УДК 372.016:51

А.Н. Сендер[1], Л.В. Федорова[2]

[1]д-р пед. наук, проф., проф. каф. педагогики,
ректор Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
[2]аспирант каф. методики преподавания физико-математических дисциплин
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
e-mail: [1]anna_sender@brsu.brest.by; [2]milaam@mail.ru

ФОРМИРОВАНИЕ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ: СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ

На основе анализа психолого-педагогической и научно-методической литературы рассмотрена проблема формирования методологических знаний учащихся. Раскрыт содержательно-методический аспект формирования методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии: описан подход формирования методологических знаний учащихся, основанный на формировании их в «явном» виде на «знаниевом» и «деятельностном» уровнях, и показаны его возможности на конкретных примерах.

Введение

Цели обучения геометрии в средней школе базируются на основных целях школьного образования: разностороннее развитие личности, создание условий для интеллектуального, нравственного, физического развития, саморазвития учащихся, а также формирование умений школьников самостоятельно учиться в течение всей жизни, не теряться в новой познавательной и жизненной ситуации, не останавливаться, если нет готовых решений, а самостоятельно искать методы решения, так как именно наличие умения учиться меняют стиль мышления и жизни личности.

Названными целями обусловлена необходимость усиления методологической направленности процесса обучения путем введения в содержание обучения методологических знаний, которые дают возможность мобильно оперировать знаниями и умениями в различных ситуациях, являются важнейшим условием формирования у учащихся способности самостоятельно мыслить. Так, И.Я. Лернер утверждает, что именно этот вид знаний «обнажает способы деятельности с помощью усвоенных знаний и облегчает опознание способов применения знаний, даже когда эти способы не очень явно выражены» [1, с. 10]. Формирование методологических знаний учащихся способствует тому, что дети осознанно овладевают основами и методами наук, приобретают способности практического применения знаний, справляются с решением многих задач, легче адаптируются к новым ситуациям, у школьников повышается любознательность, способность выдвигать оригинальные идеи, развивается дивергентное мышление.

Процесс формирования методологических знаний учащихся достаточно продолжительный и охватывает весь период школьного обучения. Большими возможностями для формирования методологических знаний учащихся обладает математика. Овладение школьниками методологическими знаниями в обучении математике:

1) «обеспечивает целостное, объективное представление о математике;

2) возмещает незнание многих фактов благодаря знанию обобщенных методов познания;

3) позволяет находить рациональные способы решения задач, проблемных ситуаций;

4) упреждает формальное усвоение знаний, непонимание того, с какой целью вводится тот или иной математический термин, правило;

5) закладывает основы “научного мышления”» [2, с. 136].

Особенности геометрии как науки и школьного предмета определяют ее особое место в процессе формирования методологических знаний учащихся. Поэтому проблема формирования методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии достаточна актуальна. Решение указанной проблемы сталкивается с рядом задач, одной из которых является раскрытие содержательно-методического аспекта формирования методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии.

Содержательно-методический аспект формирования методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии

Для формирования методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии необходимо выделить следующие компоненты:

1) методы научного познания (анализ, синтез, сравнение, аналогия, обобщение, конкретизация, идеализация, абстрагирование, наблюдение, измерение, описание, опыт, аксиоматический метод);

2) общенаучные понятия (понятие, определение, существенный и несущественный признаки, аксиома, теорема, доказательство, признак, свойство, причинно-следственная связь, необходимое условие, достаточное условие);

3) знания о картине мира (философско-мировоззренческая составляющая часть геометрии).

На основе анализа психолого-педагогической и научно-методической литературы нами был выделен подход, основанный на формировании методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии в явном виде через включение методологических знаний в предметное содержание геометрии. В рамках выделенного подхода формирование методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии осуществляется как на «знаниевом» (объекты усвоения), так и на «деятельностном» (инструмент для изучения геометрии) уровнях.

Чтобы формирование методологических знаний было системным, целенаправленным процессом, считаем важным формировать методологические знания учащихся поэтапно. Поэтому нами были выделены следующие этапы:

1) этап ознакомления, на котором раскрывается сущность конкретного компонента методологических знаний посредством его описания или определения; здесь методологические знания формируются у учащихся на «знаниевом» уровне;

2) этап применения, суть которого заключается в создании условий для формирования умения применять определенное методологическое знание на конкретном геометрическом материале; здесь методологические знания формируются у учащихся на «деятельностном» уровне;

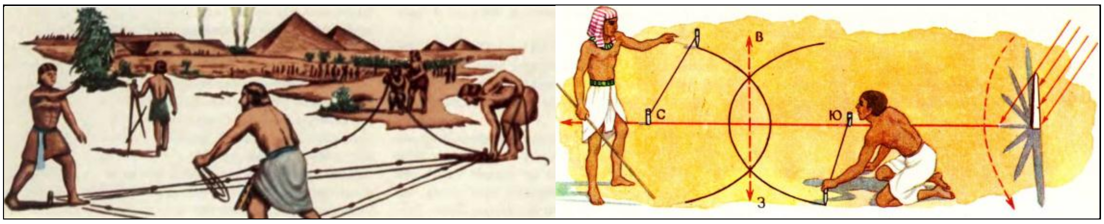
3) этап диагностики, направленный на проверку сформированности у школьников методологического знания.

В статье раскрыт содержательно-методический аспект формирования методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии на первых двух этапах. Эта информация будет полезна учителям математики учреждений общего среднего образования, студентам физико-математических факультетов при изучении курса методики преподавания математики, а также преподавателям методики преподавания математики педагогических вузов.

Одной из главных задач формирования методологических знаний учащихся при обучении геометрии является снижение информационной нагрузки на учащихся. В связи с этим добавление к программному материалу по геометрии новой информации может быть для школьников непонятным, а главное – ненужным. Поэтому важно каждый раз вызывать у школьников познавательный интерес к методологическим знаниям с целью формирования мотивации для их изучения [2]. Для формирования познавательного интереса к изучению методологических знаний используются различные приемы и средства. Среди них выделим, например, специально отобранные девизы и эпиграфы к уроку, рассказы об ученых-геометрах, истории происхождения терминов и символики геометрии, открытии геометрических утверждений и их доказательств, решение занимательных и логических задач, игровые моменты, создание и разрешение проблемных ситуаций, демонстрация и решение софизмов, проведение практических работ и прочее. Все это способствует формированию у учащихся не только стойкого интереса к формированию методологических знаний, но и развитию познавательного интереса к самому процессу изучения геометрии. Рассмотрим несколько примеров.

