УДК 517.519.948

В.М. Мадорский

О НЕРЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА–КРАСНОСЕЛЬСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье рассматриваются сверхлинейные итерационные процессы для нахождения приближенного решения нелинейного операторного уравнения в пространстве Банаха. Процессы сходятся к точному решению уравнения с «плохого» начального приближения. Локальная скорость сходимости процесса – квадратичная. Приводятся условия существования решения в области D.

Применение итеративных методов для решения нелинейных уравнений наталкивается на следующую трудность: если оператор задачи недифференциальный, то для успешного применения метода простой итерации, он должен быть оператором строгого сжатия, что на практике редко имеет место. Тем не менее очень часто оператор задачи может быть представлен в виде суммы двух операторов, один из которых недифференцируем, а второй дифференцируем. В этом случае строится итерационный процесс, предложенный Л.В. Канторовичем и развитый затем М.А. Красносельским [1]. К сожалению, предлагаемый процесс, который назовём процессом Канторовича–Красносельского, является локальным, т.е. сходящимся при «хороших» начальных приближениях. Для превращения этого процесса в «нелокальный» (по другой терминологии, в «полулокальный») используем идеи монографии [1].

Для решения нелинейного операторного уравнения

$$f(x)+g(x)=0 \tag{1}$$

f, g – нелинейные операторы, действующие из некоторой выпуклой области D банахова пространства X, в X в монографии [1] предложен алгоритм

$$x_{n+1}=x_n-\left[f^{'}(x_n)\right]^{-1}\left(f(x_n)+g(x_n)\right)=x_n-\Delta x_n,\ n=0,1,... \tag{2}$$

Он подробно рассмотрен в [2], где доказана его локальная сходимость. Для решения уравнения (1) предлагается нелокальный алгоритм с регулировкой шага.

Шаг 1. Решается линейная система для определения поправки Δx_n:

$$f^{'}(x_n)(x_{n+1}-x_n)=-\beta_n\left(f(x_n)+g(x_n)\right),\ n=0,1,\dots. \tag{3}$$

Шаг 2. Находится очередное приближение:

$$x_{n+1}=x_n+\Delta x_n. \tag{4}$$

Шаг 3. Проверяется выполнение условия $\| f(x_{n+1})+g(x_{n+1})\|\le\varepsilon$, ε – малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

Шаг 4. Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1}=\min\left(1,\frac{\| f(x_n)+\beta_{n-1}g(x_n)\|}{\| f(x_{n+1})+\beta_n g(x_{n+1})\|}\beta_n\right),\ \beta_0,\beta_{-1}\in\left[10^{-6},10^{-1}\right],\ \beta_{-1}<\beta_0 \tag{5}$$

и переход на шаг 1.

Относительно оператора f предполагаем, что $f\in C_D^{(1)}$, производная Фреше $f^{'}(x)$ оператора f удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L и $\left\|[f^{'}(x)]^{-1}\right\|\le B$, $\forall x\in D$. Относительно оператора g полагаем, что $\forall x\in D$ имеет место соотношение:

$$\| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n) \| \le \beta_n K . \tag{6}$$

Условие вида (6) впервые, по-видимому, было рассмотрено в [3; 4, с. 297].

Теорема 1. Пусть в области $D = \overline{S}\left(x_0, \dfrac{B \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}\right)$ существует x^* – решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (KB + LB^2) \cdot \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < 1 . \tag{7}$$

Тогда алгоритм (3)–(5) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Доказательство. Из (3) и условий теоремы имеем

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| \le \| f(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)) - f'(x_n) \| \times$$
$$\times \| x_{n+1} - x_n \| \le L \| x_{n+1} - x_n \|^2 . \tag{8}$$

С учетом (8) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_n g(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_{n-1} g(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) +$$
$$+ \beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)) \| \le \beta_n^2 LB^2 \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 . \tag{9}$$

Из (9) следует соотношение, связывающее нормы квазиневязок на соседних шагах:

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \le (1 - \beta_n) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| + \| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n) \| +$$
$$+ \beta_n^2 LB^2 \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^2 \le (1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| =$$
$$= q_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| . \tag{10}$$

Здесь $\varepsilon_n = \beta_n (KB + LB^2) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|$, $q_n = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)$.

