УДК 517.955

А.А. Ворошилов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ

*Посвящается памяти моего Учителя
профессора А.А. Килбаса*

Исследуется задача типа Коши для линейного дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана–Лиувилля положительного порядка по времени. Рассматриваемое уравнение обобщает уравнение конвекции и дробное диффузионно-волновое уравнение. С использованием метода интегральных преобразований находится решение поставленной задачи в квадратурах. Решение выражается в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера.

Введение

Пусть $\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t)$ – частная дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ от функции $u(x,t)$ по второй переменной [1, с. 342]:

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{u(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad \left(x \in \mathrm{R}, t > 0, \alpha > 0, n = -[-\alpha]\right). \tag{1}$$

В частности, если $\alpha = n \in \mathrm{N}$, то дробная производная Римана–Лиувилля порядка α совпадает с обычной производной n-го порядка.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \left(x \in \mathrm{R}, t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0, \mu \in \mathrm{R}\right). \tag{2}$$

Если $\alpha = 1$, то $\left(D^{1}_{0+,t}u\right)(x,t) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$,

и уравнение (2) при $\alpha = 1$ сопадает с уравнением конвекции [2, (1.1.4)]

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \left(x \in R,\ t > 0\right). \tag{3}$$

Поэтому уравнение (2) называют дробным уравнением конвекции.

В случае $\mu = 0$ уравнение (2) совпадает с дробным диффузионно-волновым уравнением

$$\left(D^{\alpha}_{0+,t}u\right)(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left(x \in \mathrm{R}, t > 0, \alpha > 0, \lambda > 0\right), \tag{4}$$

исследованным в работах [3–5].

Интерес к изучению дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка вызван их многочисленными приложениями при решении задач физики, механики и других прикладных наук [6, гл. 7]. В частности, в статье [7] получен алгоритм решения дробного уравнения конвекции с нелинейным членом, содержащего дробную производную Капуто ${}^{c}D^{\alpha}_{0+,t}u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\dfrac{\partial u}{\partial x} + \Psi(u) + f(x,t) \quad \left(0 < x < 1, 0 < \alpha \le 1, t > 0\right)$.

Настоящая работа посвящена решению уравнения (2) порядка $\alpha > 0$ с начальными условиями

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,0+) = f_k(x) \quad (k = 1,...,n = -[-\alpha],\ x \in \mathrm{R}). \tag{5}$$

Здесь производные $\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,t)$ определяются формулой (1), при этом предполагается, что $\left(D_{0+,t}^{0}u\right)(x,t) = u(x,t)$, а выражение $\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,0+)$ понимается как предел

$$\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,0+) = \lim_{t\to 0+}\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,t) \quad (k = 1,\ ...,\ n).$$

Если $\alpha = n \in N$, то задача (2), (5) представляет собой задачу Коши. Поэтому, по аналогии, её называют задачей типа Коши.

1. Решение задачи в терминах преобразований Лапласа и Фурье

Для решения рассматриваемой задачи используем метод интегральных преобразований. Применим преобразование Лапласа функции $u(x,t)$ по переменной t

$$(L_t u)(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt \quad (x\in R,\ s\in \mathrm{C}) \tag{6}$$

и преобразование Фурье по переменной x

$$(F_x u)(\sigma,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma x}u(x,t)dx \quad (\sigma\in R,\ t > 0), \tag{7}$$

а также их обратные преобразования относительно $s\in\mathrm{C}$ и $\sigma\in R$

$$\left(L_s^{-1}u\right)(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}u(x,s)ds \quad (x\in R,\ t > 0), \tag{8}$$

$$\left(F_\sigma^{-1}u\right)(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x}u(\sigma,t)d\sigma \quad (x\in R,\ t > 0), \tag{9}$$

где $\gamma \in \mathrm{R}$ – фиксированное действительное число. Свойства прямых и обратных преобразований Лапласа и Фурье и описание классов основных и обобщённых функций $u(x,t)$, для которых эти преобразования определены, можно найти в монографиях [8, Гл. 1–2], [9, §3–4], [10, Гл. 1, §1]. В частности, операторы (6), (8) и (7), (9) взаимно обратны на «достаточно хороших» функциях $u(x,t)$.

