УДК 517.9

А.И. Жук, О.Л. Яблонский

МНОГОМЕРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Исследуются системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций. Получены ассоциированные решения рассматриваемых систем.

В данной работе исследуется следующее уравнение с обобщенными коэффициентами на отрезке $T=[0,a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t),\ i=\overline{1,p} \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ – некоторые липшицевые функции, $x(t)=[x^1(t),x^2(t),...,x^p(t)]$, а $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Вообще говоря, $\dot{L}^j(t)$ являются обобщенными функциями и функции $f^{ij}(x(t))$ не гладкие, то возникает проблема определения произведения $f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t)$. Поэтому есть трудности с корректным определением решения задачи (1), (2).

В настоящее время существует несколько подходов к преодолению данной трудности. Первый подход (см., напр., [5, 6]) связан с попытками привлечения аппарата теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f^{ij}(x(t))\dot{L}(t)$.

Второй подход заключается в переходе к интегральному уравнению [1], где интеграл понимается в определенном смысле, например в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса и т.д.

Третий подход [6] опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1), (2) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решения, полученные в разных работах, даже в рамках одного подхода, вообще говоря, различны.

В данной статье уравнение (1), (2) рассматривается в алгебре новых обобщенных функций определенной в [8; 4]). Согласно этим работам, уравнение (1), (2) заменяется уравнением в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Отметим, что новые обобщенные функции определяются как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1), (2) с помощью трех описанных выше подходов, что и было показано в работах [3; 7] для аналогичной одномерной задачи.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции, получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций.

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\widetilde{f}^{ij}(\widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}),\ i=\overline{1,p}, \tag{3}$$

с начальным условием $\tilde{x}\big|_{[\tilde{a};\tilde{h}]} = \tilde{x}^0$, где $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\tilde{a} = [\{a\}] \in \tilde{T}$ и $\tilde{t} = [\{t_n\}] \in \tilde{T}$, $\tilde{x} = [\{x_n(t)\}]$, $\tilde{f} = [\{f_n(x)\}]$, $\tilde{g} = [\{g_n(x)\}]$, $\tilde{x}^0 = [\{x_n^0(t)\}]$, $\tilde{L} = [\{L_n(t)\}]$ и $L_n \to L$, $x_n^0 \to x(0)$. Далее, если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса, ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)],\ i = \overline{1,p}, \tag{4}$$

$$x_n(t)\big|_{[0;h_n)} = x_{n0}(t). \tag{5}$$

Здесь $L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L(t+s)\rho_n(s)ds$, где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \in C^\infty(R)$, $\rho \ge 0$, $supp(\rho) \subseteq [0;1]$, $\int_0^1 \rho(s)ds = 1$, а $f_n = f * \tilde{\rho}_n$, $\tilde{\rho}_n(x_1,...,x_p) = n^p \tilde{\rho}(nx_1,...,nx_p)$, $\tilde{\rho} \in C^\infty(R^p)$, $\tilde{\rho} \ge 0$, $\int\limits_{[0;1]^p} \tilde{\rho}(x_1,...,x_p)dx_1...dx_p = 1$, $supp(\tilde{\rho}_n) \subset [0;1]^p$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T . Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0;h_n)$, $m_t \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(x_n(\tau_t + kh_n))[L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)],\ i = \overline{1,p}, \tag{6}$$

Для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \le t} S^i(x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)),\ i = \overline{1,p}, \tag{7}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r + 0) - L^d(\mu_r - 0)$ – величина скачка, $S^i(x,u) = \varphi^i(1,x,u) - \varphi^i(0,x,u)$, а функция $\varphi^i(t,x,u)$ находится из системы уравнений $\varphi^i(t,x,u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\varphi(s,x,u))ds$, $i = \overline{1,p}$.

Интеграл $\int_u^t f(x)dL(x)$ в этом случае понимается в смысле Лебега–Стилтьеса на промежутке $(u;t]$, а существование и единственность решения системы (7) для липшицевых f^{ij} доказано в [2] (также [3]).

