

Вестнік

Брэсцкага ўніверсітэта

Рэдакцыйная калегія

галоўны рэдактар
А. М. Сендзер

намеснік галоўнага рэдактара
А. Я. Будзько

адказны рэдактар
М. М. Сендзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)
А. І. Басік (Беларусь)
В. М. Волкаў (Беларусь)
М. А. Громаў (Расія)
А. У. Дзямідчык (Беларусь)
М. І. Ляўчук (Беларусь)
І. П. Маргынаў (Беларусь)
А. І. Мелькер (Расія)
В. С. Манахаў (Беларусь)
У. А. Плецохоў (Беларусь)
В. М. Радзькоў (Беларусь)
В. Р. Самойленка (Украіна)
А. А. Трафімук (Беларусь)
Уба Люба (Польшча)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Вестнік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

№ 2 / 2022

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай
камісіі Рэспублікі Беларусь ад 28.01.2022 № 14
(са змяненнямі, унесенымі загадам ВАК ад 20.09.2022 № 363)
часопіс «Вестнік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2022 г.
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

◇ ◇ ◇

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Вестнік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»
размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU
і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

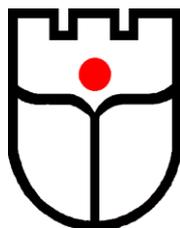
ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Архутік А. В., Кац П. Б. О точности борновских приближений моттовского сечения рассеяния.....	5
Бурый А. В., Ивашкевич А. В., Овсюк Е. М. Решения уравнения для безмассовой частицы со спином 1 и калибровочная симметрия в теории поля со спином 2, сферически симметричный случай.....	29
Гаркун А. С., Кокоулина Е. С., Левчук М. И., Невмержицкий М. Н., Шаплов А. О., Шохонов Д. А., Шуляковский Р. Г. Простейшие инстантонные решения в квантовой механике и квантовой теории поля	45
Кузьмич А. М., Плетюхов В. А. Применение методов теории релятивистских волновых уравнений для описания симметрий двумерных структур	56

МАТЭМАТЫКА

Кот М. Г. Асимптотика решений некоторых дифференциальных уравнений с дельта-образными коэффициентами.....	67
Матысик О. В. Неявная итерационная процедура приближенного решения некорректных уравнений первого рода	79
Серая З. Н., Серый А. И. О разновидностях дифференциальных уравнений роста дерева	90
Юдов А. А., Кисилук Е. В. Классификация и исследование редуцированных однородных пространств, порожденных группой Ли движений пространства Минковского	103



Vesnik

of Brest University

Editorial Board

editor-in-chief
A. M. Sender

deputy editor-in-chief
A. Ya. Budzko

managing editor
M. M. Sender

A. B. Antanievich (Belarus)
A. I. Basik (Belarus)
V. M. Volkau (Belarus)
M. A. Gromau (Russia)
A. U. Dziamidchyk (Belarus)
M. I. Liauchuk (Belarus)
I. P. Martynau (Belarus)
A. I. Melkier (Russia)
V. S. Manakhau (Belarus)
U. A. Plietsiukhou (Belarus)
V. M. Razkou (Belarus)
V. R. Samoilenka (Ukraine)
A. A. Trafimuk (Belarus)
Uba Liuba (Poland)

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»

№ 2 / 2022

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 nr 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 28, 2022 nr 14 (with the amendments made by the order of Supreme Certification Commission from September 20, 2022 nr 363) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» has been included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in 2022 in physics-mathematical sciences (Physics)

◇ ◇ ◇

According to the agreement
between Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» is placed on the platform eLIBRARY.RU and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

CONTENTS

PHYSICS

Artsiom Arkhutsik, Piotr Kats On the Accuracy of Born Approximations Mott Scattering Cross Section.....	5
Anton Bury, Alina Ivashkevich, Elena Ovsyuk Exact Solutions of the Wave Equation for Spin 1 Massless Particle, and Gauge Solutions for Spin 2 Massless Field, Spherically Symmetric Case	29
Alexander Garkun, Elena Kokoulina, Michael Levchuk, Maxim Nevmerzhitsky, Alexei Shaplov, Denis Shohonov, Roman Shulyakovsky Simple Instanton Solutions in Quantum Mechanics and Quantum Field Theory	45
Anastasia Kuzmich, Vladimir Pletyukhov Application of Methods of the Theory of Relativistic Wave Equations to Describe the Symmetries of Two-Dimensional Structures	56

MATHEMATICS

Marina Kot Asymptotics of Solutions to Some Differential Equations with Delta-Shaped Coefficients.....	67
Oleg Matysik The Implicit Iterative Procedure for Approximate Solution of Ill-Posed Equations of the First Kind.....	79
Zoya Seraya, Alexey Sery On the Varieties of Differential Equations of Tree Growth	90
Aleksandr Yudov, Yelena Kisilyuk Classification and Investigation of Reductive Homogeneous Spaces Generated by the Lie Group of Motions of the Minkowski Space	103

УДК 539.171.016

Артем Вячеславович Архутик¹, Петр Борисович Кац²

¹студент-выпускник Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Artsiom Arkhutsik¹, Piotr Kats²

¹Graduate Student of the Brest State A. S. Pushkin University

²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: ¹artboyarh@gmail.com; ²katspyotr@yandex.ru

О ТОЧНОСТИ БОРНОВСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ МОТТОВСКОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрены первое, второе и третье борновские приближения моттовского сечения рассеяния. Рассчитана усредненная по углам и энергиям относительная ошибка всех трех борновских приближений для первых 30 элементов периодической системы элементов Д. И. Менделеева и второго и третьего приближений – для первых ста элементов. Проведено сравнение точности второго и третьего борновских приближений и метода LQZ для расчета нормированного моттовского сечения рассеяния на ядрах элементов с $Z = 1 - 6$. Проанализирована точность борновских приближений для расчета поправки Мотта в формуле Бете – Блоха для $Z = 1 - 27$ для второго борновского приближения и $Z = 1 - 100$ – для третьего приближения. Получено выражение для сечения первичного смещения атома в третьем борновском приближении. Для железа, серебра и свинца рассчитано сечение первичного смещения атома для ряда энергий электронов. Для ряда примеров рассчитано, начиная с какой энергии электронов отличие сечения, полученного по асимптотической формуле, от полученного по формуле МакКинли – Фешбаха, будет менее 1 %.

Ключевые слова: нормированное моттовское сечение, борновские приближения, относительная ошибка, поправка Мотта, сечение первичного смещения атома.

On the Accuracy of Born Approximations Mott Scattering Cross Section

The first, second and third Born approximations of the Mott scattering cross section are considered. The relative error of all three Born approximations averaged by angles and energies is calculated for the first 30 elements of the periodic system of elements of D. I. Mendeleev and the second and third approximations for the first hundred elements. The accuracy of the second and third Born approximations and the LQZ method for calculating the normalized Mott scattering cross section on the nuclei of elements with $Z = 1 - 6$ are compared. The accuracy of the Born approximations for calculating the Mott correction in the Bethe – Bloch formula for $Z = 1 - 27$ for the second Born approximation and $Z = 1 - 100$ for the third approximation is analyzed. An expression is obtained for the cross section of the primary displacement of the atom in the third Born approximation. For iron, silver and lead, the cross section of the primary displacement of the atom for a number of electron energies is calculated. For a number of examples, it is calculated starting from which electron energy the difference of the cross section obtained by the asymptotic formula from that obtained by the McKinley–Feshbach formula will be less than 1 %.

Key words: normalized Mott cross-section, Born approximations, relative error, Mott correction, cross-section of the primary displacement of the atom.

Введение

В 1911 г. вышла статья Резерфорда [1], в которой в рамках классической механики была выведена знаменитая формула Резерфорда для дифференциального сечения рассеяния заряженных частиц на точечном кулоновском центре.

Для рассеяния электронов и позитронов Резерфордское сечение выражается формулой:

$$\sigma_R \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R = \left(\frac{Ze^2}{2mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (1)$$

В 1928 г. была решена соответствующая задача в нерелятивистской квантовой механике [2; 3]. По счастливой случайности классическая механика для кулоновского потенциала приводит к той же формуле, что и нерелятивистская квантовая механика, что позволило Резерфорду создать ядерную модель атома.

Немного позже Моттом было найдено решение задачи в рамках релятивистской квантовой механики [4; 5]:

$$\sigma_M \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M = \left(\frac{\hbar}{mv} \right)^2 (1 - \beta^2) \left(\frac{\xi^2 |F_M|^2}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{|G_M|^2}{\cos^2(\theta/2)} \right), \quad (2)$$

где

$$F_M(\theta) = \frac{1}{2} i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k [k C_M^{(k)} + (k+1) C_M^{(k+1)}] P_k(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} F_M^{(k)} P_k(\cos \theta),$$

$$G_M(\theta) = \frac{1}{2} i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k [k^2 C_M^{(k)} - (k+1)^2 C_M^{(k+1)}] P_k(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} G_M^{(k)} P_k(\cos \theta),$$

$$C_M^{(k)} = -e^{-i\pi\rho_k} \frac{\Gamma(\rho_k - i\eta)}{\Gamma(\rho_k + 1 + i\eta)}, \quad \eta = \frac{Z\alpha}{\beta}, \quad \xi = \eta \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \rho_k = \sqrt{k^2 - (Z\alpha)^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c},$$

$$F_M(\theta) = F_0(\theta) + F_1(\theta), \quad G_M(\theta) = G_0(\theta) + G_1(\theta)$$

$$F_0(\theta) = \frac{1}{2} i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k [k C_Z^{(k)} + (k+1) C_Z^{(k+1)}] P_k(\cos \theta),$$

$$G_0(\theta) = \frac{1}{2} i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k [k^2 C_Z^{(k)} - (k+1)^2 C_Z^{(k+1)}] P_k(\cos \theta),$$

$$F_1(\theta) = \frac{1}{2} i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k [k D^{(k)} + (k+1) D^{(k+1)}] P_k(\cos \theta),$$

$$G_1(\theta) = \frac{1}{2} i \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k [k^2 D^{(k)} - (k+1)^2 D^{(k+1)}] P_k(\cos \theta),$$

$$C_Z^{(k)} = -e^{-i\pi k} \frac{\Gamma(k - i\eta)}{\Gamma(k + 1 + i\eta)}, \quad D^{(k)} = C_M^{(k)} - C_Z^{(k)}.$$

Здесь α – постоянная тонкой структуры, Γ – гамма-функция, P_k – полиномы Лежандра.

