УДК 539.12

В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк

ТРАНЗИТИВНОСТЬ В ТЕОРИИ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И ФОРМАЛИЗМ СТОКСА–МЮЛЛЕРА В ПОЛЯРИЗАЦИОННОЙ ОПТИКЕ

Выполнен теоретико-групповой анализ произвольных поляризационных оптических элементов с матрицами Мюллера лоренцевского типа. Одно поляризационное измерение определяет параметры соответствующей матрицы Мюллера с точностью то трех независимых произвольных величин. Каждому поляризационному измерению ставится в соответствие определенное квадратичное уравнение связи на 4 неизвестных параметра. Аналитические выражения для этих 4 величин даются в наиболее простой форме, если использовать результаты 6 независимых поляризационных измерений; соответствующие формулы приведены в явном виде.

Введение

Известно, что 4 параметра Стокса описывают состояние поляризации света. Они были введены Стоксом в 1852 [1]. Метод Мюллера заключается в использовании матричного формализма для описания действия поляризационных элементов на поляризацию света, этот метод был предложен в 1943 [2]; любой оптический элемент описывается своей матрицей Мюллера. Поляризация света может описываться в рамках формализма Джонса, предложенного в 1941 [3−6]; при этом состояние поляризации света задается 2-мерным комплексным вектором, и линейные оптические элементы описываются 2-мерными матрицами Джонса. Отметим специально, что 2-мерный формализм Джонса пригоден только для описания полностью поляризованного света, в то время как формализм Стокса применим и для описания частично поляризованного света.

Уже давно известно, что при описании (полностью или частично) поляризованного света существенную роль может играть группа преобразований $SO(3,1)$, изоморфная группе Лоренца. Это означает, что техника оперирования с преобразованиями Лоренца, хорошо развитая в релятивистской физике [7–12], может сыграть существенную эвристическую роль при анализе вопросов оптики поляризованного света [13–15].

В настоящей работе развита общая теоретико-групповая методика восстановления матрицы Мюллера произвольного оптического элемента по результатам нескольких независимых поляризационных экспериментов.

Проблема транзитивности в подходе Стокса–Мюллера

Математически проблема транзитивности описывается простым уравнением

$$L_b^{\ a}(k,k^*)\, S_a = +S'_b\,, \qquad L-? \tag{1}$$

Ввиду существования понятия малой группы Лоренца [10] для начального и конечного 4-векторов Стокса [16], S и S' уравнение транзитивности можно представить иначе:

$$L\,(L_{little}S) = L'_{little}S' \qquad \Rightarrow \qquad [\,(L'_{little})^{-1} L\, L_{little}\,]\, S = S'\,. \tag{2}$$

Это означает, что матрица транзитивности L принципиально не может быть найдена однозначным образом.

Для анализа этой ситуации применим факторизованное представление для лоренцевских матриц (используем обозначения из [12]) $L = AA^*$, уравнение (1) дает

$$A^* S = A^{-1} S'\,, \qquad\qquad \widehat{A}\, S = (A^*)^{-1}\, S'\,. \tag{3}$$

Это означает, что задача транзитивности сводится к анализу двух линейных систем:

$$\begin{vmatrix} k_0^* & -k_1^* & -k_2^* & -k_3^* \\ -k_1^* & k_0^* & ik_3^* & -ik_2^* \\ -k_2^* & -ik_3^* & k_0^* & ik_1^* \\ -k_3^* & ik_2^* & -ik_1^* & k_0^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ k_1 & k_0 & ik_3 & -ik_2 \\ k_2 & -ik_3 & k_0 & ik_1 \\ k_3 & ik_2 & -ik_1 & k_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} k_0 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & k_0 & -ik_3 & ik_2 \\ -k_2 & ik_3 & k_0 & -ik_1 \\ -k_3 & -ik_2 & ik_1 & k_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0^* & k_1^* & k_2^* & k_3^* \\ k_1^* & k_0^* & -ik_3^* & ik_2^* \\ k_2^* & ik_3^* & k_0^* & -ik_1^* \\ k_3^* & -ik_2^* & ik_1^* & k_0^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Ниже используем следующие обозначения для параметров лоренцевского преобразования:

$$k_0 = n_0 + im_0\,, \qquad k_j = -in_j + m_j\,, \qquad k_0^2 - \mathbf{k}^2 = 1\,.$$