Лемма 1. *Пусть для любого* n *справедливо неравенство*

$$Z_{n+1} \le A + \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n} B_k Z_k,$$

где A, A_k, B_k *– некоторые положительные константы и* $Z_k > 0$, $k = \overline{0,n}$. *Тогда верно неравенство*

$$Z_{n+1} \le (A + \sum_{k=1}^{n} A_k)\exp(\sum_{k=1}^{n} B_k).$$

В дальнейшем под модулем вектора $x(t) = [x^1(t), x^2(t),...,x^p(t)]$ будем понимать $\left|x(t)\right| = \sum_{i=1}^{p}\left|x^i(t)\right|$ и аналогично модуль матрицы $\left|f(x)\right| = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left|f^{ij}(x)\right|$.

Теорема 1. *Пусть функции* f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограниченны. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *так, что* $h_n=o(1/n)$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши (4)–(5) сходится к решению системы уравнений (7) для всех* $t\in T$, *если* $\left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|\to 0$ *для любого* $t\in T$.

Доказательство. Проделаем следующие преобразования:

$$\left|x_n^1(t)-x^1(t)\right|=\left|x_{n0}^1(\tau_t)-x_0^1+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n)-\right.$$

$$\left.-L_n^j(\tau_t+kh_n)]-\sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{1j}(x(s))dL^{jc}(s)-\sum_{\mu_r\le t}S^1(x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r))\right|\le$$

$$\le\left|x_{n0}^1(\tau_t)-x_0^1\right|+\sum_{j=1}^{q}\left|\int_0^{\tau_t}f^{1j}(x(s))dL^{jc}(s)\right|+\sum_{j=1}^{q}\left|\sum_{k=0}^{m_t-1}(f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))-\right.$$

$$\left.-f^{1j}(x(\tau_t+kh_n)))[L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)]\right|+$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\left|\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))[L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)]-\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))\times\right.$$

$$\left.\times[L^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]\right|+\sum_{j=1}^{q}\left|\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))[L^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-\right.$$

$$\left.-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]-\int_{\tau_t}^{t}f^{1j}(x(s))dL^{jc}(s)\right|+\left|\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))\times\right.$$

$$\left.\times[L_n^{jd}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jd}(\tau_t+kh_n)]-\sum_{\mu_t\le t}S^1(x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r))\right|=$$

$$=I_0(t)+\sum_{j=1}^{q}(I_1^j(t)+I_2^j(t)+I_3^j(t)+I_4^j(t))+I_5(t).$$

Везде далее C – константа, не зависящая от n, t, h_n, значение которой может меняться в разных формулах. Так как функции f^{ij} ограниченны а, функции $L^j(t)$ имеют ограниченную вариацию, то $I_1^j(t)\le C\operatorname*{var}_{t\in[0;h_n)}L^{jc}(t)$, $j=\overline{1,q}$.

Используя то, что функции f^{ij} удовлетворяют условию Липшица, получим:

$$I_2^j(t)=\left|\sum_{k=0}^{m_t-1}(f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))-f^{1j}(x(\tau_t+kh_n)))[L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)]\right|\le$$

$$\le C\sum_{k=0}^{m_t-1}(\left|x_n(\tau_t+kh_n)-x(\tau_t+kh_n)\right|+1/n)\left|L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)\right|.$$

Для оценки слагаемых вида $I_3^j(t)$ $j=\overline{1,q}$ разобьем сумму на две, затем в первой сделаем замену индексов суммироваввния, после чего воспользуемся условием Липшица и видом $x(t)$:

$$I_3^j(t)=\left|\sum_{k=0}^{m_t-1}(f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))[L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)]-\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))\times\right.$$

$$\left.\times[L^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]\right|=\left|\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))[L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-\right.$$

$$\left.-L^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)]-\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))[L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{m_t}f^{1j}(x(\tau_t+(k-1)h_n))[L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]-\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))\times\right.$$

$$\times[L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{m_t-1}(f^{1j}(x(\tau_t+(k-1)h_n))-f^{1j}(x(\tau_t+kh_n)))\times$$

