УДК 535.3

А.И. Серый

К ВОПРОСУ О КОМПТОНОВСКОМ ВРАЩЕНИИ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ РЕНТГЕНОВСКИХ ФОТОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В релятивистском подходе с использованием электронного пропагатора вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в сверхсильном магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся параллельно магнитному полю жестких рентгеновских фотонов со спиральностями, положительными и отрицательными по отношению к спину электрона. Получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью спиновой поляризации электронов.

Введение. Постановка задачи

В данной работе исследования проведены по предложению В.Г. Барышевского и В.В. Тихомирова.

Эффект комптоновского вращения плоскости поляризации жестких рентгеновских (мягких гамма-) фотонов в отсутствие магнитного поля был теоретически предсказан В.Г. Барышевским и В.Л. Любошицем [1, с. 89] в 1965 г., а в начале 1970-х гг. обнаружен экспериментально. При наличии квантующего магнитного поля появляется возможность резонансного поглощения фотона при переходах электрона между уровнями Ландау. При $\hbar\omega >> 2\mu_B B$ либо $\hbar\omega << 2\mu_B B$ (μ_B – магнетон Бора) таким поглощением можно пренебречь. Жесткий рентгеновский и мягкий гамма-диапазон (0,1–5 МэВ) удовлетворяет 2-му случаю при магнитных полях вблизи полюсов магнетаров ($\sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс). При этом электроны практически полностью поляризованы.

Рассмотрим фотон, движущийся в электронном газе параллельно магнитному полю при указанных выше условиях. Рассмотрим амплитуду комптоновского рассеяния для круговой поляризации, которая будет использована при вычислении угла комптоновского поворота плоскости поляризации фотона. Применяемый подход использовался для вычисления резонансного сечения эффекта Комптона в магнитном поле, причем интегрирование по углам не производилось [2, с. 323]. В зарубежных публикациях [3; 4] либо использовался нерелятивистский подход, либо матричный элемент в общем виде не вычислялся до конца, либо также рассматривался случай резонансного рассеяния; отмечалось, что в общем виде точное интегрирование до конца произвести не удается. О проблеме комптоновского вращения никто из зарубежных исследователей не упоминал, поэтому случай круговой поляризации фотона ими специально не рассматривался.

Характеристики фотона, электрона и внешнего магнитного поля

Величины, соответствующие конечному состоянию, будем снабжать штрихом. Для магнитного поля с индукцией B (которое направлено по оси z) выберем калибровку векторного потенциала [2, с. 320]:

$$A_0 = A_x = A_z = 0,\ A_y = Bx. \tag{1}$$

Четырехмерный импульс конечного и начального фотона:

$$\hbar k'_\mu = (\frac{\hbar\omega'}{c}, k'_x, k'_y, k'_z), \hbar k_\mu = (\frac{\hbar\omega}{c}, 0, 0, k_z) \Rightarrow k_z = \frac{\hbar\omega}{c}. \tag{2}$$

Введем обозначение $u = \cos\theta'$, где θ' – угол между направлением движения рассеянного фотона и вектором индукции магнитного поля. С учетом законов сохранения запишем (вид наших формул несколько отличается от [2, с. 321]):

$$\hbar\omega'(1-u^2)=\varepsilon_0-p_zc+\hbar\omega(1-u)-\sqrt{(\varepsilon_0-p_zc+\hbar\omega(1-u))^2+2(u^2-1)(\varepsilon_0-p_zc)\hbar\omega}\,,$$

$$\omega'=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(|2k-3|)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{(2\frac{\varepsilon_0-p_zc}{\hbar}\omega)^k}{(\frac{\varepsilon_0-p_zc}{\hbar}+\omega(1-u))^{2k-1}}\cdot(u^2-1)^{k-1}\,, \qquad (3)$$

где p_z – импульс начального электрона по оси *z*, *m* – его масса, а

$$\varepsilon_n=\sqrt{m^2c^4+p_z^2c^2+2neBc\hbar},\ n\geq 0.$$
(4)

