УДК 512.542

В.С. Монахов, А.А. Трофимук

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ПОРЯДКАМИ ФАКТОРОВ НОРМАЛЬНОГО РЯДА, СВОБОДНЫМИ ОТ КУБОВ

Натуральное число n называется свободным от кубов, если p^3 не делит n для всех простых p. Группа называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4. Изучено строение конечных разрешимых групп с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов. В частности, исследованы группы нечетного порядка и A_4-свободные группы с таким свойством. Получены точные оценки производной длины и p-длины таких групп.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения соответствуют [1–2].

Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, а при $m = 3$ – от кубов.

Если порядок группы G свободен от квадратов, то в G существует циклическая холлова подгруппа N такая, что G/N циклическая [2, теорема IV.2.11]. В частности, G сверхразрешима и ее производная длина не превосходит 2.

Группы порядков, свободных от кубов, могут быть неразрешимыми. В работе [3] перечислены все такие группы:

если G – неразрешимая группа порядка, свободного от кубов, то $G = A\times B$, где A – разрешимая подгруппа, $B \cong PSL(2,r)$, r – простое число, $r \equiv \pm 3(\mathrm{mod}\, 8)$ и числа $r-1$ и $r+1$ свободны от кубов.

Для разрешимой группы G порядка, свободного от кубов, в работе [3] доказаны следующие утверждения:

а) производная длина G не превышает 3;

б) G – дисперсивная группа;

в) $\{2,3\}'$-холлова подгруппа нормальна и дисперсивна по Оре;

г) $2'$-холлова подгруппа метабелева;

д) если G не дисперсивна по Оре, то существует нормальная подгруппа N такая, что G/N изоморфна знакопеременной группе A_4.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G, \tag{1}$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Вполне естественно возникает следующая задача: *исследовать строение разрешимой группы с ограниченными порядками факторов ее нормального ряда.*

Несложно проверить, что если у группы G имеется нормальный ряд, факторы которого имеют порядки, свободные от квадратов, то G сверхразрешима (см. лемму 6 настоящей статьи). В случае, когда факторы имеют порядки, свободные от кубов, доказывается следующая теорема.

Теорема. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Нильпотентная длина G не превышает 4, а производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре подгруппу N такую, что G/N сверхразрешима.

3. $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$ и $l_p(G) \le 1$ для всех простых $p > 3$.

4. Группа G содержит нормальную дисперсивную по Оре $\{2,3\}'$-холлову подгруппу.

5. Если G A_4 свободна, то:

5.1) $l_p(G) \le 1$ для любого простого p;

5.2) производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3;

5.3) G дисперсивна по Оре.

6. Если G имеет нечетный порядок, то коммутант G нильпотентен. В частности, $G/\Phi(G)$ метабелева.

Здесь $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G, а $l_p(G)$ – ее p-длина. Группа G называется A_4-свободной, если она не содержит секций изоморфных знакопеременной группе A_4.

Построены примеры, показывающие, что все оценки, полученные в теореме, являются точными.

Определения и вспомогательные результаты

Говорят, что группа G дисперсивна, если она обладает нормальным рядом, факторы которого изоморфны силовским подгруппам. Дисперсивной по Оре называют группу G порядка $|G| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, где $p_1 > p_2 > \dots > p_k$, у которой имеется нормальный ряд (1) такой, что $m = k$ и для каждого $i = 1,2,\dots,k$ фактор G_i/G_{i-1} изоморфен силовской p_i-подгруппе группы G.

Если все факторы ряда (1) абелевы и m – наименьшее среди всех нормальных рядов с абелевыми факторами, то значение m называют производной длиной группы G и обозначают через $d(G)$.

Если все факторы ряда (1) нильпотентны и m – наименьшее среди всех нормальных рядов с нильпотентными факторами, то значение m называют нильпотентной длиной группы G и обозначают через $n(G)$.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 4]. Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^{F} – F-корадикал группы G, т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathsf{F}$. Произведение $\mathsf{FH} = \{G \in G \mid G^{\mathsf{H}} \in \mathsf{F}\}$ формаций F и H состоит из всех групп G, для которых H-корадикал принадлежит формации F. Как обычно, $\mathsf{F}^2 = \mathsf{FF}$. Формация F называется насыщенной, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathsf{F}$ следует, что $G \in \mathsf{F}$. Формации всех нильпотетных и абелевых групп обозначают через N и A соответственно.