$$\times[L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]+f^{1j}(x(\tau_t+(m_t-1)h_n))[L_n^{jc}(\tau_t+m_th_n)-$$

$$-L^{jc}(\tau_t+m_th_n)]-f^{1j}(x(\tau_t))[L_n^{jc}(\tau_t)-L^{jc}(\tau_t)]\Big|\le C\sum_{k=1}^{m_t-1}\underset{t\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+kh_n+1/n]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)\times$$

$$\times(\left|x(\tau_t+(k-1)h_n)-x(\tau_t+kh_n)\right|+h_n)+C\underset{t\in[\tau_t,\tau_t+1/n]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)+C\underset{t\in[\tau_t+m_th_n,\tau_t+m_th_n+1/n]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)\le$$

$$\le C\underset{t\in T}{\operatorname{var}}x(t)\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le\frac{1}{n}}}\underset{t\in[t_1,t_2]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)+C\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le\frac{1}{n}}}\underset{t\in[t_1,t_2]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)+Ch_n\le C\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le\frac{1}{n}}}\underset{t\in[t_1,t_2]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)+Ch_n.$$

Обозначим $\hat{s}(s)=\tau_t+kh_n$, $s\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+(k+1)h_n)$. Тогда из свойств интеграла Стилтьеса вытекает оценка для слагаемых вида $I_4^j(t)$.

$$I_4^j(t)=\left|\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))[L^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L^{jc}(\tau_t+kh_n)]-\int_{\tau_t}^{t}f^{1j}(x(s))dL^{jc}(s)\right|=$$

$$=\left|\int_{\tau_t}^{t}[f^{1j}(x(\hat{s}(s)))-f^{1j}(x(s))]dL^{jc}(s)\right|\le C\sum_{k=1}^{m_t-1}((\underset{t\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+(k+1)h_n)}{\operatorname{var}}x(t)+h_n)\times$$

$$\times\underset{t\in[\tau_t+kh_n,\tau_t+(k+1)h_n]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)\le C\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le\frac{1}{n}+h_n}}\underset{t\in[t_1,t_2]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)\underset{t\in T}{\operatorname{var}}x(t)+Ch_n\le$$

$$\le C\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\|t_1-t_2|\le\frac{1}{n}+h_n}}\underset{t\in[t_1,t_2]}{\operatorname{var}}L^{jc}(t)+Ch_n.$$

Рассмотрим $I_5^j(t)$. Так как функция $L^j(\cdot)$ имеет не более чем четное число точек разрыва и ее вариация конечна, то $\sum_{r=1}^{\infty}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|<+\infty$. Отсюда для любого $\varepsilon>0$ существует $n_0\in N$ такое, что $\sum_{j=1}^{q}\sum_{r=n_0}^{\infty}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|<\varepsilon$. Представим L^{jd} в виде $L^{jd}(t)=L^{jd,\ge n_0}(t)+L^{jd,<n_0}(t)$, где $L^{jd,\ge n_0}(\cdot)$ и $L^{jd,<n_0}(\cdot)$ содержат точки разрывов μ_r с номерами, большими либо равными n_0, т.е. $r\ge n_0$, и меньшими n_0, т.е. $r<n_0$, соответственно. Получим:

$$I_5(t)=\Big|\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^{jd}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jd}(\tau_t+kh_n)]-$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}S^1(x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r))\Big|=\Big|\sum_{j=1}^{q}[\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^{jd}(\tau_t+(k+1)h_n)-$$

$$-L_n^{jd}(\tau_t+kh_n)]-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd}(\mu_r)\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds]\Big|\le$$

$$\le\Big|\sum_{j=1}^{q}[\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^{jd,<n_0}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jd,<n_0}(\tau_t+kh_n)]-$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds]\Big|+$$

$$+\Big|\sum_{j=1}^{q}[\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^{jd,\ge n_0}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jd,\ge n_0}(\tau_t+kh_n)]-$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,\ge n_0}(\mu_r)\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds\Big|=\sum_{j=1}^{q}I_5^{j1}(t)+\sum_{j=1}^{q}I_5^{j2}(t).$$

Так как функция $L^{jd,<n_0}$ имеет n_0-1 точку разрыва на отрезке T, то существует конечное число номеров k_r таких, что $\mu_r-1/n\in[\tau_t+k_rh_n,\tau_t+(k_r+1)h_n]$, причем, если $h_n+1/n<\min\limits_{1\le r\le n_0-1}|\mu_{r+1}-\mu_r|$, то $k_r\ne k_s$ при $r\ne s$.

