УДК 517.5

К.Н. Жигалло, Т.В. Жигалло

АППРОКСИМАТИВНЫЕ СВОЙСТВА БИГАРМОНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПУАССОНА–ЧЕБЫШЕВА НА КЛАССЕ ЛИПШИЦА

В работе исследуются аппроксимативные свойства бигармонических интегралов Пуассона-Чебышева на классах Липшица порядка $\alpha,\ 0<\alpha\le 1$, функций, заданных на отрезке $[-1,1]$, т.е., функций, удовлетворяющих условию $|f(x_1)-f(x_2)|\le |x_1-x_2|^{\alpha}\ \forall x_1,x_2\in[-1,1]$. Эти свойства определяются поведением верхних граней $E\left(H^{\alpha};B_{\rho};x\right)=\sup\limits_{f\in H^{\alpha}}\left|f(x)-B_{\rho}(f;T;x)\right|$ при всех $0<\alpha\le 1$ в каждой точке конечного отрезка вещественной оси. Исследованию аппроксимативных свойств различных матричных методов – сумм Фурье, Фейера, Валле-Пуссена, Абеля-Пуассона и т.д., а также наилучшых приближений функций, заданных на отрезке, посвящены работы С.М. Никольского, А.Ф. Тимана, В.К. Дзядыка, В.П. Моторного, Н.П. Корнейчука, Р.М. Тригуба, Ю.И. Русецкого и других математиков. Нами получены асимптотические при $\rho\to 1-,\ 0<\alpha\le 1$, равенства для величины $E\left(H^{\alpha};B_{\rho};x\right)$, а также ее точное значение при всех $0<\rho<1$ в случае $\alpha=1$.

Обозначим через H^{α} [1, с. 969] класс Липшица порядка $\alpha,\ 0<\alpha\le 1$, функций f, заданных на отрезке $[-1,1]$, которые удовлетворяют условию

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le |x_1-x_2|^{\alpha}\ \forall x_1,x_2\in[-1,1]. \tag{1}$$

Пусть, далее, $\hat{T}_0(x)=\sqrt{\frac{1}{\pi}},\hat{T}_k(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos k\arccos x, k\in N,$ – ортонормированная с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1,1]$ система полиномов П.Л. Чебышева первого рода. Для каждой непрерывной функции f обозначим через $c_k=c_k(f)=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ последовательность коэффициентов Фурье функции f за системой $T_k(x)$ [2]. Бесконечный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_k \tag{2}$$

называют рядом Фурье–Чебышева функции f.

Известно, что функция f, которая удовлетворяет условию (1), является функцией с конечным изменением и непрерывной на отрезке $[-1,1]$, а ряд Фурье-Чебышева (2) такой функции сходится к f равномерно на этом отрезке.

Для каждой непрерывной на $[-1,1]$ функции f рассмотрим величину

$$B_{\rho}(f;T;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k c_kT_k(x),\ 0\le\rho<1, \tag{3}$$

которую будем называть бигармоническим интегралом Пуассона–Чебышева. Сразу обратим внимание на то, что функция $B_{\rho}(f;T;x)$ может быть представлена в виде:

$$B_{\rho}(f;T;x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\cos t)\big(B(\rho,t+y)+B(\rho,t-y)\big)dt,$$

где $y=\arccos x$, а $B(\rho,u)$ – бигармоническое ядро Пуассона,

$$B(\rho,u)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k\cos ku=\frac{\left(1-\rho^2\right)^2\left(1-\rho\cos u\right)}{2\left(1-2\rho\cos u+\rho^2\right)^2}. \tag{4}$$

В работе изучается поведение величины

$$E\left(H^{\alpha};B_{\rho};x\right)=\sup_{f\in H^{\alpha}}\left|f(x)-B_{\rho}(f;T;x)\right| \tag{5}$$

в каждой точке x отрезка $[-1,1]$ в таких случаях:

1) когда $\rho\to 1-$, $0<\alpha\le 1$;

2) для всех $0<\rho<1$, $\alpha=1$.

Если в явном виде найдена функция $\varphi(\rho)=\varphi(\rho;x)$ такая, что при $\rho\to 1-$ $E\left(H^{\alpha};B_{\rho};x\right)=\varphi(\rho;x)+o(\varphi(\rho;x))$, $x\in[-1,1]$, то, следуя А.И. Степанцу [3, стр. 198], скажем, что решена задача Колмогорова - Никольского (К.-Н.) для интеграла $B_{\rho}(f;T;x)$ на классе H^{α}, $0<\alpha\le 1$.

Отметим, что поведение верхних граней приближений на классах Липшица периодических функций гармоническими и бигармоническими интегралами Пуассона в равномерной метрике исследовались в работах [4–8]. Что касается непериодических функций, то возникновение и исследование задачи о асимптотическом поведении верхней грани приближения функций с класса H^{α}, $0<\alpha\le 1$, которые заданы на конечном промежутке, алгебраическими многочленами обусловлено работой С.М. Никольского [9]. В этой работе исследован вопрос о приближении функций с класса H^{1} суммами Фурье-Чебышева $S_n(f;T;x)$. Позже А.Ф. Тиман [1] получил решение задачи К.-Н. для сумм Фурье–Чебышева на классах H^{α} при всех $0<\alpha\le 1$, а также установил асимптотическое при $n\to\infty$ равенство для величины $E\left(H^{\alpha};\sigma_n;x\right)$, $0<\alpha\le 1$, σ_n – суммы Фейера–Чебышева, равномерно относительно x на отрезке $[-1,1]$.

