УДК 517.5

Д.Н. Олешкевич, М.А. Прохорович

ТОЧКИ ЛЕБЕГА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА НА ПРОСТРАНСТВЕ p -АДИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Пусть $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ – обобщенные классы Соболева на поле p-адических чисел и $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$ – соответствующая емкость. Мы покажем, что для любой функции $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$, существует множество $E \subset \mathbb{Q}_p^m$ такое, что $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ и для любого $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$ выполнено

$$\lim_{\gamma\to-\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u\,d\mu = u^*(x),\ \lim_{\gamma\to-\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} \left|u - u^*(x)\right|^s d\mu = 0,$$

$$\text{где } \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{m},\ B_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p^m : \|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m} \le p^\gamma\}.$$

Более того, функция u^* обладает $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$-свойством Лузина и $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(\{u^* \ne u\}) = 0$.

Введение.

В работе А. Кальдерона [1] было дано описание пространств Соболева $W_1^q(\mathbb{R}^m)$ в терминах максимальных функций, не использующее специфических конструкций на $\mathbb{R}^m$, кроме метрики и меры.

Пусть (X, d, μ) – метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ, которые связаны условием удвоения: при некотором $m > 0$ (здесь и далее через c обозначаем различные положительные постоянные, значения которых не играют роли)

$$\mu(B(x,R)) \le cR^m r^{-m} \mu(B(x,r)),\ x \in X,\ 0 < r \le R. \tag{1}$$

Здесь $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ – шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$. В таком случае принято говорить, что (X, d, μ) является пространством однородного типа.

Классы Кальдерона вводятся следующим образом:

$$W_\alpha^q(X) = \{u \in L^q : \|u\|_{W_\alpha^q(X)} = \|u\|_{L^q(X)} + \|S_\alpha u\|_{L^q(X)} < \infty\}, \tag{2}$$

$$S_\alpha u(x) = \sup_{x\in B} r_B^{-\alpha} \frac{1}{\mu(B)} \int_B \left|u(y) - u_B\right| d\mu(y),\ u_B = \frac{1}{\mu(B)} \int_B u\,d\mu$$

(точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(y,r)$ радиуса $0 < r_B \le 1$, содержащим точку $x \in X$). В случае $X = \mathbb{R}^m$ и $\alpha = 1$ классы $W_1^q(X)$ совпадают с классическим пространством Соболева первого порядка [1], а в общем случае – совпадают с классами Соболева–Хайлаша [2]. Для этих классов имеется также много других эквивалентных описаний [3; 4], некоторые из них будут использованы ниже.

В работах [6–10] изучалась задача о массивности дополнения ко множеству точек Лебега для функции из $W_\alpha^q(X)$. Итоговый результат выглядит следующим образом:

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$, $u \in W_\alpha^q(X)$, а мера μ удовлетворяет условию (1). Тогда существует множество $E \subset X$ такое, что для любого $x \in X \setminus E$*

$$\lim_{r\to+0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int\limits_{B(x,r)} u d\mu = u^*(x),\ \lim_{r\to+0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int\limits_{B(x,r)} \left|u-u^*(x)\right|^s d\mu = 0,\ \frac{1}{s}=\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{m},$$

и справедливы следующие оценки (здесь $\dim_H$ – размерность Хаусдорфа, а $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$ – емкость, порожденная классами $W_\alpha^q(X)$)*:*

1) $\dim_H(E)\le m-\alpha q$,

2) если $\alpha\le 1$*, то дополнительно можно утверждать, что* $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E)=0$.

В случае $X=\mathbb{R}^m$ это было сделано в [11]. История соответствующих результатов в этом направлении на $\mathbb{R}^m$ достаточно подробно изложена в [12, глава 6.2]. На пространствах однородного типа при $\alpha=1$ в терминах размерности Хаусдорфа этот результат был частично получен в [6], а в терминах соответствующих емкостей при всех $s^{-1}>q^{-1}-m^{-1}$ – в [7]. Случай $\alpha>0$, $s^{-1}=q^{-1}-m^{-1}$ был рассмотрен вторым автором в терминах емкостей для $0<\alpha\le 1$ [8] и в терминах размерности Хаусдорфа для $0<\alpha\le 1$ [9] и [10] для $\alpha>0$.