Положим $\xi_k^r=\int\limits_{\mu_r-kh_n-\tau_t}^{1/n}\rho_n(s)ds$. Тогда $0\le\xi_0^r\le\xi_1^r\le\ldots\le\xi_{l+2}^r=1$, где $l=[1/nh_n]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Таким образом, ξ_k^r образуют разбиение отрезка $[0;1]$. Используя вид $L_n^{jd,<n_0}$, получаем для достаточно больших n

$$I_5^{j1}(t)=\Bigg|\sum_{k=0}^{m_t-1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\int\limits_{\mu_r-(k+1)h_n-\tau_t}^{\mu_r-kh_n-\tau_t}\rho_n(s)ds-$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds\Bigg|=$$

$$=\sum_{\mu_r\le t}\left|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\right|\Bigg|\sum_{\mu_r-1/n-h_n<\tau_t+kh_n<\mu_r}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))\int\limits_{\mu_r-(k+1)h_n-\tau_t}^{\mu_r-kh_n-\tau_t}\rho_n(s)ds-$$

$$-\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds\Bigg|\le$$

$$\le\sum_{\mu_r\le t}\left|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\right|\Bigg|\sum_{k=k_r}^{k_r+l+1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+kh_n))\int\limits_{\mu_r-(k+1)h_n-\tau_t}^{\mu_r-kh_n-\tau_t}\rho_n(s)ds-$$

$$-\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds\Bigg|\le$$

$$\le\sum_{\mu_r\le t}\left|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\right|\Bigg|\sum_{k=0}^{l+1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+(k+k_r)h_n))(\xi_{k+1}^r-\xi_k^r)-$$

$$-\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds\Bigg|.$$

Далее оценим сумму, стоящую под знаком модуля в последнем неравенстве:

$$\left|\sum_{k=0}^{l+1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+(k+k_r)h_n))(\xi_{k+1}^r-\xi_k^r)-\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}(f_n^{1j}(x_n(\tau_t+(k+k_r)h_n))-f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r))))ds\right|\le$$

$$\le C\sum_{k=0}^{l+1}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\left|x_n(\tau_t+(k+k_r)h_n)-\phi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r))\right|ds+C/n=$$

$$=C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\Bigg|x_n^i(\tau_t+k_rh_n)+\sum_{j=1}^{q}\sum_{z=0}^{k-1}f^{ij}(x_n(\tau_t+(k_r+z)h_n))\times$$

$$\times(L_n^j(\tau_t+(k_r+z+1)h_n)-L_n^j(\tau_t+(k_r+z)h_n))-x^i(\mu_r-0)-$$

$$-\sum_{j=1}^{q}\Delta L^j(\mu_r)\int_0^s f^{ij}(\phi(u,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))du\Bigg|ds+C/n=I.$$

Последнее равенство следует из определения функций $x_n(t)$ и $\varphi(t,x,u)$. Далее имеем:

$$I \le C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\left|x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)\right|ds +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\left|\sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(L_n^j(\tau_t + (k_r + z + 1)h_n) -\right.$$

$$\left. - L_n^j(\tau_t + (k_r + z)h_n)) - \Delta L^j(\mu_r)\int_0^s f^{ij}(\phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)))du\right| ds + C/n \le$$

$$\le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)\right| + C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\operatorname*{var}_{\tau_t + k_r h_n \le t \le \tau_t + (k_r + k)h_n} L^{jc}(t)ds +$$

$$+ C\varepsilon + C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\left|\Delta L^j(\mu_r)\sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) -\right.$$

$$\left. - \Delta L^j(\mu_r)\int_0^s \phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))d\,u\right| ds + C/n = I\,.$$