Функции $F_0(\theta)$ и $G_0(\theta)$ могут быть записаны как

$$F_0(\theta) = \frac{i}{2} \frac{\Gamma(1 - i\eta)}{\Gamma(1 + i\eta)} \sin^{2i\eta} \left(\frac{\theta}{2} \right), \quad G_0(\theta) = -i\eta \frac{F_0(\theta)}{\tan^2(\theta/2)}. \quad (3)$$

Формулу (2) называют точной формулой для дифференциального сечения рассеяния.

Первое численное суммирование этих рядов было выполнено Моттом [5]. Начиная с этой работы, в подобных вычислениях начали вводить величину, равную отношению σ_M к модифицированному сечению Резерфорда ($\tilde{\sigma}_R$),

$$R(\theta) = \sigma_M / \tilde{\sigma}_R, \quad \tilde{\sigma}_R = \sigma_R(1 - \beta^2), \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (4)$$

или нормированное моттовское сечение (НМС). Его можно представить в виде:

$$R_M(\theta) = \frac{4\sin^2(\theta/2)}{\eta^2} \left[\xi^2 |F|^2 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) |G|^2 \right]. \quad (5)$$

Так как точное моттовское сечение рассеяния (2) и НМС (5) включают медленно сходящиеся ряды, их применение – сложная задача. В связи с этим становится важным использование аналитических приближений.

Одним из способов получения таких приближений является разложение точного НМС в ряд по степеням αZ . Их называют борновскими приближениями моттовского сечения рассеяния [6].

Первое борновское приближение было получено самим Моттом [5]:

$$R_B(\theta) = 1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (6)$$

Второе борновское приближение было получено МакКинли и Фешбахом [7]:

$$R_{MF}(\theta) = R_B + \pi\alpha\beta Z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (7)$$

Третье борновское приближение получено Джонсоном, Вебером и Маллином [8]:

$$\begin{aligned} R_{JWM} = R_{MF} + (\alpha Z)^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ L_2 \left[1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - 4L_2 \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \ln^2 \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{2} \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{\pi^2}{6} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \beta^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(L_2 \left[1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{\sin^2(\theta/2) \ln^2[\sin(\theta/2)]}{1 - \sin^2(\theta/2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi^2}{4} \frac{1 - \sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)} - \frac{\pi^2}{6} \right) \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где L_2 обозначает дилогарифм Эйлера:

$$L_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy.$$

Первое борновское прилижение широко используется в физике частиц [9]. В этом приближении получена формула Бете – Блоха для потерь энергии заряженных частиц в веществе [10].

Второе борновское приближение часто используется при анализе радиационных повреждений вещества электронами [11–15]. В этом приближении получается простая формула для сечения первичного смещения атома электроном [16]. Также во втором борновском приближении была получена поправка Мотта к формуле Бете – Блоха [17].

Третье борновское приближение используется реже в связи с тем, что само представляет собой достаточно сложное выражение. Морган и Эби [18] получили поправку Мотта в формуле Бете – Блоха в третьем борновском приближении.

Точность борновских приближений оценивалась для различных частных случаев и самими авторами формул: [7; 8] и другими исследователями [18–22].

Одно из наиболее обширных сравнений расчетов во втором борновском приближении и точных расчетов дано Оеном [23].

Еще МакКинли и Фешбах оценили границы применимости своего метода как $Z\alpha \leq 0,2$, т. е. $Z \leq 27$. Однако существует ряд работ, в которых второе борновское приближение применяется к случаям $Z > 30$ [24–28].

В монографии [29, с. 15] утверждается, что вычисление по (7) при $Z \leq 40$ не превышает 1 %.

В представленной работе будет проанализирована точность борновских приближений для расчетов моттовского сечения рассеяния и поправки Мотта для широкого диапазона Z и β . Также для некоторых примеров будет вычислено сечение смещения атома и проанализированы условия применимости высокоэнергетического приближения для сечения смещения.

Проверка точности борновских приближений для моттовского сечения рассеяния

Для характеристики точности приближенных методов будем использовать понятие средней относительной ошибки ER , заимствованное из работы [30]:

$$ER = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{36} [R(\theta_i) - R^{EXACT}(\theta_i)]^2}{\sum_{i=1}^{36} [R^{EXACT}(\theta_i)]^2}}. \quad (9)$$

Было вычислено среднее арифметическое по энергиям средней относительной ошибки $\langle ER \rangle$ для 15 значений энергии – от 5 кэВ до 10 МэВ. Результаты представлены в таблице 1 и на рисунке 1.

Таблица 1. – Среднее арифметическое значение относительной ошибки

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\langle ER \rangle_B, \%$	0,41	0,83	1,3	1,7	2,2	2,6	3,1	3,6	4,1
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	$7,2 \cdot 10^{-3}$	0,029	0,066	0,12	0,18	0,27	0,37	0,48	0,61
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	$9,0 \cdot 10^{-5}$	$7,1 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$5,6 \cdot 10^{-3}$	0,011	0,019	0,030	0,044	0,062
Z	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\langle ER \rangle_B, \%$	4,6	5,1	5,6	6,2	6,7	7,3	7,8	8,4	9,0
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	0,75	0,91	1,1	1,3	1,5	1,7	2,0	2,2	2,5
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	0,085	0,11	0,14	0,18	0,225	0,27	0,33	0,39	0,46
Z	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\langle ER \rangle_B, \%$	9,6	10,2	10,8	11,4	12,0	12,7	13,3	14,0	14,6
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	2,8	3,1	3,4	3,8	4,1	4,5	4,9	5,3	5,7
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	0,54	0,63	0,72	0,83	0,94	1,1	1,2	1,3	1,5

Окончание таблицы 1

Z	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\langle ER \rangle_B, \%$	15,3	16,0	16,7						
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	6,1	6,5	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,1
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,1	3,3
Z	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	10,6	11,2	11,8	12,4	13,0	13,6	14,2	14,9	15,5
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	3,6	3,9	4,1	4,4	4,8	5,1	5,4	5,8	6,1
Z	46	47	48	49	50	51	52	53	54
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	16,2	16,9	17,6	18,3	19,0	19,7	20,5	21,2	22,0
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	6,5	6,9	7,3	7,7	8,2	8,6	9,1	9,6	10,1
Z	55	56	57	58	59	60	61	62	63
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	22,7	23,5	24,3	25,1	25,9	26,7	27,5	28,3	29,2
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	10,6	11,1	11,6	12,2	12,7	13,3	13,9	14,5	15,1
Z	64	65	66	67	68	69	70	71	72
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	30,0	30,9	31,7	32,6	33,4	34,3	35,2	36,0	36,9
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	15,7	16,4	17,0	17,7	18,4	19,1	19,8	20,5	21,2
Z	73	74	75	76	77	78	79	80	81
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	37,8	38,7	39,6	40,4	41,3	42,2	43,1	44,0	44,9
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	22,0	22,7	23,5	24,3	25,0	25,8	26,6	27,5	28,3
Z	82	83	84	85	86	87	88	89	90
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	45,8	46,7	47,6	48,5	49,3	50,2	51,1	52,0	52,9
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	29,1	30,0	30,8	31,7	32,5	33,4	34,3	35,1	36,0