Для доказательства нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. [5, леммы 4,5] Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n,p)$. Тогда:

1. Если $n=2$, то $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^4$.

2. Если $n=3$, то $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^5$.

Лемма 2. Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то $H \in \{1$, $GL(3,2)$, Z_2, Z_3, Z_7, $Z_2 \times Z_2$, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, $[Z_7]Z_3\}$.

Доказательство. По теореме II.6.14. [2] группа $GL(3,2) \cong PSL(2,7)$, а по теореме II.8.27 [2] подгруппа H из заключения леммы.

Лемма 3. Пусть H – A_4-свободная p'-подгруппа группы $GL(2,p)$. Тогда H метабелева.

Доказательство. В теореме 3.4 [6] перечислены все виды подгрупп группы $GL(2,p)$. Согласно этой теореме любая подгруппа в группе $GL(2,p)$ сопряжена с подгруппой G одного из следующих типов:

1) G циклическая;

2) $G = QM$, где Q – p-подгруппа,

$$\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{pmatrix} \mid \tau \in GF(q) \rangle,$$

$M \subseteq N_G(Q)$ и M – подгруппа группы D всех диагональных матриц;

3) $G = \langle Z_u, s \rangle$, где u делит q^2-1, $y^s = y^q$ для всех $y \in Z_u$, и s^2 – скалярный 2-элемент в Z_u;

4) $G = \langle M, s \rangle$, где $M \subseteq D$ и $|G:M| = 2$;

5) $G = \langle SL(2,p^\beta), V \rangle$ или $G = \langle SL(2,p^\beta), V, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \varepsilon b \end{pmatrix} \rangle$,

где V – скалярная матрица, ε – образующий элемент $(GF(p^\beta))^*$, $p^\beta > 3$, β делит α. Во втором случае $|G : \langle SL(2,p^\beta), V \rangle| = 2$;

6) $G/\langle -E \rangle$ изоморфна $S_4 \times Z_u$, $A_4 \times Z_u$ или $A_5 \times Z_u$, если $p \neq 5$, где Z_u – скалярная подгруппа $GL(2,q)/\langle -E \rangle$, а E – единичная матрица;

7) G не является группой из пункта (6), но $G/\langle -E \rangle$ содержит $A_4 \times Z_u$ в качестве подгруппы индекса 2 и A_4 в качестве подгруппы с циклической фактор-группой, Z_u – группа такая, как в пункте (6), где u – четное число.

Подгруппа из п. 1 абелева. Порядок подгруппы из п. 2 делится на p. Учитывая, что группа всех диагональных матриц является абелевой, получим, что в пп. 3–4 подгруппа H метабелева. Подгруппа из пп. 5–7 не является A_4-свободной. Итак, если H – A_4-свободная p'-подгруппа группы $GL(2,p)$, то H метабелева. Лемма доказана.

Лемма 4. Если G – метанильпотентная группа, то $l_p(G) \le 1$ для любого простого p.

Доказательство. Пусть N – нильпотентная нормальная подгруппа группы G, фактор-группа по которой нильпотентна. Для любого простого p группа $N = N_p \times N_{p'}$, где N_p – силовская p-подгруппа группы N, а $N_{p'}$ – ее дополнение. Так как $N_{p'} \lhd G$, то $G_p N_{p'} \lhd G$, где G_p – силовская p-подгруппа группы G, поэтому $l_p(G) \le 1$. Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть n – натуральное число и группа G обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

1. Если H – подгруппа группы G, то H обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

2. Если N – нормальная подгруппа группы G, то G/N обладает нормальным рядом с факторами порядков, свободных от n-х степеней.

Доказательство. Доказательство – простая проверка.