Однако существуют интересные ситуации, когда классы Гельдера нетривиальны при некоторых значениях $\alpha>1$. Например, это так на кривой Коха при $0<\alpha\le \ln 4\left(\ln 3\right)^{-1}$ [13] или пространстве p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ для всех $\alpha>0$. Поэтому условие $\alpha\le 1$ существенно сужает множество возможных ситуаций. К сожалению, на общих метрических пространствах работа с емкостями в классах $W_\alpha^q(X)$ с $\alpha>1$ затруднена, так как необходимо уметь строить нетривиальные гельдеровские функции с показателем $\alpha>1$ и носителем на любом заданном шаре, а это не всегда возможно.

В этой работе мы перенесем результаты из [8] на пространство $\mathbb{Q}_p^m$, причем нам удалось избавиться от ограничения $\alpha\le 1$. Перейдем к точным формулировкам и опишем необходимые понятия.

1. Необходимые определения.

1.1. Пространство p-адических чисел $\mathbb{Q}_p^m$.

Пусть p – простое число. В поле $\mathbb{Q}$ можно ввести нормирование $|x|_p$ по правилу $|0|_p=0$, $|x|_p=p^{-\gamma(x)}$, где число $\gamma(x)\in\mathbb{Z}$ определяется из представления $x=p^\gamma mn^{-1}$, причем $m,n\in\mathbb{Z}$ взаимнопросты с p. Введенное нормирование называется p-адическим нормированием. Оно порождает ультраметрику, т.е. неравенство треугольника имееет вид:

$$|x-y|_p\le\max\left\{|x|_p,|y|_p\right\}.$$

Пополнение поля $\mathbb{Q}$ по p-адическому нормированию называется полем p-адических чисел и обозначается $\mathbb{Q}_p$ [14; 15]. Пространство $\mathbb{Q}_p^m$ состоит из точек $x=(x_1,\ldots,x_m)$, $x_i\in\mathbb{Q}_p$, $i=1,\ldots,m$ и снабжено нормой $\|x\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\max\limits_{1\le i\le m}|x_i|_p$, которая также является ультраметрикой [15, с. 34].

Шар радиуса p^γ с центром в точке $x\in\mathbb{Q}_p^m$ будем обозначать далее

$$B_\gamma(x)=\left\{y\in\mathbb{Q}_p : \|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}\le p^\gamma\right\}.$$

Также будем использовать стандартные обозначения: $L^\infty=L^\infty(\mathbb{Q}_p^m)$ – множество классов эквивалентности измеримых существенно ограниченных вещественнозначных функций, $L^1_{loc} = L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p^m)$ – множество локально интегрируемых функций, $L^q = L^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $1 \le q < \infty$ – обычные лебеговы пространства, порожденные мерой μ (здесь μ – мера Хаара на $\mathbb{Q}_p^m$ [15, с. 57]), $C(\mathbb{Q}_p^m)$ – пространство непрерывных функций, $H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)$ – стандартные классы Гельдера

$$H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m) = \{f \in L^\infty(\mathbb{Q}_p^m) : \|f\|_{H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)} = \sup_{x \ne y} \|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{-\alpha} |f(x) - f(y)| < +\infty\}.$$

1.2. Пространства $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ и емкости

Нам понадобится следующее эквивалентное определение классов $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, которое восходит к П. Хайлашу [2; 3; 5].

Для функции $u \in L^q$ обозначим через $D_\alpha[u]$, $\alpha > 0$, класс всех неотрицательных μ-измеримых функций f на $\mathbb{Q}_p^m$, для каждой из которых существует такое множество $E \subset \mathbb{Q}_p^m$, $\mu(E) = 0$, что $|u(x) - u(y)| \le \|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^\alpha [f(x) + f(y)]$ для любых $x, y \in X \setminus E$. Дробные классы Хайлаша–Соболева $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ вводятся следующим образом [5; 3]:

$$W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m) = \left\{u \in L^q(\mathbb{Q}_p^m) : D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m) \ne \varnothing\right\},$$

$$\|u\|^q_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)} = \|u\|^q_{L^q(\mathbb{Q}_p^m)} + \inf\left\{\|f\|^q_{L^q(\mathbb{Q}_p^m)} : f \in D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m)\right\}. \tag{3}$$

В случае евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$ классы $W_1^q(\mathbb{R}^m)$ совпадают с классическим пространством Соболева [2]. В случае произвольного метрического пространства X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения (1), классы $W_1^q(X)$ были введены в работе [2]. Определения (2) и (3) эквивалентны [3; 4], поэтому мы и используем для них одно и то же обозначение.