Для гармонического интеграла Пуассона-Чебышева

$$P_{\rho}=P_{\rho}(f;T;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{k}c_k\hat{T}_k(x),\ 0\le\rho<1,$$

задача К.-Н. на классе Липшица решена Ю.И. Русецким [10]. Для величины

$$E\left(H^{\alpha};P_{\rho};x\right)=\sup_{f\in H^{\alpha}}\left|f(x)-P_{\rho}(f;T;x)\right|$$

при $\rho\to 1-$ он получил такие асимптотические равенства:

$$E\left(H^{\alpha};P_{\rho};x\right)=\frac{\left((1-\rho)\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+o\left(\left((1-\rho)\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}\right)+O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right),$$

при $0<\alpha<1$ и

$$E\left(H^{\alpha};P_{\rho};x\right)=\frac{2(1-\rho)}{\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}\sqrt{1-x^2}+O\left((1-\rho)\sqrt{1-x^2}\right)+O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right),$$

когда $\alpha=1$, где

$$\theta_{\rho,\alpha}(x)=\begin{cases}(1-\rho)^{2\alpha}|x|^{\alpha}, & 0<\alpha<\frac{1}{2},\\ (1-\rho)\sqrt{|x|}\ln\frac{1}{1-\rho}, & \alpha=\frac{1}{2},\\ (1-\rho)|x|^{\alpha}, & \alpha>\frac{1}{2}.\end{cases} \tag{6}$$

Цель данной работы заключается в следующем: для каждой точки x отрезка $[-1,1]$, во-первых, найти решение задачи К.-Н. на классе H^{α}, $0<\alpha\le 1$, для бигармонического интеграла Пуассона–Чебышева вида (3), а во-вторых, получить точное при всех $0<\rho<1$ равенство для величины (5) в случае $\alpha=1$.

Результаты исследований изложены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Для произвольного* $\alpha \in (0,1]$ *в каждой точке* $x \in [-1,1]$ *при* $\rho \to 1-$ *имеют место равенства*

$$E\left(H^{\alpha}; B_{\rho}; x\right) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^{\alpha} + O(\vartheta(\rho,\alpha))\right) + O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right), \tag{7}$$

когда $0 < \alpha < 1$*, где величина* $\theta_{\rho,\alpha}(x)$ *определена с помощью* (6),

$$\vartheta(\rho,\alpha) = \begin{cases} (1-\rho)^{3\alpha}, & 0 < \alpha < \frac{1}{3}, \\ (1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}, & \alpha = \frac{1}{3}, \\ 1-\rho, & \alpha > \frac{1}{3} \end{cases} \tag{8}$$

и $E\left(H^{1}; B_{\rho}; x\right) = \sqrt{1-x^2}\left(\frac{2(1-\rho)}{\pi} + \frac{2(1-\rho)^2}{\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}\right) + +O\left((1-\rho)^2\left(\sqrt{1-x^2} + |x|\right)\right).$ (9)

Доказательство. Воспользуемся свойствами положительного ядра (4) и неравенством (1), тогда

$$\left|f(x) - B_{\rho}(f,T,x)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(\cos t) - f(\cos y)\right)\left(B(\rho,t+y) + B(\rho,t-y)\right)dt\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(\cos t) - f(\cos y)\right|\left(B(\rho,t+y) + B(\rho,t-y)\right)dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t - \cos y\right|^{\alpha}\left(B(\rho,t+y) + B(\rho,t-y)\right)dt. \tag{10}$$

Поскольку функция

$$f_0(u) = \begin{cases} (x-u)^{\alpha}, & -1 \le u \le x, \\ (u-x)^{\alpha}, & x \le u \le 1 \end{cases}$$

принадлежит к H^{α}, $0 < \alpha \le 1$, и, как следует из (5),

$$E\left(H^{\alpha}; B_{\rho}; x\right) \ge \left|f_0(x) - B_{\rho}(f_0,T,x)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t - \cos y\right|^{\alpha}\left(B(\rho,t+y) + B(\rho,t-y)\right)dt, \tag{11}$$

то из (10) и (11) получаем, что

$$E\left(H^{\alpha}; B_{\rho}; x\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t - \cos y\right|^{\alpha}\left(B(\rho,t+y) + B(\rho,t-y)\right)dt. \tag{12}$$

Обозначим

$$I(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos t - \cos y\right|^{\alpha} B(\rho,t+y)dt. \tag{13}$$

Далее воспользуемся тем, что подинтегральная функция в (13) является периодической, следовательно,

$$I(y) = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t-y}{2}\sin\frac{t+y}{2}\right|^{\alpha} B(\rho,t+y)dt = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\sin\frac{t-2y}{2}\right|^{\alpha} B(\rho,t)dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t\sin(t-y)\right|^{\alpha} B(\rho,2t)dt = \frac{2^{\alpha}}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin^2 t\cos y - \sin t\cos t\sin y\right|^{\alpha} B(\rho,2t)dt. \tag{14}$$

Вследствие того, что при $\alpha \in (0,1]$

$$\left\| u \pm v|^{\alpha} - |u|^{\alpha}\right| \le |v|^{\alpha}, \tag{15}$$

из равенства (14) находим

$$I(y) = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{\alpha} B(\rho,2t)dt + O(1)\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}|\cos y|^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha} tB(\rho,2t)dt. \tag{16}$$