После простых вычислений приходим к системе уравнений относительно 8 переменных:

$$\begin{aligned} \mathbf{m}\,(\mathbf{S} + \mathbf{S'}) &= n_0\,(S_0 - S'_0)\,, \\ \mathbf{n}\,(\mathbf{S} - \mathbf{S'}) &= -m_0\,(S_0 + S'_0)\,, \\ \mathbf{m}\,(S_0 + S'_0) + (\mathbf{S} + \mathbf{S'}) \times \mathbf{n} &= n_0\,(\mathbf{S} - \mathbf{S'})\,, \\ \mathbf{n}\,(S_0 - S'_0) - (\mathbf{S} - \mathbf{S'}) \times \mathbf{m} &= -m_0\,(\mathbf{S} + \mathbf{S'})\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку решения ищутся в классе матриц из ортохронной группы Лоренца, то необходимо накладывать известные ограничения на параметры [12]

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 - m_0^2 - \mathbf{m}^2 = 1\,, \qquad n_0 m_0 + \mathbf{n}\,\mathbf{m} = 0\,. \tag{6}$$

«Нерелятивистские» 3-мерные матрицы Мюллера

Сначала рассмотрим более простой (нерелятивистский) случай, когда $S_0 = S_0 = I = \mathrm{inv}$ [16]; при этом решения уравнений ищутся среди элементов группы 3-мерных вращений, поэтому $m_0 = 0, m_j = 0$:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{S} + \mathbf{S'}) = -n_0\,(\mathbf{S} - \mathbf{S'})\,. \tag{7}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (возникает произвольный параметр $\Gamma \in [0, 2\pi]$):

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1\,, \qquad n_0 = \frac{\cos\Gamma}{S\,\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S'})}}\,(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S'})\,,$$

$$\mathbf{n} = \frac{\sin\Gamma}{\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S'})}}\,(\mathbf{S} + \mathbf{S'}) + \frac{\cos\Gamma}{S\,\sqrt{2(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S'})}}\,\mathbf{S} \times \mathbf{S'}\,. \tag{8}$$

Отметим, что при $\mathbf{S'} = \mathbf{S}$ соотношения (8) описывают малую группу для группы вращений:

$$n_0^2 + \mathbf{n}^2 = 1\,, \qquad n_0 = \cos\Gamma\,, \qquad \mathbf{n} = \sin\Gamma\,\frac{\mathbf{S}}{S}\,. \tag{9}$$

Когда $\Gamma = 0$, решение (8) выглядит особенно просто:

$$n_0 = \frac{S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S'}}{S\,\sqrt{2\,(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S'})}}\,, \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{S'}}{S\,\sqrt{2\,(S^2 + \mathbf{S}\,\mathbf{S'})}}\,. \tag{10}$$

Можно преобразовать решение (8) к векторной параметризации группы вращений [10]:

$$\mathbf{c}=\frac{\mathbf{n}}{n_0}, \qquad \mathbf{c}=\tan\Gamma\,\frac{S}{S^2+\mathbf{S}\,\mathbf{S'}}(\mathbf{S}+\mathbf{S'})+\frac{\mathbf{S}\times\mathbf{S'}}{S^2+\mathbf{S}\,\mathbf{S'}}\;. \tag{11}$$

Отметим, что для векторов Стокса можно ввести следующие параметры (I – это интенсивность света, p – это степень поляризации света [16]):

$$S_0=I, \qquad \mathbf{S}=Ip\,\mathbf{N}, \qquad I-\mathrm{inv}\,, \qquad \mathbf{N}^2=1\,. \tag{12}$$

Тогда (8) и (10) превращаются в

$$n_0^2+\mathbf{n}^2=1\,, \qquad n_0=\cos\Gamma\,\frac{1+\mathbf{NN'}}{\sqrt{2(1+\mathbf{NN'})}}\;,$$

$$\mathbf{n}=\sin\Gamma\,\frac{\mathbf{N}+\mathbf{N'}}{\sqrt{2(1+\mathbf{NN'})}}+\cos\Gamma\,\frac{\mathbf{N}\times\mathbf{N'}}{\sqrt{2(1+\mathbf{NN'})}} \tag{13}$$

и

$$\mathbf{c}=\tan\Gamma\,\frac{\mathbf{N}+\mathbf{N'}}{1+\mathbf{NN'}}+\frac{\mathbf{N}\times\mathbf{N'}}{1+\mathbf{NN'}}\,. \tag{14}$$

О нахождении 3-мерных матриц Мюллера по результатам поляризационных экспериментов