Классы $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ порождают соответствующие емкости

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = \inf\left\{\|u\|^q_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)} : u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m), u \ge 1 \textit{ в окрестности } E \subset \mathbb{Q}_p^m\right\}.$$

В случае метрических пространств с условием удвоения (1) при $\alpha = 1$ они были определены и изучены в работе [16], а в случае произвольного $\alpha > 0$ – в [8; 17]. В случае евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$ результаты в этом направлении можно найти во многих работах [12, с. 152–153].

2. Основной результат

Функции из классов $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ определены лишь μ-почти всюду, поэтому, следуя [6], мы считаем, что все локально суммируемые функции в каждой точке определяются равенством

$$u(x) = \limsup_{\gamma \to -\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u\, d\mu.$$

Будем говорить, что функция $u : \mathbb{Q}_p^m \to \mathbb{R}$ обладает $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$-свойством Лузина (при $\alpha = 1$ это свойство называют обычно q-квазинепрерывностью [16], если для любого $\varepsilon > 0$ существует $E_\varepsilon \subset \mathbb{Q}_p^m$ такое, что $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E_\varepsilon) < \varepsilon$ и сужение функции u на $\mathbb{Q}_p^m \setminus E_\varepsilon$ непрерывно.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$ *и функция* $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$. *Тогда существует множество* $E \subset \mathbb{Q}_p^m$ *такое, что* $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ *и для любого* $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$ *выполнено*

$$\lim_{\gamma\to-\infty}\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))}\int\limits_{B_\gamma(x)} u\,d\mu = u^*(x),\ \lim_{\gamma\to-\infty}\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))}\int\limits_{B_\gamma(x)} \left|u-u^*(x)\right|^s d\mu = 0,\ \frac{1}{s}=\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{m}.$$

Более того, функция u^* *обладает* $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$*-свойством Лузина и* $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(\{u^*\neq u\})=0$.

При доказательстве теоремы 2 мы используем схему рассуждений из работы [8], приспособленную к пространствам $\mathbb{Q}_p^m$.

3. Вспомогательные утверждения

Нам потребуется обобщенное неравенство Соболева–Пуанкаре, в котором участвует максимальная функция А. Кальдерона–Р.Скотта из (2). Утверждение леммы 1 является частным случаем результатов работы И.А.Иванишко и В.Г.Кротова [18].

Лемма 1. *Пусть* $q>0$, $0<\alpha<mq^{-1}$, $u\in L^1_{loc}(\mathbb{Q}_p^m)$. *Тогда для любого шара* $B_\gamma\subset\mathbb{Q}_p^m$

$$\left[\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))}\int\limits_{B_\gamma(x)}\left|u-u_{B_\gamma(x)}\right|^s d\mu\right]^{1/s}\le cp^{\gamma\alpha}\left[\frac{1}{\mu(B_{c\gamma}(x))}\int\limits_{B_{c\gamma}(x)}\left(S_\alpha u\right)^q d\mu\right]^{1/q},\ \frac{1}{s}=\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{m}.$$

Отметим также одно свойство емкостей. Случай евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$ [12, с. 152–153]. Случай метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения при $\alpha=1$ [7; 16], а при $0<\alpha\le 1$ в [8; 17].

