УДК 512.542

В.Н. Княгина

О *p*-РАЗРЕШИМОСТИ КОФАКТОРА ПЕРЕСТАНОВОЧНОЙ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Для простого числа p устанавливается p-разрешимость кофактора H/H_G при условии, что подгруппа H конечной группы G перестановочна со всеми подгруппами порядка $p^{\alpha}q^{\beta}$, где q – любой простой делитель порядка группы, α и β – натуральные числа.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Если H – подгруппа группы G, то $H_G = \bigcap_{x\in G} H^x$ – ее ядро в группе G, а H/H_G – кофактор подгруппы H в группе G. Примарная группа – это группа порядка p^{α}, а бипримарная группа – группа порядка $p^{\alpha}q^{\beta}$, где p и q – различные простые числа, α и β – натуральные числа.

Квазинормальной называют подгруппу, перестановочную со всеми подгруппами группы. Ясно, что квазинормальная силовская подгруппа нормальна. Поэтому нильпотентной является группа, у которой все силовские подгруппы квазинормальны. Согласно теореме Ито–Сепа [1] кофакторы квазинормальных подгрупп нильпотентны. Поскольку подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, будет перестановочна с их порождением, то нильпотентным будет кофактор подгруппы, перестановочной со всеми примарными подгруппами. Это следует из того, что подгруппа, перестановочная со всеми примарными подгруппами, является квазинормальной.

Ясно, что подгруппа, перестановочная со всеми бипримарными подгруппами, не обязана быть квазинормальной. Примером служит подгруппа порядка 2 в симметрической группе степени 3.

Э.М. Пальчик [2] установил следующие свойства подгруппы H, перестановочной со всеми бипримарными подгруппами группы G:

1) либо H субнормальна, либо примарна;

2) фактор-группа H/H_G разрешима; в частности, если H совпадает со своим коммутантом, то H нормальна.

В настоящей заметке развиваются результаты работы [2] и доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Предположим, что силовская p-подгруппа P группы G ненормальна в G и перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами из G. Тогда G – бипримарная группа, P максимальна в G и силовская q-подгруппа Q – элементарная абелева, где $q \neq p, q \in \pi(G)$. Кроме того, либо G – группа Фробениуса и Q – минимальная нормальная подгруппа в G, либо $|Q| = q$ и p делит $q-1$.*

Теорема 2. *Если подгруппа H группы G перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами из G, то H/H_G p-разрешима.*

При $p = 2$ получаем

Следствие 2.1. *Если подгруппа H группы G перестановочна со всеми бипримарными подгруппами четного порядка, то H / H_G разрешима. В частности, если H совпадает со своим коммутантом, то H нормальна в G.*

В отношении терминологии и обозначений будем придерживаться [3; 4]. Напомним, что pd-подгруппой называется подгруппа, порядок которой делится на простое число p. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение подгрупп A и B с нормальной подгруппой A. Группа с нормальной силовской p-подгруппой называется p-замкнутой. Подгруппа S называется *субнормальной подгруппой* группы G, если существует цепочка подгрупп

$$S = S_0 \subseteq S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_{n-1} \subseteq S_n = G$$

такая, что S_i – нормальная подгруппа в S_{i+1} для каждого $i = 0,1,...,n-1$.

Группа, которая содержит подгруппу H такую, что $H \bigcap H^x = 1$ для всех $x \in G \setminus H$, называется *группой Фробениуса*. Известно, что в группе Фробениуса G существует нильпотентная нормальная подгруппа K такая, что $G = [K]H$.

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Известно, что группы Шмидта имеют порядок, делящийся точно на два простых числа, одна из силовских подгрупп нормальная, а другая – циклическая.

Более подробная информация о группах Шмидта и группах Фробениуса имеется в [3; 4].

Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Каждая непримарная pd-группа порождается своими бипримарными pd-подгруппами.*

Доказательство. Пусть G – непримарная pd-группа. Если она p-нильпотентна, то в ней существуют $\{p,q\}$-холловы подгруппы для каждого $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$, [4, гл. VI]. Ясно, что группа G ими порождается. Пусть G не p-нильпотентна. По теореме IV. 5.4 [4], в G существует бипримарная pd-подгруппа. Через B обозначим подгруппу, порожденную всеми бипримарными pd-подгруппами группы G. Ясно, что подгруппа B нормальна в G и p делит порядок B.