Последующие рассуждения сначала проведем для случая $0<\alpha<1$ Воспользовавшись неравенством (15), первое слагаемое из правой части соотношения (16) запишем так:

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^{\alpha} B(\rho,2t)dt = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\alpha}\left|1-2\sin^2\frac{t}{2}\right|^{\alpha} B(\rho,2t)dt =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} tB(\rho,2t)dt + (\sin y)^{\alpha}O(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\alpha} B(\rho,2t)dt. \tag{17}$$

Для первого интеграла с правой части соотношения (17), принимая к вниманию (4), получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\alpha} B(\rho,2t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k\cos 2kt\right)dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos 2kt\right)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k}{2}(1-\rho^2)\right)\rho^k\cos 2ktdt.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^{\alpha} B(\rho,2t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} tP(\rho,2t)dt + \frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos 2ktdt, \tag{18}$$

где $P(\rho,2t)$ – гармоническое ядро Пуассона

$$P(\rho,2t) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos 2kt = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)}.$$

Интегрируя частями во втором слагаемом из правой части (18), находим

$$\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos 2ktdt = -\frac{\alpha}{4}\rho(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1} t\cos t\frac{\sin 2t}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}dt =$$

$$= -\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\cos^2 tP(\rho,2t)dt. \tag{19}$$

Объеденив (19) и (18), заключаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} tB(\rho,2t)dt = (1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} tP(\rho,2t)dt + \alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} t\sin^2 tP(\rho,2t)dt. \tag{20}$$

Дальше переходим к поиску оценки первого интеграла из правой части (20). Прежде всего отметим, что для произвольной непрерывной при $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ функции $f(t)$ исполняется равенство

$$\frac{f(\sin t)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2 t} - \frac{f(t)}{(1-\rho)^2+4\rho t^2} = O(1), \tag{21}$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по $0\le\rho<1$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Отсюда, к примеру, (см. также 10, с. 138] следует, что

$$\frac{\sin^\alpha t}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2 t}-\frac{t^\alpha}{(1-\rho)^2+4\rho t^2}=O(1).$$

Поэтому

$$(1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t P(\rho,2t)dt=(1-\alpha\rho)\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^\alpha t}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2 t}dt=$$

$$=\frac{1-\alpha\rho}{2}\frac{1+\rho}{(1-\rho)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha}{1+\left(\frac{2\sqrt{\rho}t}{1-\rho}\right)^2}dt+O(1-\rho^2)=(1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}}\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt+O(1-\rho)=$$

$$=(1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\int_0^\infty\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt+O(1-\rho). \qquad (22)$$

Учитывая то, что

$$\int_0^\infty\frac{t^\alpha}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}},\alpha\in(0,1), \qquad (23)$$

[11, с. 306] из (22) при $\rho\to 1-$ и $0<\alpha<1$ следует

$$(1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t P(\rho,2t)dt=(1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+O(1-\rho). \qquad (24)$$

Введем обозначение

$$\xi(\rho)=(1-\rho)^\alpha\left((1-\alpha\rho)(1+\rho)-2(1-\alpha)(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right).$$

Поскольку $\xi(\rho)=(1-\rho)^\alpha\left(-\alpha\rho-\alpha\rho^2+2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right)+(1-\rho)^\alpha\left(1+\rho-2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right)$, и при $\rho\to 1-$

$$(1-\rho)^\alpha\left(-\alpha\rho-\alpha\rho^2+2\alpha(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right)=o(1-\rho),$$

$$(1-\rho)^\alpha\left(1+\rho-2(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}\right)=o(1-\rho),$$

то $\xi(\rho)=o(1-\rho)$, $\rho\to 1-$. Исходя из (24) и того, что

$$(1-\alpha\rho)\frac{(1+\rho)(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+3}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}=(1-\alpha)\frac{\pi(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+\frac{\pi}{2^{\alpha+3}\cos\frac{\alpha\pi}{2}(\sqrt{\rho})^{\alpha+1}}\xi(\rho),$$

при $\rho\to 1-$ получаем оценку первого слагаемого с правой части равенства (20)

$$(1-\alpha\rho)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t P(\rho,2t)dt=(1-\alpha)\frac{\pi(1-\rho)^\alpha}{2^{\alpha+2}\cos\frac{\alpha\pi}{2}}+O(1-\rho). \qquad (25)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\frac{\sin^\alpha t\sin^2 t}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2 t}-\frac{t^\alpha t^2}{(1-\rho)^2+4\rho t^2}=O(1),$$

которое получаем из (21), оценим второй интеграл из правой части (20)

$$\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\sin^2 t P(\rho,2t)dt=\alpha\rho(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha t^2 dt}{(1-\rho)^2+4\rho t^2}+O(1-\rho^2). \qquad (26)$$

Дальше вычислим оценку первого слагаемого с (26). Итак,

$$\alpha\rho(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha t^2 dt}{(1-\rho)^2+4\rho t^2}=\frac{\alpha\rho(1-\rho^2)}{4\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t^\alpha dt}{\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}t}\right)^2+1}==\frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}\frac{t^{-\alpha}dt}{t^2(1+t^2)}<$$

$$<\frac{\alpha}{4}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2)\int_{\frac{1-\rho}{\pi\sqrt{\rho}}}^{\infty}t^{-\alpha-2}dt=\frac{\alpha}{4(1+\alpha)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\alpha+1}(1-\rho^2). \qquad (27)$$