Лемма 2. *Пусть* $1<q<\infty$, $f\in L^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $f(x)\ge 0$ *и* $\alpha>0$ *тогда* $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E)=0$, *где*

$$E=\{x\in\mathbb{Q}_p^m:\limsup_{\gamma\to-\infty} p^{\gamma\alpha q}\frac{1}{\mu(B_\gamma)}\int\limits_{B_\gamma} f^q d\mu>0\}.$$

4. Теорема о продолжении функции

Хорошо известно, что функции, удовлетворяющие условию Гельдера порядка $0<\alpha\le 1$ на подмножестве метрического пространства, могут быть продолжены с сохранением этого свойства на все пространство [19, теорема 13.14]. Нам понадобится аналогичное утверждение в случае $\mathbb{Q}_p^m$, но уже для всех $\alpha>0$.

Теорема 3. Пусть $E\subset\mathbb{Q}_p^m$ и функция $f:E\to\mathbb{R}$ такая, что для некоторых $K>0$, $\alpha>0$ выполнено $\left|f(x)-f(y)\right|\le K\left\|x-y\right\|^\alpha_{\mathbb{Q}_p^m}$. (4)

Тогда существует функция $\tilde f:\mathbb{Q}_p^m\to\mathbb{R}$, $\tilde f|_E=f$, *для которой* $\tilde f$ *выполнено условие (4) на* $\mathbb{Q}_p^m$.

Доказательство.

Из (4) следует, что функция f является равномерно непрерывной. Следовательно, ее можно продолжить на замыкание множества E с сохранением константы и показателя Гельдера. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что E замкнуто.

Для $x\in\mathbb{Q}_p^m$ обозначим $R(x)=\inf\left\{\left\|x-y\right\|_{\mathbb{Q}_p^m}:y\in E\right\}$. Отметим, что в $R(x)$ точная нижняя грань достигается. Действительно, существует радиус p^{γ_0}, такой что $B_{\gamma_0}(x)\cap E\neq\varnothing$ и инфимум достаточно брать по множеству $B_{\gamma_0}(x)\cap E$, которое является компактным. Обозначим $B[x]=B_{\gamma_0}(x)$. Пусть

$$M(x)=\begin{cases}\{x\}, & x\in E\\ B[x]\cap E, & x\in\mathbb{Q}_p^m\setminus E\end{cases},\ h(x)=\max\{f(z):z\in M(x)\},$$

$$T(x)=\{z\in M(x):f(z)=h(x)\}.$$

Возьмем $\tau(x)\in T(x)$. Положим $\tilde{f}(x)=f(\tau(x))$. Покажем, что для $\tilde{f}$ выполняется $\left|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\right|\le K\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}$. Рассмотрим все возможные случаи расположения точек x,y.

1) В случае $x,y\in E$ утверждение теоремы очевидно.

2) Пусть $x\in E$, $y\in\mathbb{Q}_p^m\setminus E$. В этом случае выполнено $\tau(x)=x\in E$. В силу определения $\tau(y)$ имеем $\|\tau(y)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}\le\|\tau(y)-x\|_{\mathbb{Q}_p^m}$, $x\in E$. Отсюда $\|\tau(y)-x\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Тогда $\left|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\right|=\left|f(\tau(x))-f(\tau(y))\right|\le K\|\tau(x)-\tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}=K\|\tau(y)-x\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}\le K\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}$.

3) Если $x,y\in\mathbb{Q}_p^m\setminus E$, то возможны два случая:

3.1) $B[x]\cap B[y]=\varnothing$. В этом случае $\|\tau(y)-x\|_{\mathbb{Q}_p^m}<\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$ и $\|\tau(y)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}<\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Отсюда $\|\tau(x)-\tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\|\tau(x)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$ и, по свойству неархимедовой метрики имеем $\left|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\right|=\left|f(\tau(x))-f(\tau(y))\right|\le K\|\tau(x)-\tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}=K\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}$.

3.2) Если $B[x]\cap B[y]\neq\varnothing$, то неограничивая общности $B[x]\subset B[y]$, т.е. $R(x)\le R(y)$.

Возможны два подслучая.