Поскольку один поляризационный эксперимент не позволяет найти однозначно 3-мерную матрицу Мюллера оптического элемента, то необходимо выполнить два независимых измерения:

$$\mathbf{N}_1 \longrightarrow \mathbf{N'}_1, \qquad \mathbf{N}_2 \longrightarrow \mathbf{N'}_2\,, \qquad O-?$$

В результате простого анализа можно получить 4 разных представления для одной и той же величины:

$$\tan\Gamma=+\,\frac{\mathbf{N}_1\,(\mathbf{N}_2\times\mathbf{N'}_2)}{(\mathbf{N}_2-\mathbf{N}_1)(\mathbf{N}_2+\mathbf{N'}_2)}\,, \qquad \tan\Gamma=-\,\frac{\mathbf{N'}_1\,(\mathbf{N'}_2\times\mathbf{N}_2)}{(\mathbf{N'}_2-\mathbf{N'}_1)(\mathbf{N'}_2+\mathbf{N}_2)}\,,$$

$$\tan\Gamma=+\,\frac{\mathbf{N}_2\,(\mathbf{N}_1\times\mathbf{N'}_1)}{(\mathbf{N}_1-\mathbf{N}_2)(\mathbf{N}_1+\mathbf{N'}_1)}\,, \qquad \tan\Gamma=-\,\frac{\mathbf{N'}_2\,(\mathbf{N'}_1\times\mathbf{N}_1)}{(\mathbf{N'}_1-\mathbf{N'}_2)(\mathbf{N'}_1+\mathbf{N}_1)}\,. \tag{15}$$

Таким образом, имеем простое выражение для $\tan\Gamma$ вместе с четырьмя дополнительными соотношениями, описывающими множество возможных пар 3-векторов Стокса, связываемых одной и той же матрицей Мюллера.

О решении задачи транзитивности для релятивистских матриц Мюллера

Обратимся к анализу общего случай 4-мерных векторов Стокса, при этом будем использовать обозначения:

$$S_0+S'_0=A\,, \qquad S_0-S'_0=B\,, \qquad \mathbf{S}+\mathbf{S'}=\mathbf{A}\,, \qquad \mathbf{S}-\mathbf{S'}=\mathbf{B}\,. \tag{16}$$

Полная система уравнений транзитивности принимает вид:

$$\mathbf{m}\;\mathbf{A}=n_0\;B\,, \qquad \mathbf{n}\;\mathbf{B}=-m_0\;A\,;$$

$$\mathbf{m}\;A+\mathbf{A}\times\mathbf{n}=n_0\;\mathbf{B}\,,$$

$$\mathbf{n}\;B-\mathbf{B}\times\mathbf{m}=-m_0\;\mathbf{A}\,; \tag{17}$$

$$n_0^2+\mathbf{n}^2-m_0^2-\mathbf{m}^2=1\,, \qquad n_0m_0+\mathbf{n}\;\mathbf{m}=0\,. \tag{18}$$

После необходимых математических операций можно привести эту систему уравнений к более простой:

$$n_0 = A\,x - \mathbf{A}^2\,y\,, \qquad \mathbf{n} = z\,\mathbf{A} - w\,A\,\mathbf{B} + y\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}\,,$$
$$m_0 = -B\,z + \mathbf{B}^2\,w\,, \qquad \mathbf{m} = x\,\mathbf{B} - y\,B\,\mathbf{A} + w\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}\,, \tag{19}$$

где введены 4 числовых параметра. При этом остается только одно независимое дополнительное условие связи: $n_0^2 - m_0^2 = 1 + \mathbf{m}^2 - \mathbf{n}^2$. Это квадратичное условие связи принимает вид уравнения для 4 параметров:

$$x^2(A^2 - \mathbf{B}^2) + 2xy\,A(B^2 - \mathbf{A}^2) + y^2[\,(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - B^2)\mathbf{A}^2 - A^2B^2\,] =$$
$$= z^2(B^2 - \mathbf{A}^2) + 2zw\,B(A^2 - \mathbf{B}^2) + w^2[\,(\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - A^2)\mathbf{B}^2 - A^2B^2\,] + 1\,. \tag{20}$$

Используя (19), можно выразить комплексный вектор-параметр k_a:

$$k_0 = (xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)\,,$$
$$\mathbf{k} = -(y\,B + i\,z)\,\mathbf{A} + (x + iwA)\,\mathbf{B} + (w - iy)\mathbf{A}\times\mathbf{B}\,. \tag{21}$$

