

УДК 539.12

Ю.А. Курочкин, С.Я. Жукович**СИММЕТРИЯ МНОЖЕСТВ, ГЕНЕРИРУЕМЫХ
ОКТОНИОННЫМ АНАЛОГОМ АЛГОРИТМА
ЖУЛИА И ФАТУ**

Введены алгоритмы для генерации аналогов множеств Жулиа и Фату алгебры октав. Показано, что внутренними автоморфизмами, реализуемыми правыми и левыми произведениями в алгебре октав, данные множества (алгоритмы, их генерирующие) разбиваются на эквивалентные классы. Классы различаются двумя числами – инвариантами внутренних автоморфизмов, нулевой компонентой и модулем «векторной» части управляющей октавы, объединенными в элемент подалгебры алгебры октав – комплексное число. Для конкретного фиксированного алгоритма (множества) имеет место аксиальная симметрия относительно оси, задаваемой «векторной» частью октавы. Возможность сведения алгоритма к алгоритму с управляющим комплексным числом означает, что для одного класса эквивалентности алгоритмов, задаваемых комплексными числами, кватернионами и октавами имеет общее множество Мандельброта реализуемое в комплексной плоскости.

Введение

Фракталы – новый язык науки и новая геометрия. Однако, как это часто бывает, многие аспекты этого нового направления исследований имеют довольно-таки длительную историю, восходящую, по крайней мере, к первой четверти XX столетия. Слово «фрактал» (от латинского слова fractus – дробный) введено в научный обиход американским математиком польского происхождения, апологетом данного направления в математике Бенуа Мандельбротом относительно недавно, в семидесятые годы прошлого столетия [1].

В последние десятилетия ушедшего XX столетия и в истекшие годы XXI фракталы являются объектом интенсивного исследования математиков, физиков, ученых других областей науки [1–16]. В этот период, наряду с подходами, традиционно исследующими фракталы, связанные с простейшими отображениями, реализуемыми функциями вещественного [2; 3] и комплексного [4; 5] переменных, начинаются исследования аналогичных отображений, реализуемых функциями двойной переменной [6; 7], гиперкомплексными системами, такими как кватернионы и бикватернионы [8–10]. Существенно расширяется область возможных применений такого рода множеств.

Попытки применения фракталов достаточно многочисленны и разнообразны. Фрактальные множества используются для моделирования поведения траекторий динамической системы в фазовом пространстве методом сечений А. Пуанкаре [11], оптических свойств биофракталов [12], структуры углеродных кластеров при объяснении возможного механизма возникновения шаровой молнии [13], моделирования искусственных сред с определенными электромагнитными свойствами [14], для описания колебания цен на товарных биржах [16]. Работа [8], в частности, представляет собой исследование свойств кватернионных аналогов множеств Жулиа в связи с проблемами компьютерной графики, при этом в ней отмечается трудность визуализации построенных множеств. Последнее обстоятельство связано с четырехмерностью евклидова пространства, в котором реализуются геометрические представления кватернионов, в том числе генерируемых в результате применения алгоритмов типа Жулиа, о которых будет идти речь ниже. Установление свойств симметрии таких множеств в работах [9; 10] в значительной степени облегчает проблему их визуализации. Естественно, не только проблема визуализации делает важным исследование различных математических (в том числе симметричных) свойств различных фрактальных множеств. Следует

учесть многочисленные применения, в том числе физические, фрактальных множеств, указанных выше.