Пусть $B \neq G$ и q – простой делитель $|G:B|$. Предположим, что $q \neq p$. По лемме Фраттини, $G = N_G(P)B$, где P – силовская p-подгруппа из B. Так как

$$|G:B| = |N_G(P) : B \bigcap N_G(P)|,$$

то в $N_G(P)$ существует подгруппа $[P]Q$, где Q – силовская q-подгруппа из $N_G(P)$. По построению подгруппы B подгруппа $[P]Q$ содержится в B и q не делит $|G:B|$ – противоречие. Значит, допущение неверно и $q = p$, т.е. $|G:B| = p^n$, где n – натуральное число. Так как B не является p-группой, то некоторое простое число $r \neq p$ делит $|B|$. Теперь по лемме Фраттини, $G = BN_G(R)$, где R – силовская r-подгруппа из B. Пусть S – силовская p-подгруппа из $N_G(R)$. Подгруппа $[R]S$ является бипримарной pd-подгруппой, поэтому $[R]S \subseteq N_G(R) \bigcap B$ и p не делит

$$|G:B| = |N_G(R) : N_G(R) \bigcap B|.$$

Противоречие. Поэтому допущение $B \neq G$ неверно и $B = G$.

Лемма 2. *Пусть H – подгруппа группы G. Если $HH^x = H^x H$ для всех $x \in G$, то H субнормальна в G.*

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы. Если $H = G$, то утверждение справедливо. Пусть H – собственная подгруппа группы G. По лемме VI. 4.10 [4] подгруппа H^G отлична от G. По индукции H субнормальна в H^G, поэтому H субнормальна в G.

Лемма 3. *Пусть непримарная pd-подгруппа H перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами группы G. Тогда H субнормальна в G.*

Доказательство. По лемме 1 подгруппа H порождается своими бипримарными pd-подгруппами. Хорошо известно, что подгруппа, перестановочная с несколькими подгруппами, перестановочна с их порождением. Поэтому подгруппа H перестановочна с подгруппой H^x для каждого $x \in G$. Теперь H субнормальна в G по лемме 2.

Лемма 4. *Если H – субнормальная подгруппа группы G и простое число p не делит $|G:H|$, то каждая силовская p-подгруппа группы G содержится в H_G.*

Доказательство. Пусть P – произвольная силовская p-подгруппа группы G. Если H нормальна в G, то

$$HP = PH \text{ и } |G:H| = |G:HP||HP:H|$$

не делится на p. Поэтому p не делит $|HP:H|$ и $H = HP$, т.е. P содержится в H. Теперь $P^G = < P^g \mid g \in G >$ содержится в H. Так как P^G нормальна в G, то $P^G \subseteq H_G$. Пусть

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_{n-1} \subseteq H_n = G,$$

где подгруппа H_i нормальна в H_{i+1} для каждого $i = 0,1,\ldots,n-1$. Применим индукцию по n. Для $n = 1$ утверждение уже проверено. Так как

$$|G:H| = |G:H_i||H_i:H|,$$

то p не делит $|G:H_i|$ для любого i. Подгруппа P содержится в H_{n-1}, по доказанному. Так как P является силовской p-подгруппой в H_{n-1}, то, по индукции, P содержится в H. Отсюда следует, что $P^G \subseteq H_G$. Лемма доказана.