Для привлечения внимания учащихся к важности изучения фактов из истории геометрии можно воспользоваться следующей информацией.

«Геометрия возникла очень давно, это одна из самых древних наук. Геометрия как наука начала зарождаться, когда, строя жилища и храмы, размечая землю, измеряя расстояния и площади, человек начал применять свои знания о форме, размерах и взаимном расположении предметов, полученные из наблюдений и опытов» (можно продемонстрировать учащимся соответствующие картинки, например, как на рисунке).



Знакомство с фактами из истории геометрии помогает изменить отношение к этому предмету как к очень трудному и не всегда понятному. Еще Лейбниц говорил: тот, кто хочет ограничиться настоящим без знания прошлого, никогда его не поймет.

С целью недопущения учащимися ошибок приписывать свойства одной геометрической фигуры другой, подведения школьников к «открытию» свойств геометрической фигуры, связанных с ранее изученными, облегчения усвоения и запоминания геометрического материала, систематизации знаний учащихся по геометрии необходимо научить школьников обобщать и конкретизировать. А для этого сначала целесообразно ознакомить учащихся с понятиями «обобщение» и «конкретизация». Чтобы сформировать мотивацию к их изучению, можно использовать проблемную ситуацию. Для этого можно показать учащимся, что большинство понятий в геометрии взаимосвязаны: одни геометрические понятия определяются через другие с использованием родовидовых отношений. Потом задать вопросы, направленные на проверку понимания этих отношений, например: *«Какое понятие более общее – “квадрат” или “прямоугольник”»?* Учащиеся, отвечая на подобные вопросы, как правило, допускают ошибки, а если и отвечают правильно, то не могут обосновать свой ответ. Подобными вопросами как раз можно воспользоваться для создания проблемной ситуации.

Для мотивации ознакомления школьников с таким компонентом философско-мировоззренческой составляющей систематического курса геометрии, как природа геометрических понятий, в 7 классе можно использовать небольшое стихотворение: *«Геометрия повсюду: / Глазом только поведешь – / И примеров сразу уйму / Ты вокруг себя найдешь»*. Затем необходимо соотнести окружающие школьников предметы с известными учащимся геометрическими фигурами. Далее можно использовать задачи с практическим содержанием, например: *«Почему чайник округлой формы остывает медленнее, чем чайник такого же объема, но другой формы?»*. Также можно привести примеры использования геометрических фигур в архитектуре, живописи, литературе; например, фрагмент эпилога второй части романа Л. Толстого «Война и мир»: «Военное устройство может быть выражено совершенно точно фигурой конуса, в котором основание с самым большим диаметром будут составлять рядовые; сечения, которые выше основания, – восходящие чины армии и т.д. до вершины конуса, точку которой будет составлять полководец» [3, с. 611].

После того, как у учащихся возникает потребность в ознакомлении с определенным компонентом методологических знаний, важно преподнести им информацию о нем просто, наглядно и понятно, не забывая, однако, о научности, так как речь идет о методологических знаниях.

В результате изучения различных способов введения методологических знаний в предметное содержание мы пришли к выводу, что оптимальным будет введение методологических знаний в геометрический материал через включение их в небольшие информационные блоки методологического характера и соединение с геометрическими знаниями. Причем методологические блоки целесообразно вводить постепенно, учитывая их абстрактность.

Информационный блок методологического характера – это структурированная текстовая информация, содержащая совокупность положений по определенному методологическому вопросу (о процессе познания, о компонентах методологических знаний). Такие блоки, например, могут содержать исторический материал, информацию о сущности определенных философских категорий и законов, обобщенных понятий, методов научного познания, алгоритмы применения методов научного познания и прочее. Этап ознакомления учащихся с определенным компонентом методологических знаний основывается на введении заранее подготовленных информационных блоков методологического характера в геометрический материал. Включение информационных блоков методологического характера в геометрический материал обязательно должно определяться исходя из анализа действующих учебных программ и учебников геометрии, а также в соответствии с познавательными и возрастными особенностями учащихся. В связи с этим необходимо предварительное конструирование геометрического материала.

С нашей точки зрения, информационные блоки методологического характера в геометрический материал целесообразно вводить в форме рассказа учителя с использованием наглядных средств (доска, раздаточный материал, таблица, презентация), хотя отдельные информационные блоки методологического характера хорошо поддаются проблемному изложению.

Рассмотрим примеры информационных блоков методологического характера:

1. Блок, описывающий роль практики для геометрии.

Практика и познание – неразрывные виды деятельности человека. Познание всегда возникает в связи с потребностями практики. Так, различные виды практических работ (измерение величин, работы на местности, исследовательские способы измерения объемов тел и др.) дают повод для того, чтобы сказать о практических задачах как о первых «импульсах» к теоретическим исследованиям. Именно практика исторически подвела человека к формулированию геометрических аксиом, открытию ряда правил и формул геометрии. Однако знания теории без умения применять их на практике бесполезны. Поэтому все геометрические положения и абстрактные понятия (многоугольник, площадь, цилиндр и др.) реализуются на практике в реальной жизни, например, в технике, в строительстве.

2. Блок, описывающий алгоритм составления классификации.

Для правильного составления классификации геометрических фигур важно использовать следующий алгоритм составления классификации:

1) выбрать основание для классификации (признак сравнения фигур);

2) разбить рассматриваемое множество на классы по выбранному основанию;

3) проверить соответствие полученной классификации следующим требованиям:

а) объединение всех распределенных на группы объектов составляет объем понятия;

б) пересечение всех распределенных на группы объектов – пустое множество.

3. Блок, описывающий аналогию.