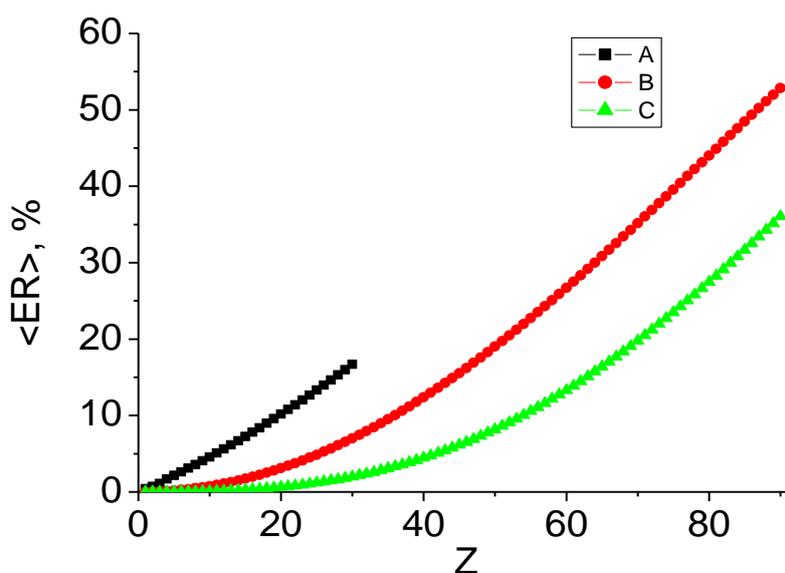
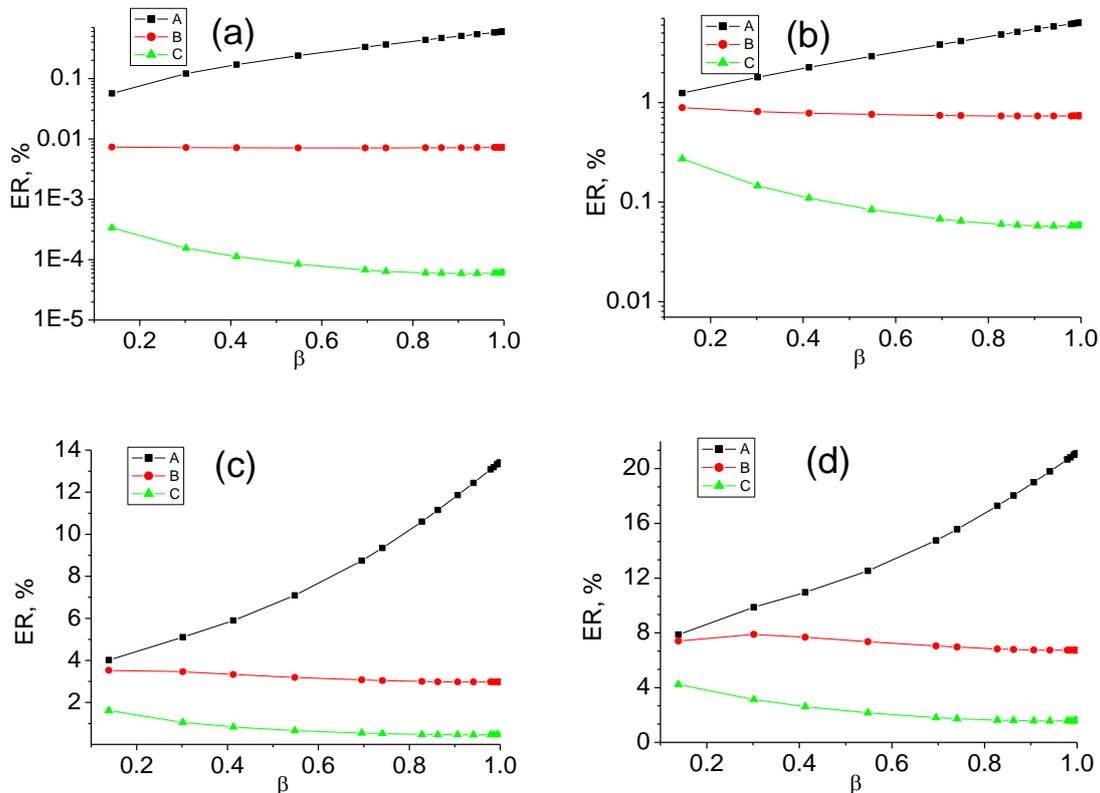


Рисунок 1. – Среднее арифметическое значение относительной ошибки А – $\langle ER \rangle_B$, , В – $\langle ER \rangle_{MF}$, , С – $\langle ER \rangle_{JWM}$.

На рисунке 2 представлена зависимость $ER(\beta)$ для элементов с $Z = 1, 10, 20$ и 30 .



**Рисунок 2. – ER как функция относительной скорости.
A – ER_B , B – ER_{MF} , C – ER_{JWM} для $Z = 1$ (a), 10 (b), 20 (c), 30 (d)**

Из рисунка видно, что погрешность первого борновского приближения растет с ростом скорости, погрешность второго борновского приближения слабо зависит от скорости, а погрешность третьего борновского приближения с ростом скорости уменьшается. Точность растет с номером приближения.

$\langle ER \rangle_B$ превышает 1 % для лития, 3 % для азота, 5 % для натрия, 10 % для кальция и 15 % для никеля. $\langle ER \rangle_{MF}$ превышает 1 % для магния, 3 % для кальция и 5 % для железа. Обычно считается, что приближение МакКинли – Фешбаха применимо до $Z = 27$.

По нашим расчетам, $\langle ER \rangle_{MF}$ при этом достигает 5,7 %. $\langle ER \rangle_{MF}$ превышает 10 % для криптона, 15 % для родия и 20 % для теллура.

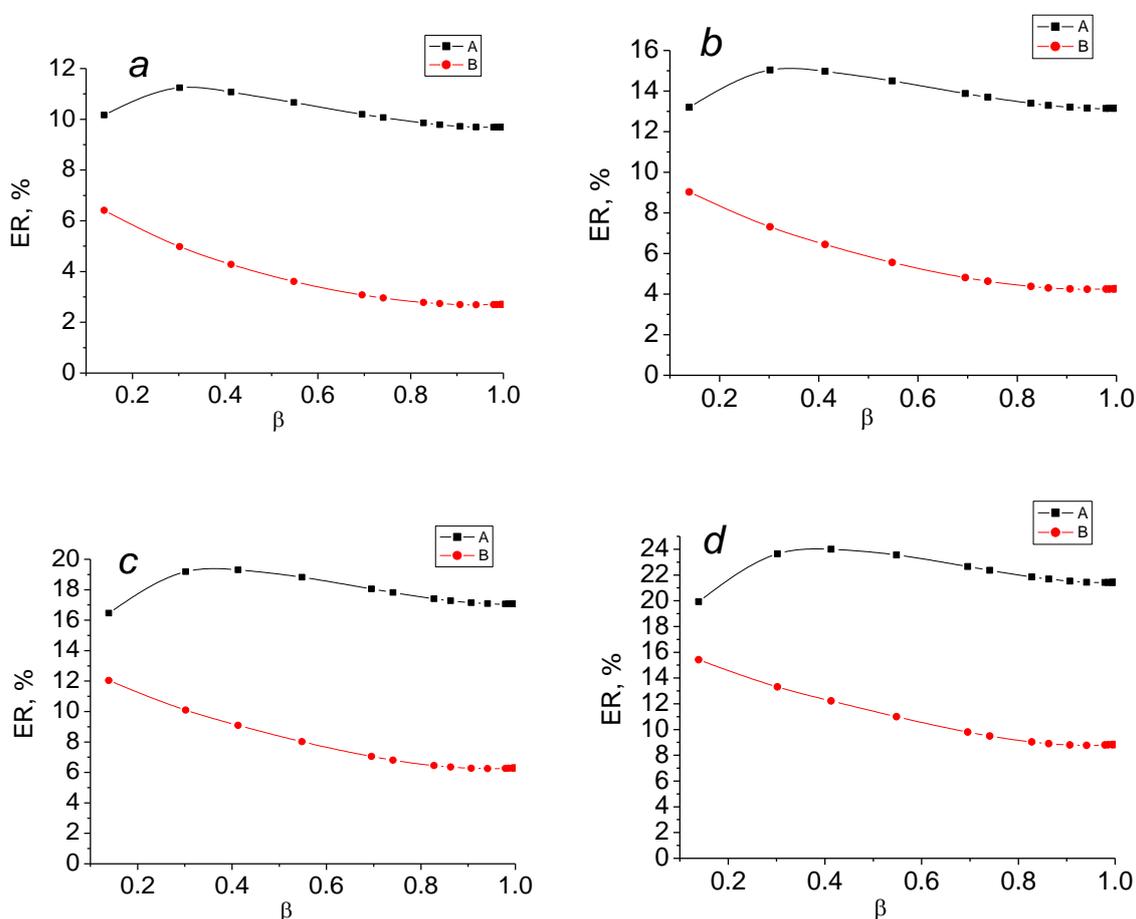
$\langle ER \rangle_{JWM}$ превышает 1 % для хрома, для цинка достигает 2 %.

Усредненная по углам и энергиям относительная ошибка при вычислении НМС превышает 10 % для первого борновского приближения, начиная с $Z = 20$, для второго – с $Z = 36$, для третьего – с $Z = 54$.

На рисунке 3 представлена зависимость $ER(\beta)$ для элементов с $Z = 36, 42, 48$ и 54 . Из рисунка видно, что погрешность второго борновского приближения сначала растет с ростом скорости, достигает максимума в районе $\beta = 0,3-0,4$ и затем уменьшается.

По нашим расчетам, для $Z = 40$ $\langle ER \rangle_{MF}$ превышает 12 %, при 25 кэВ $ER = 13,7$ %. При этом относительная погрешность вычисления нормированного моттовского сечения для этой энергии превышает 20 % при углах рассеяния более 150° . Это опровергает

утверждение, приведенное в [29], что погрешность второго борновского приближения для $Z \leq 40$ не превышает 1 %. Интересно, что до 87° относительная погрешность менее 10 %, а до 60° погрешность второго борновского приближения меньше, чем третьего. Надо отметить при этом, что само нормированное сечение в этой области углов и энергий мало отличается от единицы (менее чем на 10 %).



