УДК 519.6 + 517.983.54

О.В. Матысик, В.Ф. Савчук

О СХОДИМОСТИ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ С ПРАВИЛОМ ОСТАНОВА ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений с положительным ограниченным и несамосопряжённым оператором предлагается неявный итерационный метод. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по соседним приближениям, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения. В исходной норме гильбертова пространства доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

1. Постановка задачи. В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным несамосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение имеет единственное решение x. Будем искать его, используя неявный итерационный метод:

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)x_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y\right],\ x_0 = 0,\ k \in N. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно $\|y - y_\delta\| \le \delta,$ метод итераций (2) примет вид:

$$\begin{gathered} z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)z_n + 2\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*y_\delta\right] + \\ + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right)u_n,\ z_0 = 0,\ k \in N, \end{gathered} \tag{3}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta.$ Обозначим через $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^*A\right)^k\right),\ B = 2\left(E + \alpha\left(A^*A\right)^k\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^{k-1}A^*.$ Тогда метод (3) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$.

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора A. Там доказано, что при условии $\alpha > 0$ метод (3) сходится, и в предположении, что точное решение x уравнения (1) истокопредставимо, получена оценка погрешности.

2. Правило останова по соседним приближениям. В том случае, когда истокопредставимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2–4]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим неравенствами:

$$\left.\begin{aligned} &\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ &\|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (4) сходится. Аналогично [4] доказываются леммы.

Лемма 1. *Пусть приближение* ω_n *определяется условиями*

$$\omega_0 = z_0,\ \omega_{n+1} = C\omega_n + By + Cu_n,\ n \ge 0. \tag{5}$$

Тогда справедливо неравенство $\sum\limits_{k=0}^{n}\|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2$.

Лемма 2. *При* $\forall \omega_0 \in H$ *и произвольной последовательности ошибок* $\{u_n\}$, *удовлетворяющих условию* $\|u_n\| \le \beta$, *выполнено неравенство* $\varliminf\limits_{n\to\infty}\|\omega_n - \omega_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta$.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова m определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка* $m \le \dfrac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)}$;

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right)$, *где* $d > 1$, $p \in (0,1)$, *то* $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$.

Доказательство.

а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{n-k-1}\right). \tag{6}$$

При $n = 1$ из $z_n = Cz_{n-1} + By_\delta + Cu_{n-1}$ имеем $z_1 = Cz_0 + By_\delta + Cu_0$, из (6) получим то же самое, т. е. при $n = 1$ формула (6) верна. Предположим, что (6) верна при $n = p$, т. е. $z_p = C^p z_0 + C\sum\limits_{k=0}^{p-1} C^k\left(C^{-1}By_\delta + u_{p-k-1}\right)$, и докажем её справедливость при $n = p + 1$. Имеем

$$z_{p+1}=C^p z_p+By_\delta+Cu_p=C\left(C^p z_0+C\sum_{k=0}^{p-1}C^k\left(C^{-1}By_\delta+u_{p-k-1}\right)\right)+By_\delta+Cu_p=$$
$$=C^{p+1}z_0+C^2\left(C^{-1}By_\delta+u_{p-1}+By_\delta+Cu_{p-2}+CBy_\delta+C^2u_{p-3}+\ldots+\right.$$
$$\left.+C^{p-2}By_\delta+C^{p-1}u_0\right)+By_\delta+Cu_p=C^{p+1}z_0+C\left(By_\delta+Cu_{p-1}+\right.$$
$$\left.+CBy_\delta+C^2u_{p-2}+\ldots+C^{p-1}By_\delta+C^pu_0+C^{-1}By_\delta+u_p\right)=$$
$$=C^{p+1}z_0+C\sum_{k=0}^{p}C^k\left(C^{-1}By_\delta+u_{p-k}\right).$$