Лемма 6. Если у группы G имеется нормальный ряд с факторами порядков, свободных от квадратов, то G сверхразрешима. В частности, G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, нильпотентная длина группы G не выше 2, а производная длина $G/\Phi(G)$ не выше 2.

Доказательство. Пусть ряд (1) является нормальным рядом с силовскими подгруппами простого порядка в факторах. Согласно теореме Цассенхауза [2, теорема IV.2.11], коммутант каждого фактора ряда (1) является циклической холловой подгруппой, фактор-группа по которой также циклическая. Поэтому ряд (1) можно уплотнить до нормального ряда с циклическими факторами. Теперь G сверхразрешима, а из свойств сверхразрешимых групп следует дисперсивность по Оре группы G и нильпотентность ее коммутанта. Последнее также означает, что нильпотентная длина группы G не выше 2. Так как коммутант G' нильпотентен, то он содержится в подгруппе Фиттинга $F(G)$ и $G/F(G) \cong (G/G')/(F(G)/G')$ абелева группа. Но в любой группе $F(G)/\Phi(G)$ абелева и $(G/\Phi(G))/(F(G)/\Phi(G)) \cong G/F(G)$. Теперь $G/\Phi(G)$ имеет производную длину не выше 2.

Доказательство теоремы

Пусть ряд (1) является нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Без ограничения общности можно считать, что $G_1 \ne 1$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и покажем, что $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Здесь $\mathfrak{N}_{2'}$ – формация всех нильпотентных групп нечетного порядка, $\mathfrak{N}_2$ – формация всех 2-групп, а $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{U}$ – формации всех абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп соответственно. Хорошо известно, что формационные произведения $\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ являются насыщенными формациями, поэтому $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. В силу леммы 5 собственные подгруппы и фактор-группы группы G обладают нормальными рядами с факторами порядков, свободных от кубов. Поэтому на них распространяется индукция и они принадлежат $\mathfrak{F}$. Значит, можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$. Ясно, что $F \subseteq G_1$, поэтому F является подгруппой некоторой силовской p-подгруппы группы G_1 и порядок F равен p или p^2 для некоторого простого p.

Пусть сначала $|F| = p$. Тогда G/F – циклическая группа как группа автоморфизмов группы простого порядка p и G сверхразрешима. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2,p)$. Из п. 1 леммы 1 следует, что $G/F \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{A}^4$, поэтому $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Если $p = 2$, то из включения $G/F \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Если $p \neq 2$, то из включения $G/F \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Итак, в любом случае $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$.

1. Поскольку сверхразрешимые группы имеют нильпотентный коммутант, то из включения $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4. Из включения $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ получаем, что производная длина $G/F(G)$ не превышает 4. Но в любой разрешимой группе G фактор-группа $F(G)/\Phi(G)$ абелева. Значит, производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 5.

2. Из включения $G \in \mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ следует, что сверхразрешимый корадикал $G^{\mathfrak{U}}$ принадлежит формации $\mathfrak{N}_{2'}\mathfrak{N}_2$. Поэтому $G^{\mathfrak{U}} = [H]P$, где H – $2'$-холлова подгруппа, P – силовская 2-подгруппа. Так как $H \in \mathfrak{N}_{2'}$, то H нильпотентна нечетного порядка и $G^{\mathfrak{U}}$ будет дисперсивной по Оре.

3. Из леммы 4 получаем, что $l_p(G) \leq 2$ для любого простого $p \in \pi(G)$. Докажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого простого $p > 3$. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G)$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G) = C_G(F)$ – единственная минимальная нормальная p-подгруппа, обладающая дополнением M в группе G. Поэтому силовская p-подгруппа $G_p = [F](G_p \cap M) = [F]M_p$, где M_p – некоторая силовская p-подгруппа в M. Если $M_p = 1$, то $F = G_p$ и $l_p(G) \leq 1$. Пусть $M_p \neq 1$. Так как $F \leq G_1$, то F является подгруппой силовской p-подгруппы группы G_1 и порядок F равен p, p^2. Если $|F| = p$, то фактор-группа G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $Aut(F)$ группы F, порядок которой равен $p-1$. Отсюда $G_p = F$, противоречие. Пусть $|F| = p^2$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,p)$, порядок которой равен $(p^2 - p)(p^2 - 1)$. Поэтому порядок силовской подгруппы G_p равен p^3. Так как $F = C_G(F)$, то G_p неабелева и изоморфна по теореме I.14.10 [2] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle]\langle b \rangle,$$