Из (20) легко можно перейти к 3-мерному комплексному вектору Федорова [10]:

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{k}}{k_0} = \alpha\,\mathbf{A} + \beta\,\mathbf{B} + \gamma\,\mathbf{A}\times\mathbf{B}\,, \qquad \alpha = \frac{-(y\,B + i\,z)}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}\,,$$
$$\beta = \frac{x + iwA}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}\,, \qquad \gamma = \frac{w - iy}{(xA - izB) - (y\mathbf{A}^2 - iw\mathbf{B}^2)}\,. \tag{22}$$

Обращаем внимание на следующее: система уравнений (17) не меняет своего вида, если все групповые параметры умножить на любое вещественное число. Поэтому эти параметры в принципе могут быть определены из (17) только с точностью до общего множителя. Только обращаясь к уравнению (18), этот общий нормировочный множитель можно без ограничения общности полагать равным 1. В свою очередь, принципиальная неопределимость относительного множителя для четырех числовых параметров x, y, z, w означает, что в выражениях (22) для α, β, γ ничего существенного не теряется, если числитель и знаменатель разделить на любую (отличную от нуля) величину из четырех x, y, z, w; тем самым произвол в выборе независимых параметров будет исключен. Однако вместо такого формального исключения произвола, с математической точки зрения, может быть намного удобнее использовать 4 величины, подчиненные дополнительному квадратичному условию (20). В частности, в следующем разделе будет использована именно эта возможность.

О нахождении 4-мерных матриц Мюллера по результатам поляризационных измерений

Как установлено выше, каждое поляризационое измерение

$$S_a \overset{L}{\Longrightarrow} S'_a$$

позволяет получить одно квадратичное уравнение (20) для четырех неизвестных параметров. Понятно, что для однозначного нахождения матрицы Мюллера необходимо выполнить несколько независимых поляризационных опытов. Начнем с возможности использовать 4 измерения $i = 1,2,3,4$; проблема формулируется в виде 4 квадратичных уравнений:

$$x^2\,(A_i^2 - \mathbf{B}_i^2) + 2xy\,A_i(B_i^2 - \mathbf{A}_i^2) + y^2\,[\,(\mathbf{A}_i^2 + \mathbf{B}_i^2 - B_i^2)\mathbf{A}_i^2 - A_i^2B_i^2\,] =$$
$$= z^2\,(B_i^2 - \mathbf{A}_i^2) + 2zw\,B_i(A_i^2 - \mathbf{B}_i^2) + w^2\,[\,(\mathbf{A}_i^2 + \mathbf{B}_i^2 - A_i^2)\mathbf{B}_i^2 - A_i^2B_i^2\,] + 1\,. \tag{23}$$

Ее можно представить короче в символическом виде:

$$a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2=\alpha_1z^2+2\beta_1zw+\sigma_1w^2+1,$$
$$a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2=\alpha_2z^2+2\beta_2zw+\sigma_2w^2+1,$$
$$a_1x^2+2b_3xy+c_3y^2=\alpha_3z^2+2\beta_3zw+\sigma_3w^2+1,$$
$$a_4x^2+2b_4xy+c_4y^2=\alpha_4z^2+2\beta_4zw+\sigma_4w^2+1. \qquad (24)$$

Эта система решается, и логическая цепочка выглядит так:

$$(1) \quad \Rightarrow \quad x=x(y,z,w),$$
$$(2) \quad \Rightarrow \quad y=y(z,w), \qquad x=x(y(z,w),z,w)=\bar{x}(z,w),$$
$$(3) \quad \Rightarrow \quad z=z(w),$$
$$(4) \quad \Rightarrow \quad w=w(...), \qquad z=z(w(...)).$$

Однако этот способ представляется довольно сложным. Можно предложить другую и более простую процедуру, основанную на использовании результатов 6 независимых измерений. При этом задача сводится к системе 6 линейных уравнений относительно 6 переменных $x^2, y^2, 2xy, \quad z^2, w^2, 2zw$:

$$a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2-\alpha_1z^2-2\beta_1zw-\sigma_1w^2=+1,$$
$$a_2x^2+2b_2xy+c_2y^2-\alpha_2z^2-2\beta_2zw-\sigma_2w^2=+1,$$
$$a_1x^2+2b_3xy+c_3y^2-\alpha_3z^2-2\beta_3zw-\sigma_3w^2=+1,$$
$$a_4x^2+2b_4xy+c_4y^2-\alpha_4z^2-2\beta_4zw-\sigma_4w^2=+1,$$
$$a_5x^2+2b_5xy+c_5y^2-\alpha_5z^2-2\beta_5zw-\sigma_5w^2=+1,$$
$$a_6x^2+2b_6xy+c_6y^2-\alpha_6z^2-2\beta_6zw-\sigma_6w^2=+1.$$