3.2.1) Если $y\in B[y]\setminus B[x]$. Выполнено $\|\tau(x)-x\|_{\mathbb{Q}_p^m}<\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$, откуда $\|\tau(x)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Поскольку $P[x]\subset P[y]$, то $\tau(x)\in P(y)$ и $\|\tau(x)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\|\tau(y)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. По сильному неравенству треугольника

$$\|\tau(x)-\tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}\le\max\left\{\|\tau(y)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m},\|\tau(x)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}\right\}=\|\tau(x)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}.$$

Откуда получаем

$$\left|\tilde{f}(x)-\tilde{f}(y)\right|=\left|f(\tau(x))-f(\tau(y))\right|\le K\|\tau(x)-\tau(y)\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}=K\|x-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}^{\alpha}.$$

3.2.2) Пусть $y\in B[x]$. Тогда $R(y)=\|\tau(y)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Так как $\tau(x)\in P(x)=\left(B[x]\cap E\right)\subset\left(B[y]\cap E\right)=P(y)$. Следовательно, $\|\tau(y)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}=\|\tau(x)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}$. Так как $y\in B[x]$, то $\|\tau(x)-y\|_{\mathbb{Q}_p^m}\le\|\tau(x)-x\|_{\mathbb{Q}_p^m}=R(x)$. Следовательно, $B[x]=B[y]$, $P(x)=P(y)$, $\tilde{f}(x)=\tilde{f}(y)$. Теорема доказана.

5. Плотность класса Гельдера в $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$

Класс Гельдера $H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)$ плотен в $W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$; более того, справедливо следующее утверждение (случай $\alpha=1$ [2, с. 408]).

Теорема 4. *Для любой функции* $u\in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *существует функция* $\varphi\in H_\alpha(\mathbb{Q}_p^m)$ *такая что,* $\mu\left(\left\{x\in\mathbb{Q}_p^m:u(x)\neq\varphi(x)\right\}\right)<\varepsilon$ *и* $\|u-\varphi\|_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)}<\varepsilon$.

6. Неравенство слабого типа для емкости

Максимальная функция Харди–Литтлвуда [20, с. 65], вводится стандартным способом

$$Mu(x) = \sup \frac{1}{\mu(B_\gamma)} \int_{B_\gamma} |u| d\mu : \tag{5}$$

($\sup$ берется по всем шарам B_γ, содержащим точку $u \in \mathbb{Q}_p^m$).

Лемма 3. *Пусть* $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $f \in D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m)$. *Тогда* $Mu \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ *и при некотором* $c > 0$ *выполнено* $cMf \in D_\alpha[Mu] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m)$.

Неравенство слабого типа для $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$-емкости, приведенное в следующей теореме, является ключевым для доказательства нашего основного результата. В случае метрических пространств с мерой доказательство теоремы 5 приведено в [7] для $\alpha = 1$ и в [8] для $0 < \alpha \le 1$. Лемма 3 существенно используется при доказательстве теоремы 5.

Теорема 5. *Если* $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m), f \in D_\alpha[u] \cap L^q(\mathbb{Q}_p^m)$, *то при некотором* $c > 0$.

$$\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(\{Mu > \lambda\}) \le c\lambda^{-q} \|u\|^q_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)}, \lambda > 0.$$

7. Доказательство теоремы 2

После того, как готовы все вспомогательные средства, в которых использовалась специфика пространства $\mathbb{Q}_p^m$, доказательство теоремы 2 будет следовать схеме рассуждений из работы [8].

В силу теоремы 4 существует такая последовательность непрерывных функций $u_i \in C(\mathbb{Q}_p^m) \cap W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, что $\|u - u_i\|^q_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)} \le 2^{-i(q+1)}$. Обозначим

$$A_i = \left\{x \in \mathbb{Q}_p^m : M(u - u_i)(x) > 2^{-i}\right\},\ i \in \mathbb{N}.$$

Тогда, используя теорему 5, получаем следующее неравенство: $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(A_i) \le c2^{iq} \|u - u_i\|^q_{W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)} \le c2^{-i}$. Очевидно, что

$$|u_i(x) - u_\gamma(x)| \le \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u_i(x) - u_i| d\mu + \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u_i - u| d\mu,$$

и так как для любой точки $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus A_i$

$$\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u_i(x) - u_i| d\mu \to 0 \text{ при } \gamma \to -\infty,$$

то справедлива оценка $\limsup\limits_{\gamma \to -\infty} |u_i(x) - u_\gamma(x)| \le M(u_i - u)(x) \le 2^{-i}$. Обозначим

$$B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i,\ k \in N,\ \mathrm{Cap}_{\alpha,q}(B_k) \le \sum_{i=k}^{\infty} \mathrm{Cap}_{\alpha,q}(A_i) \le c\sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} = c2^{-k}$$