Соотношение (10) является базовым при доказательстве сходимости процесса (3)–(5). При $n = 0$ из (10) и условий теоремы имеем:

$$\| f(x_1) + \beta_0 g(x)_1 \| \le (1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \ q_0 < 1,$$
$$\| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| < \| f(x_0) + \beta_1 g(x_0) \| . \tag{11}$$

Из (5) и (11) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (5), (10) и условий теоремы получим оценку

$$\| f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \| \le (1 - \beta_1 (1 - \varepsilon_1)) \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| =$$
$$= (1 - \beta_1 (1 - \varepsilon_0)) \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| = q_1 \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| \le$$
$$\le q_1 q_0 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \tag{12}$$

и так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0$. Из (12) следует, что $\| f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \| < \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \|$, тогда из (5) следует, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и в силу (10) справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \le \prod_{i=0}^{n} q_i \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < q_0^{n+1} \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \tag{13}$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемых процессом (3)–(5) к x^*. При этом $\beta_n \nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Переходя к пределу в (5) при $n \to \infty$ с учетом (13), имеем, что $\exists K$, что при $i \ge K$ $\beta \equiv 1$ и

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| = \| f(x^*) + g(x^*) \| = 0. \qquad (14)$$

Из соотношения (3), (13) и условий теоремы имеем оценку

$$\| x^* - x_n \| \le \sum_{i=n}^{\infty} \| \Delta x_i \| < \frac{Bq_0^n \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}, \qquad (15)$$

из которой следует и сильная (по норме) сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

При $n = 0$ из (15) находим величину радиуса сферы $D = \overline{S}(x_0, r)$, $r = \dfrac{B \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}$. Как следует из (13), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ итерации (3)–(5) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$, рассмотренного в [2].

Нетрудно показать, что, начиная с $n > n_0$, метод (3)–(5) имеет квадратичную скорость сходимости. В самом деле, при $\beta_n \equiv 1$ из (10) следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| \le (LB + KB^2) \| f(x_n) + g(x_n) \|^2,$$

или $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n^2$, из которой следует локальная квадратичная сходимость процесса (3)–(5) с $\beta_n = 1$ к x^*. Теорема доказана.

Замечание 1. Частный случай алгоритма (3)–(5) при $g(x) = 0$ рассмотрен в работе [5].

Рассмотрим сходимость процесса (3)–(5) в условиях Вертгейма, то есть если производная Фреше оператора $f'(x)$ удовлетворяет условию Гельдера вида:

$$\| f'(x) - f'(y) \| \le L \| x - y \|^p, \; L > 0, \; 0 < p < 1. \qquad (16)$$

Теорема 2. Пусть в интересующей нас области D выполняются условия теоремы 1, оператор $f'(x)$ удовлетворяет условию (16), начальное приближение x_0 и шаговые длины β_0, β_{-1} таковы, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0^p (KB + LB^{1+p}) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|^p < 1. \qquad (17)$$

Тогда алгоритм (3)–(5) со сверхлинейной скоростью сходится к x^*.

Доказательство. Из условий теоремы следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) - f(x_n) - f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \| \le \| f'(x_n + \theta(x_{n+1} - x_n)) - f'(x_n) \| \times$$
$$\times \| x_{n+1} - x_n) \| \le L \| x_{n+1} - x_n \|^{1+p}. \qquad (18)$$

С учетом (18) имеем:

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_n g(x_{n+1}) - f(x_n) - \beta_{n-1} g(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) +$$
$$+ \beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)) \| \le \beta_n^{1+p} LB^{1+p} \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^{1+p},$$

откуда следует соотношение, связывающие нормы квазиневязок на соседних шагах.