Таким образом, справедливость (6) доказана. Отсюда

$$\omega_n=C^n\omega_0+C\sum_{k=0}^{n-1}C^k(C^{-1}By+u_{n-k-1})=C^n\omega_0+(E+C+C^2+\ldots+C^{n-1})By+$$
$$+C\sum_{k=0}^{n-1}C^ku_{n-k-1}=C^n\omega_0+(E-C^n)(E-C)^{-1}(A^*A)^{-1}(E-C)A^*y+$$
$$+C\sum_{k=0}^{n-1}C^ku_{n-k-1}=C^n\omega_0+A^{-1}(E-C^n)y+C\sum_{k=0}^{n-1}C^ku_{n-k-1}.$$

Учитывая, что $z_0=\omega_0$, получим

$$z_n-z_{n+1}=C^nz_0+A^{-1}(E-C^n)y_\delta+C\sum_{k=0}^{n-1}C^ku_{n-k-1}-C^{n+1}z_0+A^{-1}(E-C^{n+1})y_\delta-C\sum_{k=0}^{n}C^ku_{n-k}=$$
$$=C^n\omega_0+A^{-1}(E-C^n)y-A^{-1}(E-C^n)y+A^{-1}(E-C^n)y_\delta+$$
$$+C\sum_{k=0}^{n-1}C^ku_{n-k-1}-C^{n+1}\omega_0-A^{-1}(E-C^{n+1})y+A^{-1}(E-C^{n+1})y-A^{-1}(E-C^n)y_\delta-$$
$$-C\sum_{k=0}^{n-1}C^ku_{n-k}=\omega_n-\omega_{n+1}+A^{-1}(E-C)(y_\delta-y)=\omega_n-\omega_{n+1}+C^nB(y-y_\delta).$$

Следовательно,

$$\left\|z_n-z_{n+1}\right\|\le\left\|\omega_n-\omega_{n+1}\right\|+\left\|C^nB(y-y_\delta)\right\|. \quad (7)$$

Обозначим $\sigma=B(y-y_\delta)$, тогда

$$\left\|C^nB(y-y_\delta)\right\|=\left\|C^n\sigma\right\|=\left\|\int_0^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|\le\left\|\int_0^{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|+$$
$$+\left\|\int_{\varepsilon_0}^{\|A^*A\|}\left(\frac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right)^n dE_\lambda\sigma\right\|\le\left\|E_{\varepsilon_0}\sigma\right\|+q^n\|\sigma\|\to 0,\ n\to\infty,\ \varepsilon_0\to 0,$$

так как при $\alpha>0,\ \lambda\in\left(0,\left\|A^*A\right\|\right]$ имеем $\left|\dfrac{1-\alpha\lambda^k}{1+\alpha\lambda^k}\right|\le q<1.$

Поэтому (см. лемму 2) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|z_n-z_{n+1}\right\|=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|\omega_n-\omega_{n+1}\right\|\le 2\|C\|\beta.$

Следовательно, условием $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$ момент останова m определен при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых $y_\delta, \|y - y_\delta\| \le \delta$ и u_n, $\|u_n\| \le \beta$.

б) Рассмотрим последовательность (5) и определим момент останова m' условием

$$\left.\begin{aligned} &\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,\ (n < m'),\\ &\|\omega_{m'} - \omega_{m'+1}\| \le \varepsilon - \|B\|\delta. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Из (7) следует, что $m \le m'$. Из леммы 1 при $n = m'$ получим неравенство $\sum_{k=0}^{m'} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$, поэтому справедливо записать $\sum_{k=0}^{m'-1} \|\omega_k - \omega_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2$. Отсюда получим

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|\omega_k - \omega_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (8) при $n < m'$ имеем $\|\omega_n - \omega_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta$, то $m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \le \|\omega_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2$. Учитывая, что $\omega_0 = z_0$ и $m \le m'$, из последнего неравенства получим оценку для момента останова:

$$m \le m' \le \|z_0 - x\|^2 \left((\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)\right)^{-1}.$$

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \tag{9}$$

Предположим, что (9) верно, тогда $x - C^n x = B\left(E + C + C^2 + \ldots + C^{n-1}\right)y$, $(E - C^n)x = B(E - C^n)(E - C)^{-1} y$, $(E - C^n)x = A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1} Ax$, $(E - C^n)x = (E - C^n)x$. Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (9) доказана. Из (6) вычтем (9), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]. \tag{10}$$

