УДК 512.542

С.Н. Шевчук, В.Н. Семенчук

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, У КОТОРЫХ ПРИМАРНЫЕ ПОДГРУППЫ ЛИБО $\mathfrak{F}$-СУБНОРМАЛЬНЫ, ЛИБО $\mathfrak{F}$-АБНОРМАЛЬНЫ

Одним из важнейших направлений теории конечных групп является изучение строения конечных групп, у которых некоторая система подгрупп обладает некоторыми заданными свойствами. В данной работе исследуются строение конечных групп, у которых все примарные подгруппы обладают некоторыми заданными свойствами. Получено полное описание произвольных конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна в случае, когда $\mathfrak{F}$ – класс всех нильпотентных групп, класс всех p-нильпотентных групп, класс всех p-замкнутых групп. Найдены общие свойства произвольных конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна для произвольной локальной наследственной формации $\mathfrak{F}$.

Рассматриваются только конечные группы.

В работе [1] было получено описание конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо субнормальна, либо абнормальна.

В теории классов конечных групп естественным обобщением субнормальности и абнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности и $\mathfrak{F}$-абнормальности.

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Подгруппу K группы G назовем $\mathfrak{F}$-субнормальной, если либо $K = G$, либо существует максимальная цепь

$$G = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n = K$$

такая, что $(K_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq K_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Подгруппу H группы G назовем $\mathfrak{F}$-абнормальной, если либо $H = G$, либо любая максимальная цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = H$$

такая, что $H_i(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} = H_{i-1}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

В работе [2] было исследовано строение конечных групп, у которых любая собственная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна для произвольной наследственной локальной формации $\mathfrak{F}$. Настоящая работа посвящена изучению строения конечных групп, у которых любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, где $\mathfrak{F}$ – произвольная наследственная локальная формация. В частности, получено описание таких групп в случае, когда $\mathfrak{F}$ – класс всех нильпотентных, всех p-нильпотентных, всех p-замкнутых групп.

Напомним, что группа, порядок которой есть степень некоторого простого числа, называется примарной. Формация $\mathfrak{F}$ – класс групп замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений. Локальная формация – формация замкнутая относительно фраттиниевых расширений. Подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ есть пересечение всех таких подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Обозначим через $\pi(\mathfrak{F})$ характеристику формации $\mathfrak{F}$, то есть множество всех простых чисел, делящих порядки групп из $\mathfrak{F}$.

Все необходимые определения и обозначения можно найти в [3].

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная наследственная формация. Если в* G *все примарные подгруппы* $\mathfrak{F}$*-субнормальны, то* G *– группа одного из следующих типов:*

1) $G \in \mathfrak{F}$*;*

2) $|G| = p$*, где* $p \notin \pi(\mathfrak{F})$*;*

3) $|G : G^{\mathfrak{F}}|$ *делится не менее, чем на два различных простых числа.*

Напомним, что $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G.

Лемма 2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная наследственная формация. Пусть* G *– группа такая, что* $G \notin \mathfrak{F}$*,* $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ *и любая примарная подгруппа из* G *либо* $\mathfrak{F}$*-субнормальна, либо* $\mathfrak{F}$*-абнормальна в* G*. Тогда* $G^{\mathfrak{F}} \subset G$.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная наследственная формация и* G *– группа такая, что* $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$*. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа из* G *либо* $\mathfrak{F}$*-субнормальна, либо* $\mathfrak{F}$*-абнормальна в* G*, когда* G *– группа одного из следующих типов:*

1) любая примарная подгруппа из G $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G*;*

2) $G = G^{\mathfrak{F}} G_p$*, где* $G^{\mathfrak{F}}$ *– собственная подгруппа группы* G*, а силовская* p*-подгруппа* G_p *группы* G $\mathfrak{F}$*-абнормальна в* G *и является добавлением к* $G^{\mathfrak{F}}$ *в* G*, все другие примарные подгруппы* G $\mathfrak{F}$*-субнормальны в* G.