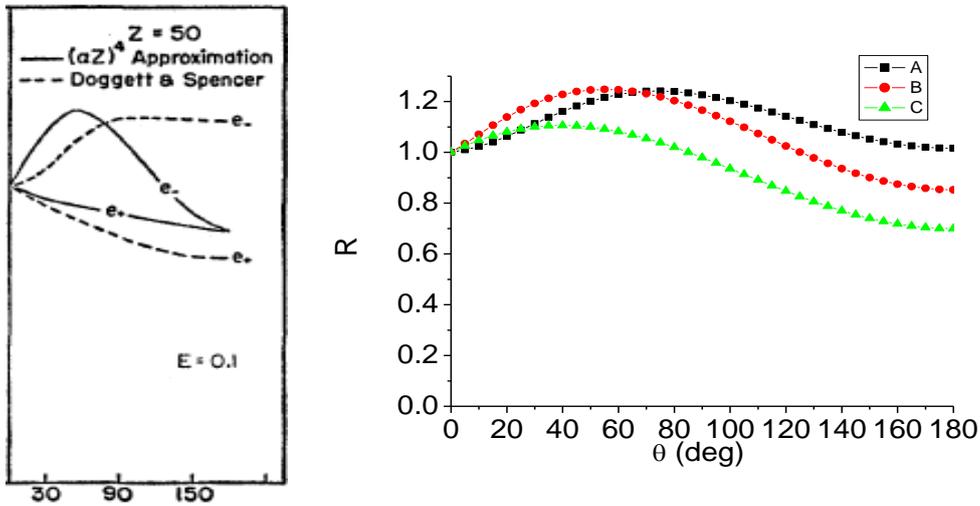
**Рисунок 3. – ER как функция относительной скорости.
 А – ER_{MF} , В – ER_{JWM} для $Z = 36$ (a), 42 (b), 48 (c), 54 (d)**

В [8], согласно графику, наблюдается очень заметная разница между нормированным сечением рассеяния, вычисленным с помощью численного расчета и полученным в третьем борновском приближении для олова при энергии электронов 0,1 МэВ. На рисунке 4 приведен график из [8] и построенный нами. На фрагменте графика из [8] приведены также графики для позитронов. Как видно из нашего графика, на самом деле третье борновское приближение не дает такой погрешности. Можно предположить, что в [8] допущена ошибка для графика точного нормированного моттовского сечения.

На рисунке 5 представлена зависимость ER от относительной скорости $\beta = v/c$ для $Z = 60, 70, 80$ и 90 . Для больших Z становится заметным наличие максимума на графике $\langle ER \rangle_{MF}$. С ростом Z положение максимума погрешности смещается в сторону больших скоростей. Для $Z = 22$ максимальное значение ER достигает в районе $\beta = 0,2$, для $Z = 60$ – в районе $\beta = 0,42$, для $Z = 90$ – в районе $\beta = 0,55$.

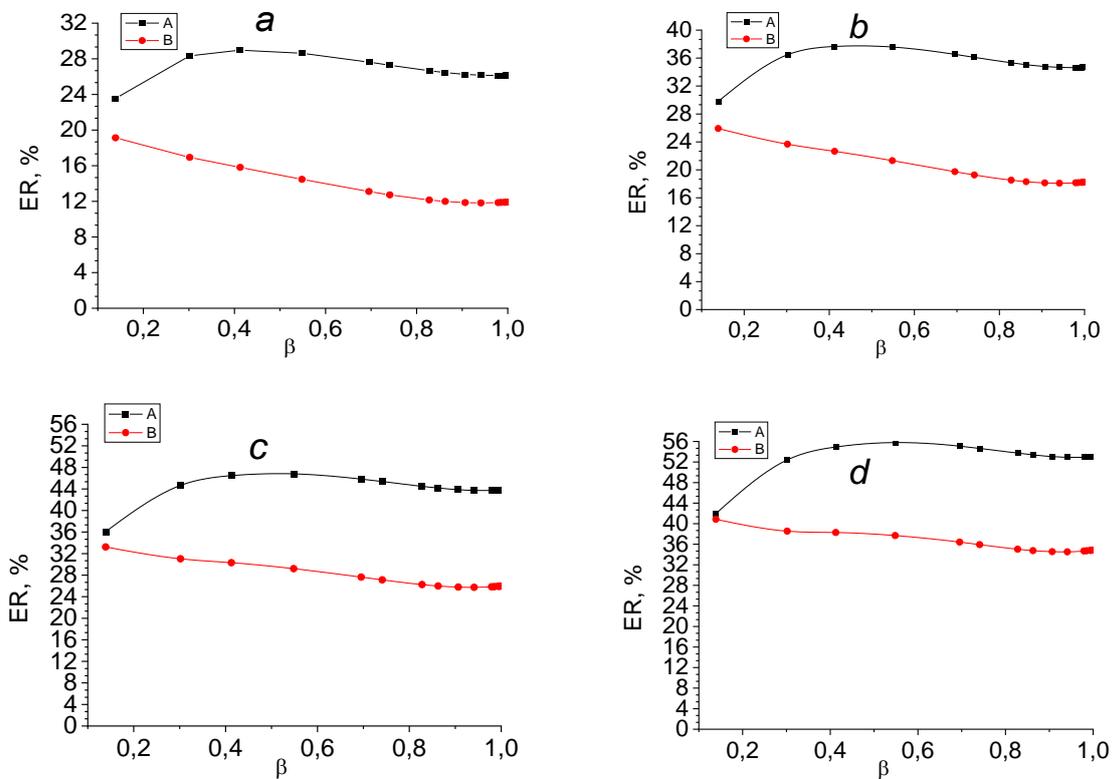
На рисунке 6 приведены графики зависимости НМС $R(\theta)$ от для разных энергий для $Z = 27$, до которого считается применимым второе борновское приближение.

До энергии 25 кэВ точность нерелятивистского приближения (резерфордское сечение) оказывается выше точности первого и второго борновского приближений.



A – результат численного расчета НМС, *B* – третье борновское приближение, *C* – второе борновское приближение.

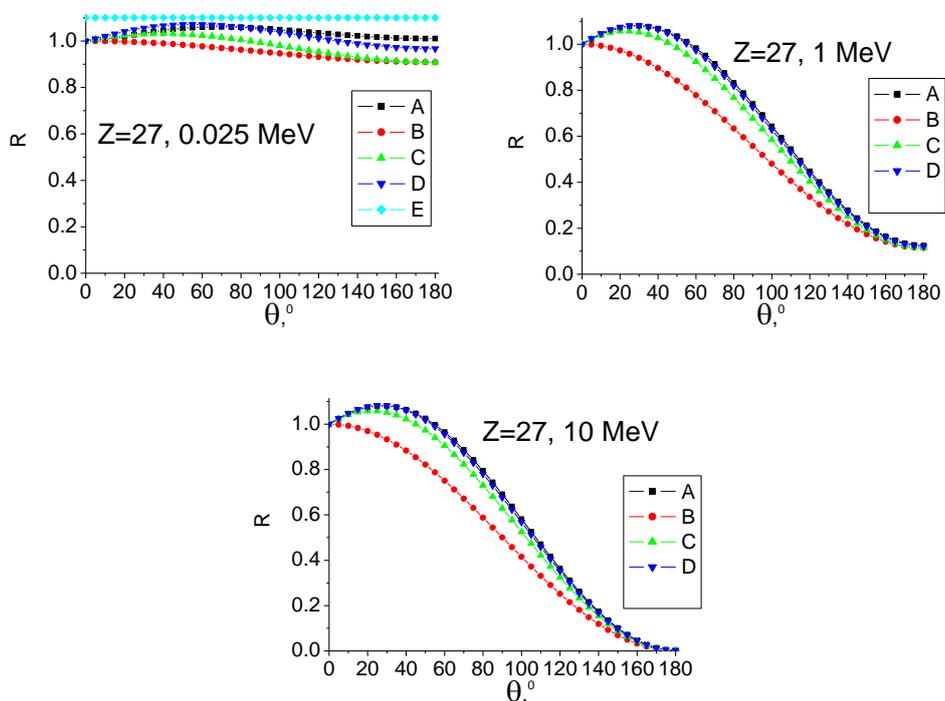
Рисунок 4. – Сравнение численного расчета и третьего борновского приближения для олова при энергии электронов 0,1 МэВ согласно [8] и нашим расчетам



A – ER_{MF} , *B* – ER_{JWM} для $Z = 60$ (a), 70 (b), 80 (c), 90 (d)

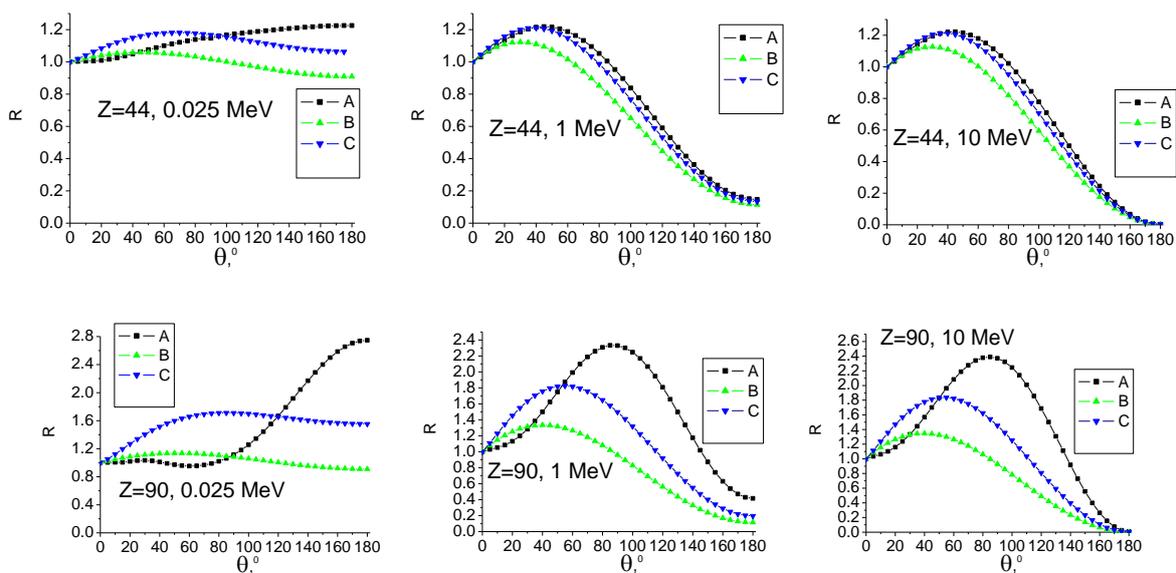
Рисунок 5. – ER как функция относительной скорости

Для $Z = 44$ $\langle ER \rangle_{JWM}$ близка к $\langle ER \rangle_{MF}$ для $Z = 27$. Графики для $Z = 44$ и $Z = 90$ приведены на рисунке 7.