Подставляя оценку (27) в (26), получаем

$$\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^\alpha t\sin^2 tP(\rho,2t)dt=O(1-\rho),\ \ \rho\to 1-. \qquad (28)$$

Объединение соотношений (20), (25) и (28) дает возможность записать оценку первого слагаемого с правой части (17)

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi}(\sin y)^\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^\alpha B(\rho,2t)dt=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha\left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^\alpha+O(1-\rho)\right). \qquad (29)$$

Второй интеграл из правой части (17) представим следующим образом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha B(\rho,2t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho,2t)dt+$$

$$+\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos 2ktdt. \qquad (30)$$

Далее, применяя интегрирование частями, видим, что справедливо равенство

$$\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos 2ktdt=-\frac{(1-\rho^2)}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha\right)'\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin 2ktdt=$$

$$=-\frac{\alpha\rho}{4}(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\alpha-1}\left(\cos t\sin^2\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin^2 t\right)\sin 2t}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}dt=$$

$$=-\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha\left(\cos^2 t+2\cos^2\frac{t}{2}\cos t\right)P(\rho,2t)dt. \qquad (31)$$

Объединив (31) и (30), получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha B(\rho,2t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho,2t)dt-$$

$$-\alpha\rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha\left(\cos^2 t+2\cos^2\frac{t}{2}\cos t\right)P(\rho,2t)dt<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho,2t)dt. \qquad (32)$$

Опять воспользуемся оценкой (21), имеем,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha P(\rho,2t)dt=\frac{1-\rho^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\sin t\sin^2\frac{t}{2}\right)^\alpha}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2 t}dt=$$

$$= \frac{1-\rho^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{t^3}{4}\right)^{\alpha}}{(1-\rho)^2 + 4\rho t^2} dt + O(1-\rho^2) =$$

$$= \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt + O(1-\rho^2) := I(\alpha,\rho) + O(1-\rho^2). \qquad (33)$$

Оценим величину $I(\alpha,\rho)$ в каждом отдельном случае: $\alpha < \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha > \frac{1}{3}$. Пусть $\alpha < \frac{1}{3}$. Тогда с учетом (23), находим

$$I(\alpha,\rho) = \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt <$$

$$< \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}} \int_0^{\infty} \frac{t^{3\alpha}}{1+t^2} dt = \frac{(1+\rho)(1-\rho)^{3\alpha}}{2^{2\alpha+2}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}} \frac{\pi}{\cos\frac{3\alpha}{2}\pi}. \qquad (34)$$

При $\alpha = \frac{1}{3}$ имеем

$$I\left(\frac{1}{3},\rho\right) = 2^{\frac{1}{3}} \frac{1-\rho^2}{16\rho} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{16\rho}\left(1-\rho^2\right) \ln \frac{\sqrt{(1-\rho)^2 + \pi^2\rho}}{1-\rho}. \qquad (35)$$

При $\alpha > \frac{1}{3}$ заключаем, что

$$I(\alpha,\rho) < \frac{(1-\rho^2)(1-\rho)^{3\alpha-1}}{2^{2\alpha+1}\left(2\sqrt{\rho}\right)^{3\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} t^{3\alpha-2} dt = \frac{\pi^{3\alpha-1}}{2^{5\alpha+2}(3\alpha-1)} \frac{1-\rho^2}{\rho}. \qquad (36)$$

Следовательно, согласно (32–36),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin t \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{\alpha} B(\rho,2t) dt = \vartheta(\rho,\alpha), \qquad (37)$$

где величина $\vartheta(\rho,\alpha)$ определена с помощью (8).

Из соотношений (17), (29) и (37) следует, что для первого слагаемого с правой части (16) при $0 < \alpha < 1$ имеет место равенство

$$\frac{2^{\alpha+1}}{\pi} (\sin y)^{\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t \cos t)^{\alpha} B(\rho,2t) dt = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}} (1-\rho)^{\alpha} + \vartheta(\rho,\alpha) \right). \qquad (38)$$

Оценим второй интеграл с правой части соотношения (16). Аналогично, как и при получении (32), убеждаемся, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t B(\rho,2t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t P(\rho,2t) dt - 2\alpha\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t \cos^2 t P(\rho,2t) dt < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} t P(\rho,2t) dt.$$

(39)

Для интеграла (39) имеет место (на основании соотношения (18) из работы [10, с. 141]) следующая оценка:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2\alpha} tB(\rho,2t)dt = \begin{cases} O\left((1-\rho)^{2\alpha}\right), & \alpha < \frac{1}{2}, \\ O\left((1-\rho)\ln\frac{1}{1-\rho}\right), & \alpha = \frac{1}{2}, \\ O(1-\rho), & \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{40}$$

Объединив соотношения (16), (38) и (40), получаем оценку интеграла $I(y)$ при $0<\alpha<1$

$$I(y) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^{\alpha} + \vartheta(\rho,\alpha)\right) + O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right), \tag{41}$$

где величина $\theta_{\rho,\alpha}(x)$, $x\in[-1,1]$, определена с помощью формулы (6).

Проведя аналогичные шаги, как и при получении (14), нетрудно убедиться, что интеграл

$$I(-y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos t - \cos y|^{\alpha} B(\rho,t-y)dt \tag{42}$$

можно представить так:

$$I(-y) = \frac{2^{\alpha}}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^2 t\cos y + \sin t\cos t\sin y\right|^{\alpha} B(\rho,2t)dt.$$

Отсюда, на основании соотношения (15), убеждаемся в том, що для интеграла $I(-y)$ имеет место равенство (16). Поэтому, оценка (41) верна и для интеграла $I(-y)$:

$$I(-y) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^{\alpha} + \vartheta(\rho,\alpha)\right) + O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right). \tag{43}$$

Таким образом, из формул (12), (13), (41–43) при $\rho\to 1-$ следует равенство (7).

