu''(u)\le 0$, получим

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha}\,|d\mu'(u)| = 2\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha}(2u^2e^{-u^2}-e^{-u^2}+1)du \le 6\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{3-\alpha}du = O\left(\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \tag{50}$$

Найдем оценку этого интеграла на промежутке $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$. Из равенства (38) имеем

$$\mu''(u) = (1-e^{-u^2}-u^2)r(r+1)u^{-r-2} + 4(-r)u(e^{-u^2}-1)u^{-r-1} + 2u^{-r}(e^{-u^2}-2u^2e^{-u^2}-1).$$

Можно убедиться, что $\mu''(u)\le 0$, когда $u\in\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$. Тогда, учитывая неравенства (11) получаем

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\,|d\mu'(u)| \le r(r+1)\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (u^2+e^{-u^2}-1)u^{-1-r-\alpha}du + 4r\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (1-e^{-u^2})u^{1-r-\alpha}du +$$

$$+2\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} (2u^2e^{-u^2}-e^{-u^2}+1)u^{1-r-\alpha}du \le K\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^{3-r-\alpha}du = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{1-\alpha}\,|d\mu'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \tag{51}$$

Из соотношений (50), (51) вытекает

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u^{1-\alpha}\,|d\mu'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \tag{52}$$

Аналогично, как и при оценивании второго интеграла с (41), получим

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} |u-1|^{1-\alpha}\,|d\mu'(u)| = O(1). \tag{53}$$

Из неравенств

$$e^{-u^2}\le 1, \quad 1-e^{-u^2}\le 1, \quad u^2e^{-u^2}\le K_1$$

вытекает

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} (u-1)\,|d\mu'(u)| \le K\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} u^{-r+1}du = O(1). \tag{54}$$

Для оценки первого интеграла с (49) разобьем промежуток $[0,\infty)$ на три части: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$, $[1,\infty)$. Используя первые неравенства с (11) и (16), получим

$$\int_0^\infty \frac{|\mu(u)|}{u^{1+\alpha}}du = \delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{e^{-u^2}+u^2-1}{u^{1+\alpha}}du + \left(\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} + \int_1^\infty \right)(e^{-u^2}+u^2-1)u^{-1-r-\alpha}du \le$$

$$\le \frac{1}{2}\delta^{\frac{r}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{3-\alpha}du + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^{3-r-\alpha}du + \int_1^\infty u^{1-r-\alpha}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \qquad (55)$$

Оценим второй интеграл с (49). Из соотношения (38) найдем вид функций $\mu(1-u)$ и $\mu(1+u)$.

$$\mu(1-u) = \begin{cases} (1-e^{-(1-u)^2}-(1-u)^2)\delta^{\frac{r}{2}}, & 1-\frac{1}{\sqrt{\delta}} \le u \le 1, \\ (1-e^{-(1-u)^2}-(1-u)^2)(1-u)^{-r}, & u \le 1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \end{cases} \qquad (56)$$

$$\mu(1+u) = \begin{cases} (1-e^{-(1+u)^2}-(1+u)^2)\delta^{\frac{r}{2}}, & -1 \le u \le \frac{1}{\sqrt{\delta}}-1, \\ (1-e^{-(1+u)^2}-(1+u)^2)(1+u)^{-r}, & u \ge \frac{1}{\sqrt{\delta}}-1. \end{cases} \qquad (57)$$

Подадим второй интеграл с (49) в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^1 \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du + \int_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du. \qquad (58)$$

Оценим сначала первое слагаемое правой части равенства (58). С этой целью, додадим и отнимем под знаком модуля в подынтегральной функции величину

$$e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2.$$

Получим

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du \le \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left|e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du +$$

$$+\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)+e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du. \qquad (59)$$

Для первого интеграла с правой части неравенства (58) есть очевидной оценка

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left|e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du \le K\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{-\alpha}du = O(1). \qquad (60)$$