При изучении геометрии учащиеся довольно часто используют словосочетания «по аналогии» или «аналогично». Что же такое аналогия? Аналогия как метод широко используется и в научном, и в учебном познании. Применительно к геометрии аналогию можно определить как метод, при котором действует правило: *если геометрическая фигура A обладает свойствами X, Y, Z, а геометрическая фигура B обладает свойствами X, Y, то и фигура B будет обладать свойством Z*. Например, если под геометрической фигурой A понимать прямоугольник со следующими свойствами: а) все углы прямые; б) диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам; в) квадрат диагонали равен сумме квадратов двух его измерений, – а под геометрической фигурой B понимать прямоугольный параллелепипед, который обладает следующими свойствами: а) все плоские углы при вершинах прямые; б) диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, – то на основе аналогии можно предположить, что прямоугольный параллелепипед обладает и следующим свойством: квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений. Отметим, что выводы, полученные на основе аналогии, являются гипотетическими и требует обязательного строгого доказательства.

4. Блок, раскрывающий сущность определения через ближайший род и видовое отличие.

На практике существуют различные способы построения определений геометрических понятий. Мы рассмотрим наиболее часто применяемый в геометрии способ, который называется «через ближайший род и видовое отличие»: объект A – это X (ближайший род), у которого Y – одно видовое отличие. Определения, построенные по описанному правилу, используются при дефиниции всех четырехугольников. Например, *«параллелограмм – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны»*. Здесь «ближайший род» параллелограмма – «четырехугольник» (не «многоугольник», не «фигура»), а «противолежащие стороны попарно параллельны» – его «отличительное свойство» («видовое отличие»), по которому из множества четырехугольников можно выделить именно параллелограммы.

5. Блок, направленный на ознакомление школьников с философской категорией «причина – следствие».

Одной их важных форм связи предметов и явлений в мире являются причинно-следственные связи: «если прошел дождь, то есть лужи» или «если я поел, то сыт». Причинно-следственная связь очевидна, если в утверждении выделены причины и следствия, и в реальных примерах, как видим, выделение причины и следствия не вызывает трудностей: «прошел дождь», «я поел» – причина; «есть лужи», «я сыт» – следствие. В геометрии, как ни в одной другой школьной дисциплине, факты находятся в таком взаимном отношении, как причина и следствие. Например, в утверждении *«если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны»* установлена причинно-следственная связь. Здесь, благодаря связке *«если…, то…»* выявить причину и следствие несложно, так как «причина» – *«две прямые параллельны третьей прямой»*, а «следствие» – *«две прямые параллельны»*. Однако во многих утверждениях геометрии указанная связка отсутствует, несмотря на наличие причинно-следственной связи. Например, в утверждении *«квадрат является параллелограммом»* также установлена причинно-следственная связь. В данном примере следствие обнаружить легко (*квадрат – параллелограмм*), выявление же причины затруднительно. Здесь выявить причину помогает ответ на вопрос: *«На каком основании можно утверждать, что квадрат – параллелограмм?»*. Именно поиск ответа на указанный вопрос помогает выявить причину в утверждении: *«На основании определений квадрата и прямоугольника»*.

Знания о картине мира (философско-мировоззренческая составляющая курса геометрии) можно формировать через историко-научные знания, так как они способствуют демонстрации учащимся сложного, противоречивого и длительного пути развития геометрии как науки, а также обусловленности возникновения геометрии практическими потребностями человека.

Ю.А. Дробышев, рассуждая о роли исторических знаний в интеллектуальном развитии учащихся, пишет: «Включение в содержание обучения математике элементов историзма, с точки зрения феномена множественности культур, способствует пониманию учащимися того факта, что математика – наука, в развитие которой внесли свой вклад представители разных культур и народов» [4, с. 114]. По выражению А.Д. Александрова, «ученику нужно показать реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами» [5, с. 13]. Таким образом, историко-научные информационные блоки методологического характера будут содержать сведения:

1) об истории народов и географии стран, в которых жили и творили классики геометрии соответствующей эпохи;
2) биографические очерки, посвященные известным геометрам;
3) о геометрии Н.И. Лобачевского;
4) об истории возникновения геометрических понятий, символов, знаков, терминов;
5) об искусстве, архитектуре, скульптуре через призму геометрии;
6) о геометрии и геометрах Беларуси [2].

Этап применения имеет очень важное значение в процессе формирования методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии, и разные компоненты методологических знаний по-разному применяются при изучении геометрии. Рассмотрим основные способы формирования умения применять методологические знания на геометрическом материале.

Формирование знаний о методах научного познания (анализ, синтез, сравнение, аналогия, обобщение, конкретизация) на данном этапе происходит в ходе выполнения специально разработанных упражнений и решения специально подобранных задач. Упражнения на применение методологического знания на конкретном геометрическом материале необходимо заранее конструировать. Для этого целесообразно использовать определенные формы вопросов. Например, для закрепления умения проводить обобщение и конкретизацию после изучения темы «Четырехугольники» в 8 классе можно предложить учащимся такие упражнения:

1. *«Какая из двух геометрических фигур: параллелограмм или квадрат – наиболее общая»?* (Квадрат – частный случай прямоугольника, а прямоугольник – частный случай параллелограмма, значит, параллелограмм является родовым понятием по отношению к квадрату, т.е. более общей фигурой).

2. *«Даны геометрические фигуры: ромб, параллелограмм, квадрат. Найдите фигуру, которая не обладает признаком, которым обладают две другие. Назовите этот признак»*. (Параллелограмм не обладает признаком равенства всех сторон).

3. *«Каким общим признаком (одним или несколькими) обладают следующие геометрические фигуры: квадрат, прямоугольник, трапеция, ромб»?* (Все они четырехугольники, имеют пару параллельных сторон).

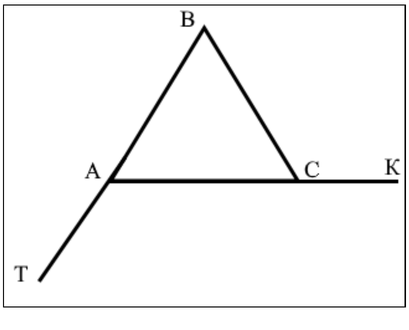
4. *«О какой фигуре (или фигурах) идет речь: противоположные стороны и углы равны между собой, имеют две оси симметрии и четыре стороны»?* (Ромб, квадрат, прямоугольник).