Предлагаемая статья продолжает упомянутые работы [8–10] по исследованию свойств симметрии множеств, генерируемых алгоритмом типа Жулиа, обобщенным для простейших гиперкомплексных систем. В ней рассмотрены множества, генерируемые простейшими прямым

$$X_{k+1} = X_k^2 + C \quad (1)$$

и обратным

$$X_{k+1} = \pm \sqrt{X_k - C} \quad (2)$$

алгоритмами, где X_{k+1}, X_k, C – восьмерки чисел – элементы алгебры октав. При этом C – фиксированная октава, которая называется управляющей. Если в формуле (1) начать с произвольно выбранной октавы X_0 , возвести ее в квадрат и прибавить к результату октаву C , получим X_1 . Повторив операцию, заменив X_0 на X_1 , получим X_2 , и так далее. Результатом описанных итераций в зависимости от выбранной X_0 будут следующие последовательности: последовательность точек восьмимерного евклидова пространства, уходящих на бесконечность – множество «беглецов», последовательность точек, сходящихся к точке внутри некоторой области – множество «узников» и, наконец, граничное множество точек, не относящихся ни к одному из двух предыдущих множеств – аналог фрактального множества Жулиа. Указанное множество может быть построено либо с помощью алгоритма (2), в котором знак выбирается компьютером случайным образом, обратного алгоритму (1), либо с помощью алгоритма (1), когда компьютер тестирует точки, отбирает из них только те, которые не принадлежат ни множеству «узников», ни множеству «беглецов».

Как и в случае кватернионных алгоритмов (1), (2) [9; 10] будет установлено, что существуют классы эквивалентности таких множеств и алгоритмов, их генерирующих, различающиеся только двумя управляющими параметрами, объединяемыми в комплексное число, выступающее как элемент подалгебры октав. Полученные результаты проливают новый свет на значение множества Мандельброта. Предлагаемая работа представляет собой расширенный вариант доклада [17].

Необходимые сведения из алгебры октав

Октава общего вида является линейной комбинацией

$$X = x_0 e + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 E + x_5 I + x_6 J + x_7 K \quad (3)$$

восьми базисных элементов e, i, j, k, E, I, J, K .

Алгебраические свойства октав полностью определяются таблицей умножения базисных величин, которую можно представить в виде [18]

			$-k$	I	J	I	i	E
k	i	j	K	I	$-j$	J	j	E
			K	$-i$	J	K	k	E

Если обозначить любую из этих троек α, β, γ , то

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \gamma, \beta\alpha = -\gamma; \beta\gamma = \alpha, \gamma\beta = -\alpha; \gamma\alpha = \beta, \alpha\gamma = -\beta; \\ \alpha^2 &= -e, \beta^2 = -e, \gamma^2 = -e. \end{aligned} \quad (4)$$

Сопряжение в системе октав определяется как

$$\bar{X} = x_0 e - x_1 i - x_2 j - x_3 k - x_4 E - x_5 I - x_6 J - x_7 K, \quad (5)$$

тогда произведение

$$X\bar{X} = \bar{X}X = |X|^2 \quad (6)$$

является числом и определяет модуль октавы

$$|X| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2}. \quad (7)$$

Произведение октав некоммутативно и неассоциативно, но обладает свойством альтернативности

$$(X_1 X_2) X_2 = X_1 (X_2 X_2), \quad (8)$$

$$X_1 (X_1 X_2) = (X_1 X_1) X_2, \quad (9)$$

$$(X_1 X_2) \bar{X}_2 = X_1 (X_2 \bar{X}_2), \quad (10)$$

$$\bar{X}_1 (X_1 X_2) = (\bar{X}_1 X_1) X_2. \quad (11)$$

Алгебра октав является системой с делением. Произвольную октаву можно представить в виде

$$X = x_0 + \underline{X}, \quad (12)$$

где

$$\underline{X} = x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 E + x_5 I + x_6 J + x_7 K, \quad (13)$$

причем

$$\overline{\underline{X}} = -\underline{X}. \quad (14)$$

Тогда

$$\underline{X}^2 = -|\underline{X}|^2, \quad (15)$$

$$X^2 = x_0^2 - |\underline{X}|^2 + 2x_0 \underline{X}. \quad (16)$$

Очевидно, октавы могут быть интерпретированы как векторы восьмимерного евклидова пространства, длина которых определяется выражением (7).