Лемма 4. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная наследственная разрешимая формация. Если в группе* G *(*$\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$*) любая примарная подгруппа либо* $\mathfrak{F}$*-субнормальна, либо* $\mathfrak{F}$*-абнормальна, то* G *– разрешимая группа.*

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная наследственная разрешимая формация. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы* G *(*$\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$*) либо* $\mathfrak{F}$*-субнормальна, либо* $\mathfrak{F}$*-абнормальна в* G*, когда* G *– разрешимая группа одного из следующих видов:*

1) любая примарная подгруппа группы G $\mathfrak{F}$*-субнормальна в* G*;*

2) $G = G_{p'} \leftthreetimes G_p$*, где* G_p *–* $\mathfrak{F}$*-проектор группы* G*,* $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$ *и любая примарная подгруппа группы* $G_{p'}$ $\mathfrak{F}$*-абнормальна в* G.

Лемма 6. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– формация всех сверхразрешимых групп. Если все силовские подгруппы группы* G $\mathfrak{F}$*-субнормальны в* G*, то* G *– дисперсивная по Оре группа одного из следующих типов:*

1) G *– сверхразрешимая группа;*

2) $|G : G^{\mathfrak{F}}|$ *делится не менее, чем на два различных простых числа.*

Лемма 7. *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная наследственная сверхрадикальная формация. Пусть* G *– группа, у которой любая примарная подгруппа либо* $\mathfrak{F}$*-субнормальна, либо* $\mathfrak{F}$*-абнормальна. Тогда любая разрешимая* $\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа* H *такая, что* $\pi(H) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$*, принадлежит* $\mathfrak{F}$.

Произведением классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ называется класс групп $\mathfrak{F}\,\mathfrak{X}$, который состоит из всех групп G таких, что в G найдется нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа N с условием $G/N \in \mathfrak{X}$.

Группа G называется p-замкнутой (p-нильпотентной), если ее силовская p-подгруппа (силовское p-дополнение) нормальна в G. Группа G называется p-разложимой, если она одновременно p-замкнута и p-нильпотентна.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Через π' обозначим дополнение к π во множестве всех простых чисел, если $\pi = \{p\}$, то вместо π' будем просто писать p'. Тогда $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$ – класс всех p-нильпотентных групп, $\mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$ – класс всех p-замкнутых групп, $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p \bigcap \mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$ – класс всех p-разложимых групп, $\mathfrak{N} = \bigcap \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$ — класс всех нильпотентных групп, где p пробегает все простые числа.

Группа G называется π-нильпотентной (π-разложимой), если она p-нильпотентна (p-разложима) для любого простого числа p из π. Класс всех π-нильпотентных (π-разложимых) групп можно записать в виде

$$\bigcap_{p\in\pi} \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p \quad \Big(\bigcap_{p\in\pi} (\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p \bigcap \mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'})\Big).$$

Группа G называется π-замкнутой, если она имеет нормальную π-холлову подгруппу. Тогда $\mathfrak{S}_{\pi}\mathfrak{S}_{\pi'}$ — класс всех π-замкнутных групп.

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Обозначим через I любое подмножество из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Пусть π_i, π_j – некоторые множества простых чисел, а $\mathfrak{S}_{\pi_i}$, $\mathfrak{S}_{\pi_j}$ – классы всех разрешимых π_i- и π_j-групп соответственно. Обозначим через

$\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$, где (i,j) пробегает все пары из I.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{F} = \bigcap_{(i,j)\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы G $(\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F}))$ либо *$\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G – группа одного из следующих типов:*

1) $G \in \mathfrak{F}$;

2) $G = G_{q'}\lambda G_q$, где $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q – $\mathfrak{F}$-проектор группы G, G_q – циклическая подгруппа, $G_{q'} \times G_q^*$ – нормальная максимальна подгруппа группы G, G_q^* – максимальная подгруппа из G_q.