(неравенство верно в силу субаддитивности емкости). Если $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus B_k$ и $i, j \ge k$, то

$$|u_i(x) - u_j(x)| \le \limsup_{\gamma \to -\infty} |u_i(x) - u_\gamma(x)| + \limsup_{\gamma \to -\infty} |u_\gamma(x) - u_j(x)| \le 2^{-i} + 2^{-j}.$$

Это означает, что $\{\mathrm{u}_i\}$ сходятся равномерно на $\mathbb{Q}_p^m \setminus B_k$ к некоторой непрерывной функции v, для которой справедлива оценка

$$\limsup_{\gamma\to-\infty} | v(x) - u_\gamma(x) | \le | v(x) - u_i(x) | + \limsup_{\gamma\to-\infty} | u_i(x) - u_\gamma(x) | .$$

Теперь мы можем определить функцию $u^*(x) = v(x) = \lim_{\gamma\to-\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u\, d\mu$ для любого $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus B_k$. Пусть $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$, тогда $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(B_k) \le \sum_{i=k}^{\infty} \mathrm{Cap}_{\alpha,q}(A_i) \le \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i}$, откуда $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(C) \le \lim_{k\to\infty} \mathrm{Cap}_{\alpha,q}(B_k) = 0$. Значит, $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$-почти всюду (на $\mathbb{Q}_p^m \setminus C$) существует

$$\lim_{\gamma\to-\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u\, d\mu = u^*(x) .$$

Пусть D – множество из леммы 2 для функции $f = \mathcal{S}_\alpha u \in L^q(\mathbb{Q}_p^m)$. Тогда в силу леммы 1 на $\mathbb{Q}_p^m \setminus D$

$$\lim_{\gamma\to-\infty} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u_\gamma(x)|^s\, d\mu \right)^{1/s} \le c \lim_{\gamma\to-\infty} p^{\gamma\alpha} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_{c\gamma}(x)} (\mathcal{S}_\alpha u)^q\, d\mu \right)^{1/q} = 0 .$$

Осталось заметить, что $\lim_{\gamma\to-\infty} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u^*(x)|^s\, d\mu \right)^{1/s} \le$

$$\le \lim_{\gamma\to-\infty} \left(\frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} |u - u_\gamma(x)|^s\, d\mu \right)^{1/s} + \lim_{\gamma\to-\infty} | u_\gamma(x) - u^*(x) | = 0$$

для любого $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus (C \cup D)$ и $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(C \cup D) = 0$.

Теперь, чтобы получить утверждение теоремы, нужно зафиксировать $\varepsilon > 0$ и выбрать k достаточно большим, чтобы $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(B_k) < \varepsilon / 2$. Тогда существует открытое множество $O \supset B_k$ такое что, $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(O) < \varepsilon$. Так как $\{\mathrm{u}_i\}$ сходятся равномерно к u^* на $\mathbb{Q}_p^m \setminus O$, то сужение $u^*|_{\mathbb{Q}_p^m \setminus O}$ – непрерывная функция. Теорема доказана.

Авторы выражают признательность В.Г. Кротову и Я.В. Радыно за постоянное внимание, а также Е.М. Радыно за обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Calderon, A.P. Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions / A.P. Calderon // Studia Mathematica. – 1972. – Vol. 44. – P. 561–582.
2. Hajlasz, P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces / P. Hajlasz // Potential Analysis. – 1996. – Vol. 5, № 4. – P. 403–415.
3. Yang, D. New characterization of Hajlasz-Sobolev spaces on metric spaces / D. Yang // Science in China (series A). – 2003. – Vol. 46, № 5. – P. 675–689.
4. Иванишко, И.А. Обобщенные классы Соболева на метрических пространствах с мерой / И.А. Иванишко // Математические заметки. – 2005. – Т. 77, № 6. – С. 937–940.
5. Hu, J. A note on Hajlasz-Sobolev spaces on fractals / J. Hu // Journal of mathematical analysis and applications. – 2003. – Vol. 280, № 1. – P. 91–101.
6. Hajlasz, P. Holder qasicontinuity of Sobolev functions on metric spaces / P. Hajlasz, J. Kinnunen // Revista Matematica Iberoamericana. – 1998. – Vol. 14, № 3. – P. 601–622.
7. Kinnunen, J. Lebesgue points for Sobolev functions on metric spaces / J. Kinnunen, V. Latvala // Revista Matematica Iberoamericana. – 2002. – Vol. 18, № 3. – P. 685–700.