Ее единственное решение определяется правилом Крамера:

$$x^2=\frac{\Delta_{x^2}}{\Delta}, \qquad y^2=\frac{\Delta_{y^2}}{\Delta}, \qquad 2xy=\frac{\Delta_{2xy}}{\Delta},$$
$$z^2=\frac{\Delta_{z^2}}{\Delta}, \qquad w^2=\frac{\Delta_{w^2}}{\Delta}, \qquad 2zw=\frac{\Delta_{2zw}}{\Delta},$$
$$x+y=\sqrt{\frac{\Delta_{x^2}+\Delta_{y^2}+\Delta_{2xy}}{\Delta}}, \qquad x-y=\sqrt{\frac{\Delta_{x^2}+\Delta_{y^2}-\Delta_{2xy}}{\Delta}},$$
$$z+w=\sqrt{\frac{\Delta_{z^2}+\Delta_{w^2}+\Delta_{2zw}}{\Delta}}, \qquad z-w=\sqrt{\frac{\Delta_{z^2}+\Delta_{w^2}-\Delta_{2zw}}{\Delta}}. \qquad (25)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Stokes, G.G. On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources / G.G. Stokes // Trans. Cambridge Phil. Soc. – 1852. – Vol. 9. – P. 399–416.

2. Mueller, H. Memorandum on the polarization optics of the photo-elestic shutter; Report № 2 of the OSRD project OEMsr576, Boston, MA, USA, 1943.

3. Jones, R.C. New calculus for the treatment of optical systems. I. Description and discussion of the calculus / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 488–493.

4. Hurwitz, H. A new calculus for the treatment of optical systems. II. Proof of three general equivalence theorems / H. Hurwitz, R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 493–499.

5. Jones, R.C. A new calculus for the treatment of optical systems. III. The Sohncke Theory of optical activity / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1941. – Vol. 31. – P. 500–503.

6. Jones, R.C. A new calculus for the treatment of optical systems, IV / R.C. Jones // J. Opt. Soc. Amer. – 1942. – Vol. 32. – P. 486–493.

7. Гельфанд, И.М. Представления группы вращений и группы Лоренца и их применения / И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. – М. : Физматгиз, 1958. – 367 с.

8. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1958. – 380 с.

9. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.

10. Федоров, Ф.И. Группа Лоренца / Ф.И. Федоров. – М. : Наука, 1979. – 384 с.

11. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука и техника, 1989. – 211 с.

12. Bogush, A.A. On Unique Parametrization of the Linear Group $GL(4.C)$ and Its Subgroups by Using the Dirac Algebra Basis / A.A. Bogush, V.M. Red'kov // NPCS. – 2008. – Vol. 11, № 1. – P. 1–24.

13. Бикватерионы и матрицы Мюллера / А.А. Богуш [и др.] // Доклады НАН Беларуси. – 2007. – Т. 51, № 5. – С. 71–76.

14. Богуш, А.А. Матрицы Мюллера в поляризационной оптике / А.А. Богуш // Весці НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 96–102.

15. Red'kov, V.M. Lorentz group and polarization of the light / V.M. Red'kov // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2011. – Vol. 21. – P. 203–220.

16. Снопко, В.Н. Поляризационные характеристики оптического излучения и методы их измерения / В.Н. Снопко. – Минск : Наука и техника, 1992. – 334 с.

V.M. Red'kov, E.M. Ovsiyuk. **Transitivity in the Theory of the Lorentz Group and the Stokes–Mueller Formalism in Optics**

Group-theoretical analysis of arbitrary polarization elements with Mueller matrices of the Lorentzian type is performed. Any single polarization measurement fixes parameters of the corresponding Mueller matrix up to 3 arbitrary variables. To any single polarization measurement corresponds a quadratic equation on 4 numerical parameters. A corresponding Mueller matrix can be found uniquely from results of four independent polarization measurements. Analytical expressions for these 4 parameters of any Mueller matrix can be given the most simple form when using the results of 6 arbitrary and independent measurements, the corresponding formulas are written down in explicit form.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 16.01.2012