Некоторые свойства преобразований, определяемых октавами

Преобразования в системе октав типа

$$X' = (AX)\bar{A} = A(X\bar{A}), \quad (17)$$

где

$$A\bar{A} = 1, \quad (18)$$

являются внутренними автоморфизмами в том смысле, что

$$(X')^m = (X^m)', \quad (19)$$

где $m = 1, 2, \dots$

Доказательство проведем для $m = 2$ и $m = 3$.

$$(X^2)' = x_0^2 - |\underline{X}|^2 + 2x_0 (AX)\bar{A}.$$

$$\begin{aligned}(X')^2 &= (x_0 + \underline{X}')^2 = x_0^2 + [(A\underline{X})\overline{A}][A(\underline{X}\overline{A})] + 2x_0(A\underline{X})\overline{A} = \\ &= x_0^2 - |\underline{X}|^2 + 2x_0(A\underline{X})\overline{A},\end{aligned}$$

где учтено, что x_0 и $|\underline{X}|^2$ инвариантны при преобразованиях (17).

Таким образом,

$$(X')^2 = (X^2)'. \quad (20)$$

Для $m = 3$ имеем

$$\begin{aligned}(X^3)' &= (x_0^3 + 3x_0^2\underline{X} + 3x_0\underline{X}^2 + \underline{X}^3)' = \\ &= (x_0^3 + 3x_0^2\underline{X} - 3x_0|\underline{X}|^2 - |\underline{X}|^2\underline{X})' = \\ &= x_0^3 + 3x_0^2(A\underline{X})\overline{A} - 3x_0|\underline{X}|^2 - |\underline{X}|^2(A\underline{X})\overline{A}. \\ (X')^3 &= (x_0 + \underline{X}')^3 = x_0^3 + 3x_0^2\underline{X}' + 3x_0(\underline{X}')^2 + (\underline{X}')^3 = \\ &= x_0^3 + 3x_0^2(A\underline{X})\overline{A} + 3x_0(\underline{X}^2)' + (\underline{X}')^3 = \\ &= x_0^3 + 3x_0^2(A\underline{X})\overline{A} - 3x_0|\underline{X}|^2 + [(A\underline{X})\overline{A}]^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(A\underline{X})\overline{A}]^3 &= [(A\underline{X})\overline{A}][A(\underline{X}\overline{A})][A(\underline{X}\overline{A})] = \\ &= [(A\underline{X}^2)\overline{A}][A(\underline{X}\overline{A})] = -|\underline{X}|^2(A\underline{X})\overline{A}.\end{aligned}$$

Тогда

$$(X')^3 = (X^3)'. \quad (21)$$

Т.к. для любого четного m имеем

$$[(A\underline{X})\overline{A}]^m = (\pm 1)|\underline{X}|^m, \quad (22)$$

а для любого нечетного m

$$[(A\underline{X})\overline{A}]^m = (\pm 1)|\underline{X}|^{m-1}(A\underline{X})\overline{A}, \quad (23)$$

то

$$(X')^m = (X^m)'. \quad (24)$$

Свойства алгоритма типа Жулиа–Фату

Алгебраические свойства октав позволяют ввести октанионный аналог алгоритма Жулиа–Фату.

$$X_{k+1} = X_k^2 + C, \quad (25)$$

где X, C – октавы.

В силу установленных выше трансформационных свойств степеней октав относительно преобразований (19) формула (25) ковариантна относительно следующих преобразований в том смысле, что

$$X'_{k+1} = (AX_{k+1})\overline{A}, \quad (26)$$

если

$$X'_k = (AX_k)\overline{A}, \quad (27)$$

$$C' = (AC)\bar{A}, \quad (28)$$

где октава A удовлетворяет условию (18)

$$A\bar{A} = 1, \text{ т.е. } \bar{A} = A^{-1}. \quad (29)$$

Таким образом, с учетом данных свойств алгоритм (25) для октав является представителем классов эквивалентности таких алгоритмов и множеств, ими определяемых, которые связаны между собой преобразованиями эквивалентности (26–29) по всей цепочке итераций, аналогично тому, как это имеет место для кватернионных аналогов такого рода алгоритмов. А это значит, что любой из таких алгоритмов можно задать с помощью только двух чисел – c_0 и $|\underline{C}|$.

