УДК 519.24

И.И. Комаров

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ МЕР ЗАВИСИМОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН В СТАТИСТИЧЕСКОМ АНАЛИЗЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

В данной статье рассматривается новая мера зависимости для случайного процесса Xn, n∈Z. Доказывается, что введённая мера зависимости является расширенным понятием ковариационной функции. Выводятся формулы для оценки параметров авторегрессионной модели с использованием введённой меры зависимости на примере модели авторегрессии АР(1) и показано, что в частном случае полученные формулы совпадают с системой Юла–Уокера.

Пусть $X_n,\ n\in Z$ – симметричный устойчивый стационарный случайный процесс с индексом устойчивости α, $0<\alpha\le 2$. Если $\alpha = 2,$ то ковариационная функция $R(n) = E(X_n\cdot X_0) - E(X_n)E(X_0),\ n\in Z$ описывает структуру зависимости процесса $X_n,\ n\in Z.$ В случае $0 < \alpha < 2$ ковариационная функция не определена, поэтому возникает необходимость введения мер зависимости для случайного процесса $X_n,\ n\in Z,$ которые являются расширением понятия ковариационной функции.

В качестве такой меры, когда $n = 0,1,2,\ldots$ может выступать функция [1]:

$$I_n(\theta_1,\theta_2) = -\ln E(e^{i(\theta_1 X_n+\theta_2 X_0)}) + \ln E(e^{i\theta_1 X_n}) + \ln E(e^{i\theta_2 X_0}), \tag{1}$$

где $\theta_1,\ \theta_2 \in R,\ n\in Z.$

Теорема 1. Если $\alpha = 2,$ то введённая функция (1) связана с ковариационной функцией следующим соотношением:

$$I_n(\theta_1,\theta_2) = \theta_1\theta_2 R(n)\,, \tag{2}$$

$\theta_1,\ \theta_2 \in R,\ n \in Z.$

Доказательство. Перепишем (1) в виде

$$I_n(\theta_1,\theta_2) = -\ln\varphi_{X_n,X_0}(\theta_1,\theta_2) + \ln\varphi_{X_n}(\theta_1) + \ln\varphi_{X_0}(\theta_2)\,, \tag{3}$$

где $n\in Z,$ а $\varphi_{X_0}(\theta_2)$, $\varphi_{X_n}(\theta_1)$, $\varphi_{X_n,X_0}(\theta_1,\theta_2)$ – характеристические функции X_0, X_n, (X_n,X_0) соответственно [2].

Учитывая, что при $\alpha = 2$ характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_{x_n}(t) = e^{ita-\frac{\sigma_*^2 t^2}{2}}\,, \tag{4}$$

где $a = EX_n,\ \sigma_*^2 = DX_n,\ n\in Z.$

Подставляя характеристические функции X_0, X_n, (X_n, X_0) [3] , для нашего случая имеем:

$$I_n(\theta_1,\theta_2) = -\ln e^{i(\theta_1 X_n+\theta_2 X_0)-\frac{(\theta_1^2 DX_n+\theta_2^2 DX_0+2\theta_1\theta_2 R(n))}{2}} +$$

$$+\ln e^{i\theta_1 X_n-\frac{\theta_1^2\cdot DX_n}{2}} + \ln e^{i\theta_2 X_0-\frac{\theta_2^2\cdot DX_0}{2}} = \theta_1\theta_2 R(n)\,.$$

Исследуем задачу нахождения коэффициентов моделей авторегрессии АР(1) с использованием функции (1).

Известно[4]: для того чтобы случайная величина ε была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы её характеристическая функция $\varphi_\varepsilon(t)$ допускала представление

$$\ln\varphi_\varepsilon(t)=i\mu t-\sigma^\alpha|t|^\alpha+i\sigma^\alpha t\omega(t,\alpha,\beta), \tag{5}$$

где $\alpha\in(0;2]$, $\beta\in[-1;1]$, $\sigma>0$, $\mu\in R$, $t\in R$, и

$$\omega(t,\alpha,\beta)=\begin{cases}|t|^{\alpha-1}\beta\,\mathrm{tg}(\pi\alpha/2),\alpha\neq 1,\\ -2\beta\ln|t|/\pi,\alpha=1.\end{cases}$$

Если характеристическая функция случайной величины ε удовлетворяет (5), то в этом случае мы будем писать $\varepsilon\sim S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$.

Модель авторегрессии первого порядка АР(1)

Рассмотрим процесс авторегрессии первого порядка АР(1)

$$X_n-b_1X_{n-1}=\varepsilon_n,$$

где $b_1\in R$, а ошибки ε_n – независимые, симметричные α-устойчивые случайные величины ($\varepsilon_n\sim S_\alpha(0,\sigma,0)$) с характеристической функцией

$$\varphi_{\varepsilon_n}(t)=e^{-\sigma^\alpha|t|^\alpha}, \tag{6}$$

где $\alpha\in(0;2]$, $\sigma>0$, $n\in Z$.