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha=1$. Для первого интеграла с правой части соотношения (16), используя равенство

$$\frac{1-\rho\cos 2t}{\left(1-2\rho\cos 2t+\rho^2\right)^2} = \frac{1}{2(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)} + \frac{1-\rho^2}{2\left(1-2\rho\cos 2t+\rho^2\right)^2}, \tag{44}$$

находим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos tB(\rho,2t)dt = \frac{(1-\rho^2)^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\frac{1-\rho\cos 2t}{\left(1-2\rho\cos 2t+\rho^2\right)^2}dt =$$

$$= \frac{(1-\rho^2)^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t\left(\frac{1}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} + \frac{1-\rho^2}{\left(1-2\rho\cos 2t+\rho^2\right)^2}\right)dt. \tag{45}$$

Поскольку

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos tdt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} = \frac{1}{8\rho}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(1-2\rho\cos 2t+\rho^2\right)}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} = \frac{1}{4\rho}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho},$$

а

$$(1-\rho^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos tdt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = \frac{1}{2(1-\rho)(1+\rho)},$$

то, подставляя полученные значения двух интегралов в (45), получаем, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t B(\rho,2t)dt = \frac{(1-\rho^2)^2}{16\rho}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}+\frac{1-\rho^2}{8} = \frac{1-\rho}{4\pi}+\frac{(1-\rho)^2}{4\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}+O((1-\rho)^2). \quad (46)$$

Опять воспользовавшись (44), второй интеграл с правой части (16) в случае $\alpha=1$ оценим следующим образом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t B(\rho,2t)dt = \frac{(1-\rho^2)^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t(1-\rho\cos 2t)}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}dt =$$

$$= \frac{(1-\rho^2)^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 tdt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}+\frac{(1-\rho^2)^3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 tdt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}. \quad (47)$$

Установим значение первого интеграла с правой части формулы (47). Как следует из (21)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 tdt}{(1-\rho^2)+4\rho\sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2dt}{(1-\rho^2)+4\rho t^2}+O(1),$$

тогда при $\rho\to 1-$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 tdt}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2dt}{1+\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}t\right)^2}+O(1) = \frac{1}{(1-\rho)^2}\left(\frac{1-\rho}{2\sqrt{\rho}}\right)^3\int_0^{\frac{\pi\sqrt{\rho}}{1-\rho}} \frac{t^2dt}{1+t^2}+O(1) = O(1).$$

Поскольку

$$\frac{\sin^2 t}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = -\frac{1}{4\rho}\left(\frac{(1-\rho)^2}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2}-\frac{1}{1-2\rho\cos 2t+\rho^2}\right),$$

то, применяя формулы 2.562.1 и 2.563.1 из [11, с. 166], приходим к тому, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 tdt}{(1-2\rho\cos 2t+\rho^2)^2} = \frac{\pi}{4(1+\rho)^3(1-\rho)}.$$

Подставляя полученные значения интегралов в (47), для второго интеграла с правой части (16) в случае $\alpha=1$ находим оценку

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t B(\rho,2t)dt = O((1-\rho)^2). \quad (48)$$

Из соотношений (16), (46) и (48) заключаем, что для интеграла $I(y)$ вида (13) при $\alpha=1$ справедлива оценка

$$I(y) = \left(\frac{1-\rho}{\pi}+\frac{(1-\rho)^2}{\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}\right)\sqrt{1-x^2}+O(1-\rho)^2\left(\sqrt{1-x^2}+|x|\right). \quad (49)$$

Поскольку для интеграла $I(-y)$ вида (42) при $\alpha=1$ имеет место такая же оценка, как и для интеграла $I(y)$, то из (12), (13) и (49) получаем равенство (9). Теорема 1 доказана.

Отметим, что в каждой точке $x\in(-1,1)$ при $\rho\to 1-$ равенства (7) (когда $0<\alpha<1$) и (9) (при $\alpha=1$) являются асимптотическими.

Следствие 1. *Для каждого* $0<\alpha<1$ *в любой точке* $x\in(-1,1)\backslash\{0\}$ *при* $\rho\to 1-$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$E\left(H^\alpha;B_\rho;x\right)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^\alpha\frac{1-\alpha}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(1-\rho)^\alpha+O\left(\theta_{\rho,\alpha}(x)\right).$$

Теорема 2. *Для каждого* $x\in[-1,1]$ *и* $0<\rho<1$ *имеет место равенство*

$$E\left(H^1;B_\rho;x\right)=\frac{(1-\rho^2)^2}{2\pi\rho}\sqrt{1-x^2}\ln\frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho x^2}}{1-\rho}+\frac{1-\rho}{2\pi}\left(2(\pi-2\arccos x)x+(1+\rho)^2\sqrt{1-x^2}\right)+$$

$$+\frac{(1-\rho)^2}{2\pi\rho}\left((1-\rho)^2-2\rho^2\right)x\frac{2\rho x\sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2}+\frac{(1-\rho)^2}{2\pi}(1+\rho)\left((1+\rho)^2-4\rho x^2\right)\frac{\sqrt{1-x^2}}{(1+\rho)^2-4\rho x}. \quad (50)$$