Произвольная октава C всегда может быть приведена к виду

$$C' = c_0 + |\underline{C}| i, \quad (30)$$

причем октава A , преобразующая октавы в алгоритме (25), в этом случае может быть представлена в виде

$$A = \frac{C + C'}{\sqrt{-|C + C'|^2}} \frac{\bar{C}}{\sqrt{-|C|^2}}, \quad (30)$$

$$\bar{A} = \frac{C}{\sqrt{-|C|^2}} \frac{\bar{C} + \bar{C}'}{\sqrt{-|C + C'|^2}} \quad [19; 20]. \quad (31)$$

Аналогично случаю кватернионных алгоритмов типа (25) точки, генерируемые данными алгоритмами (при фиксированном C), определены с точностью до преобразований вращений около оси, задаваемой векторной частью C , которые являются частным случаем преобразований эквивалентности (26–29). Указанные преобразования имеют вид:

$$A = \frac{1 + \underline{n} \tan(\varphi/2)}{\sqrt{1 + \tan^2(\varphi/2)}} = \cos(\varphi/2) + \underline{n} \sin(\varphi/2), \text{ где } \underline{n} = \underline{C}/|\underline{C}|.$$

Заключение

Таким образом, несмотря на неассоциативность алгебры октав, но благодаря свойству ее альтернативности, алгоритмы (25) и множества, ими генерируемые, обладают симметрией относительно внутренних автоморфизмов (26–28) данной алгебры и распадаются на классы эквивалентности, определяемые инвариантами данных преобразований C_0 и $|\underline{C}|$, объединенными в элементы подалгебры октав, из алгебры изоморфной комплексным числам, что существенно облегчает дальнейшее исследование свойств данных множеств и их приложения, в частности, в физике. Одним из следствий проведенного исследования является вывод о том, что множества Мандельброта для кватернионов и октав могут быть сведены к множествам Мандельброта в комплексной плоскости.

История фракталов началась задолго до появления компьютеров и, как иногда бывает в науке, началась с игры, а именно с исследования поведения точек, генерируемых алгоритмами вида (1), (2). Эта игра породила фундаментальные исследования в области теории аналитических функций комплексной переменной и в теории динамических систем. С возникновением компьютерной визуализации эти исследования пе-