Нам понадобятся некоторые элементы теории формаций [3]. Если $\mathfrak{F}$ – формация, G – группа, то $G^{\mathfrak{F}}$ – наименьшая подгруппа группы G такая, что $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Подгруппу $G^{\mathfrak{F}}$ называют $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ – формации, то их произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ состоит из всех групп G, у которых $G/G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X}$. Если p и q – простые числа, то $G(p,q)$ – подгруппа группы G, порожденная всеми силовскими r-подгруппами для всех $r \in \pi(G) \setminus \{p,q\}$.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация и $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Если H – подгруппа группы G и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq H$, то $G^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Поскольку $H/G^{\mathfrak{F}}$ – подгруппа в группе $G/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $H/G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$ и $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}}$ содержится в $H/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, поэтому

$$G^{\mathfrak{F}}/H^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F} \text{ и } (G^{\mathfrak{F}})^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\mathfrak{F}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть H и B – перестановочные подгруппы группы G, причем H субнормальна, а B – $\{p,q\}$-подгруппа для некоторых различных простых чисел p и q. Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, содержащая все $\{p,q\}$-группы и $\mathfrak{F}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Тогда $H^{\mathfrak{F}} = (HB)^{\mathfrak{F}} = H(p,q)^{\mathfrak{F}}$ и $H^{\mathfrak{F}}$ является нормальной подгруппой в HB.*

Доказательство. Если R – силовская r-подгруппа из HB, $r \in \pi(HB) \setminus \{p,q\}$, то R содержится в H согласно лемме 4. Значит, R содержится в $H(p,q)$ и $H(p,q)$ порождается всеми силовскими r-подгруппами из HB для всех $r \in \pi(HB) \setminus \{p,q\}$. Поэтому $H(p,q)$ – характеристическая подгруппа в HB. Но $H(p,q)^{\mathfrak{F}}$ – характеристическая подгруппа в $H(p,q)$, поэтому $H(p,q)^{\mathfrak{F}}$ нормальна в HB. Так как $HB/H(p,q)$ – $\{p,q\}$-группа, то

$$HB/H(p,q) \in \mathfrak{F} \text{ и } (HB)^{\mathfrak{F}} \subseteq H(p,q).$$

По лемме 5, $(HB)^{\mathfrak{F}} = H(p,q)^{\mathfrak{F}}$. Подгруппа $H(p,q)$ содержится в H и $H/H(p,q) \in \mathfrak{F}$, поэтому $H^{\mathfrak{F}} \subseteq H(p,q)$ и, опять по лемме, 5 $H^{\mathfrak{F}} = H(p,q)^{\mathfrak{F}}$.

Лемма 7. *Если некоторая силовская p-подгруппа P группы G перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами группы G, то G p-разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Предположим, что G не p-разрешима. Обозначим через S бипримарную $\{p,q\}$-подгруппу для некоторыго простого числа q. Она существует по теореме IV.5.4 [4]. Пусть P^g – произвольная силовская p-подгруппа группы G, $g \in G$. По условию леммы, подгруппы P и $S^{g^{-1}}$ перестановочны, поэтому

$$\left(PS^{g^{-1}}\right)^g = P^g S = \left(S^{g^{-1}}P\right)^g = SP^g.$$

Значит, если силовская p-подгруппа P группы G перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами из G, то каждая силовская p-подгруппа группы G перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами из G.

Проверим наследование условий леммы подгруппами и фактор-группами. Пусть H – подгруппа группы G. Обозначим через $S_1 - \{p,q\}$-подгруппу из H, а через P_1 – силовскую p-подгруппу группы H. По теореме Силова, существует силовская p-подгруппа P в группе G такая, что P_1 содержится в P. По условию леммы, подгруппы P и S_1 перестановочны, т.е. $K = PS_1$ – подгруппа группы G. По тождеству Дедекинда, $K \cap H = (P \cap H)S_1$. Так как P_1 содержится в $P \cap H$ и является силовской p-подгруппой в H, то $P_1 = P \cap H$ и $K \cap H = P_1 S_1$ – подгруппа группы G. Поэтому подгруппы P_1 и S_1 перестановочны. Таким образом, условия леммы наследуются всеми подгруппами группы G.

Пусть A/N – $\{p,q\}$-подгруппа фактор-группы G/N, а P_1/N – силовская p-подгруппа из G/N. Ясно, что $P_1 = PN$, где P – некоторая силовская p-подгруппа группы G. Обозначим через L минимальное добавление к N в A, т.е. $A = LN$. Поскольку $A/N \cong LN/N \cong L/L \cap N$, то $\pi(A/N) \subseteq \pi(L)$.