Предполагаем, что процесс является стационарным, т.е. $|b_1|<1$. Исследуем задачу нахождения коэффициента авторегрессии b_1. Для этого рассмотрим функцию $I_1(\theta_1,\theta_2)$:

$$I_1(\theta_1,\theta_2)=-\ln E(e^{i(\theta_1X_1+\theta_2X_0)})+\ln E(e^{i\theta_1X_1})+\ln E(e^{i\theta_2X_0}),$$

где θ_1, $\theta_2\in R$.

Определим распределение случайных величин $\theta_1X_1+\theta_2X_0$, θ_1X_1, θ_2X_0. Для этого воспользуемся следующим свойством устойчивых законов распределения [5].

Свойство. Если Y_1,Y_2 – независимые α-устойчивые случайные величины, $Y_i\sim S_\alpha(\sigma_i,0,0)$, $i=1,2$, то

$$a_1Y_1+a_2Y_2\sim S_\alpha((|a_1|^\alpha\sigma_1^\alpha+|a_2|^\alpha\sigma_2^\alpha)^{1/\alpha},0,0), \tag{7}$$

a_1, $a_2\in R$.

Запишем θ_2X_0 как

$$\theta_2X_0=\theta_2(b_1X_{-1}+\varepsilon_0)=\theta_2(b_1(b_1X_{-2}+\varepsilon_{-1})+\varepsilon_0)=\theta_2\varepsilon_0+\theta_2b_1\varepsilon_{-1}+...+\theta_2b_1{}^k\varepsilon_{-k}+....,$$

тогда

$$\theta_2X_0\sim S_\alpha((|\theta_2|^\alpha\sigma^\alpha+|\theta_2b_1|^\alpha\sigma^\alpha+...+|\theta_2b_1{}^k|^\alpha\sigma^\alpha+...)^{1/\alpha},0,0).$$

С учетом распределения θ_2X_0 и вида характеристической функции симметричной устойчивой случайной величины (6) мы можем записать, что

$$\varphi_{\theta_2X_0}(1)=e^{-(|\theta_2|^\alpha+|\theta_2b_1|^\alpha+...+|\theta_2b_1{}^k|^\alpha+...)\sigma^\alpha}.$$

Запишем случайную величину θ_1X_1 как

$$\theta_1X_1=\theta_1(b_1X_0+\varepsilon_1)=\theta_1(b_1(b_1X_{-1}+\varepsilon_0)+\varepsilon_1)=\theta_1\varepsilon_1+\theta_1b_1\varepsilon_0+...+\theta_1b_1{}^{k+1}\varepsilon_{-k}+.....$$

Учитывая (7), имеем:

$$\theta_1 X_1 \sim S_\alpha((|\theta_1|^\alpha \sigma^\alpha + |\theta_1 b_1|^\alpha \sigma^\alpha + \ldots + \left|\theta_1 b_1{}^{k+1}\right|^\alpha \sigma^\alpha + \ldots)^{1/\alpha}, 0, 0). \tag{9}$$

Как и в случае с $\theta_2 X_0$, для $\theta_1 X_1$ получим:

$$\varphi_{\theta_1 X_1}(1) = e^{-(|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1|^\alpha + \ldots + \left|\theta_1 b_1{}^{k+1}\right|^\alpha + \ldots)\sigma^\alpha}. \tag{10}$$

Для случайной величины $\theta_1 X_1 + \theta_2 X_0$ имеем:

$$\theta_1 X_1 + \theta_2 X_0 = \theta_1 \varepsilon_1 + \theta_1 b_1 \varepsilon_0 + \ldots + \theta_1 b_1{}^{k+1} \varepsilon_{-k} + \ldots + \theta_2 \varepsilon_0 + \theta_2 b_1 \varepsilon_{-1} + \ldots + \theta_2 b_1{}^k \varepsilon_{-k} + \ldots .$$

Учитывая (7), получим:

$$\theta_1 X_1 + \theta_2 X_0 \sim$$

$$\sim S_\alpha((|\theta_1|^\alpha \sigma^\alpha + |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha \sigma^\alpha + \left|\theta_1 b_1{}^2 + \theta_2 b_1\right|^\alpha \sigma^\alpha + \ldots + \left|\theta_1 b_1{}^{k+1} + \theta_2 b_1{}^k\right|^\alpha \sigma^\alpha + \ldots)^{1/\alpha}, 0, 0), \tag{11}$$

следовательно, с учётом (6)

$$\varphi_{\theta_2 X_0 + \theta_1 X_1}(1) = e^{-(|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha + \left|\theta_1 b_1{}^2 + \theta_2 b_1\right|^\alpha + \ldots + \left|\theta_1 b_1{}^{k+1} + \theta_2 b_1{}^k\right|^\alpha + \ldots)\sigma^\alpha}. \tag{12}$$