A – численный расчет, B – первое борновское приближение, C – второе борновское приближение, D – третье борновское приближение, E – нерелятивистское приближение для рассеяния электронов с энергией 0,025 МэВ, 1 МэВ и 10 МэВ на ядрах с $Z = 27$

Рисунок 6. – НМС $R(\theta)$ как функция угла рассеяния



A – численный расчет, B – второе борновское приближение, C – третье борновское приближение для электронов с энергией 0,025 МэВ, 1 МэВ и 10 МэВ на ядрах с $Z = 44$ и 90.

Рисунок 7. – НМС как функция угла рассеяния

Сравнение точности борновских приближений и метода LQZ для расчета нормированного моттовского сечения рассеяния на ядрах легких элементов

В 1995 г. в [30] предложено новое приближение, основанное на аналитическом фитировании точного моттовского сечения. Мы называем это приближение LQZ.

Для каждого элемента с помощью метода наименьших квадратов рассчитываются 30 коэффициентов.

Как показали авторы [30], LQZ приводит к малой погрешности. С ростом порядкового номера элемента погрешность борновских приближений растет, и для больших Z предпочтительным оказывается использование метода LQZ.

В данном разделе мы рассмотрим вопрос, существуют ли элементы, для которых точность борновских приближений превышает точность метода LQZ.

Вычислена средняя относительная ошибка ER для 26 скоростей от 0,1 c до 0,999 c для методов MF, JWM и LQZ, а также усреднение этой величины по скоростям. При этом коэффициенты для метода LQZ брались из работ [30] и [31]. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2. – Среднее арифметическое значение относительной ошибки

Z	1	2	3	4	5	6
$\langle ER \rangle_{MF}, \%$	$7,2 \cdot 10^{-3}$	0,029	0,066	0,12	0,19	0,27
$\langle ER \rangle_{JWM}, \%$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^{-3}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	0,013	0,023
$\langle ER \rangle_{LQZ}, \%$ [30]	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$5,9 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$3,4 \cdot 10^{-3}$	$4,1 \cdot 10^{-3}$
$\langle ER \rangle_{LQZ}, \%$ [31]	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$	$1,4 \cdot 10^{-3}$	$2,4 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$

Для $Z \leq 3$ погрешность JWM оказывается ниже погрешности LQZ с коэффициентами из [30]. Погрешность LQZ с коэффициентами из [31] для всех элементов ниже погрешности борновских приближений. Для водорода погрешность LQZ при использовании коэффициентов из [30] аномально велика и даже превышает погрешность MF.

При очень малой погрешности на результат может влиять точность вычисления нормированного моттовского сечения рассеяния. Для вычисления точного значения НМС использовалось суммирование моттовских рядов по методу, предложенному в [22], до $L = 150$. Для проверки влияния количества членов сумм мы вычислили погрешность метода JWM для $Z = 1, \beta = 0,999$ (при этой скорости получалась минимальная погрешность) при $L = 150$ и $L = 300$. В первом случае $ER_{JWM} = 6,0 \cdot 10^{-5}\%$, во втором – $\langle ER \rangle_{JWM} = 5,7 \cdot 10^{-5}\%$.

Анализ точности второго и третьего борновских приближений для расчета поправки Мотта

Поправка Мотта возникает в формуле Бете – Блоха вследствие отличия моттовского сечения рассеяния от получаемого в первом борновском приближении. Поправка Мотта во втором борновском приближении была получена в [17; 18] и представляется простым выражением:

$$\Delta L_{M_2} = \frac{1}{2} \pi \alpha \beta Z. \quad (10)$$

Видно, что поправка Мотта в этом приближении зависит линейно от скорости и заряда ядра.

Поправка Мотта в третьем борновском приближении получена Морганом и Эби [18]. Она определяется выражением:

$$\Delta L_{ММЕЗ} = \frac{1}{2} \left\{ \pi \alpha \beta Z + (\alpha Z)^2 \left[\pi^2 / 3 + 1 + \beta^2 \left\{ \pi^2 (3/4 - \ln 2) + 0.5(\zeta(3) - 3) \right\} \right] \right\}, \quad (11)$$

где $\zeta(3)$ – дзета-функция Римана.

Как отметили в [18], поправка (1) применима только при небольших Z . В [20] проведено сравнение (1) с разностью поправок Линдхарда – Соренсена и Блоха для $Z = 10, 18$ и 36 при $\beta \rightarrow 1$. Как было показано в [21], эта разность совпадает с поправкой Мотта.

Будем характеризовать точность расчета поправки Мотта во втором или третьем борновском приближении относительной ошибкой:

$$\delta_{M2(3)} = \frac{|\Delta L_{M2(3)} - \Delta L_M|}{\Delta L_M} \cdot 100\%, \quad (12)$$

где $\Delta L_M = \Delta L_{МВСТТ}$ рассчитывалась по методу ВСТТ, разработанному в [32].

С ростом скорости для второго борновского приближения относительная погрешность снижается. В таблице 3 приведены значения β , начиная с которых относительная погрешность ниже 5 %.

Таблица 3. – Значение β , начиная с которой $\delta_{M2} < 5\%$

Z	1	2	3	4	5
β	0,186	0,369	0,548	0,721	0,887

В таблице 4 приведены значения β , начиная с которых погрешность ниже 10 %.

Таблица 4. – Значение β , начиная с которой $\delta_{M2} < 10\%$

Z	6	7	8	9	10	11
β	0,514	0,598	0,681	0,763	0,844	0,924

В таблице 5 приведены значения β , начиная с которых погрешность ниже 20 %.

Таблица 5. – Значение β , начиная с которой $\delta_{M2} < 20\%$

Z	12	13	14	15	16	17	18	19
β	0,428	0,465	0,502	0,539	0,577	0,614	0,653	0,691
Z	20	21	22	23	24	25	26	
β	0,730	0,769	0,808	0,848	0,888	0,928	0,969	

При $Z = 27$ для любых скоростей относительная погрешность превышает 20 %. Значение $Z = 27$ обычно приводится как максимальное значение, при котором применимо второе борновское приближение. При $Z = 27$ средние по углам относительные погрешности в расчете дифференциального сечения рассеяния не превышают 7 %. Таким образом, можно сделать вывод, что относительная погрешность при использовании второго борновского приближения в вычислении поправки Мотта выше, чем при вычислении дифференциального сечения рассеяния.

Третье борновское приближение дает хорошую точность для поправки Мотта при высоких скоростях, но неверное поведение при малых скоростях [21]. Мы провели

вычисления поправки Мотта для $Z = 1 - 100$ с помощью третьего борновского приближения по (11), а также численный расчет по методу, изложенному в [32].

Согласно [18], поправка Мотта в третьем борновском приближении при $\beta = 0,95$ дает очень хорошее согласие с численным расчетом для Z от -52 до 80 . При $\beta = 0,85$ хорошее согласие до $Z \approx 60$, а при $\beta = 0,99$ – до $Z \approx 92$.

Приведем значения относительной погрешности третьего борновского приближения для указанных Z и β .

Таблица 6. – Относительная погрешность поправки Мотта в третьем борновском приближении для некоторых Z и β

	$Z = 80, \beta = 0,95$	$Z = 60, \beta = 0,85$	$Z = 92, \beta = 0,99$
$\delta_{M3}, \%$	4,39	5,75	3,98

Для $Z = 1 - 3$ погрешность менее 3 % для всех $\beta \geq 0,1$. Определим, начиная с какой β , δ_{M3} становится менее 6 %. Результаты представлены в таблице 7.