Воспользуемся свойством вариации функции $L^{jc}(t)$:

$$I \le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)\right| + C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C\varepsilon +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|\int_{\xi_k^r}^{s}\left|\varphi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))\right|duds +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|\,\Big|\sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) -$$

$$- \int_0^{\xi_k^r}\phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))d\,u\Big| ds + C/n \le$$

$$\le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)\right| + C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C\varepsilon +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|\int_{\xi_k^r}^{\xi_{k+1}^r}(s - \xi_k^r)ds + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|\sum_{k=1}^{l+1}\left|\xi_{k+1}^r - \xi_k^r\right| \times$$

$$\times\Big|\sum_{z=0}^{k-1} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) - \int_0^{\xi_k^r}\phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))d\,u\Big| + C/n \le$$

$$\le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t + k_r h_n) - x^i(\mu_r - 0)\right| + C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t \in (\mu_r - 1/n - h_n, \mu_r)} L^{jc}(t) + C\varepsilon +$$

$$+ C\sum_{k=0}^{l+1}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|(\xi_{k+1}^r - \xi_k^r)^2 + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right|\sum_{k=0}^{l}\left|\xi_k^r - \xi_{k-1}^r\right| \times$$

$$\times\Big|\sum_{z=0}^{k} f^{ij}(x_n(\tau_t + (k_r + z)h_n))(\xi_{z+1}^r - \xi_z^r) - \int_0^{\xi_{k+1}^r}\phi(u, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r))d\,u\Big| + C/n.$$

Объединяя предыдущие неравенства, получаем:

$$\left|\sum_{k=0}^{l+1} f_n^{1j}(x_n(\tau_t + (k + k_r)h_n))(\xi_{k+1}^r - \xi_k^r) - \int_0^1 f^{1j}(\varphi(s, x(\mu_r - 0), \Delta L(\mu_r)))ds\right| \le$$

$$\le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t+k_rh_n)-x^i(\mu_r-0)\right|+C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t\in(\mu_r-1/n-h_n,\mu_r)}L^{jc}(t)+C\max\left|\xi_{k+1}^r-\xi_k^r\right|+$$

$$+C\sum_{k=0}^{l}\left|\xi_k^r-\xi_{k-1}^r\right|\,|\sum_{z=0}^{k}f^{ij}(x_n(\tau_t+(k_r+z)h_n))(\xi_{z+1}^r-\xi_z^r)-$$

$$-\int_0^{\xi_{k+1}^r}\phi(u,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r))d\,u\Big|+C/n+C\varepsilon.$$

По неравенству Гроноулла из леммы 1 получим:

$$\left|\sum_{k=0}^{l+1}f_n^{1j}(x_n(\tau_t+(k+k_r)h_n))(\xi_{k+1}^r-\xi_k^r)-\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds\right|\le$$

$$\le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t+k_rh_n)-x^i(\mu_r-0)\right|+C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t\in(\mu_r-1/n-h_n,\mu_r)}L^{jc}(t)+C\max\left|\xi_{k+1}^r-\xi_k^r\right|+C/n+C\varepsilon.$$

Для $I_5^{j1}(t)$ получим

$$I_5^{j1}(t)\le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t+k_rh_n)-x^i(\mu_r-0)\right|+C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t\in(\mu_r-1/n-h_n,\mu_r)}L^{jc}(t)+$$

$$+\ C\max\left|\xi_{k+1}^r-\xi_k^r\right|+C1/n+C\varepsilon.$$

Для $I_5^{j2}(t)$ имеем

$$I_5^{j2}(t)=|\sum_{k=0}^{m_t-1}f^{1j}(x(\tau_t+kh_n))[L^{jd,\ge n_0}(\tau_t+kh_n)-L^{jd,\ge n_0}(\tau_t+(k+1)h_n)]-$$

$$-\sum_{\mu_r\le t}\Delta L^{jd,\ge n_0}(\mu_r)\int_0^1 f^{1j}(\varphi(s,x(\mu_r-0),\Delta L(\mu_r)))ds]\le C\varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left|x_n^1(t)-x^1(t)\right|\le\left|x_{n0}^1(\tau_t)-x_0^1\right|+C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t\in[0;h_n)}L^{jc}(t)+C\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}(\left|x_n(\tau_t+kh_n)-x(\tau_t+kh_n)\right|+$$