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \le (1 - \beta_n) \| f(x_n + \beta_{n-1} g(x_n)) \| + \| \beta_n g(x_{n+1}) -$$
$$- \beta_{n-1} g(x_n) \| + \beta_n^{1+p} LB^{1+p} \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^{1+p} \le$$
$$\le (1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \| = q_n \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|, \qquad (19)$$

здесь $\varepsilon_n = \beta_n^p (KB + B^{1+P}) \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|^p$, $q_n = 1 - \beta_n (1 - \varepsilon_n)$.

При $n = 0$ из (19) и условий теоремы имеем

$$\| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| \le (1 - \beta_0 (1 - \varepsilon_0)) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| = q_0 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \qquad (20)$$
$$q_0 < 1, \; \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| < \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|.$$

Из (5) и (20) следует, что $\beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ из (5), (20) и условий теоремы следует оценка:

$$\| f(x_2) + \beta_1 g(x_2) \| \le (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_1)) \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| = \qquad (21)$$

$$= (1 - \beta_1(1 - \varepsilon_0)) \times \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| = q_1 \| f(x_1) + \beta_0 g(x_1) \| \le$$

$$q_1 q_0 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|,$$

и так как $\beta_1 > \beta_0$, то $q_1 < q_0$.

Из (5) и (21) имеем, что $\beta_2 > \beta_1$.

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_i\}$ монотонно убывающая, последовательность итерационных параметров $\{\beta_i\}$ монотонно возрастающая и, в силу (19), справедлива оценка:

$$\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \le \prod_{i=1}^{n} q_i \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < q_0^{n+1} \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|, \qquad (22)$$

из которой следует слабая сходимость последовательности элементов $\{x_n\}$, генерируемых процессом (3)–(5) к x^*. При этом $\beta_n \nearrow 1$, так как последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастающая и ограничена сверху единицей. Доказательство того, что $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta^* = 1$, проводим вполне аналогично тому, как это делалось в теореме 1.

Из соотношений (3), (19) и условий теоремы имеем оценку

$$\| x^* - x_n \| \le \sum_{i=n}^{\infty} \| \Delta x_i \| < \frac{B q_0^n \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}, \qquad (23)$$

из которой следует и сильная сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

При $n = 0$ из (23) находим величину радиуса интересующей нас области $D = \overline{S}(x_0, r)$:

$$r = \frac{B \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}. \qquad (24)$$

Как следует из (19), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ итерации (3)–(5) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$, так что из (19) при $n > n_0$ следует оценка $\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| \le (LB + KB^{1+p}) \| f(x_n) + g(x_n) \|^{1+p}$,

или $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n^{1+p}$, из которой следует сверхлинейная сходимость процесса (3)–(5) с $\beta_n = 1$ к x^*. Теорема доказана.

Как показывает вычислительная практика решения существенно нелинейных задач, алгоритм, описанный выше, является более эффективным (часто на порядок) по количеству итераций, если вместо формулы (5) для определения шаговой длины использовать следующие формулы:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|}{\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \beta_n}\right),$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in \left[10^{-6}, 10^{-1}\right], \ \beta_1 < \beta_0.$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{2 \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \beta_n}\right),$$

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1}) W_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \|,$$

$$W_0 = \gamma \| f(x_0) + g(x_0) \|, \gamma << 1, \ \beta_0 \in [0{,}001;0{,}1].$$

Если область D определить другим способом, чем это мы делали выше, то может быть описан еще ряд эффективных процессов.

Пусть оператор f удовлетворяет в области D условиям: $f \in C_D^{(2)}$, линейный оператор $f'(x)$ в D обратим и имеют место оценки

$$\left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \le B, \quad \| f''(x) \| \le K, \forall x \in D.$$

Здесь $f'(x)$ – производная Фреше оператора f. Относительно оператора g полагаем, что выполняется условие (6).