Таблица 7. – Значение β , начиная с которой $\delta_{MME} < 6 \%$

Z	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
β	0,105	0,121	0,145	0,168	0,191	0,214	0,237	0,259	0,281	0,302
Z	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
β	0,323	0,343	0,364	0,383	0,402	0,421	0,439	0,457	0,474	0,490
Z	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
β	0,506	0,522	0,537	0,552	0,566	0,580	0,594	0,607	0,619	0,631
Z	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
β	0,643	0,654	0,665	0,676	0,686	0,696	0,706	0,715	0,724	0,733
Z	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
β	0,741	0,750	0,757	0,765	0,772	0,780	0,787	0,793	0,800	0,806
Z	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63
β	0,812	0,818	0,824	0,830	0,835	0,840	0,845	0,850	0,855	0,860
Z	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
β	0,865	0,869	0,874	0,878	0,882	0,886	0,890	0,894	0,898	0,902
Z	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
β	0,905	0,909	0,913	0,916	0,920	0,923	0,926	0,930	0,933	0,936
Z	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
β	0,940	0,943	0,946	0,949	0,952	0,956	0,959	0,962	0,965	0,969
Z	94	95	96	97	98	99	100			
β	0,972	0,975	0,979	0,982	0,986	0,989	0,993			

Соответственно, можно определить, до какого Z включительно погрешность ниже 6 % для данного β .

Таблица 8. – Максимальное значение Z , при котором $\delta_{MME} < 6 \%$

β	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,85	0,9	0,95	0,99
Z_{\max}	4	8	12	17	23	30	39	52	61	72	87	99

Несмотря на то что точность третьего борновского приближения для больших Z становится очень низкой, точность поправки Мотта остается высокой при высокой энергии.

В [20] приведены значения разности поправки Линдхарда – Соренсена (LS) и поправки Блоха при $\beta \rightarrow 1$. Как было показано в [21], эта разность совпадает с поправкой Мотта. Приведем наши результаты расчетов поправки Мотта методом ВСТТ [32], разности поправки LS и Блоха ΔL_{LSMB} и поправки Мотта во втором и третьем борновском приближении, а также значения разности поправок из [20].

Таблица 9. – Поправка Мотта при $\beta \rightarrow 1$

Z	ΔL_{MBCTT}	ΔL_{LSMB}	ΔL_{M2}	ΔL_{M3}	ΔL_{LSMB} , [20]	δ_{M_2}	δ_{M_2} , [20]
10	0,125241	0,125241	0,114627	0,125149	0,119	8,5	3,4
18	0,240932	0,240932	0,206328	0,240241	0,220	14,4	6,4
36	0,551343	0,551343	0,412656	0,551343	0,473	25,2	12,7

В последних столбцах приведена погрешность второго борновского приближения по нашим вычислениям (δ_{M_2}) и по результатам [20].

Так как результат расчета поправки Мотта по методу ВСТТ совпал с результатом расчета разности поправки Линдхарда – Соренсена и Блоха и очень близок к результату, полученному в третьем борновском приближении, можно полагать, что приведенные в [20] результаты ошибочны.

Погрешность второго борновского приближения оказывается еще выше, чем получилась бы по результатам, приведенным в [20].

Применение борновских приближений к расчету сечения смещения атомов для железа, серебра и свинца

Для расчета повреждения материалов высокоэнергетическими электронами вычисляют сечение смещения атома [23]. Для вычисления сечения первичного смещения широко используется формула, полученная на основе второго борновского приближения дифференциального сечения рассеяния релятивистских электронов на точечном ядре [16]:

$$\sigma_{pMF} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \left\{ \frac{1}{y} - 1 + \beta^2 \ln(y) + \pi \alpha \beta \left(\frac{2}{\sqrt{y}} - 2 + \ln(y) \right) \right\}, y = \frac{T_d}{T_m}. \quad (13)$$

T_d – пороговая энергия смещения атома, T_m – максимальная энергия, которая может быть передана атому:

$$T_m = \frac{2E(E + 2m_e c^2)}{Mc^2}, \quad (14)$$

где m_e и M – массы электрона и ядра, E – кинетическая энергия электрона.

В ряде работ [23; 33; 34] было показано, что с ростом Z точность расчетов по (13) снижается по сравнению с результатами, получаемыми при использовании точного моттовского сечения рассеяния. В [35] было рассчитано сечение первичного смещения атома для ряда материалов с использованием третьего борновского приближения и показано, что его точность выше, чем у второго борновского приближения.

Согласно [6], второе борновское приближение применимо до $Z = 27$. Атомный номер железа $Z = 26$ мы рассматриваем в связи с тем, что для него имеются результаты численного расчета сечения смещения атома [23]. По нашим оценкам, средняя относительная погрешность для $Z = 44$ при использовании третьего борновского приближения близка к погрешности второго борновского приближения при $Z = 27$. В [23] имеются

данные для $Z = 47$. В [26] приводится пороговая энергия для $Z = 47$. Согласно [26], пороговая энергия для свинца – 11,5 эВ. Для свинца и пороговой энергии 12 эВ данные приведены в [23].

Сечение образования первичного смещения атома может быть представлено в виде [23]:

$$\sigma_p(E, T_d) = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \int_{T_d/T_m}^1 \frac{R(x, E)}{x^2} dx, \quad x = \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{T}{T_m}, \quad (15)$$

где R – нормированное моттовское сечение НМС.

Путем подстановки (8) в (2) удается взять неопределенный интеграл и, подставив верхний и нижний пределы интегрирования в формулу Ньютона – Лейбница, получить выражение для сечения первичного смещения атома в третьем борновском приближении:

$$\begin{aligned} \sigma_{pJWM} &= \sigma_{pMF} - \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \sigma_3, \\ \sigma_3 &= 2\pi^2 + \beta^2 \left(\pi^2 \ln 2 + \frac{3}{2} \zeta(3) \right) - \frac{\pi^2}{\sqrt{y}} - \pi^2 \beta^2 \ln[1 + \sqrt{y}] + \ln[y] \cdot \\ &\cdot \left(2 \ln \left[\frac{1 + \sqrt{y}}{1 - \sqrt{y}} \right] - \frac{\pi^2}{12} (4 - \beta^2) \right) + \ln[y]^2 \cdot \left(\frac{3\beta^2}{4} \ln[1 - y] - 1 \right) + \frac{\ln[y]^3}{6} + 8 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) L_2(1 - \sqrt{y}) - \\ &- \left(\frac{2}{\sqrt{y}} - \beta^2 \ln[y] \right) L_2(1 - y) + 4 \left(L_2(-\sqrt{y}) - L_2(\sqrt{y}) \right) + \frac{3\beta^2}{2} (\ln[y] \cdot L_2(y) - L_3(y)), \quad y = \frac{T_d}{T_m}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $L_3(y)$ – полилогарифм.

Используя (13) и (16), мы рассчитали сечение первичного смещения атома для железа, серебра и свинца для ряда энергий. Результаты приведены в таблицах 10 и 11. Результаты сравнивались с результатами численных расчетов σ_{pO} , приведенными в [23]. В скобках приводится относительная погрешность:

$$\delta = \frac{|\sigma_p(E_i) - \sigma_{pO}(E_i)|}{\sigma_{pO}(E_i)} \cdot 100 \%$$

Таблица 10. – Первичное сечение смещения атома для железа и серебра

$Z = 26, M = 55,85, T_d = 20 \text{ эВ}$				$Z = 47, M = 107,88, T_d = 24 \text{ эВ}$			
$E, \text{ МэВ}$	$\sigma_{pMF} (\delta)$	$\sigma_{pJWM} (\delta)$	σ_{pO}	$E, \text{ МэВ}$	$\sigma_{pMF} (\delta)$	$\sigma_{pJWM} (\delta)$	σ_{pO}
0,376	0,439 (10)	0,465 (5,1)	0,49	0,707	0,36 (28)	0,433 (13)	0,50
0,380	1,007 (8,5)	1,07 (2,7)	1,10	0,714	0,752 (27)	0,901 (13)	1,03
0,387	1,98 (8,3)	2,11 (2,3)	2,16	0,728	1,58 (27)	1,90 (12)	2,17
0,398	3,48 (8,1)	3,70 (2,4)	3,79	0,749	2,94 (27)	3,55 (12)	4,04
0,413	5,45 (8,1)	5,79 (2,4)	5,93	0,777	4,92 (28)	5,94 (13)	6,79
0,432	7,83 (8,2)	8,33 (2,3)	8,53	0,812	7,59 (28)	9,21 (12)	10,51
0,454	10,44 (8,3)	11,13 (2,3)	11,39	0,854	11,01 (28)	13,37 (12)	15,24
0,484	13,80 (8,4)	14,72 (2,3)	15,06	0,91	15,77 (28)	19,15 (12)	21,76
0,522	17,75 (8,4)	18,95 (2,2)	19,37	0,98	21,82 (27)	26,46 (12)	29,94
0,577	22,93 (8,4)	24,50(2,1)	25,02	1,08	30,32 (26)	36,64 (11)	41,18