5. *«Какая фигура является частным случаем другой: квадрат или ромб»?* (Квадрат, так как ромб – родовое понятие для квадрата).

Подобные упражнения могут быть использованы для устного опроса учащихся в при проверке изученного геометрического материала, также как дополнительные вопросы к ответу школьника, могут включаться в математические диктанты, самостоятельные работы обучающего характера, дидактические игры.

Хорошим материалом для формирования умений применять методологические знания в геометрии является решение задач. Так, решение геометрической задачи – оптимальный инструмент для формирования умения проводить анализ и синтез. Анализ условия задачи школьники проводят с помощью вопросов: *«Что дано в задаче?», «О чем еще говорится в задаче?», «Что в задаче требуется найти?»* и др. Для выполнения чертежа к задаче необходим дополнительный анализ, устанавливающий порядок использования данных задачи для его построения. Выполнять чертеж к задаче школьник должен, основываясь на методе синтеза. Ошибки в выполнении чертежа указывают на плохо проведенный анализ. Учащимся следует объяснить, что направление анализа обусловливает различные варианты решения задачи, так как цель анализа – поиск и нахождение путей решения задачи, а синтеза – правильное оформление записи уже известного решения. Поиск решения задачи учащимися необходимо направлять специальными вопросами. Так, если задача решается посредством анализа, то школьникам адресуется вопрос *«Что достаточно знать, чтобы найти… ?»*.

Например, задача: *«На рисунке равнобедренный треугольник ABC, угол TAC равен углу BCK. Вычислите их величину, если AC равен 6 см, а периметр треугольника ABC равен 24 см»*.



Решению данной задачи помогут следующие вопросы:

1. Что достаточно знать, чтобы найти величину угла BCK?

∠BCK = ∠CAB + + ∠ABC, так как $\angle BCK$ – внешний угол ΔABC и равен сумме двух углов, не смежных с ним.

2. Что достаточно знать, чтобы найти сумму углов CAB и ABC?

Величину угла BCA, так как $\angle CAB + \angle ABC = 180° - \angle BCA$.

3. Что достаточно знать, чтобы найти величину угла BCA?

Длину основания треугольника ABC и площадь треугольника ABC, так как $sin\angle BCA = \frac{2S}{AC \cdot BC}$.

4. Что достаточно знать, чтобы найти площадь треугольника ABC?

Длины всех сторон треугольника, так как $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$.

5. Можно ли определить длины всех сторон треугольника исходя из условия задачи?

Да, зная периметр равнобедренного треугольника и его основание.

Само решение задачи школьники записывают в обратном порядке:

$P_{ABC} = AB + BC + AC$, но т.к. ΔABC – равнобедренный, то $P_{ABC} = 2AB + AC$, откуда $AB = (P_{ABC} - AC) : 2 = (24 - 6) : 2 = 9$ (см).

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{12(12-9)(12-9)(12-6)} =$$

$$= \sqrt{12 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6} = 18\sqrt{2}\ (см^2),$$

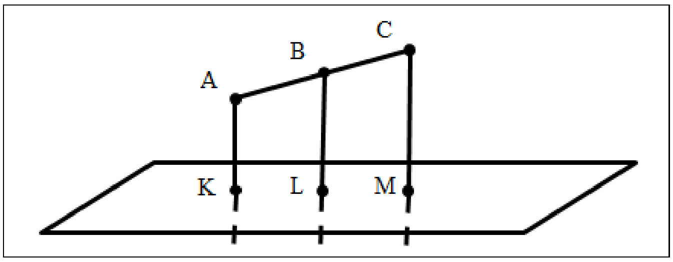
где $AB = BC = 9$ (см), $p = P : 2 = 24 : 2 = 12$ (см).

Т.к. $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \cdot sin\angle BCA$, то $sin\angle BCA = \frac{2S}{AC \cdot BC} = \frac{2 \cdot 18\sqrt{2}}{6 \cdot 9} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, откуда $\angle BCA = arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Т.к. $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$, то $\angle CAB + \angle ABC = 180° - \angle BCA = 180° - arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$, значит, $\angle TAC = \angle BCK = 180° - arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

При решении задач хорошо формируется умение обобщать. Например, когда необходимо решить задачу при разных числовых значениях величин, а потом при их буквенных значениях. При этом можно давать возможность учащимся самостоятельно формулировать задачу для общего случая.

Пример: *«Через концы отрезка AC и его середину B проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость в точках K, L, M. Найдите длину отрезка BL, если отрезок AC не пересекает плоскость и AK = 5 см, CM = 7 см (рисунок)».*



Можно варьировать значениями AK и CM и соотношением AB : BC; постоянными остаются параллельное проектирование и условие, что AC не пересекает плоскость. Далее заменить значения длин AK и CM параметрами a и b и сформулировать первую обобщенную задачу. Затем заменить условие *«точка B делит отрезок AC в отношении m : n»*, в результате получится более обобщенная задача: в ней задаче все числовые данные заменены параметрами. В результате учащиеся приходят к выводу:

«Чтобы обобщить задачу необходимо:

а) выделить в условии задачи числовые данные;

б) заменить их буквами (параметрами);

в) сформулировать обобщенную задачу».

Такие задачи важны, так как обобщения приводят к «открытию» важных формул.

Обобщать в задачах можно не только числовые данные. Так, в задаче *«Докажите, что площадь ромба равна половине произведения его диагоналей»* основное понятие ромб, а конкретное числовое данное – 90 ° (угол между диагоналями прямой по свойству диагоналей ромба). Заменим «ромб» на «параллелограмм», а «угол 90 °» – на угол α между диагоналями и получим обобщенную задачу про площадь параллелограмма.

Если заменить «параллелограмм» «произвольным выпуклым четырехугольником», то получим новую задачу: *«Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними»*. Можно оставить условие, что «диагонали перпендикулярны», а «ромб» заменить «произвольным выпуклым четырехугольником». Тогда получим следующую задачу: *«Докажите,* *что если диагонали выпуклого четырехугольника перпендикулярны, то его площадь равна половине произведения его диагоналей»*.