Волновые функции электронов выразим через биспиноры u_n и функции Эрмита H_n [2, с. 320]:

$$\Psi(\zeta)=A_n[i(2eBc\hbar)^{1/2}U_n(\zeta)+(mc^2+\mu\tilde{m}c^2)U_{n-1}(\zeta)\gamma_1]u_n\,,$$

$$U_n(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(-\frac{\zeta^2}{2})H_n(\zeta)\,,\ n\geq 0,$$

$$A_0=\frac{1}{\sqrt{2\hbar c\varepsilon_0(\varepsilon_0+mc^2)\sqrt{eBc\hbar}}}\ \text{ при }\ \mu=-1,\ A_n=\sqrt{\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}\frac{\varepsilon_n+\mu\tilde{m}c^2}{4c^4p_z^2\tilde{m}\varepsilon_n(\tilde{m}c^2+\mu\tilde{m}c^2)}},$$

$$u_n=\begin{bmatrix}0 & \mu\tilde{m}c^2-\varepsilon_n & 0 & p_zc\end{bmatrix}^T,\ \tilde{m}c^2=\sqrt{m^2c^4+p_z^2c^2}=\varepsilon_0. \qquad (5)$$

T означает транспонирование. Матрицы Дирака γ_k (*k* = 0, 1, 2, 3) берем в стандартном представлении. При построении электронного пропагатора будем использовать матрицы [2, с. 320] (*i* – мнимая единица):

$$\beta_1=\frac{1}{2}(1+i\gamma_2\gamma_1),\ \beta_2=\frac{1}{2}(1-i\gamma_2\gamma_1). \qquad (6)$$

Как и в отсутствие магнитного поля, импульсы виртуального промежуточного электрона для *R*- и *S*-процесса выражаются, соответственно, по формулам [2, с. 320]:

$$\vec{g}=\vec{p}+\hbar\vec{k}=\vec{p}'+\hbar\vec{k}'\Rightarrow cg_0=\varepsilon_0+\hbar\omega, cg_3=p_zc+\hbar\omega,$$

$$\vec{f}=\vec{p}'-\hbar\vec{k}=\vec{p}-\hbar\vec{k}'\Rightarrow cf_0=\varepsilon_0-\hbar\omega'=\varepsilon_0'-\hbar\omega, cf_3=p_zc-\hbar\omega'=p_z'c-\hbar\omega. \qquad (7)$$

Согласно [2, с. 320–321], нам также понадобятся переобозначения координат (p_y, p_y' – y-компоненты импульса начального и конечного электрона; *k* = 1, 2):

$$L(x_k,p)=\sqrt{\frac{eB}{\hbar c}}(x_k+\frac{cp}{eB}),\xi_k=L(x_k,p_y'),\ \zeta_k=L(x_k,p_y)\,,$$
$$\rho_k=L(x_k,g_y),\eta_k=L(x_k,f_y). \qquad (8)$$

В состав пропагатора входят конструкции вида [2, с. 321]:

$$G_B(\lambda; x_1, x_2) = \sqrt{\frac{eB}{\hbar c}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar c^2}{c^2\lambda_0^2 - \varepsilon_n^2 - i\cdot 0} (U_n(x_1)U_n(x_2)(\gamma_0\lambda_0 - \gamma_3\lambda_z + mc)\beta_1 +$$
$$+ (1-\delta_{0n})U_{n-1}(x_1)U_{n-1}(x_2)(\gamma_0\lambda_0 - \gamma_3\lambda_z + mc)\beta_2 +$$
$$+ (1-\delta_{0n}) i \sqrt{\frac{2neB\hbar}{c}} (U_{n-1}(x_1)U_n(x_2)\gamma_1\beta_1 - U_n(x_1)U_{n-1}(x_2)\beta_1\gamma_1). \qquad (9)$$

Упрощение матричного элемента

В [2, с. 321] приводится матричный элемент процесса, причем интегрирование по координатам не доведено до конца:

$$F_{\mu\nu} = \frac{-i\alpha(2\pi\hbar)^4 c e_\mu e_\nu'^*}{\hbar V S \sqrt{\omega\omega'}} \delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}' - \hbar\vec{k}') \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 \overline{\Psi}(\xi_1) Q_{\mu\nu} \Psi(\zeta_2). \qquad (10)$$

Здесь $\alpha = e^2/\hbar c$; $e_\mu, e_\nu', \omega, \omega'$ – компоненты вектора поляризации, а также частоты начального и конечного фотонов соответственно, V – нормировочный объём для фотона, S – нормировочная площадь для электрона в плоскости (xy). δ -функция включает в себя y-, z- и t-компоненты. $Q_{\mu\nu}$, согласно (2), упрощается по сравнению с [2, с. 321]:

$$Q_{\mu\nu} = \exp(-ik_x' x_1)\gamma_\nu G_B(g; \rho_1, \rho_2)\gamma_\mu + \exp(-ik_x' x_2)\gamma_\mu G_B(f; \eta_1, \eta_2)\gamma_\nu. \qquad (11)$$