Доказательство. В условиях теоремы 2 справедлива формула (12), из которой при $\alpha=1$, используя (4), получаем

$$E\left(H^1;B_\rho;x\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t-\cos y|\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\cos ky+\right.$$

$$\left.+(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt\cos ky\right)dt,\ \ y=\arccos x.$$

Положим

$$B_\rho^1(t;y):=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos kt\cos ky,$$

$$B_\rho^2(t;y):=(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt\cos ky.$$

Тогда

$$E\left(H^1;B_\rho;x\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^y\left(\cos t-\cos y\right)\left(B_\rho^1(t;y)+B_\rho^2(t;y)\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_y^\pi\left(\cos y-\cos t\right)\left(B_\rho^1(t;y)+B_\rho^2(t;y)\right)dt. \quad (51)$$

Рассмотрим первое слагаемое из (51), используя следующие обозначения:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^y\left(\cos t-\cos y\right)\left(B_\rho^1(t;y)+B_\rho^2(t;y)\right)dt=I_1-I_2, \quad (52)$$

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^y\cos tB_\rho^1(t;y)dt+\frac{1}{\pi}\int_0^y\cos tB_\rho^2(t;y)dt:=\frac{1}{\pi}(I_1^1+I_1^2), \quad (53)$$

$$I_2=\frac{\cos y}{\pi}\int_0^y\left(B_\rho^1(t;y)+B_\rho^2(t;y)\right)dt:=\frac{\cos y}{\pi}(I_2^1+I_2^2). \quad (54)$$

В работе Ю.И. Русецкого [10] показано, что

$$I_1^1=\sin y+\rho\cos y\left(y+\frac{1}{2}\sin 2y\right)+\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \quad (55)$$

Далее находим

$$I_1^2=(1-\rho^2)\int_0^y\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos ky\cos t\cos kt dt=$$

$$=\frac{1-\rho^2}{2}\left(\frac{\rho\cos y\sin 2y}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)\right), \quad (56)$$

$$I_2^1=y+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos ky\sin ky, \quad (57)$$

$$I_2^2=(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos ky\sin ky. \quad (58)$$

Из соотношений (53), (55) и (56) следует

$$I_1=\frac{1}{\pi}(\sin y+\rho\cos y\left(y+\frac{\sin 2y}{2}\right)+\frac{1-\rho^2}{4}\rho\cos y\sin 2y+\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)+$$

$$+\frac{1-\rho^2}{2}\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)). \tag{59}$$

А из (54), (57) и (58) имеем, что

$$I_2=\frac{\cos y}{\pi}(y+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos ky\sin ky+(1-\rho^2)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos ky\sin ky). \tag{60}$$

Второе слагаемое из (51) представим следующим образом:

$$\frac{1}{\pi}\int_y^{\pi}(\cos y-\cos t)\left(B_\rho^1(t;y)+B_\rho^2(t;y)\right)dt=I_3-I_4, \tag{61}$$

$$I_3=\frac{\cos y}{\pi}\left(\int_y^{\pi}B_\rho^1(t;y)dt+\int_y^{\pi}B_\rho^2(t;y)dt\right):=\frac{\cos y}{\pi}\left(I_3^1+I_3^2\right), \tag{62}$$

$$I_4=\frac{1}{\pi}\left(\int_y^{\pi}\cos tB_\rho^1(t;y)dt+\int_y^{\pi}\cos tB_\rho^2(t;y)dt\right):=\frac{1}{\pi}(I_4^1+I_4^2). \tag{63}$$

Далее находим, что

$$I_3^1=\pi-y-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos ky\sin ky, \tag{64}$$

$$I_3^2=-\left(1-\rho^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos ky\sin ky. \tag{65}$$

Для интеграла I_4^1 воспользуемся оценкой из работы [10]

$$I_4^1=-\sin y+\rho\cos y\left(\pi-y-\frac{1}{2}\sin 2y\right)-\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \tag{66}$$

И, наконец, для интеграла I_4^2 получаем

$$I_4^2=(1-\rho^2)\int_y^{\pi}\cos t\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\cos kt\cos ky dt=\frac{1-\rho^2}{2}\int_y^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k\rho^k\left(\cos(k-1)t+\cos(k+1)t\right)\cos ky dt=$$

$$=-\frac{1-\rho^2}{2}\left(\frac{\rho}{2}\cos y\sin 2y+\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)\right). \tag{67}$$

Сопоставив соотношения (61–67), приходим к следующему:

$$\int_y^{\pi}(\cos y-\cos t)\left(B_\rho^1(t;y)+B_\rho^2(t;y)\right)dt=\cos y\left(\pi-y-\right.$$

$$\left.-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos ky\sin ky-\left(1-\rho^2\right)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos ky\sin ky\right)+\sin y-$$

$$-\rho\cos y\left(\pi-y-\frac{1}{2}\sin 2y\right)+\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)+$$

$$+\frac{1-\rho^2}{2}\left(\frac{\rho}{2}\cos y\sin 2y+\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)\right). \tag{68}$$

Следовательно, с учетом (51), (59), (60) и (68), получим

$$\pi E\left(H^1;B_\rho;x\right)=2\sin y+\rho\cos y\sin 2y+\cos y(\pi-2y)(1-\rho)+$$

$$+2\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)-4\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos ky\sin ky+$$

$$+\frac{1-\rho^2}{2}\rho\cos y\sin 2y-2(1-\rho^2)\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos ky\sin ky+$$

$$+(1-\rho^2)\sum_{k=2}^{\infty} k\rho^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \qquad (69)$$