Задача о нахождении площади произвольного выпуклого четырехугольника через диагонали и угол между ними является наиболее обобщенной. Именно вокруг нее группируются частные задачи. В результате учащиеся придут к выводу, что обобщить задачу можно через последовательность следующих действий:

1) выделить основные понятия в условии задачи;

2) последовательно обобщить данное понятие;

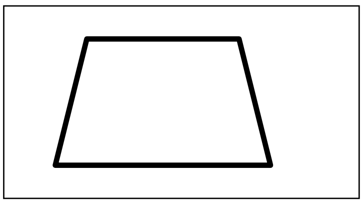
3) сформулировать последовательность обобщенных задач.

Подобные задачи облегчают подведение учащихся к формулированию теорем и связей между теоремами.

Для формирования умения применять такие эмпирические методы научного познания, как наблюдение, измерение, описание, опыт, лучше всего использовать практическую работу. Проведение такой работы необходимо осуществлять после введения информационного блока методологического характера, раскрывающего сущность эмпирических методов познания и их роли для геометрии, а также алгоритма проведения практической работы. Основная идея такой работы заключается в использовании учащимися наблюдения и измерения для выделения ими свойств изучаемой геометрической фигуры или отношений между геометрическими фигурами с последующей фиксацией полученной информации посредством описания, а также анализа зафиксированной информации и формулирования вывода. При этом необходимо обратить внимание на то, что результаты практической работы не могут приниматься за строгое обоснование того или иного геометрического факта или закономерности, но часто помогают их обнаружить, а также «подсказать» путь их логического доказательства.

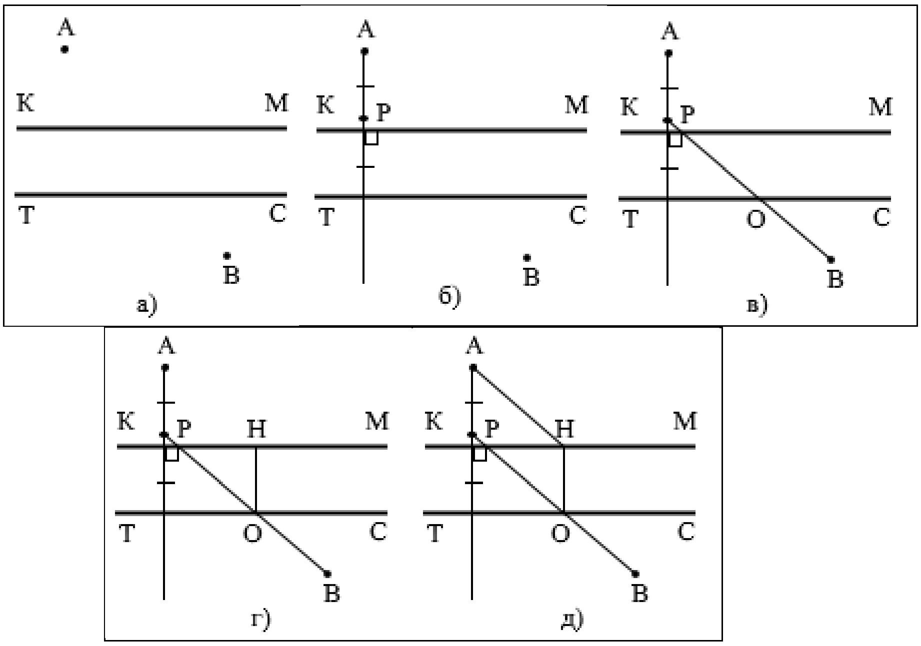
Например, приступая к изучению свойств параллелограмма, можно отметить, что в жизни иногда приходится проверять, является ли определенная фигура параллелограммом, и что для этой цели определение параллелограмма использовать неудобно. В таких случаях лучше воспользоваться свойством противоположных сторон параллелограмма, которое учащиеся и должны выявить. Для этой цели учащимся раздаются бумажные модели различных размеров параллелограммов. В процессе практической работы, в результате наблюдений, измерений, описаний и анализа школьники формулируют необходимые свойства объекта: у всех параллелограммов противолежащие стороны и противолежащие углы равны. В итоге формулируется теорема, выражающая свойство параллелограмма.

Здесь немаловажным является знакомство учащихся с понятием «гипотеза». При этом особое внимание следует уделить ложным гипотезам, а также напомнить, что лучшим средством опровержения неправильных гипотез являются контрпримеры. Например, для опровержения признака-гипотезы (*«если у четырехугольника противолежащие стороны параллельны, то он параллелограмм»*) нужно привести контрпример в виде чертежа.



Формирование умения применять абстрагирование и идеализацию в геометрии можно при решении задач с практическим содержанием. При решении любой задачи с практическим содержанием приходится прибегать к методам абстрагирования и идеализации. Ведь, чтобы решить такую задачу геометрическими средствами, ее необходимо вначале перевести на язык геометрии. Например, чтобы решить задачу *«Необходимо соединить шоссейной дорогой, включая постройку моста через реку, два села. Как должна пройти эта дорога, чтобы путь между селами был кратчайшим?»*, нужно абстрагироваться от практического характера задачи и перевести ее на язык геометрии:

«Две точки A и B (рисунок, а)) расположены по разные стороны от полосы KMTC, где прямые KM и TC параллельны. Соединить точки A и B ломаной так, чтобы одно из звеньев было перпендикулярно прямой KM, а длина ломаной была наименьшей» (KM и TC – образы берегов реки, точки A и B – это местоположение сел).



а) условия задачи; б) построение отрезка AP; в) построение точки пересечения прямых PB и TC; г) построение прямой, перпендикулярной KM; д) построение искомой дороги

Решение.

1. Построим отрезок AP, перпендикулярный KM, так, что AP равно расстоянию между прямыми KM и TC (рисунок, б)).

2. Проведем прямую PB, найдем точку ее пересечения с прямой TC; это точка O (рисунок, в)).

3. Проведем прямую OH, перпендикулярную KM (рисунок, г)).

4. Соединим точки A и H. Искомая дорога пройдет по ломаной AHOB (рисунок, д)).