решили на качественно новый уровень. Как замечает известный британский математик и физик Роджер Пенроуз, в данном случае компьютер применяется математиками в сущности так же, как прибор в руках физика-экспериментатора. Кто бы из математиков или программистов ни занялся изучением множества Мандельброта, результатом их исследований обязательно будут приближения к одной и той же единой для всех фундаментальной математической структуре. Т.е. данная структура не является всего лишь частью нашего мышления, но реальна сама по себе [22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mandelbrot, B.B. The Fractal Geometry of Nature / B.B. Mandelbrot. – N.Y. : Freeman and company. – 1982. – 468 p.
2. Якобсон, М.В. Эргодическая теория одномерных отображений. Динамические системы / М.В. Якобсон // ВИНТИ. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М. : Наука. – 1985. – Т. 2. – С. 204–233.
3. Файгенбаум, М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Файгенбаум // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141. – № 2. – С. 343–358.
4. Милнор, Дж. Голоморфная динамика / Дж. Милнор. – Удмурдский государственный университет, 2000. – 319 с.
5. Пайтген, Х.О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер. – М. : Мир. – 1993. – 175 с.
6. Gazizov, A.Z. The Analog of Julia Sets Associated with Double Numbers / A.Z. Gazizov, Yu.A. Kurochkin // Proc. of the Int. Seminar «Nonlinear phenomena in Complex Systems». – Polatsk, 1992. – С. 126–134.
7. Павлов, Д.Г. О фрактальности аналогов множеств Мандельброта и Жюлиа на плоскости двойной переменной / Д.Г. Павлов [и др.] // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6. – № 1 (11) – С. 135–145.
8. Norton, A. Julia Sets in the Quaternions / A. Norton // Computers and Graphics. – 1989. – Т. 2. – № 13. – С. 266–278.
9. Bogush, A.A. On symmetry properties of quaternionic analogs of Julia sets / A.A. Bogush [et al.] // Proc. of IX Nonlinear phenomena in Complex Systems. – Minsk. – 2000. – P. 304–309.
10. Bogush, A.A. Symmetry properties of quaternionic and biquaternionic analogs of Julia sets / A.A. Bogush [et al.] // Ukrainskij fizicheskij jurnal. – 2003. – Vol. 48. – № 4. – P. 295–299.
11. Николс, Г. Познание сложного / Г. Николс, И. Пригожин. – М. : Мир – 1990. – 342 с.
12. Ушенко, А.Г. Лазерная диагностика биофракталов / А.Г. Ушенко // Квантовая электроника. – 1999. – Т. 29. – С. 239–245.
13. Смирнов, Б.М. Проблема шаровой молнии / Б.М. Смирнов. – М. : Наука. – 1978. – 208 с.
14. Курочкин, Ю.А. Система визуализации кватернионных аналогов множеств Жулиа и определение интенсивности полей, рассеянных на них / Ю.А. Курочкин, А.Г. Сломинский // Труды конференции молодых ученых и специалистов «Современные проблемы физики». – Минск. – 2006. – С. 98–102.
15. Курочкин, Ю.А. Способ формирования защитного изображения на образце с последующим распознаванием / Ю.А. Курочкин, В.В. Махнач, А.Г. Сломинский // Патент Республики Беларусь на изобретение №11092 (2008).
16. Мандельброт, Б. Фракталы, случай и финансы / Б. Мандельброт. – Москва–Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика. – 2004. – 255 с.

17. Kurochkin, Yu.A. Symmetry Properties of the Sets Generated by Octonionic Julia-Fatou Algorithm / Yu.A. Kurochkin, S.Ya. Zhukovich // Proceedings of the 11-th Conference-School «Foundations and Advances in Nonlinear Science». – Minsk. – 2004. – P. 52–56.
18. Кантор, И.Л. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор, А.С. Солодовников. – М. : Наука – 1973. – 143 с.
19. Березин, А.В. Кватернионы в релятивистской физике / А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев. – Минск : Наука і тэхніка – 1989. – 200 с.
20. Богуш, А.А. О преобразованиях четырехмерных векторов / А.А. Богуш, Ф.И. Федоров // Доклады АН БССР. – 1962. – Т. 6. – № 11. – С. 690–693; Богуш, А.А. Конечные преобразования группы Лоренца и их представления / А.А. Богуш, Л.Г. Мороз. – Минск. – 1970. – 50 с. – (Препринт / Института физики АН БССР).
21. Богуш, А.А. Что такое фракталы / А.А. Богуш [и др.] // Наука и инновации. – 2004. – № 8 (18). – С.36–43.
22. Пенроуз, Р. Новый ум короля. О компьютерах, мышлении и законах физики / Р. Пенроуз. – М. – 2003. – 382 с.

Y. Kurochkin, S.Y. Zhukovich. Set Symmetry, Generated by Octonion Analog of Julia-Fatou Algorithm

The algorithms for generation of the analogs of Julia-Fatou sets for elements of the octonion algebra is introduced. We set up that by inner automorphisms which realized as left and right multiplications in the octonion algebra the above sets (generating algorithms) presents as unifications class of equivalence. These classes are defined by the two invariants of inner automorphisms namely zero part C_0 and module of the «vector» part $|\underline{C}|$ of control octonion C . Due to this symmetry control octonion can be reduced to the complex number of element of the subalgebra of octonion algebra. Thus Mandelbrot set for quaternions-and octonions sets connections with algorithms Julia-Fatou type are the same that for complex numbers.