С другой стороны, $L \cap N \subseteq \Phi(L)$, по лемме 3.21 [3], и $\pi(L) = \pi(L/\Phi(L))$, по теореме 4.33 [3], следовательно $\pi(L) = \pi(L/\Phi(L)) \subseteq \pi(L/L \cap N) = \pi(A/N)$. Значит, $\pi(L) = \pi(A/N) = \{p,q\}$. Теперь, по условию леммы, подгруппа L перестановочна с силовской p-подгруппой P из G. Так как N нормальна в G, то подгруппы $P_1 = PN$ и $A = LN$ перестановочны. Таким образом, подгруппы A/N и P_1/N перестановочны. Значит, условия леммы наследуются фактор-группами группы G.

Предположим, что группа G непроста и N – неединичная собственная нормальная подгруппа группы G. По индукции, N и G/N p-разрешимы, значит, группа G также p-разрешима. Теперь G – простая группа. Если $G \neq PS$, где P – некоторая силовская p-подгруппа группы G, а S – $\{p, q\}$- подгруппа для некоторых простых чисел p и q, то ввиду леммы VI. 4.10 [4] группа G непроста – противоречие. Значит, $G = PS$, $|\pi(G)| \leq 2$, и G разрешима.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что группа G не бипримарна, и пусть Q и R – силовские q- и r-подгруппы группы G, $q \neq p \neq r$, $q \neq r$. Если G не p-нильпотентна, то, по теореме IV. 5.4 [4] в G существуют бипримарные pd-подгруппы, которые, по условию, перестановочны с подгруппой P. По лемме 7, группа G p-разрешима. Если G p-нильпотентна, то G также p-разрешима. Итак, в любом случае группа G p-разрешима. По теореме 5.3.13 [6], в G существуют $\{p, q\}$- и $\{p, r\}$-холловы подгруппы. Без ущерба для доказательства можно считать, что PQ и PR – подгруппы группы G. Подгруппы $(PQ)^x$ и $(PR)^x$ перестановочны с подгруппой P для любого $x \in G$. Значит, $P(PQ)^x$ является подгруппой в группе G, поэтому

$$P \subseteq \bigcap_{x \in G} (PQ)^x = (PQ)_G.$$

Аналогично $P \subseteq (PR)_G$. Отсюда следует, что

$$P = (PQ)_G \bigcap (PR)_G,$$

т.е. подгруппа P нормальна в G. Имеем противоречие с условием. Поэтому допущение неверно и группа G бипримарна.

Предположим, что подгруппа P не максимальна в группе G, и пусть

$$P \subseteq N_G(P) \subseteq M,$$

где M – максимальная подгруппа группы G. Так как $P \neq M$, то M – бипримарная подгруппа. По условию, $PM^x = M^x P$ для всех $x \in G$, поэтому $P \subseteq M_G$. По лемме Фраттини,

$$G = M_G N_G(P) \subseteq M,$$

противоречие. Поэтому допущение неверно, и P – максимальная подгруппа.

Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$. Так как G не q-нильпотентна, то, по теореме IV. 5.4 [4], в G существует q-замкнутая qd-подгруппа Шмидта $S = [Q]P_1$. Напомним, что группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Их свойства перечислены в теореме IV. 5.4 [4]. По условию,

$$P([Q]P_1) = ([Q]P_1)P = G$$

и Q является силовской q-подгруппой группы G. Предположим, что Q не является элементарной абелевой. Тогда $Z(Q)P_1$ – бипримарная подгруппа группы G и $P(Z(Q)P_1) = G$, откуда следует, что $Z(Q)$ – силовская q-подгруппа группы G – противоречие. Поэтому допущение неверно, и силовская q-подгруппа Q в G элементарная абелева.