Подставляя (8), (10), (12) в (1), имеем:

$$I_1(\theta_1, \theta_2) = (|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha + \left|\theta_1 b_1{}^2 + \theta_2 b_1\right|^\alpha + \ldots + \left|\theta_1 b_1{}^{k+1} + \theta_2 b_1{}^k\right|^\alpha + \ldots)\sigma^\alpha -$$

$$-(|\theta_1|^\alpha + |\theta_1 b_1|^\alpha + \ldots + \left|\theta_1 b_1{}^{k+1}\right|^\alpha + \ldots)\sigma^\alpha - (|\theta_2|^\alpha + |\theta_2 b_1|^\alpha + \ldots + \left|\theta_2 b_1{}^k\right|^\alpha + \ldots)\sigma^\alpha .$$

Раскрывая скобки, получим:

$$I_1(\theta_1, \theta_2) = |\theta_1 b_1 + \theta_2|^\alpha \sigma^\alpha + \left|\theta_1 b_1{}^2 + \theta_2 b_1\right|^\alpha \sigma^\alpha + \ldots + \left|\theta_1 b_1{}^{k+1} + \theta_2 b_1{}^k\right|^\alpha \sigma^\alpha + \ldots -$$

$$-|\theta_1 b_1|^\alpha \sigma^\alpha - \ldots - \left|\theta_1 b_1{}^{k+1}\right|^\alpha \sigma^\alpha - \ldots - |\theta_2|^\alpha \sigma^\alpha - |\theta_2 b_1|^\alpha \sigma^\alpha - \ldots - \left|\theta_2 b_1{}^k\right|^\alpha \sigma^\alpha - \ldots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left|\theta_1 b_1{}^{i+1} + \theta_2 b_1{}^i\right|^\alpha \sigma^\alpha - \sum_{i=0}^{\infty} \left|\theta_1 b_1{}^{i+1}\right|^\alpha \sigma^\alpha - \sum_{i=0}^{\infty} \left|\theta_2 b_1{}^i\right|^\alpha \sigma^\alpha . \tag{13}$$

Теорема 2. Если $\alpha = 2$, то

$$b_1 = \rho_1,$$

Доказательство. Перепишем (13) в виде

$$I_1(\theta_1, \theta_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \left|\theta_1 b_1{}^{i+1} + \theta_2 b_1{}^i\right|^2 \sigma^2 - \sum_{i=0}^{\infty} \left|\theta_1 b_1{}^{i+1}\right|^2 \sigma^2 - \sum_{i=0}^{\infty} \left|\theta_2 b_1{}^i\right|^2 \sigma^2 . \tag{14}$$

Преобразуя (14), получим

$$I_1(\theta_1, \theta_2) = 2\sigma^2 \theta_1 \theta_2 \sum_{i=0}^{\infty} b_1{}^{2i+1} .$$

С учётом (2) имеем

$$\theta_1 \theta_2 R(1) = 2\sigma^2 \theta_1 \theta_2 \frac{b_1}{1 - b_1{}^2} .$$

$$R(1) = 2\sigma^2 \frac{b_1}{1 - b_1{}^2} .$$

Так как $\alpha = 2$, то $2\sigma^2 = \sigma_\varepsilon{}^2$ (это вытекает из характеристических функций для ε (6) и нормально распределённой случайной величины), и, учитывая, что

$$\frac{\sigma_\varepsilon{}^2}{1 - b^2} = R(0),$$

будем иметь

$$R(1) = b_1 R(0).$$

$$b_1 = \rho_1,$$

где $\rho_n = \dfrac{R(n)}{R(0)}$.

Таким образом, для случая АР(1), при $\alpha = 2$, коэффициент не зависит от значений коэффициентов θ_1, и θ_2 и совпадает с коэффициентом в случае метода Юла–Уокера.

Аналогично можно показать, что введённую функцию (1) можно использовать и для более высоких порядков модели авторегрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nowicka, J. Measurer of Dependence for ARMA Models with Stable Innovations / J. Nowicka, A. Veron. // Annals Univ. Marie Curie-Sklodowska. – Lublin, 1997. – P. 12.
2. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей. Т.2. / В.Феллер. – М. : Мир, 1984. – 752 с.
3. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М. : Наука. – 1969. – 400 с.
4. Zolotarev, V. Stable Distributions and their Applications / V. Zolotarev, V. Uchaikin. – Utrecht : VSP. – 1999. – 594 s.
5. Труш, Н.Н. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов / Н.Н. Труш, Т.В. Соболева. – Минск : БГУ. – 2008. – 68 с.
6. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М. : Мир. – 1974. – 408 с.

***I.I. Komarov.* Usage of Generalized Measures of Dependence of Stochastic Values in a Statistic Analysis of Temporal Series**

The article deals with the measure of dependence for a stochastic process X_n, $n \in Z$. The measure is an extension of the covariance function concept. The work contains the formulas for estimating the parameters of an autoregressive model with the use of the measure of dependence.