Определим область D следующим образом: $D = \{x : w_n \le w_0\}$. Для решения уравнения (1.1) применим процесс вида:

<u>Шаг 1.</u> Решается линейное уравнение:

$$f'(x_n)\Delta x_n = -(f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n)), n = 0,1,2... \tag{25}$$

<u>Шаг 2.</u> Находим очередное приближение:

$$x_{n+1} = x_n + \beta_n \Delta x_n, \beta_0 \in (10^{-3} \div 10^{-1}), \ \beta_0, \ \beta_{-1} \in [10^{-6}, 10^{-1}]. \tag{26}$$

<u>Шаг 3.</u> Если $\| f(x_{n+1}) \| < \varepsilon$, $\varepsilon << 1$ (параметр останова), то конец просчётов, иначе

<u>Шаг 4.</u> Определяется новая шаговая длина: если $\| f(x_{n+1}) \| < \| f(x_n) \|$, то β_n принимает значение 1, иначе

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{w_n}{\alpha \beta_n (\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \|)}\right), \tag{27}$$

$$w_{n+1} = (1 - \beta_{n+1}) w_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \|, \tag{28}$$

$$w_0 = \gamma \| f(x_0) + \beta_0 g(x_0) \|; \alpha > 1, \gamma << 1$$

и осуществляется переход на шаг 1.

Теорема 3. Пусть в области D существует x^* – решение уравнения (1), оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям. Пусть сверх того выполняются условия:

а) $\beta_0 \dfrac{KB^2 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{2} = l_0 < 1;$

б) $\dfrac{\gamma}{\alpha \beta_o^2} < 1$.

Тогда итерационный процесс (25)–(28) со сверхлинейной скоростью сходится к $x^* \in D$ и $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = 0$.

Замечание 2. Как следует из (28), w_{n+1} аппроксимирует $\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \|$, и, следовательно, существует такой номер k, что для всех $i > k$ начинает выполнятся достаточное условие сходимости метода Ньютона. Если $\beta_i \sim 1$, тогда x_i попадает в область притяжения метода Ньютона, и мы можем рассчитывать на локальную квадратичную сходимость процесса (25)–(28).

Теорема 4 справедлива в предположении существования в D x^* – решения уравнения (1). Сформулируем и докажем теорему, в которой будут использованы доказательные вычисления.

Теорема 4. Пусть в области D оператор $f \in C_D^{(2)}$, $\left\| [f'(x)]^{-1} \right\| \le B$, $\| f''(x) \| \le K$, $\forall x \in D$ и, сверх того, выполняются условия:

a) $\dfrac{\beta_0 K B^2 \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{2} = l_0 < 1$, b) $\dfrac{\gamma}{\alpha \beta_0^2} < 1$,

c) начиная с некоторого номера k $\beta_i = 1$, $i > k$,

тогда итерационный процесс (25)–(28) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к $x^* \in D$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский, М.А. Приближение решения операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М. : Наука, 1969. – 455 с.

2. Zabrejko, P.P. The Majorant method in the Theory of Newton-Kantorovich Approximations and the Ptak Error Estimates / P.P. Zabrejko, D.F. Nguen // Numer. Funct. Anal and Optimiz. – 1987. – Vol. 9, № 5–6. – P. 671–684.

3. Perron, O. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen / O. Perron // J. Reine und Angew. Math. – 1929. – № 161. – S. 41–64.

4. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 558 с.

5. Жанлав, Т. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // ЖВМ. – 1992. – Т. 32, № 6. – С. 146–156.

6. Ульм, С. Об обобщенных разделенных разностях / С. Ульм // Известия АН ЭССР, физика, математика. – 1967. – Т. 16, № 1. – С. 13–26.

***V.M. Madorsky.* Abaut non Regulariseid non Local Kantorovich-Krasnoselski methods of Solving non Linear Equations**

The paper is concerned with the non local super linear Kantorovich-Krasnoselski iterative methods of approximate solution of the nonlinear operator equation in the Banach space. The processes converge to exact solution of the operator equation from the «bad» initial approximation. The local speed of convergence of the processes is too. We have the conditions that solution in the region D is exist.