Пусть $D = P \bigcap P^x$ – пересечение наибольшего порядка двух различных силовских p-подгрупп. Если $D = 1$, то G – группа Фробениуса [4, гл. V.8; 6, 6.2.1] и Q –

минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $D \neq 1$. По лемме 4.16 [3], подгруппа $N_G(D)$ не является p-замкнутой, поэтому в $N_G(D)$ существует бипримарная подгруппа $D < g >$, где g – элемент порядка q. Элемент g существует, поскольку подгруппа Q элементарная абелева. По условию,

$$P(D < g >) = (D < g >)P = P < g >= G$$

и $|Q| = q$. Так как в G существует q-замкнутая подгруппа Шмидта $[Q]P_1$, то по их свойствам p делит $q-1$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $H_G = 1$ и H не p-разрешима. Тогда $p \in \pi(H)$ и H субнормальна в G, по лемме 3. Поскольку группа G не p-нильпотентна, то существует бипримарная $\{p,q\}$-подгруппа B для некоторого простого числа q. Пусть K – подгруппа в HB, порожденная всеми силовскими r-подгруппами из HB для всех $r \in \pi(HB) \setminus \{p,q\}$. По лемме 4, подгруппа K содержится в H. Так как HB/K – $\{p,q\}$-группа, то $H^{p\mathsf{S}} \subseteq K$. Здесь $p\mathsf{S}$ – класс всех p-разрешимых групп, а $H^{p\mathsf{S}}$ – $p\mathsf{S}$-корадикал подгруппы $p\mathsf{S}$, т.е. $H^{p\mathsf{S}}$ является наименьшей нормальной в H подгруппой, фактор-группа $H/H^{p\mathsf{S}}$ по которой p-разрешима. Хорошо известно, что класс $p\mathsf{S}$ является насыщенной наследственной формацией, поэтому подгруппа $H^{p\mathsf{S}}$ определяется однозначно. Формация $p\mathsf{S}$ является наследственной, и $(p\mathsf{S})(p\mathsf{S}) = p\mathsf{S}$. В силу леммы 6, получаем, что $K^{p\mathsf{S}} = H^{p\mathsf{S}}$ и $H^{p\mathsf{S}}$ нормальна в HB, т.е. $B \subseteq N_G(H^{p\mathsf{S}})$. Поскольку группа G порождается, в силу леммы 1, всеми бипримарными pd-подгруппами, то $H^{p\mathsf{S}}$ нормальна в G и $H^{p\mathsf{S}}$ содержится в $H_G = 1$. Значит, подгруппа H p-разрешима.

Пусть теперь $H_G \neq 1$. Проверим, что подгруппа H/H_G перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами из фактор-группы G/H_G. Пусть A/H_G – бипримарная pd-подгруппа группы G и B – минимальное добавление к подгруппе H_G в A. По лемме 3.21 [3], пересечение $B \cap H_G \subseteq \Phi(H)$. Так как

$$A/H_G \cong B/B \cap H_G,$$

то $\pi(A/H_G) = \pi(B)$, по теореме 4.33 [3]. Поэтому B – бипримарная pd-подгруппа группы G. По условию, подгруппы H и B перестановочны, поэтому перестановочными будут и подгруппы H/H_G и A/H_G. Так как ядро подгруппы H/H_G в группе G/H_G равно единице, то, по доказанному, подгруппа H/H_G p-разрешима. Теорема доказана.

Следствие 2.2. *Если подгруппа H перестановочна со всеми бипримарными pd-подгруппами группы G и $H = H^{p\mathsf{S}}$, то H нормальна в G.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ito, N. Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen / N. Ito, J. Szep // Acta Sci. Math. Sz. – 1962. – V. 23. – P. 168–170.

2. Пальчик, Э.М. О *b*-квазинормальных подгруппах / Э.М. Пальчик. // Доклады Академии наук БССР. – 1967. – Т. XI, № 11. – С. 967–969.

3. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
4. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin–Heidelberg–New York : Springer, 1967.
5. Беркович, Я.Г. О перестановочности подгрупп конечной группы / Я.Г. Беркович, Э.М. Пальчик // Сибирский мат. ж. – 1967. – Т. VIII, № 4. – С. 741–753.
6. Suzuki, M. Group theory II / M. Suzuki. – New York–Berlin–Heidelberg–Tokyo : Springer-Verlag, 1986.

***V.N. Kniahina.* On *P*-Solvability of a Permutable Subgroup Cofactor of a Finite Group**

The p-solvability of H/H_G where the subgroup H is permutable with all pd-subgroups of finite group G is obtained.