Заметим, что для величины $E\left(H^1;P_\rho;x\right), P_\rho(\cdot)$ – гармонический интеграл Пуассона-Чебышева было получено (см. [10]) следующее представление:

$$\pi E\left(H^1;P_\rho;x\right)=2\sin y+\rho\cos y\sin 2y+\cos y(\pi-2y)(1-\rho)+$$

$$+2\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k \cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right)-4\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos ky\sin ky. \qquad (70)$$

Правую часть с (70) $\forall x\in[-1,1]$ можно записать еще в таком виде:

$$\pi E\left(H^1;P_\rho;x\right)=\frac{1-\rho^2}{\rho}\sqrt{1-x^2}\ln\frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho x^2}}{1-\rho}+$$

$$+(1-\rho)(\pi-2\arccos x)x+\frac{(1-\rho)^2}{\rho}x\frac{2\rho x\sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2},\ 0<\rho<1. \qquad (71)$$

Положим

$$\Upsilon:=\frac{1-\rho^2}{2}\rho\cos y\sin 2y-2(1-\rho^2)\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos ky\sin ky+$$

$$+(1-\rho^2)\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^k\cos ky\left(\frac{\sin(k+1)y}{k+1}+\frac{\sin(k-1)y}{k-1}\right). \qquad (72)$$

Тогда

$$\Upsilon=(1-\rho^2)\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^k\cos ky\Delta^2\left(\frac{\sin ky}{k}\right)-\frac{1-\rho^2}{2}\rho\cos y\sin 2y+(1-\rho^2)(1-\cos y)\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\sin 2ky, \quad (73)$$

где $\Delta^2\left(\frac{\sin ky}{k}\right)=\frac{\sin(k-1)y}{k-1}-2\frac{\sin ky}{k}+\frac{\sin(k+1)y}{k+1}$. Далее воспользуемся тождеством

$$\sum_{k=2}^{n}u_k\Delta^2(v_k)=\sum_{k=2}^{n}v_k\Delta^2(u_k)+u_2v_1-u_1v_2+u_nv_{n+1}-u_{n+1}v_n.$$

Поскольку $n\rho^n\cos ny\frac{\sin(n+1)y}{n+1}-(n+1)\rho^{n+1}\cos(n+1)y\frac{\sin ny}{n}=o(1)$, то

$$\sum_{k=2}^{\infty}k\rho^k\cos ky\Delta^2\left(\frac{\sin ky}{k}\right)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin ky}{k}\Delta^2\left(k\rho^k\cos ky\right)+2\rho^2\cos 2y\sin y-\rho\cos y\frac{\sin 2y}{2}. \qquad (74)$$

Как несложно убедиться,

$$\Delta^2\left(k\rho^k\cos ky\right)=k\rho^k\Delta^2\left(\cos ky\right)+k\rho^k\left(\frac{(1-\rho)^2}{\rho}\cos ky\cos y+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\rho^2}{\rho}\sin ky\sin y\right)-\rho^k\left(\frac{1-\rho^2}{\rho}\cos ky\, cosy+\frac{1+\rho^2}{\rho}\sin ky\sin y\right).$$

Принимая ко вниманию последнее равенство, а также (74), перепишем по-новому соотношение (73):

$$\Upsilon=(1-\rho^2)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin ky}{k}\left(k\rho^k\Delta^2\left(\cos ky\right)+k\rho^k\left(\frac{(1-\rho)^2}{\rho}\cos ky\cos y+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-\rho^2}{\rho}\sin ky\sin y\right)-\rho^k\left(\frac{1-\rho^2}{\rho}\cos ky\cos y+\frac{1+\rho^2}{\rho}\sin ky\sin y\right)\right)+$$

$$+(1-\rho^2)\left(2\rho^2\cos 2y\sin y-\rho\cos y\sin 2y+(1-\cos y)\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\sin 2ky\right).$$

Отсюда, обращая внимание на то, что $\Delta^2\left(\cos ky\right)=2\cos ky(\cos y-1)$, получаем

$$\Upsilon=\frac{1+\rho}{\rho}(1-\rho)^3\cos y\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\sin ky\cos ky+\frac{(1+\rho)^2}{\rho}(1-\rho)^2\sin y\sum_{k=2}^{\infty}\rho^k\sin^2 ky-$$
$$-\frac{(1+\rho)^2}{\rho}(1-\rho)^2\cos y\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\sin ky\cos ky-\frac{1+\rho^2}{\rho}(1-\rho^2)\sin y\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\sin^2 ky+$$
$$+2\rho^2(1-\rho^2)\cos 2y\sin y-\rho(1-\rho^2)\cos y\sin 2y.$$

Или, проведя некоторые элементарные преобразования,

$$\Upsilon=\frac{1+\rho}{2\rho}(1-\rho)^3\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\sin 2ky+\frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2\sin y\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k(1-\cos 2ky)-$$
$$-\frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2\cos y\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\sin 2ky-\frac{1+\rho^2}{2\rho}(1-\rho^2)\sin y\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}(1-\cos 2ky). \qquad (75)$$

Далее воспользуемся формулами из [12]:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\sin 2ky=\frac{\rho\sin 2y}{1-2\rho\cos 2y+\rho^2},\ \sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\cos 2ky=\frac{-\rho\cos 2y+1}{1-2\rho\cos 2y+\rho^2}$$