Дальше, так как имеют место соотношения (56) и (57), то при $u \in \left[0,1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$

$$e^{-(1-u)^2} = 2u-u^2-(1-u)^r\mu(1-u), \quad e^{-(1+u)^2} = 2u-u^2-(1+u)^r\mu(1+u).$$

Тогда

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)+e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du \le$$

$$\le \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1-u)||1-(1-u)^r|\frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1+u)||1-(1+u)^r|\frac{du}{u^{1+\alpha}}. \qquad (61)$$

Так как функция $\mu(u)$ виду (38), принадлежит множеству E_α, то согласно утверждению 1′ будем иметь, что

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1-u)||1-(1-u)^r|\frac{du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\mu(1+u)||1-(1+u)^r|\frac{du}{u^{1+\alpha}} =$$

$$= H(\alpha,\mu) O\left(\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1-u)^r|\,du}{u^{1+\alpha}} + \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1+u)^r|\,du}{u^{1+\alpha}} \right). \qquad (62)$$

Покажем, что при $\delta \to \infty$

$$I_{1,\delta} := \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1-u)^r|\,du}{u^{1+\alpha}} = O(1), \qquad (63)$$

$$I_{2,\delta} := \int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|1-(1+u)^r|\,du}{u^{1+\alpha}} = O(1). \qquad (64)$$

Действительно, функция $\dfrac{1-(1-u)^r}{u}$ ограниченная при всех $u \in \left[\sqrt{\delta}; 1-\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $0<\delta<1-\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}$ и кроме того,

$$\lim_{u\to 0} \frac{1-(1-u)^r}{u} = \lim_{u\to 0} r(1-u)^{r-1} = O(1),$$

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u^{-\alpha}\,du = O(1).$$

Итак, $I_{1,\delta} = O(1),\ \delta \to \infty.$

Аналогично, можно доказать, что $I_{2,\delta} = O(1)$.

Объединение соотношений (61)–(64) позволяет записать, что

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)+e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du = H(\alpha,\mu)O(1),\ \delta\to\infty. \qquad (65)$$

Для величины $H(\alpha,\mu)$ виду (4), согласно с (52)–(54), справедлива оценка

$$H(\alpha,\mu) = O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \qquad (66)$$

Итак, при $\delta \to \infty$

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)+e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \qquad (67)$$

Учитывая (59)–(61), получаем

$$\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du = O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \qquad (68)$$

Оценим второе слагаемое из правой части равенства (58). Имеем

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du+$$

$$+O\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)+e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du\right). \tag{69}$$

Из соотношений (55), (57) при $u\in\left[1-\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$ вытекают равенства

$$e^{-(1-u)^2}=2-u^2-\delta^{-\frac{r}{2}}\mu(1-u),\quad e^{-(1+u)^2}=2-u^2-\delta^{-\frac{r}{2}}\mu(1+u). \tag{70}$$

Учитывая (70) и в силу утверждения 1′, находим, что

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|\mu(1-u)-\mu(1+u)+e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du\le$$

$$\le\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\left|\mu(1-u)(1-\delta^{-\frac{r}{2}})-\mu(1+u)(1-(1+u)^r)+(1-u)^2-(1+u)^2\right|\frac{du}{u^{1+\alpha}}=$$

$$=H(\alpha,\mu)O\left(\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|1-\delta^{-\frac{r}{2}}\right|}{u^{1+\alpha}}du+\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|1-(1+u)^r\right|}{u^{1+\alpha}}du\right). \tag{71}$$

Дальше получаем

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|1-\delta^{-\frac{r}{2}}\right|}{u^{1+\alpha}}du=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)^{\alpha}}-1\right)=O(1). \tag{72}$$

Повторяя размышления, приведенные при установлении оценки (65), можно показать, что при $\delta\to\infty$

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|1-(1+u)^r\right|}{u^{1+\alpha}}du=O(1). \tag{73}$$

Объединив соотношения (69)–(72), учитывая (66) и тот факт, что

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{\left|e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}+(1-u)^2-(1+u)^2\right|}{u^{1+\alpha}}du=O(1),$$