либо группе экспоненты p. Поскольку подгруппа $\Omega_1(M_3(p))$, порожденная элементами порядка p, является элементарной абелевой подгруппой порядка p^2, то она не дополняема в $M_3(p)$. Поэтому изоморфизм G_p с подгруппой $M_3(p)$ исключается, и G_p является подгруппой экспоненты p. Если порядок группы нечетен или p – не простое число Ферма, то по теореме IX.4.8 [7] $l_p(G) \leq 1$. Но теперь, согласно утверждению $b)$ теоремы IX.5.5 [7], $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

4. Пусть p – наибольший простой делитель порядка группы, а G_p – её силовская p-подгруппа. Предположим, что $p > 3$. Используя индукцию по порядку

группы, покажем, что подгруппа G_p нормальна в группе G, т. е. $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$. Здесь $\mathfrak{N}_p$ – формация всех p-групп, а $\mathfrak{E}_{p'}$ – формация всех p'-групп. Хорошо известно, что $\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}$ – насыщенная формация, поэтому можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа $F = F(G)$. Кроме того, $F = C_G(F)$, фактор-группа G/F изоморфна подгруппе группы автоморфизмов F. Так как F является подгруппой силовской p-подгруппы группы G_1, то порядок F равен q, q^2, где q – некоторое простое число. При $p = q$ с учетом утверждения из п. 3, получаем, что G_p нормальна в G. Поэтому считаем, что $p > q$. Пусть сначала $|F| = q$, тогда G/F – циклическая группа порядка, делящего $q-1$. Ввиду того, что p – наибольший простой делитель порядка группы G, этот случай исключается. Пусть теперь $|F| = q^2$. Тогда фактор-группа G/F изоморфна подгруппе полной линейной группы $GL(2,q)$, порядок которой равен $(q^2-q)(q^2-1)$. Поэтому, учитывая $p > q$, получим, что p делит $q+1$, что возможно только при $p = 3$, а $q = 2$. Противоречие.

Итак мы доказали, что силовская подгруппа G_p нормальна в группе G для наибольшего простого $p \in \pi(G)$ при условии, что $p > 3$.

Теперь положим $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3\}$ и покажем, что π-холлова подгруппа G_π нормальна в группе G. Так как класс всех π-замкнутых групп является насыщенной формацией, то по индукции $O_\pi(G) = 1$ и подгруппа Фиттинга $F = C_G(F)$ является является минимальной нормальной подгруппой, которая будет элементарной абелевой p-подгруппой порядка, делящего 2^2 или 3^2. Фактор-группа G/F изоморфна подгруппе $GL(n,p)$ для $p \in \{2,3\}$ и $n \le 2$. Так как $\pi(GL(n,p)) \subseteq \{2,3\}$ для этих значений n и p, то G – π'-группа.

Итак мы доказали, что π-холлова подгруппа G_π нормальна в группе для $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3\}$. Если p – наибольшее из π, то G_p нормальна в G_π по доказанному. По индукции фактор-группа G_π/G_p дисперсивна по Оре, откуда следует, что подгруппа G_π дисперсивна по Оре.

5.1. Пусть G A_4-свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $l_p(G) \le 1$ для $p \in \{2,3\}$. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^α, где $\alpha \le 2$ для $p = 2$ и $p = 3$, так как $F \le G_1$. В частности, $C_G(F) = F$. Если $|F| = p$, то G/F имеет порядок $p-1$ и $l_p(G) \le 1$.

Если $|F| = 4$, то $Aut(F) \cong GL(2,2) \cong S_3$ и либо $G/F \cong Z_3$, либо $G/F \cong S_3$. Если $G/F \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F \cong S_3$, то $G \cong S_4$. В любом случае группа не A_4-свободна. Противоречие.