Излучение поляризовано перпендикулярно направлению распространения [5, с. 47]. Поэтому выбираем правую или левую круговую поляризацию. Поскольку вектор поляризации фотона – пространственноподобный [5, с. 47], то, согласно [5, с. 43], запишем (T – транспонирование; в 3-мерной форме нулевая компонента опускается):

$$e_\mu = \begin{bmatrix} 0 & \pm\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}^T. \qquad (12)$$

Суммируя (9)–(11) при $\mu, \nu = \overline{1,2}$ в (11) (поскольку, согласно (12), при других μ, ν будет ноль), можно показать, что это даст ноль уже при свертке u_n (см. (5), $\forall\ n$) с комбинациями матриц Дирака в (9), в состав которых не входит β_2 (6). Для слагаемых с β_2 свертка не дает ноль, но при интегрировании, согласно (5), (8)–(11) будут множители (в (13) $j = 1$ при $\lambda = \zeta$; $j = 2$ при $\lambda = \xi$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-\lambda_1^2) H_{n-1}(\lambda_1) d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-ik_x' x_j) exp(-(\xi_j^2 + \zeta_j^2)) H_{n-1}(\xi_j) d\xi_j, \qquad (13)$$

Учитывая соотношения [6, с. 119–120] для левых множителей

$$\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-x^2) H_n(x) dx = \sqrt{\pi}\delta_{0n}, \qquad (14)$$

получим ноль при всех $n \neq 1$ в (9). При произвольном направлении движения начального фотона в (13) отсутствуют множители вида (14), и сумма в (9) бесконечна. Таким образом, для промежуточного электрона не может быть $n = 0$, если до и после реакции также $n = 0$, т. к. свертка всех матриц и биспиноров дает ноль. Если начальный фотон движется строго параллельно силовым линиям магнитного поля, то в (11) от каждого пропагатора в сумме остается 1 ненулевое слагаемое (n = 1). Таким образом, с помощью (11)–(14) производятся все вычисления в (10).

Вычисление угла поворота плоскости поляризации на единицу длины пути

Запишем общую и частную формулы для угла комптоновского поворота плоскости поляризации жесткого рентгеновского фотона на единицу длины пути [1, с. 91]:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi n_e c}{\omega}(\vec{p}\cdot\vec{n})Re\, f_2(\omega),\ \frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi n_e c}{\omega} f_2(\omega), \tag{15}$$

где n_e – концентрация электронов, $\vec{p}$ – вектор их поляризации, ω – частота фотона, $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении распространения фотонов. В частном случае фотоны движутся параллельно вектору спиновой поляризации полностью поляризованного электронного газа, а поглощение фотонов слабое, поэтому $Re\, f_2(\omega) \approx f_2(\omega)$.Наша задача сводится к нахождению $f_2(\omega)$.

S-матрицу комптоновского рассеяния вперед запишем в виде [1, с. 90], где учитываются только пространственные компоненты ($\vec{\sigma}/2$ – оператор спина электрона):

$$S_{\mu\nu} = f_1(\omega)(\vec{e}^{\,*}_{\mu}\vec{e}_{\nu}) + if_2(\omega)\vec{\sigma}[\vec{e}^{\,*}_{\mu}\vec{e}_{\nu}]\,. \tag{16}$$

При полной поляризации электронов $\vec{\sigma}$ = (0, 0, 1), и тогда с учетом (12) (в 3-мерной форме) получаем связь между $f_2(\omega)$ и амплитудами для правой (+) и левой (–) круговой поляризации фотона:

$$f_2(\omega) = \frac{S^{(-)}_{\mu\nu} - S^{(+)}_{\mu\nu}}{2} \tag{17}$$

Остается установить связь между $S_{\mu\nu}$ в (16) и $F_{\mu\nu}$ в (10). В разных источниках одни и те же величины обозначаются по-разному, в чем можно убедиться, сопоставляя, например, формулы в [1, с. 15; 5, с. 314] и [1, с. 24; 5, с. 315], где присутствует одна и та же амплитуда, в роли которой в нашем случае может выступать $S_{\mu\nu}$. С учетом этого обстоятельства, используя формулы в [5, с. 281, 283, 314], запишем аналог выражения (10) в отсутствие магнитного поля:

$$F^0_{\mu\nu} = 2\pi\varepsilon \frac{i(2\pi\hbar)^4 c\hbar S_{\mu\nu}}{V^2\sqrt{\varepsilon_0\hbar\omega\varepsilon'_0\hbar\omega'}}\delta^3(\vec{p} + \hbar\vec{k} - \vec{p}\,' - \hbar\vec{k}')\delta(p_x + \hbar k_x - p'_x - \hbar k'_x). \tag{18}$$

При этом ε – полная энергия в системе центра масс; ε_0 см. в (4) и (5); ε'_0 – энергия конечного электрона:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \hbar\omega,\ \varepsilon_0 = (m^2c^4 + p_z^2c^2)^{1/2} = \tilde{m}c^2 = E(p_z), \varepsilon'_0 = E(p'_z). \tag{19}$$

Поскольку из (18) можно выразить $S_{\mu\nu}$ через $F^0_{\mu\nu}$, то в присутствии магнитного поля выражение для $S_{\mu\nu}$ меняется, поскольку в левую часть (18) подставляется правая часть (10). Сделаем для x-компоненты δ-функции замену по аналогии с [5, с. 282]:

$$\delta(p_x + \hbar k_x - p'_x - \hbar k'_x) \to \frac{L}{2\pi\hbar}. \tag{20}$$

После этого с учетом (17) при рассеянии на угол ноль получаем:

$$f_2(\omega) = \frac{-\pi\hbar c^2\alpha}{(\varepsilon_0 + mc^2)(\varepsilon_0 + \hbar\omega)}\sqrt{\frac{\varepsilon_0'}{\varepsilon_0}}(J(f) - J(g)),$$

$$J(\lambda) = \frac{\lambda_0((\tilde{m}c^2 + \varepsilon_0)^2 + p_z^2c^2) - 2\lambda_z p_z c(\tilde{m}c^2 + \varepsilon_0) - mc((\tilde{m}c^2 + \varepsilon_0) - p_z^2c^2)}{c^2\lambda_0^2 - \varepsilon_1^2 - i\cdot 0}. \quad (21)$$

При этом ε_1 выражается из (4) при n = 1. Компоненты $f(p_z',\omega)$ и $g(p_z,\omega)$ см. в (7). Далее предполагается усреднение по импульсам p_z и p_z', соответственно.

Заключение. Основные результаты

В релятивистском подходе в рамках квантовой электродинамики вычислена разность амплитуд комптоновского рассеяния вперед в сверхсильном магнитном поле для электрона в основном состоянии и циркулярно поляризованных движущихся параллельно магнитному полю жестких рентгеновских фотонов со спиральностями, положительными и отрицательными по отношению к спину электрона. Получена формула для вычисления угла комптоновского вращения плоскости поляризации фотонов на единицу длины пути в электронном газе с высокой степенью поляризации электронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский, В.Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В.Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
2. Фомин, П.И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П.И. Фомин, Р.И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т.117, вып. 2. – С. 319–325.
3. Daugherty, J.K. Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / J.K. Daugherty, A.K. Harding // The Astrophysical Journal. – 1986. – Vol. 309. – P. 362–371.
4. Bussard, R.W. One- and Two-Photon Compton Scattering in Strong Magnetic Fields / R.W. Bussard, S.B. Alexander, P. Meszaros // Phys. Rev. D – 1986. – Vol 34, № 2. – P. 440–451.
5. Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика (Серия «Теоретическая физика», том IV) / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 704 с.
6. Русак, В.Н. Математическая физика / В.Н. Русак. – Мн. : Дизайн ПРО, 1998. – 208 с.

***A.I. Sery.* To the Problem of Compton Rotation of the Plane of Polarization of X-Photons in Magnetic Field**

In relativistic approach using electronic propagator the difference of Compton forward scattering amplitudes in ultrastrong magnetic field is calculated for electron in the ground state and circularly polarized hard X-photons moving parallel to magnetic field with helicities positive and negative to electron spin. A formula is obtained for the calculation of Compton rotation angle of the plane of polarization of photons per unit path in electron gas with high degree of spin polarization of electrons.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 19.01.2011 г.