Пусть существуют преобразования Фурье $(F_x f_k)(\sigma)$ функций $f_k(x)$ $(k = 1,...n)$. Применяя к обеим частям уравнения (2) преобразование Лапласа (6), учитывая начальные условия (5) и формулу преобразования Лапласа частной дробной производной Римана–Лиувилля [11, (2.248)]

$$\left(L_t D_{0+,t}^{\alpha}u\right)(x,s) = s^{\alpha}(L_t u)(x,s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}\left(D_{0+,t}^{\alpha-k}u\right)(x,0+),$$

получим соотношение

$$s^{\alpha}(L_t u)(x,s) = \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}f_k(x) + \lambda^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(L_t u)(x,s) + \mu\frac{\partial}{\partial x}(L_t u)(x,s).$$

Применяя преобразование Фурье (7) к обеим частям этого равенства и учитывая формулу преобразования Фурье производной

$$\left(F_x\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)(\sigma,s) = (-i\sigma)^n(F_x u)(\sigma,s) \quad (n \in \mathrm{N})$$

с $n = 1$ и $n = 2$, приходим к уравнению

$$\left(F_x L_t u\right)(\sigma, s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} \left(F_x f_k\right)(\sigma) \quad \left(\sigma \in R, s \in \mathrm{C}\right). \tag{10}$$

Применяя к этому соотношению обратные преобразования Лапласа (8) и Фурье (9), получим решение $u(x,t)$ исходной задачи (2), (5) в виде

$$u(x,t) = \left(L_s^{-1} F_\sigma^{-1} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} \left(F_x f_k\right)(\sigma) \right] \right)(x,t). \tag{11}$$

Другое представление получим, применяя к соотношению (10) обратное преобразование Фурье и используя теорему о свертке Фурье. По формулам преобразования Фурье, равенство (10) примет вид:

$$\left(L_t u\right)(x, p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{s^{k-1}}{\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha} + \mu^2}} e^{-\frac{1}{2\lambda^2}\left(\mu x + |x|\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha} + \mu^2}\right)} *_x f_k(x),$$

где $*_x$ – свертка Фурье по переменной x.

Таким образом, по формуле обратного преобразования Лапласа

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{s^{k-1}}{\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha} + \mu^2}} e^{st - \frac{1}{2\lambda^2}\left(\mu x + |x|\sqrt{4\lambda^2 s^{\alpha} + \mu^2}\right)} ds *_x f_k(x), \tag{12}$$

где $\gamma \in \mathrm{R}$ – фиксированное действительное число.

2. Решение задачи в терминах функции Миттаг-Леффлера

Выразим решение (11) в терминах специальной функции Миттаг-Леффлера [12, 18.1(18)]

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \quad \left(z \in \mathrm{C}, \alpha, \beta > 0\right),$$

являющейся целой функцией от z.

Применяя обратное преобразование Лапласа к обеим частям формулы (10), получим

$$\left(F_x u\right)(\sigma, t) = \sum_{k=1}^{n} L_s^{-1} \left(\frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} \right)(t) \left(F_x f_k\right)(\sigma) \quad \left(\sigma \in R, t > 0\right). \tag{13}$$

Лемма 1. *Имеет место следующая формула обратного преобразования Лапласа:*

$$L_s^{-1} \left(\frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} + \lambda^2 \sigma^2 + \mu i \sigma} \right)(t) = t^{\alpha - k} E_{\alpha, \alpha - k + 1}\left(\left(-\lambda^2 \sigma^2 - \mu i \sigma\right) t^{\alpha}\right). \tag{14}$$

Доказательство. Справедлива формула преобразования Лапласа [1, (1.93)] функции Миттаг-Леффлера:

$$\left(L_z\left[z^{b-1} E_{a,b}\left(z^a\right)\right]\right)(s) = \frac{s^{a-b}}{s^a - 1} \quad \left(\mathrm{Re}(z) > 1\right). \tag{15}$$

Используя формулу (15) с параметрами $a = \alpha$, $b = \alpha - k + 1$, получаем соотношение

$$\left(L_z\left[z^{\alpha - k} E_{\alpha, \alpha - k + 1}\left(z^{\alpha}\right)\right]\right)(s) = \frac{s^{k-1}}{s^{\alpha} - 1}. \tag{16}$$

По свойству умножения аргумента на число,

$$L_z\left(f(qz)\right)(s) = \frac{1}{q}(Lf)\left(\frac{s}{q}\right). \tag{17}$$

Применяя соотношение (17) с параметром $q=\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{1/\alpha}$ и учитывая формулу (16), получим:

$$L_t\left(t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)t^{\alpha}\right)\right)(s)=$$

$$=\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{(k-\alpha)/\alpha}L_t\left(\left(\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{1/\alpha}t\right)^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}\left(\left(\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{1/\alpha}t\right)^{\alpha}\right)\right)(s)=$$

$$=\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{(k-\alpha)/\alpha}\cdot\frac{1}{\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{1/\alpha}}\cdot\frac{\left(\dfrac{s}{\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{1/\alpha}}\right)^{k-1}}{\left(\dfrac{s}{\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)^{1/\alpha}}\right)^{\alpha}-1}=$$

$$=\frac{s^{k-1}}{s^{\alpha}+\lambda^2\sigma^2+\mu i\sigma},$$

откуда следует утверждение Леммы.