получаем такую оценку

$$\int\limits_{1-\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right).$$

Из равенства (58) на основе оценок (67), (68) имеем

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{|\mu(1-u)-\mu(1+u)|}{u^{1+\alpha}}du=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \tag{74}$$

Согласно теоремы 1′, с учетом соотношений (55), (66) и (74), получим

$$A(\alpha,\mu)=O\left(1+\frac{1}{\delta^{2-\frac{r+\alpha}{2}}}\right). \qquad (75)$$

Аналогично к соотношению (1.1) работы [5] можно показать, что ряд Фурье функции

$$f_{\varphi}(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{r}\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)\widehat{\varphi}(t)dt$$

имеет вид

$$S[f_{\varphi}]=\sum_{k=1}^{\infty}k^{2}\delta^{\frac{r}{2}-1}\left(a_k(f)\cos kx+b_k(f)\sin kx\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\beta}^{r}\left(x+\frac{t}{\delta}\right)\widehat{\varphi}(t)dt=-\frac{1}{\delta^{1-\frac{r}{2}}}f''(x). \qquad (76)$$

Как показано в [3] имеет место равенство

$$f(x)-W_{\delta}(f,x)=\delta^{-\frac{r}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f_{\beta}^{r}\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)-f_{\beta}^{r}(x)\right)\widehat{\tau}(t)dt.$$

Отсюда, учитывая данное равенство и то, что $f(x)\in W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$, получаем

$$\mathrm{E}(W_{\beta}^{r}H^{\alpha};W_{\delta})_C=\sup_{f\in W_{\beta}^{r}H^{\alpha}}\left\|\delta^{-\frac{r}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f_{\beta}^{r}\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)-f_{\beta}^{r}(x)\right)\widehat{\tau}(t)dt\right\|_C=$$

$$=\sup_{f\in W_{\beta}^{r}H^{\alpha}}\left\|\delta^{-\frac{r}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f_{\beta}^{r}\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)-f_{\beta}^{r}(x)\right)(\widehat{\varphi}(t)+\widehat{\mu}(t))dt\right\|_C\le$$

$$\le\sup_{f\in W_{\beta}^{r}H^{\alpha}}\left\|\delta^{-\frac{r}{2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(f_{\beta}^{r}\left(x+\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right)-f_{\beta}^{r}(x)\right)\widehat{\varphi}(t)dt\right\|_C+O\left(\frac{1}{\delta^{\frac{r+\alpha}{2}}}A(\alpha,\mu)\right). \qquad (77)$$

Подставляя (75), (76) в (77) получим равенство (36). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харкевич, Ю.І. Наближення (ψ,β)-диференційовних функцій інтегралами Вейєрштрасса / Ю.І. Харкевич, І.В. Кальчук //Укр. мат. журн. – 2007. – Т.59, №7. – С.953–978.

2. Степанец, А.И. Классификация и приближение периодических функций / А.И. Степанец. – Киев : Наук. Думка, 1987. – 268 с.

3. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, II / Л.И. Баусов // Изв. вузов. – 1996. – Т. 46, № 3. – С.15–31.

4. Баусов, Л.И. Линейные методы суммирования рядов Фурье с заданными прямоугольными матрицами, I / Л.И. Баусов //Изв. вузов. – 1996. – Т. 55, № 6. – С.5–17.

5. Новикова, А.К. О приближении функций в пространствах C и L / А.К. Новикова // Вопросы суммирования рядов Фурье. – Киев, 1985. – С.14–51. – (Препринт /АН УССР Ин-т математики ; 85.61).

I.V. Kalchuk, U.Z. Grabova,T.A. Stepanyuk. **Approximative Properties of Integrals of Weierstrass on Classes** $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$

The article is devoted to the solution of one of the problem of the Approximation's Theory, the problem of researching approximating properties of Weierstrass'es integrals on classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$. The asymptotic equalities are obtained for upper borders of deflection of functions of the classes $W_{\beta}^{r}H^{\alpha}$ from Weierstrass'es integrals.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.09.2010 г.