Знания об общенаучных понятиях на этапе применения формируются с помощью выполнения специально подобранных упражнений. Формировать умения применения знаний учащихся о понятии и определении можно при выполнении упражнений, которые еще называют задачами на подведение под понятие. Например, усвоив понятие «перпендикулярные прямые», учащиеся должны научиться безошибочно находить перпендикулярные прямые в разных геометрических фигурах. Дети учатся мыслить в соответствии со схемой решения задач на подведение под понятие: вспоминают и выписывают признаки перпендикулярных прямых, в каждом случае последовательно проверяют наличие признаков и таким образом классифицируют все пары прямых на перпендикулярные и другие. Для подведения под понятие важно, чтобы учащиеся четко понимали, «видели» необходимые и достаточные условия понятия. Разделение признаков понятия облегчает учащимся распознавание, а учителю – построение чертежа для распознавания понятия. На чертежах можно варьировать невыполнение одного-двух из выделенных признаков, а также несущественные детали – расположение фигуры, обозначения на ней. Для распознавания понятия важно использовать чертеж и задавать соответствующие вопросы, например: *«В каких случаях построены перпендикулярные прямые? Почему в других случаях построенные прямые не является перпендикулярными? Какие из свойств перпендикулярных прямых не выполняются?»*.

Для отработки умения применять знания об «определении» на геометрическом материале учащимся также можно предложить следующие упражнения.

1. Назвать ближайший род для понятия «прямоугольный параллелепипед».

2. Назвать родовые и видовые признаки следующих понятий: параллелепипед, куб.

3. Определить, в каком соотношении находятся понятия «прямая призма» и «правильная призма»?

4. Объяснить, какое из понятий шире, а какое является частным случаем другого: прямой параллелепипед и прямоугольный параллелепипед?

Работа по готовым таблицам с классификациями треугольников, параллелограммов, многогранников и других фигур способствует закреплению умения учащихся классифицировать геометрические фигуры. Такие таблицы можно проектировать на экран. Вопросы по таблице могут быть следующими:

1. «Почему параллелограмм является обобщением ромба, прямоугольника?».

2. «Какие видовые свойства у ромба, квадрата?».

3. «Какие свойства у параллелограмма и прямоугольника общие?».

4. «В чем причина их общности?».

5. «Как, используя данную общность, облегчить запоминание материала?».

Такая работа с классификациями геометрических фигур особенно продуктивна на уроках обобщения и систематизации знаний.

При изучении свойств и признаков геометрической фигуры у учащихся формируются такие понятия, как *«признак», «свойство», «необходимое условие», «достаточное условие»*. Учащимся следует объяснить сущность понятий *«свойство»* и *«признак»* и их различие:

«Свойство – это характеристика известного объекта. Например, если дан ромб, то он обладает определенными характеристиками (свойствами), одно из которых то, что его диагонали взаимно перпендикулярны. Признак – это характеристика неизвестного объекта, т.е. характеристика, по которой можно определить, что это за объект. Например, дан треугольник, про который известно, что две его стороны равны. Здесь указана характеристика неизвестного треугольника (признак), по которой можно определить, что этот треугольник равнобедренный».

Для предотвращения ошибок учащимися при выделении свойств и признаков геометрических фигур целесообразно использовать таблицу, демонстрирующую разницу между свойством и признаком геометрической фигуры (демонстрация отличия в их логической структуре). Например, для четырехугольников.

СВОЙСТВО	ПРИЗНАК
Если четырехугольник – параллелограмм, то…	Если…, то четырехугольник – параллелограмм.
Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы…	Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы…

При изучении теоремы, выражающей свойство или признак геометрической фигуры, целесообразно применять алгоритм, который заключается в следующем:

1. Представление теоремы в условной форме с помощью словосочетания «если…, то…».

2. Выделение из формулировки теоремы ее объекта, условия и заключения.

3. Определение и обоснование того, что отображает данная теорема: свойство или признак.

4. Перевод формулировки теоремы на язык необходимых и достаточных условий.

Например, теорема: *«Если четырехугольник является параллелограммом, то у него противолежащие стороны равны и противолежащие углы равны»*. Согласно алгоритму, *объект* теоремы – *«параллелограмм»*, *условие* теоремы – *«четырехугольник является параллелограммом»*, *заключение* теоремы – *«у него противолежащие стороны и противолежащие углы равны»*. Так как объект (параллелограмм) находится в условии теоремы, то данная теорема отображает свойство параллелограмма. На языке необходимых и достаточных условий данная теорема имеет следующий вид: *«Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы у него противолежащие стороны и противолежащие углы были равны»*.

Здесь можно использовать следующие упражнения:

«1. Выделите в теоремах условие и заключение:

а) если в прямоугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то этот прямоугольник есть квадрат;

б) диагонали квадрата равны.

2. Составьте предложение с выражением “противолежащие стороны квадрата параллельны”, используя логическую связку “если…, то…”.

3. Обоснуйте, что выражает теорема “Диагонали квадрата точкой пересечения делятся пополам” – признак или свойство квадрата?

4. “Переведите” предложение на язык необходимых и достаточных условий: “Диагонали квадрата равны”».

Что касается философских законов и категорий, выделенных в номенклатуре методологически знаний, необходимых при изучении систематического курса геометрии, этап применения заключается в демонстрации учащимся и выявлении впоследствии самими школьниками их проявления в содержании геометрии.

Так, можно показать учащимся, что *«геометрия помогает не только проследить доступные для изучения количественные отношения окружающей действительности, но и продемонстрировать, как в ее содержании проявляется, например, закон перехода количественных изменений в качественные»*. Эту работу можно провести с помощью следующих упражнений:

«1. Определите вид четырехугольника, если у него две пары параллельных сторон.

2. Как изменится четырехугольник, если один из его углов станет равным 90 °?

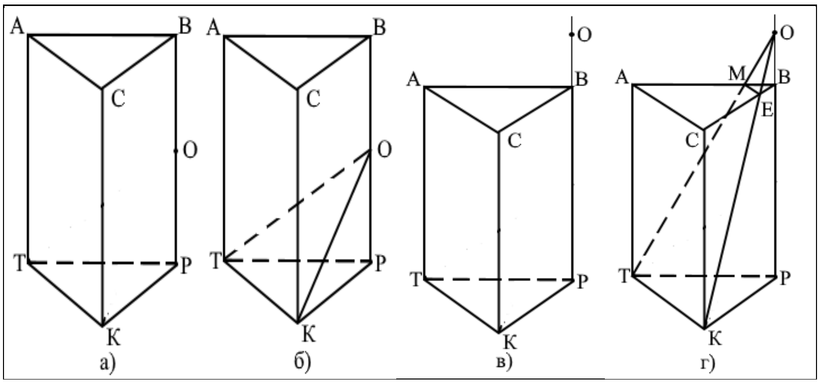
3. Как изменится четырехугольник, если две его стороны станут равными?