$$+\frac{1}{n})\left|L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)\right|+C\sum_{j=1}^{q}\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{n}+h_n}}\operatorname*{var}_{t\in[t_1;t_2]}L^{jc}(t)+Ch_n+$$

$$+C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t+k_rh_n)-x^i(\mu_r-0)\right|+C\max\left|\xi_{k+1}^r-\xi_k^r\right|+C1/n+C\varepsilon.$$

Аналогичное неравенство получаем и для остальных x_n^i, $i=\overline{1,p}$, складывая их, получаем:

$$\left|x_n(t)-x(t)\right|\le\sum_{i=1}^{p}\left|x_{n0}^i(\tau_t)-x_0^i\right|+C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t\in[0;h_n)}L^{jc}(t)+C\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1}(\left|x_n(\tau_t+kh_n)-x(\tau_t+kh_n)\right|+$$

$$+\frac{1}{n})\left|L_n^{jc}(\tau_t+(k+1)h_n)-L_n^{jc}(\tau_t+kh_n)\right|+C\sum_{j=1}^{q}\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{n}+h_n}}\operatorname*{var}_{t\in[t_1;t_2]}L^{jc}(t)+Ch_n+$$

$$+C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(\tau_t+k_rh_n)-x^i(\mu_r-0)\right|+C\max\left|\xi_{k+1}^r-\xi_k^r\right|+C/n+C\varepsilon.$$

Применяя лемму 1 к последнему неравенству, имеем:

$$\left|x_n(t)-x(t)\right|\le\sum_{i=1}^{p}\left|x_{n0}^i(\tau_t)-x_0^i\right|+C\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{var}_{t\in[0;h_n)}L^{jc}(t)+C\sum_{j=1}^{q}\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{n}+h_n}}\operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]}L^{jc}(t)+Ch_n+$$

$+ \ C\max\left|\xi_{k+1}^r - \xi_k^r\right| + C/n + C\varepsilon.$

Так как $\max\left|\xi_{k+1}^r - \xi_k^r\right| = \max\left|\int\limits_{\mu_r-(k+1)h_n-\tau_t}^{\mu_r-kh_n-\tau_t} \rho_n(s)ds\right| = \max\left|\int\limits_{n(\mu_r-(k+1)h_n-\tau_t)}^{n(\mu_r-kh_n-\tau_t)} \rho(s)ds\right| \le nh_n \max\left|\rho(s)\right|$,

то $\max\left|\xi_{k+1}^r - \xi_k^r\right| \to 0$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $h_n = o(1/n)$.

Устремляя $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $h_n = o(1/n)$, а затем $\varepsilon \to 0$, из непрерывности $L^{jc}(t)$, на отрезке T, а значит, и равномерной непрерывности на этом отрезке, получим, что $x_n(t) \to x(t)$ для любого $t \in T$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Das, P.C. Existence and stability of measure differential equations / P.C. Das, R.R. Sharma // Czech. Math. J. – 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.

2. Groh, J. A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illionois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.

3. Yablonski, A. Differential equations with generalized coefficients / A.Yablonski // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.

4. Антоневич, А.Б.Об общем методе построения алгебр обобщенных функций / А.Б. Антоневич, Я.В. Радыно // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 318. – №2. – С. 267–270.

5. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский // М. : Мир. – 1976. – С. 311.

6. Завалищин, С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалищин, А.Н. Сесекин // М. : Наука. – 1991. – С. 256.

7. Ковальчук, А.Н. Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением / А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский // Известия ВУЗов. Математика – 2005. – №3. – С. 23–31.

8. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38, №5. – С. 23–27.

***A.I. Zhuk, A.L. Yablonski.* Multidimensional Differential Equations with Generalized Coefficients in the Algebra of Generalized Functions**

Some systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of generalized functions. The associated solutions of such systems of differential equations are obtained.