Учитывая формулу (14), перепишем уравнение (13) в виде

$$\left(F_x u\right)(\sigma,t)=\sum_{k=1}^{n}t^{\alpha-k}E_{\alpha,\alpha-k+1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)t^{\alpha}\right)\left(F_x f_k\right)(\sigma),$$

откуда можно записать представление решения задачи (2), (5) в виде обратного преобразования Фурье:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{\alpha-k}}{2\pi}\int_R E_{\alpha,\alpha-k+1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)t^{\alpha}\right)\left(F_x f_k\right)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma. \qquad (18)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема 1. *Если* $\alpha>0$, $n-1<\alpha\le n$ $(n\in\mathrm{N})$, *то задача типа Коши* (2), (5) *имеет решение* $u(x,t)$, *даваемое формулой* (18), *при условии что интегралы в* (18) *сходятся.*

Исследуем решение (18) задачи (2), (5) при $\alpha=1$. В этом случае $k=n=1$ и

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_R E_{1,1}\left(\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)t\right)\left(F_x f_1\right)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R \exp\left(\left(-\lambda^2\sigma^2-\mu i\sigma\right)t\right)\left(F_x f_1\right)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma=$$

$$=F_{\sigma}^{-1}\left(F_x\left(\frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x+\mu t)^2}{4\lambda^2 t}\right]\right)(\sigma)\cdot\left(F_x f_1\right)(\sigma)\right)(x). \qquad (19)$$

В соответствии с теоремой о свертке Фурье, решение (19) принимает вид

$$u(x,t)=\frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi t}}\exp\left[-\frac{(x+\mu t)^2}{4\lambda^2 t}\right]*_x f_1(x), \qquad (20)$$

где $*_x$ – свертка Фурье по переменной x, и совпадает с известным решением уравнения конвекции (3) [2, (1.1.4)].

Если же $\mu=0$, то решение (18) принимает вид

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{\alpha-k}}{2\pi}\int_R E_{\alpha,\alpha-k+1}\left(-\lambda^2\sigma^2 t^{\alpha}\right)\left(F_x f_k\right)(\sigma)e^{-ix\sigma}d\sigma \qquad (21)$$

и совпадает с решением дробного диффузионно-волнового уравнения (4), полученным в работе [5, (21)].

Заключение

В работе с использованием метода интегральных преоб-разований получено решение задачи типа Коши для дифференциального уравнения с частной производной Римана–Лиувилля произвольного положительного порядка, являющегося обобщением уравнения конвекции.

Результаты являются новыми и носят теоретический характер. Они вносят вклад в разработку теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка.

Практическое использование результатов статьи возможно в приложениях при решении интегральных и дифференциальных уравнений дробного порядка, а также при решении конкретных задач физики, механики и других прикладных наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И.Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.
2. Polianin, A.D. Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists / A.D. Polianin. – Boca Raton, 2002.
3. Ворошилов, А.А. Задача типа Коши для уравнения диффузии дробного порядка / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 14–18.
4. Kilbas, A.A. Cauchy-type Problem For Diffusion-wave Equation With The Riemann–Liouville Partial Derivative / A.A. Kilbas, J.J. Trujillo, A.A. Voroshilov // Fractional Calculus And Applied Analysis. – 2005. – Vol.8, № 4. – P. 1–28.
5. Ворошилов, А.А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля / А.А. Ворошилов, А.А. Килбас // Доклады академии наук. – 2006. – Т. 406, № 1. – С. 12–16.
6. Kilbas, A.A., Trujillo, J.J. // Appl. Anal. 2002. – V.81, № 2. – P. 435–493.
7. Momani, S. An algorithm for solving the fractional convection–diffusion equation with nonlinear source term / S. Momani // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Vol. 12, Issue 7, 2007, P. 1283–1290.
8. Диткин, В.А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В.А. Диткин, А.П. Прудников. – М., 1974.
9. Снеддон, И. Преобразование Фурье / И. Снеддон. – М., 1955.
10. Брычков, Ю.А. Интегральные преобразования обобщённых функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М., 1977.
11. Podlubny, I. Fractional differential equations. Mathematics in Sciences and Engineering / I. Podlubny. – San Diego, 1999. – 198 p.
12. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – Т.3: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М. : Наука, 1967.

***A.A. Voroshilov.* Solving of Cauchy-Type Problem for Fractional Convection Equation with Riemann-Liouville Partial Derivative**

The Cauchy-type problem for the linear differential equation with Riemann–Liouville partial fractional derivative of positive order with respect to time is investigated. The equation under consideration generalizes the convection equation and the fractional diffusion-wave equation. Using direct and inverse Laplace and Fourier transforms, a solution in closed form of the above problem is established. It is shown that the solution of the problem is established in terms of special Mittag-Leffler function.