4. Как изменится четырехугольник, если один из его углов станет равным 60 °?».

Здесь важно обратить внимание учащихся на то, что видоизменение четырехугольников в цепочке «параллелограмм → ромб» и отображает закон перехода количественных изменений в качественные, так как, когда изменяются числовые значения линейных или угловых элементов четырехугольника (количественное изменение), меняется и вид четырехугольника (качественное изменение).

Наиболее ярко закон перехода количественных изменений в качественные можно показать с помощью систем задач с динамическими точками, т.е. точками, которые могут двигаться в соответствии с условием задачи. Например:

«1. Построить сечение прямой треугольной призмы ABCTPK плоскостью, проходящей через KO, где O – середина PB (рисунок, а)).



Решение.

Соединим точки К и О, получим КО.

Соединим точки Т и О (рисунок, б)), получим ТО.

Искомое сечение – треугольник ТОК.

2. Построить сечение прямой треугольной призмы АВСТРК плоскостью, проходящей через КО, где О принадлежит продолжению РВ (рисунок, в)).

Решение.

Соединим точки К и О, получим КО; точка Е – точка пересечения КО и СВ.

Соединим точки Т и О (рисунок, г)), получим ТО; М – точка пересечения ТО и АВ.

Соединим точки М и Е, получим МЕ.

Искомое сечение – четырехугольник ТМЕК».

При решении данных задач важно показать учащимся, что здесь количественные изменения (соотношение сторон ВО и ВР) приводят к количественным изменениям (вид сечения).

Для демонстрации учащимся действия закона философии «отрицание отрицания» на геометрическом материале можно предложить школьникам упражнения, которые содержат ложные геометрические утверждения. Необходимо, чтобы учащиеся их обнаружили, аргументировали их ложность и опровергли. Например, после изучения темы «Параллелограмм» школьникам можно предложить следующее упражнение:

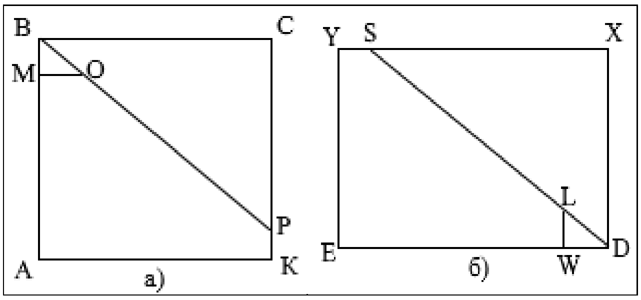
«Верны ли следующие утверждения:

1. Параллелограмм – это многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

2. Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные углы равны?».

Важно при этом объяснить учащимся, что отрицание отрицания заключается в том, что любая ошибка, сделанная в утверждении, отрицает истину, исправление же ошибки (отрицание отрицания) отрицает ошибку, и это открывает истину уже на более высоком уровне. С этой же целью можно эффективно использовать геометрические софизмы. Софизм – это ложное умозаключение, где наличие парадокса в задаче означает несостоятельность какой-либо из посылок, использованных в рассуждении. Учащиеся должны обнаружить ошибку, объяснить и устранить ее, т.е. выполнить отрицание отрицания.

Например, задача: *«Возьмем квадрат АВСК со стороной 8 см и, следовательно, площадью 64 см^2. Разрежем его на три части так, что ВМ = 1 см, РК = 1 см (рисунок, а)). Переставим полученные части и получим прямоугольник EYXD (рисунок, б)), где АМ = EY, МО = YS, ВС = SX, СР = XD, ВМ = РК = LW, ВО = LD, ОР = SL, АК = EW, площадь которого легко вычислить: 7 ×·9 = 63 см^2. В чем же дело?*



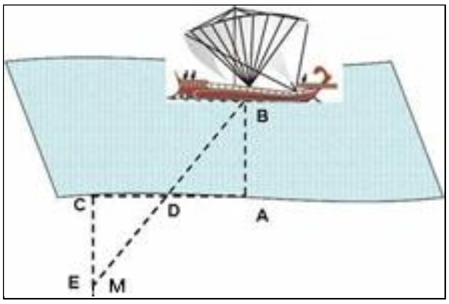
Решение.

Рассмотрим ΔLWD и ΔDXS; они подобны, так как они прямоугольные (по условию) и угол WLD равен углу SDX (как накрест лежащие при параллельных прямых WL и DX секущей LD), значит, $\frac{LW}{DX} = \frac{WD}{XS}$, откуда WD $= \frac{LW \cdot XS}{DX} = \frac{1 \cdot 8}{7} = \frac{8}{7}$ (см). Значит, ED = EW + WD = 8 + $\frac{8}{7} = \frac{64}{7}$ (см), отсюда S_{EYXD} = YE·ED = 7·$\frac{64}{7}$ = 64 (см^2). Противоречие не получается, так как ошибка в условии задачи, в утверждении, что площадь полученного прямоугольника равна 63 см^2, так как предполагается, что WD = 1 (см) и ED = EW + WD = 8 + 1 = 9 (см)».

Применение в геометрии знаний о картине мира (философско-мировоззренческая составляющая геометрии) осуществляется с использованием таких видов работ, как:

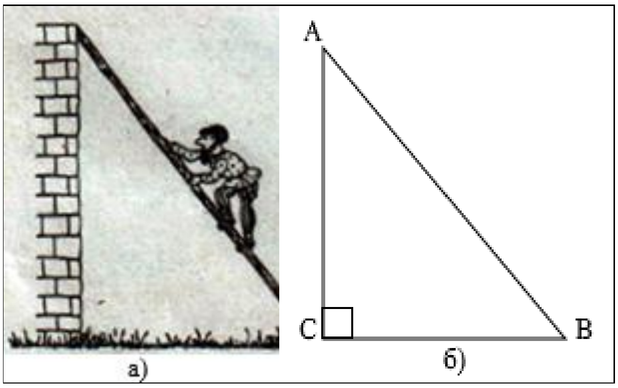
1. Проведение фрагментов исторических опытов, открытий и исследований.