Пусть $|F| = 9$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2,3)$ и $O_3(G/F) = 1$. Известно, что $H \in \{1, Z_2, Z_4, Z_8, Z_2 \times Z_2, D_8, Q_8, SD_{16}, SL(2,3), GL(2,3)\}$. Во всех случаях, кроме $G/F \cong SL(2,3)$ и $G/F \cong GL(2,3)$, подгруппа F является силовской 3-подгруппой в G. Поэтому $l_3(G) \le 1$. Так как $SL(2,3)$ и $GL(2,3)$ не являются A_4-свободными, то они из рассмотрения исключаются.

Итак, $l_p(G) \leq 1$ для $p \in \{2,3\}$. Из п. 3 следует, что $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$. Утверждение 5.1. доказано полностью.

5.2. Пусть G A_4-свободна. Воспользуемся индукцией по порядку группы G и докажем, что $G \in \mathrm{NA}^2$. Можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга F. Ввиду п. 5.1. $l_p(G) \leq 1$ для всех $p \in \pi(G)$, поэтому F – силовская p-подгруппа группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$. Так как $F \leq G_1$, то порядок $|F|$ равен p или p^2, где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p, поэтому G/F абелева. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой p'-подгруппе H группы $GL(2, p)$. По лемме 3 подгруппа H метабелева, т. е. $G/F \in \mathrm{A}^2$.

Итак, в любом случае $G/F \in \mathrm{A}^2$. Так как $F/\Phi(G)$ абелева и $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F$, то $G/\Phi(G) \in \mathrm{A}^3$ и производная длина $G/\Phi(G)$ не превышает 3.

5.3. Предположим, что G не является $\{2,3\}$-группой. По доказанному в п. 4 π-холлова подгруппа G_π нормальна в G и дисперсивна по Оре для $\pi = \pi(G) \setminus \{2,3\}$. Пусть R – силовская r-подгруппа в G для наибольшего простого $r \in \pi(G)$. Тогда $r > 3$, $R \leq G_\pi$ и R нормальна в G. Для фактор-группы G/R условия теоремы выполняются и G/R дисперсивна по Оре по индукции. Из того, что r – наибольший простой делитель порядка группы G следует, что группа G дисперсивна по Оре.

Пусть теперь G – $\{2,3\}$-группа. Так как класс всех дисперсивных по Оре групп является насыщенной формацией, то группа G примитивна, а по теоремам 4.40–4.42 [1] $G = [F(G)]H$, где $F(G)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G, H – максимальная подгруппа. Так как по п. 5.1. $l_2(G) \leq 1$, то $F(G)$ – силовская 2-подгруппа группы G. Теперь $|F(G)| = 4$ и H – подгруппа группы $GL(2,2) \cong S_3$. Поскольку $F(G)$ – силовская 2-подгруппа группы G, то $|H| = 3$ и $G \cong A_4$, противоречие. Утв. 5.3. доказано.

6. Пусть G имеет нечетный порядок. Проверим, что коммутант группы G нильпотентен. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Без ограничения общности можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, которая совпадает с подгруппой Фиттинга $F = F(G)$ и является элементарной абелевой p-подгруппой для некоторого простого числа p. Так как $F \leq G_1$, то порядок $|F|$ равен p или p^2. В силу п. 5.1. $l_p(G) = 1$, поэтому F – силовская p-подгруппа группы G и G/F является p'-подгруппой. В разрешимых группах подгруппа Фиттинга содержит свой централизатор, поэтому фактор-группа G/F является группой автоморфизмов группы F. Если $|F| = p$, то G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p и коммутант $G' \subseteq F$. Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой p'-подгруппе нечетного порядка группы $GL(2, p)$. По теореме 3.4 [6] G/F абелева и $G' \subseteq F$. Итак, в любом случае коммутант группы G нильпотентен. Поскольку $F/\Phi(G)$ абелева, то $G/\Phi(G)$ метабелева. Теорема доказана полностью.

Следующие примеры показывают, что все оценки, полученные в теореме, являются точными.