[9, с. 736], формула 5.4.9.(3)),

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\sin 2ky=\frac{\rho\sin 2y}{1-\rho\cos 2y},\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}\cos 2ky=-\frac{1}{2}\ln(1-2\rho\cos 2y+\rho^2)$$

(см. [9, с. 738], формулы 5.4.9.(12) и 5.4.9.(13)), а также равенствами

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k}=\ln\frac{1}{1-\rho},\ \ \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k=\frac{\rho}{1-\rho}.$$

Тогда с (75) для величины Υ, которая задана с помощью (72), получаем

$$\Upsilon=\frac{1+\rho}{2}(1-\rho)^3\cos y\frac{\sin 2y}{1-2\rho\cos 2y+\rho^2}+\frac{(1+\rho)^2}{2}(1-\rho)^2\sin y\left(\frac{1}{1-\rho}-\frac{\cos 2y-\rho}{1-2\rho\cos 2y+\rho^2}\right)-$$
$$-\frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2\cos y\frac{\rho\sin 2y}{1-\rho\cos 2y}-\frac{1+\rho^2}{2\rho}(1-\rho^2)\sin y\left(\ln\frac{1}{1-\rho}+\frac{1}{2}\ln(1-2\rho\cos 2y+\rho^2)\right).$$

Поскольку $y=\arccos x$, то последнее соотношение запишется так:

$$\Upsilon=(1+\rho)(1-\rho)^3\frac{x^2\sqrt{1-x^2}}{(1+\rho)^2-4\rho x^2}+\frac{(1+\rho)^2}{2}(1-\rho)^2\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{1-\rho}+\frac{1+\rho-2x^2}{(1+\rho)^2-4\rho x^2}\right)-$$
$$-\frac{(1+\rho)^2}{2\rho}(1-\rho)^2x\frac{2\rho x\sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2}-\frac{1+\rho^2}{2\rho}(1-\rho^2)\sqrt{1-x^2}\ln\frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho x^2}}{1-\rho}. \qquad (76)$$

Из равенства (69), обращая внимание на (70–72) и (76), получаем (50). Теорема 2 доказана.

Отметим, что в случае $x=0$ из (50) следует равенство

$$E\left(H^1;B_\rho;0\right)=(1-\rho)\frac{(1+\rho)^2}{2\pi}+(1-\rho)^2\frac{1+\rho}{2\pi}\left(\frac{1+\rho}{\rho}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}+1\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тиман, А.Ф. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, обыкновенными многочленами /А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1951. – 77, № 6 – С. 969–972.

2. Пашковский, С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. – М. : Наука, 1983. – 384 с.

3. Степанец, А.И. Методы теории приближения: В 2-х ч. /А.И. Степанец. – Киев : Ин-т математики НАН Украны, 2002. – Ч.I. – 427 с.

4. Натансон, В.П. О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона / В.П. Натансон // Докл. АН СССР. – 1950 – 72. – С. 11–14.

5. Тиман, А.Ф. Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона /А.Ф. Тиман // Докл. АН СССР. – 1950 – 74. – С. 17–20.

6. Фалалеев, Л.П. О приближении функций обобщенными операторами Абеля-Пуассона / Л.П. Фалалеев // Сибирский м–тем. журнал. – 2001. – 42, № 4. – С. 926–936.

7. Pych, P. On biharmonic function in unit disc / P. Pych // Ann. pol. math. – 1968. – 20, № 3. – P. 203–213.

8. Каниев, С. Об уклонении бигармонических в круге функций от их граничных значений / С. Каниев // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 5. – С. 995–998.

9. Никольский, С.М. О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица / С.М. Никольский // Изв. АН СССР. Сер.мат.– 1946. – 27, №4. – С. 295–318.

10. Русецкий, Ю.И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля–Пуассона / Ю.И. Русецкий // Сибирский матем. журнал. – 1968. – 9, № 1. – С. 136–144.

11. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Физматиз. – 1963. – 1100 с.

12. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука. – 1981. – 798 с.

***K.N. Zhyhallo, T.V. Zhyhallo.* Approximative Properties of Poisson-Chebyshev's Biharmonic Integrals on the Class of Lipschitz**

Approximative properties of Poisson-Chebyshev's biharmonic integrals on the Lipschitz's class order α, $0<\alpha\le 1$, of the functions, which are set on a segment $[-1,1]$, and for any $x\in[-1,1]$ which satisfy the condition $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le|x_1-x_2|^{\alpha}$ are investigated in the article. These properties are determined by the behaviour of upper border $E\left(H^{\alpha};B_{\rho};x\right)=\sup\limits_{f\in H^{\alpha}}\left|f(x)-B_{\rho}(f,T,x)\right|$ at all $0<\alpha\le 1$ in every point of the finite segment of real axis. The works of S.M. Nikolskiy, A.F. Timan, V.K. Dzyadyk, V.P. Motorny, M.P. Korneychuk, R.M. Trigub, Yu.I. Ruseckiy and other mathematicians are devoted to the research of approximative properties of different matrix methods, such as Fourier's partial sums, Fejer's, Valle-Poussin's methods, methods of approximation by Abel-Poisson's integrals and others and also the best approximations of functions, which are given in a segment. We have got asymptotic at $\rho\to 1-$, $0<\alpha\le 1$, equalities for the value $E\left(H^{\alpha};B_{\rho};x\right)$and it exact meaning for all $0<\rho<1$, in the case α=1.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 15.11.2010 г.