Окончание таблицы 10

0,652	29,18 (8,2)	31,15 (2,0)	31,78	1,22	41,46 (25)	49,83 (10)	55,46
0,745	35,82 (7,9)	38,19 (1,8)	38,90	1,40	54,12 (24)	64,54 (9,1)	71,00
0,857	42,52 (7,6)	45,24 (1,7)	46,01	1,61	66,52 (22)	78,63 (8,0)	85,46
1,00	49,49 (7,1)	52,49 (1,5)	53,28	1,89	79,66 (20)	93,17 (6,7)	99,87
1,19	56,70 (6,5)	59,90 (1,3)	60,66	2,24	91,94 (18)	106,26 (5,4)	112,32
1,41	62,97 (5,9)	66,25 (1,0)	66,94	2,66	102,40 (16)	116,93 (4,1)	121,96
1,67	68,42 (5,3)	71,67(0,83)	72,27	3,15	110,76 (14)	124,96 (3,0)	128,79
1,93	72,42 (4,8)	75,59(0,66)	76,09	3,64	116,45 (12)	130,07 (2,1)	132,82
2,23	75,84 (4,3)	78,86(0,52)	79,27	4,20	120,88 (11)	133,71 (1,3)	135,43
2,61	78,92 (3,8)	81,74(0,38)	82,05	4,90	124,48 (9,1)	136,29(0,50)	136,98
3,16	81,86 (3,2)	84,40(0,21)	84,58	5,95	127,53 (7,3)	137,95(0,30)	137,54
3,72	83,74 (2,8)	86,04(0,10)	86,12	7,00	129,07 (5,9)	138,29(0,83)	137,15
5,59	86,51 (1,8)	88,17(0,10)	88,08	10,5	130,16 (3,1)	136,56 (1,6)	134,35
7,45	87,29 (1,3)	88,56(0,17)	88,41	14,0	129,46 (1,8)	134,25 (1,8)	131,88
11,1	87,47(0,77)	88,30(0,17)	88,15	21,0	127,70(0,60)	130,73 (1,8)	128,47
18,6	86,99(0,32)	87,44(0,19)	87,27	35,0	125,30(0,27)	126,90 (1,6)	124,96
37,2	86,13(0,09)	86,31(0,12)	86,21	70,0	122,75(0,38)	123,38(0,90)	122,28
74,5	85,49(0,19)	85,55(0,12)	85,65	140	121,17(0,16)	121,40(0,35)	120,98
111	85,23(0,28)	85,27(0,23)	85,47	210	120,59(0,16)	120,72(0,27)	120,40

Таблица 11. – Сечение первичного смещения атома для свинца

Z = 82, M = 207,21, T _d = 12 эВ							
E, МэВ	0,686	0,693	0,707	0,727	0,754	0,789	0,829
σ _{рMF}	1,03	2,38	5,33	10,06	17,22	27,53	40,28
σ _{рJWM}	1,64	3,78	8,45	15,92	27,19	43,31	63,10
σ _{рO}	3,04	6,95	15,48	29,08	49,42	77,98	112,13
E, МэВ	0,884	0,952	1,05	1,19	1,36	1,56	1,83
σ _{рMF}	58,78	82,22	115,52	159,89	207,11	253,38	302,33
σ _{рJWM}	91,54	127,12	176,78	241,26	307,61	369,97	432,42
σ _{рO}	159,44	215,75	289,11	375,21	452,69	514,18	562,78
E, МэВ	2,17	2,58	3,06	3,53	4,08	4,76	5,78
σ _{рMF} (δ)	347,28	384,45	412,80	430,63(26)	443,77 (21)	453,04 (17)	459,01 (11)
σ _{рJWM} (δ)	485,47 (18)	524,76 (12)	550,15 (7,1)	562,47(3,0)	567,95(0,89)	567,51(4,5)	560,02(8,2)
σ _{рO}	590,56	598,58	592,18	579,66	562,94	543,00	517,52
E, МэВ	6,8	10,2	13,6	20,4	34	68	136
σ _{рMF} (δ)	460,19 (7,5)	453,38 (0,52)	444,15 (2,0)	429,76(3,7)	413,55 (4,1)	397,90 (2,9)	388,66 (2,6)
σ _{рJWM} (δ)	549,64 (11)	515,87 (13)	490,74 (12,7)	459,25 (11)	429,20 (8,1)	404,04 (4,5)	390,93 (3,2)
σ _{рO}	497,32	455,75	435,29	414,38	397,13	386,67	378,67

Для железа с ростом энергии погрешность вычисления сечения первичного смещения атома в основном снижается. Точность третьего борновского приближения выше, чем второго. Погрешность второго борновского приближения становится ниже 5 % начиная с энергии электронов 1,93 МэВ (при T_d = 20 эВ). Для третьего борновского приближения погрешность 3 % и ниже, начиная с 0,38 МэВ.

Для серебра погрешность второго борновского приближения в основном снижается с ростом энергии и становится меньше 6 % при энергии 3,72 МэВ (T_d = 24 эВ). Погрешность третьего борновского приближения в основном ниже, чем второго, и стано-

вится меньше 6 % при энергии 2,24 МэВ. Начиная с энергии 21 МэВ, погрешность второго борновского приближения становится меньше, чем третьего. По-видимому, объяснение состоит в том, что основной вклад в сечение смещения атома дают малые углы рассеяния вблизи нижнего предела интегрирования:

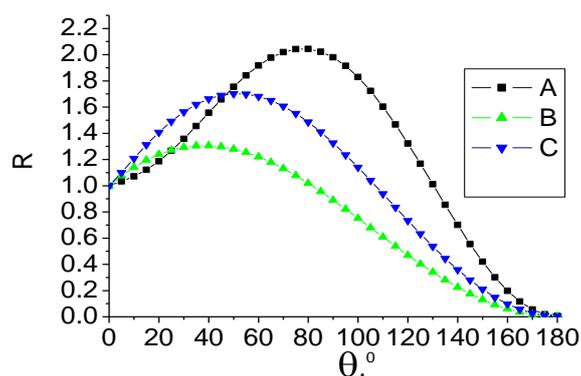
$$\theta_{\min} = \arcsin\left(\sqrt{\frac{T_d}{T_m}}\right). \quad (17)$$

С ростом энергии минимальный угол рассеяния снижается. При $E = 21$ МэВ для серебра $\theta_{\min} = 5,85^\circ$. Для этого угла относительная погрешность второго борновского приближения для дифференциального сечения рассеяния – 0,66 %, а для третьего борновского приближения – 1,64 %. Поэтому, несмотря на то, что в среднем по углам точность третьего приближения выше, его точность для сечения смещения атома оказывается ниже.

При энергии 0,854 МэВ погрешность второго и третьего борновского приближений соответственно 28 % и 12 %. Для этой энергии $\theta_{\min} = 120,36^\circ$. С угла 120° и до 180° относительная погрешность для дифференциального сечения второго и третьего борновского приближений составляет соответственно 25–27 % и 11–12 %, что согласуется с погрешностью сечения смещения атома.

Для свинца точность борновских приближений в большом диапазоне энергий очень низкая. Погрешность третьего борновского приближения меньше 10 % для энергий в интервале 3,06–5,78 МэВ и более 34 МэВ (для $T_d = 12$ эВ). Отметим, что интервал энергий неточный, т. к. для проверки мы пользуемся данными, что приведены в [23]. Погрешность второго борновского приближения менее 10 %, начиная с 6,8 МэВ.

При энергиях 10,2 МэВ и 13,6 МэВ погрешность третьего борновского приближения достигает 13 % и значительно превосходит погрешность второго борновского приближения. Минимальные углы рассеяния для этих энергий соответственно $11,55^\circ$ и $8,75^\circ$. Приведем на рисунке 8 график зависимости нормированного моттовского сечения от угла рассеяния для энергии 10,2 МэВ (для 13,6 МэВ зависимость практически идентичная, т. к. она определяется скоростью электрона, которая практически одинакова для этих энергий).



$Z = 82$. $E = 10,2$ МэВ. A – численный расчет,
B – второе борновское приближение, C – третье борновское приближение

Рисунок 8. – Нормированное моттовское сечение рассеяния

Из графика видно, что погрешность второго борновского приближения при этих углах значительно меньше, чем погрешность третьего борновского приближения.

О высокоэнергетической асимптотике различных приближений при расчете сечения смещения атомов

Как показано в [23, с. 10–11], приближение МакКинли – Фешбаха при высоких энергиях приводит для тяжелых элементов к результатам, близким к получаемым численным интегрированием точного моттовского сечения, тогда как при более низких энергиях расхождения результатов очень значительные. Аналогичные результаты были получены для платины и золота в [34]. На первый взгляд, это может показаться удивительным, т. к. даже при очень высоких энергиях сечение рассеяния во втором борновском приближении очень сильно отличается от точного моттовского сечения.

Из (13) можно получить асимптотическое выражение для сечения смещения атома при $\frac{T_d}{T_m} \ll 1$. В этом случае можно пренебречь всеми слагаемыми, кроме первого.

$$\sigma_{pMFass} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \frac{T_m}{T_d} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \frac{2E(E + 2m_e c^2)}{T_d} \frac{1}{Mc^2}.$$

Если кинетическая энергия электрона много больше энергии покоя, то можно пренебречь отличием β от единицы в знаменателе и отличием кинетической энергии от полной и слагаемым $m_e c^2$ в числителе. Тогда (13) можно еще упростить:

$$\sigma_{pMFass} = \frac{\pi Z^2 e^4}{m^2 c^4 \beta^4} (1 - \beta^2) \frac{T_m}{T_d} = \frac{2\pi Z^2 e^4}{T_d Mc^2}. \tag{18}$$

Данное выражение в высокоэнергетическом пределе для моттовского сечения получено в работе [16].