Отсюда $\Delta_n = C^n\Delta_0 + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k \left[C^{-1}B(y_\delta - y) + u_{n-k-1}\right]$, где $\Delta_n = z_n - x$ и $\Delta_0 = z_0 - x$. Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \le \left\|C^n\Delta_0\right\| + \left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)n. \tag{11}$$

В частности, (11) справедливо и при $n = m$. Если $m \to \infty$ при $\varepsilon, \delta, \beta \to 0$, тогда, как показано ранее, $\left\|C^m\Delta_0\right\| \to 0, m \to \infty$. Поэтому для доказательства $\|z_m - x\| \to 0, \delta \to 0, \beta \to 0$ достаточно показать, что $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0$, $m \to \infty, \delta \to 0, \beta \to 0$. Из (10) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n (E-C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C\sum_{k=0}^{n-1} C^k (E-C) u_{n-k-1}. \qquad (12)$$

Так как спектр оператора $C = \left(E + \alpha\left(A^* A\right)^k\right)^{-1}\left(E - \alpha\left(A^* A\right)^k\right)$ принадлежит [0,1], то можно доказать, что

$$\left\|C^n (E-C)\right\| \le \frac{1}{n+1}. \qquad (13)$$

Поэтому из (12) получим при $n = m - 1$:

$$\left\|z_{m-1} - z_m\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E-C)(z_0 - x)\right\| + \left\|C^{m-1} B(y_\delta - y)\right\| + \left\|Cu_{m-1}\right\| +$$

$$+ \left\|C\sum_{k=0}^{m-2} C^k (E-C) u_{m-k-2}\right\| \le \left\|C^{\frac{m-1}{2}} (E-C)\right\| \left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta +$$

$$+ \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m),$$

так как $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \le 1 + \ln m$ [5].

Так как по условию теоремы $\varepsilon(\delta,\beta) \ge d\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p\right), d > 1, p \in (0,1),$ то при всех достаточно малых δ,β выполняется неравенство $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, поэтому из б) получим $m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$. Поскольку $\|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon,$ то $\varepsilon \le \frac{2}{m}\left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$ Отсюда получим, что $m \le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}.$

Умножим обе части последнего равенства на $\|B\|\delta + \|C\|\beta,$ получим

$$m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \le \frac{2\left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\|\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}.$$

При $m \to \infty$ множитель $2\left\|C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x)\right\| \to 0,$ а

$$\frac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta\left[2 + \ln\frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}\right]}$$

ограничена при $\delta, \beta \to 0.$ Поэтому $m\left(\|B\|\delta + \|C\|\beta\right) \to 0,$ при $m \to \infty, \delta, \beta \to 0.$ Отсюда и из неравенства (11) при $m \to 0$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\|\Delta_m\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = \lim_{\delta,\beta\to 0}\left(\|C^m\Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)\right) = 0.$$

Итак, доказано, что $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m - x\| = 0$ при $m \to \infty$, т. е. метод (3) с правилом останова (4) сходится в исходной норме гильбертова пространства. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О.В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения линейных уравнений / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского ун-та. – 2008. – № 1(30). – С. 15–21.
2. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
3. Савчук, В.Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.
4. Матысик, О.В. Об апостериорном выборе числа итераций в неявной итерационной процедуре для решения уравнений I рода / О.В. Матысик, В.Ф. Савчук // Вестник Брестского ун-та. – 2008. – № 2(31). – С. 11–18.
5. Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М. : Наука. – 1971. – 1108 с.

O.V. Matysik, V.F. Savchuk. **On theConvergence of the Implicite Iteration Method with the Rule of Neighboring Approximations for Solving Incorrect Problems**

In the Hilbert space for solving linear operator equations with affirmative limited and non self–conjugate operator the non-explicit iteration method is proposed. The application of the rule of neighboring approximations for the offered method has been proved, which makes the viewed iteration method quite effective even when there are no data about source representability of exact solution. In its initial norm of Gilbert space the convergence of the iteration method is proved and the estimation of the moment of stop is received.