«Фалес Милетский нашел важное практическое применение теоремы о равенстве двух треугольников. Так, в гавани Милета Фалес построил дальномер с целью измерения расстояние от берега до корабля, находящегося в моря. Он представлял собой три вбитых колышка C, D, A (рисунок), причем CD = DA, и размеченную прямую CM, перпендикулярную прямой CA. При появлении корабля на прямой CM находили точку E такую, чтобы точки E, D и B оказывались на одной прямой. Как ясно из чертежа, расстояние на земле CE и является искомым расстоянием до корабля AB по воде (по теореме о равенстве двух треугольников)».



2. Решение задач с историческим содержанием.

«Случися некоему человеку к стене лествицу прибрати, стены же тоя высота есть 117 стоп. И обрете лествицу долготою 125 стоп. И ведати хощет, колико стоп сея лествицы нижний конец от стены отстояти имать (рисунок, а)).



Рассмотрим прямоугольный ΔACB (по условию) (рисунок, б)) по теореме Пифагора: $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Отсюда $CB =$

$$\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{125^2 - 117^2} = \sqrt{(125 - 117)(125 + 117)} = \sqrt{8 \cdot 242} = 44 \text{ (стоп).}$$

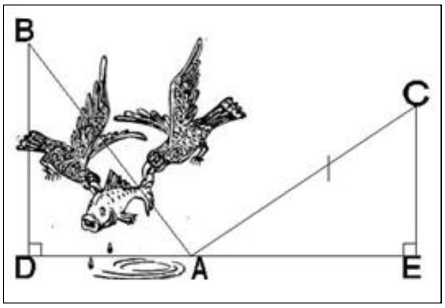
Стопа – старинная единица измерения, 1 стопа = 28,8 см, значит, 44 стопы = 1267,2 см».

3. Решение исторических задач.

«Арабская задача XI в. На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной 30 локтей, а другой – 20 локтей. Расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами. Они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно. На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

Решение.

Изобразим к задаче соответствующий чертеж (рисунок).



Пусть $DA = x$ (локтей), тогда $AE = 50 - x$ (локтей), так как по условию $DE = 50$ (локтей). Рассмотрим ΔBDA, он прямоугольный (по условию): по теореме Пифагора, $BA^2 = BD^2 + DA^2$; отсюда $BA^2 = 30^2 + x^2 = 900 + x^2$.

Рассмотрим ΔCEA, он прямоугольный (по условию): по теореме Пифагора, $CA^2 = CE^2 + AE^2$, отсюда $CA^2 = 20^2 + (50 - x)^2 = 400 + 2500 - 100x + x^2 = x^2 - 100x + 2900$.

Так как обе птицы пролетели расстояние за одно и то же время и с одинаковой скоростью, то $BA = AC$; значит, $BA^2 = CA^2$, откуда $900 + x^2 = x^2 - 100x + 2900$, или $100x = 2000$, значит, $x = 20$ (локтей).

Локоть – древнейшая мера длины, не имеющая определенного значения и примерно равная расстоянию от локтевого сустава до конца вытянутого среднего пальца руки (≈ 65 см)».

При решении исторических задач можно привлекать разнообразные источники: материальные (фотографии и рисованные изображения), текстовые (отрывки из официальных документов, хроник, воспоминаний), художественные (репродукции) и др.

Предложенные задачи с историческим содержанием (задачи, в которых используются старинные единицы измерения величин) способствуют также реализации принципа историзма в обучении. Использование историко-научного материала повышает интерес к предмету, формирует научное мировоззрение, устраняет поляризацию между предметами естественно-научного и гуманитарного цикла, обеспечивает формирование целостности восприятия мира у обучающихся.

Заключение

При описанном подходе к формированию методологических знаний учащихся при изучении систематического курса геометрии методологические знания представляют собой не надпрограммный материал, а способ организации и изучения геометрического материала, при котором происходит не только формирование методологических знаний в процессе изучения геометрии, но и более глубокое понимание учащимися изучаемого геометрического материала, что делает обучение более осознанным и системным. Это пополняет познавательный арсенал учащихся различными способами деятельности, которые могут в дальнейшем широко применяться при изучении других учебных дисциплин и в дальнейшем в работе по самообразованию, что является одним из важнейших условий интеллектуального развития школьников.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лернер, И. Я. Качества знаний учащихся. Какими они должны быть? / И. Я. Лернер. – М. : Знание, 1978. – 48 с.
2. Сендер, А. Н. История и методология начального курса математики : монография / А. Н. Сендер. – Брест : Изд-во БрГУ им. А. С. Пушкина, 2003. – 155 с.
3. Толстой, Л. Н. Война и мир : в 2 ч. / Л. Н. Толстой. – Самара : Самар. Дом печати, 1996. – Ч. 2 : т. 3 и 4. – 686 с.
4. Дробышев, Ю. А. Историко-математические знания как средство решения современных методических проблем / Ю. А. Дробышев // Актуальные проблемы обучения математике (к 150-летию со дня 34 рожд. А. П. Киселева) : материалы Всерос. науч.-практ. конф. – Орел : Изд-во Орл. гос. ун-та, 2002. – Т. 1. – С. 113–117.
5. Геометрия. Методические рекомендации. 10–11 классы : пособие для учителей общеобразоват. орг. / А. Д. Александров [и др.]. – М. : Просвещение, 2013. – 144 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 28.05.2018

Sender A.N., Fyodorova L.V. **The Formation of Methodological Knowledge to the Study of the Systematic Geometry Course: a Substantive-Methodological Aspect**

The article considers the problem of formation of students' methodological knowledge on the basis of the analysis of psychological, pedagogical and scientific-methodical literature. The author reveals the content and methodological aspect of the formation of students' methodological knowledge in the study of a systematic course of geometry: the approach of the formation of students' methodological knowledge based on their formation in the «explicit» form on the «knowledge» and «activity» levels is described, and its capabilities are shown on specific examples.