8. Прохорович, М.А. Емкости и точки Лебега для дробных классов Хайлаша-Соболева на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Известия НАН Беларуси. Серия физико-математических наук. – 2006. – № 1. – С. 19–23.

9. Прохорович, М.А. Размерность Хаусдорфа множества Лебега для классов W_α^p на метрических пространствах / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2007. – Т. 82, № 1. – С. 99–107.

10. Прохорович, М.А. Меры Хаусдорфа и точки Лебега для классов Соболева $W_\alpha^p, \alpha > 0$, на пространствах однородного типа / М.А. Прохорович // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 4. – С. 616–621.

11. Federer, H. The Lebesgue sets of a function whose distribution derivatives are $p-$th power summable / H. Federer, W. Ziemer // Indiana University Mathematics Journal. – 1972. – Vol. 22, № 2. – P. 139–158.

12. Adams, D.R. Function spaces and potential theory / D.R. Adams, L.I. Hedberg. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer-Verlag. – 1996. – 366 p.

13. Jonsson, A. Haar wavelets of higher order on fractals and regularity of functions / A. Jonsson // Journal of mathematical analysis and applications. – 2004. – Vol. 290, № 1. – P. 86–104.

14. Schikhov, W. Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis/ W. Schikhov. – London : Cambridge Universuty Press. – 1984. – 306 p.

15. Владимиров В.С. $p-$адический анализ и математическая физика / В.С. Владимиров, И.В. Волович, Е.И. Зеленов. – М. – 1994. – 352 с.

16. Kinnunen, J. The Sobolev capacity on metric spaces / J. Kinnunen, O. Martio // Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica. – 1996. – Vol. 21. – P. 367–382.

17. Прохорович, М.А. Соболевские емкости на метрических пространствах с мерой / М.А. Прохорович // Вестнник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика. – 2007. – № 3. – С. 106–111.

18. Иванишко, И.А. Обобщенное неравенство Пуанкаре-Соболева на метрических пространствах / И.А. Иванишко, В.Г. Кротов // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2005. – Т. 14, № 1. – С. 51–61.

19. Wells, J.H. Embeddings and Extensions in Analysis / J.H. Wells, L.R. Williams. – Berlin : Springer. – 1975. – 116 p.

20. Стейн, И. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / И. Стейн ; под ред. Е.Д. Соломенцева и С.Б. Стечкина. – Москва : Мир. – 1974. – 331 с.

D.N. Oleshkevich, M.A. Prokhorovich. **Lebesgue Points for Functions From Sobolev Classes on Space of p -Adic Numbers**

Let $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$ – be Sobolev generalized classes on space of p-adic numbers and $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$ – corresponding capacity. We show, that for any function $u \in W_\alpha^q(\mathbb{Q}_p^m)$, $\alpha > 0$, $1 < q < m\alpha^{-1}$, there exists a set $E \subset \mathbb{Q}_p^m$, such that $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(E) = 0$ and for any $x \in \mathbb{Q}_p^m \setminus E$.

$$\lim_{\gamma\to-\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} u d\mu = u^*(x) \ , \ \lim_{\gamma\to-\infty} \frac{1}{\mu(B_\gamma(x))} \int_{B_\gamma(x)} \left|u - u^*(x)\right|^s d\mu = 0 \ , \ \text{where} \ \frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{\alpha}{m} \ ,$$

$B_\gamma(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p^m : \|x - y\|_{\mathbb{Q}_p^m} \le p^\gamma\}$.

Moreover, function u^* hold $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}$-Lusin`s property and $\mathrm{Cap}_{\alpha,q}(\{u^* \ne u\}) = 0$.