Следствие 1. *Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы G субнормальна либо абнормальна в G, когда G – группа одного из следующих типов:*

1) G нильпотентна;

2) $G = G_{q'}\lambda G_q$, где $G_{q'}$ нильпотентна, а G_q – циклическая подгруппа Картера.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая формация. Если в группе G силовская p-подгруппа G_p $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, то G – p-замкнутая группа.*

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация. Пусть G – группа, у которой любая примарная подгруппа либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна,* *а H – собственная $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа G. Тогда H – p-замкнутая группа для любого $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, $\left|H_p\right| = p$, причем либо $\pi(H)\bigcap \pi'(\mathfrak{F}) = \varnothing$, либо $\pi(H)\bigcap \pi'(\mathfrak{F}) = \{p\}$.*

Напомним, что группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если она не принадлежит некоторому классу группы $\mathfrak{F}$, а любая её собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$.

Лемма 10. *Пусть $\mathfrak{F}$ – непустая наследственная формация, G – разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа с единичной подгруппой Фраттини. Тогда любая примарная подгруппа из G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна.*

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{(i,j)\in I} \mathfrak{S}_{\pi_i}\mathfrak{S}_{\pi_j}$. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G – группа одного из следующих типов:*

1) $G \in \mathfrak{F}$;
2) $G = G_{q'}\leftthreetimes G_q$, *где* $G_{q'} = G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, G_q – $\mathfrak{F}$*-проектор группы* G, G_q *– циклическая подгруппа,* $G_{q'} \times G_q^*$ *– нормальная максимальна подгруппа группы* G, G_q^* *– максимальная подгруппа из* G_q;
3) $G = G_p\leftthreetimes G_{p'}$, *где* $p \notin \pi(\mathfrak{F})$, G_p – $\mathfrak{F}$*-субнормальная подгруппа группы* G, $\left|G_p\right| = p$, $\pi(G_{p'}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$ *и* $G_{p'}$ *– группа из пункта 2), причем* $\mathfrak{F}$*-проектор из* $G_{p'}$ *является* $\mathfrak{F}$*-проектором группы* G;
4) G – $\pi'(\mathfrak{F})$*-группа;*
5) $G = G_p G_{p'}$, *где* $p \in \pi(\mathfrak{F})$, $\pi(G_{p'}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$, $\left|G_p\right| = p$, G_p – $\mathfrak{F}$*-проектора группы* G, $N_G(K)$ – p'*-группа, где* K *– любая* p'*-группа из* G.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-замкнутых групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G группа одного из следующих типов:

1) G – p-замкнутая группа;
2) $G = G_{p'}\leftthreetimes G_p$, где G_p – циклическая подгруппа Картера, $G_{p'} = G^{\mathfrak{F}}$, любая максимальная подгруппа из G_p нормальна в G.

Теорема 4. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация всех p-нильпотентных групп. Тогда и только тогда любая примарная подгруппа группы G либо $\mathfrak{F}$-субнормальна, либо $\mathfrak{F}$-абнормальна, когда G – группа одного из следующих типов:

1) G – p-нильпотентная группа;
2) $G = G_p\leftthreetimes G_q$, где $q \neq p$, G_q – циклическая подгруппа Картера, любая максимальная подгруппа из G_q нормальна в G, $G_p = G^{\mathfrak{F}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ebert, G. A note on subnormal and abnormal chains / G. Ebert , S. Bauman // J. Algebra. – 1975. – V. 36, № 2. – P. 287–293.

2. Семенчук, В.Н. Конечные группы с $\mathfrak{F}$-абнормальными или $\mathfrak{F}$-субнормальными подгруппами / В.Н. Семенчук // Математические заметки. – 1994.– Т. 56, № 6. – С. 111–115.

3. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.

S.N. Shevchuk, V.N. Semenchuk. **Finite Groups Every Primary Subgroup of which is Either $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-abnormal**

We have studied finite groups in which every primary subgroups is either $\mathfrak{F}$-subnormal or $\mathfrak{F}$-abnormal. In particular, the full description of such groups in the case $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_p\mathfrak{S}_{p'}$ is obtained.