Пример 1. Пусть E_{7^2} – элементарная группа порядка 7^2. Ее группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,7)$ с циклическим центром $Z = Z(GL(2,7))$ порядка 6. Выберем в группе Z подгруппу C порядка 2. Очевидно, что C нормальна в $GL(2,7)$. Вычисления в компьютерной системе GAP показывают, что в $GL(2,7)$ существует подгруппа S порядка 48 такая, что фактор-группа S/C изоморфна симметрической группе S_4 степени 4. Полупрямое произведение $G=[E_{7^2}]S$ является группой порядка $2352 = 2^4 7^2 3$, причем $\Phi(G)=1$. Нильпотентная длина группы G равна 4, производная длина равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{7^2} \subset [E_{7^2}]Z_2 \subset [E_{7^2}]Q_8 \subset [E_{7^2}]SL(2,3) \subset [E_{7^2}]S = G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{7^2}, ([E_{7^2}]Z_2)/(E_{7^2}) \cong Z_2, ([E_{7^2}]Q_8)/([E_{7^2}]Z_2) \cong E_4,$$

$$([E_{7^2}]SL(2,3))/([E_{7^2}]Q_8) \cong Z_3, (G/[E_{7^2}]SL(2,3)) \cong Z_2.$$

Кроме того, 2-длина данной группы равна 2.

Пример 2. Пусть S – экстраспециальная группа порядка 27. Вычисления в компьютерной системе GAP показали, что ее группой автоморфизмов является группа $[E_{3^2}]GL(2,3)$. Полупрямое произведение $G=[S]GL(2,3)$ является группой порядка $1296 = 2^4 3^3$ с подгруппой Фраттини $\Phi(G) \cong Z_3$. Производная длина группы G равна 6, а производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ равна 5. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset Z_3 \subset S \subset [S]Z_2 \subset [S]Q_8 \subset [S]SL(2,3) \subset G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$Z_3, S/Z_3 \cong E_{3^2}, ([S]Z_2)/S \cong Z_2, ([S]Q_8)/([S]Z_2) \cong E_{2^2},$$

$$([S]SL(2,3))/([S]Q_8) \cong Z_3, G/([S]SL(2,3)) \cong Z_2.$$

Кроме того, 2-длина и 3-длина данной группы равна 2.

Пример 3. Пусть E_{5^2} – элементарная абелева группа порядка 5^2. Её группой автоморфизмов является полная линейная группа $GL(2,5)$, в которой имеется подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3 степени 3. Полупрямое произведение $G=[E_{5^2}]S_3$ является A_4-свободной группой с единичной подгруппой Фраттини. Производная длина группы G равна 3. Данная группа обладает главным рядом

$$1 \subset E_{5^2} \subset [E_{5^2}]Z_3 \subset [E_{5^2}]S_3 = G$$

с факторами порядка, свободного от кубов:

$$E_{5^2}, ([E_{5^2}]Z_3)/(E_{5^2}) \cong Z_3, ([E_{5^2}]S_3)/([E_{5^2}]Z_3) \cong Z_2.$$

Кроме того, группа G является дисперсивной по Оре, а p-длина данной группы равна 1 для произвольного $p \in \{2,3,5\}$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф 08Р-230).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск : Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1967.
3. Монахов, В.С. Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2 / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2008. – Т. 47, № 2. – С. 139–145.
4. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва : Наука, 1978. – 272 с.
5. Монахов, В.С. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов, М.В. Селькин, Е.Е. Грибовская // Украинский математический журнал. – 2002. – Т. 54, № 7. – С. 940–950.
6. Bloom, D. The subgroups of $PSL(3,q)$ for odd q / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 127, № 1. – P. 150–178.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer, 1982.

V.S. Monakhov, A.A. Trofimuk. **Finite Solvable Groups with Cube-Free Orders of Factors of Normal Series**

The natural number n is called cube-free if p^3 does not divide n for all prime p. The group is called A_4-free if it does not contain the section isomorphic to the alternating group A_4. We consider the structure of finite solvable groups with cube-free orders of factors of normal series. In particular, we investigated groups of odd order and A_4-free groups with this property. Exact estimations of the derived length and p-length of such groups are obtained.