В работе [36] и нескольких других работах этих авторов утверждается, что формулу (5) можно использовать для электронов с энергией 0,9 МэВ для кремния с пороговой энергией $T_d = 24\text{--}25$ эВ и углерода с $T_d = 18$ эВ. Они обосновывают это тем, что энергия электронов значительно превышает пороговую энергию, при которой происходит смещение атомов. Энергия 0,9 МэВ менее чем в два раза превышает энергию покоя электронов. Поэтому условия применимости асимптотики (18) явно не выполняются. В [36] приводятся асимптотические значения сечения первичного смещения атома для углерода и кремния ~ 23 барн и ~ 40 барн соответственно. Расчет по (18) приводит к результатам для углерода – 23,3 барн, для кремния – 40,7 барн и 39,0 барн для $T_d = 24$ и 25 эВ соответственно. Расчет же по (3) приводит, соответственно, к результатам 22,1 барн, 28,2 барн и 26,5 барн. Отличие асимптотического результата от результата по (13) для углерода около 5 %. Для кремния 44–47 %. При этом энергия электронов в случае кремния превышает пороговую, вызывающую смещение атома в 3,5–3,6 раза. Таким образом этого явно недостаточно для применимости асимптотики (18).

Мы вычислили для ряда элементов сечение первичного смещения атома, используя второе и третье борновские приближения. Результаты приведены в таблице 12.

Также приводятся $\frac{T_m}{T_d}$, $\frac{E}{E_d}$ – отношение кинетической энергии электрона к пороговой

кинетической энергии электрона, при которой происходит смещение, результат расчета по (18) и относительная погрешность этой формулы по отношению к формуле (13) δ . Жирным выделена погрешность, превышающая 1 %. Для сравнения в таблице приводится результат численных расчетов сечения из [23].

Таблица 12. – Сечение первичного смещения атома

Z = 1, M = 1,008, T _d = 4 эВ, E = 18,3 МэВ						
σ _{рMF}	σ _{рJWM}	σ _{рMFass}	δ, %	T _m /T _d	E/E _d	σ _{р0} [1]
34,7151	34,7151	34,6883	0,077	1,88E5	9,98E3	34,74
Z = 1, M = 1,008, T _d = 96 эВ, E = 169 МэВ						
1,44541	1,44541	1,44535	0,004	6,38E5	3,99E3	1,45
Z = 2, M = 4,003, T _d = 4 эВ, E = 72,4 МэВ						
34,9444	34,9444	34,9396	0,014	7,13E5	9,99E3	34,98
Z = 2, M = 4,003, T _d = 96 эВ, E = 304 МэВ						
1,45596	1,45596	1,45582	0,010	5,18E5	1995	1,46
Z = 4, M = 9,013, T _d = 20 эВ, E = 305 МэВ						
12,4164	12,4164	12,4144	0,016	1,11E6	3,99E3	12,44
Z = 4, M = 9,013, T _d = 24 эВ, E = 362 МэВ						
10,3468	10,3468	10,3453	0,015	1,30E6	3998	10,36
Z = 6, M = 12,011, T _d = 32 эВ, E = 304 МэВ						
13,1048	13,1048	13,1002	0,035	5,18E5	1994	13,13
Z = 6, M = 12,011, T _d = 36 эВ, E = 338 МэВ						
11,6485	11,6486	11,6446	0,034	5,69E5	1999	11,67
Z = 13, M = 26,98, T _d = 12 эВ, E = 523 МэВ						
73,0389	73,0392	73,0074	0,043	1,82E6	3998	73,29
Z = 13, M = 26,98, T _d = 16 эВ, E = 168 МэВ						
54,8363	54,8379	54,7556	0,15	1,41E5	995	55,01
Z = 29, M = 63,54, T _d = 16 эВ, E = 173 МэВ						
116,273	116,304	115,700	0,49	6,36E5	500	116,66
Z = 29, M = 63,54, T _d = 20 эВ, E = 206 МэВ						
92,9919	93,0142	92,5598	0,46	72E3	499	93,3
Z = 50, M = 118,7, T _d = 12 эВ, E = 450 МэВ						
246,471	246,527	245,477	0,40	3,06E5	999	243,87
Z = 50, M = 118,7, T _d = 96 эВ, E = 184 МэВ						
31,4575	31,5911	30,6847	2,46	6,14E3	99,5	31,33
Z = 82, M = 207,21, T _d = 12 эВ, E = 340 МэВ						
382,567	383,13	378,215	1,14	1,00E5	500	366,88
Z = 82, M = 207,21, T _d = 96 эВ, E = 257 МэВ						
49,1778	49,6897	47,2769	3,87	7157	99,8	47,96
Z = 92, M = 238, T _d = 32 эВ, E = 288 МэВ						
159,475	160,359	155,436	2,53	23,5E3	200	153,07
Z = 92, M = 238, T _d = 36 эВ, E = 310 МэВ						
141,706	142,474	138,165	2,50	24,2E3	200	135,97
Z = 94, M = 242, T _d = 4 эВ, E = 166 МэВ						
1298,05	1301,7	1276,68	1,65	61,5E3	499	1228,85
Z = 94, M = 242, T _d = 96 эВ, E = 281 МэВ						
55,6319	56,3762	53,1952	4,38	7,3E3	99,7	53,66
Z = 99, M = 254, T _d = 4 эВ, E = 172 МэВ						
1372,75	1376,95	1349,21	1,71	62,9E3	497	1290,06
Z = 99, M = 254, T _d = 96 эВ, E = 289 МэВ						
58,9237	59,7914	56,2172	4,59	7,38E3	99,7	56,56

Даже при $E/E_d = 100$ погрешность при использовании упрощенной формулы (18) для тяжелых элементов превышает 4 %. При $E/E_d = 500$ погрешность для тяжелых элементов превышает 1 %. При каких конкретно энергиях можно пользоваться асимптоти-

ческим выражением для сечения смещения атома, для каждого конкретного случая надо оценивать специально.

Для ряда примеров, для которых в различных источниках используют определенные значения T_d , мы рассчитали, начиная с какой энергии электронов E отличие сечения, полученного по асимптотической формуле (18), от полученного по (13), будет менее 1 %. Результаты приведены в таблице 13. Также приводится $\frac{E}{E_d}$ – отношение

кинетической энергии электрона к пороговой кинетической энергии электрона, при которой происходит смещение. Пороговую кинетическую энергию можно найти из (2), приравняв максимальную энергию (14) к T_d :

$$E_d = \sqrt{m^2c^4 + \frac{T_d Mc^2}{2}} - mc^2. \tag{19}$$

Таблица 13. – Сечение первичного смещения атома

Z = 4, M = 9,012			T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	29[9]	71,7	168,3
T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	14 [6]	11,4	76,0	Z = 24, M = 63,54		
22[6]	2,78	33,3	16 [9]	3,393	20,1	T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d
Z = 5, M = 10,81			Z = 14, M = 28,09			22[9]	66,76	175,7
T_d , эВ	Е, МэВ	T_d , эВ	T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	24[6]	69,71	171,4
28 [6]	4,89	39,7	13	15,4	105,7	Z = 25, M = 54,94		
Z = 6, M = 12,01			24 [7]	18,7	75,6	T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d
T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	25[7]	18,92	73,9	19[6]	67,25	190,3
18 [7]	2,92	32,3	33[8]	20,6	64,1	Z = 26, M = 55,85		
33 [6]	5,61	35,8	100 [10]	11,17	15,1	T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d
Z = 8, M = 16,00			Z = 15, M = 30,97			16 [9]	65,43	209,7
T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	20[6]	73,11	196,0
16,5 [8]	3,064	28,2	12	18,36	124,1	Z = 27, M = 58,93		
100[8]	11,92	24,2	$Z = 22, M = 47,87$ [9]			T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d
Z = 12, M = 24,31			T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	22[6]	82,54	197,0
T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	19	53,05	167,6	23[9]	84,4	194,6
14	2,872	21,0	Z = 23, M = 50,94			Z = 30, M = 65,38		
25	4,834	21,3	T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d	T_d , эВ	Е, МэВ	E/E_d
Z = 13, M = 26,98			26 [6]	67,9	159,4	52 [8]	152	179,4

E/E_d меняется для рассмотренных случаев от 15,1 до 209,7. Интересен случай алюминия: при переходе от $T_d = 14$ эВ к $T_d = 16$ эВ E/E_d падает от 76 до 20,1. Это связано с тем, что при $T_d = 14$ эВ погрешность опускается ниже 1 % уже при энергии 2,98 МэВ, но уже при 7,9 МэВ становится по модулю выше 1 % и достигает максимального по модулю значения около 1,024 %. Для $T_d = 16$ эВ после 3,393 МэВ модуль погрешности остается менее 1 %.

Для рассмотренных в таблице 13 элементов второе борновское приближение дает хорошую точность, и можно полагать, что погрешность асимптотического выражения менее 1 % для второго борновского приближения обеспечивает соответствующее малое значение погрешности для точного сечения смещения. Отметим, что при энергиях более 10 МэВ уже начинает играть роль размер ядра и само использование моттовского сечения рассеяния, полученного для точечного ядра, не является точным.

Заключение

В работе рассмотрены борновские приближения для рассеяния электронов на ядрах с зарядовыми числами от 1 до 100.

Получены следующие результаты:

1. Относительная погрешность при вычислении НМС достигает по модулю 5 % для первого борновского приближения при $Z = 5$, для второго – при $Z = 18$, для третьего – при $Z = 31$ при энергии электронов 10 МэВ. До энергии 25 кэВ точность нерелятивистского приближения (резерфордовское сечение) оказывается выше точности первого и второго борновских приближений.

2. Погрешность первого борновского приближения растет с ростом скорости, погрешность второго борновского приближения слабо зависит от скорости (для больших значений Z на графике зависимости заметен максимум), а погрешность третьего борновского приближения с ростом скорости уменьшается.

3. Усредненная по углам и скоростям относительная погрешность $\langle ER \rangle$ достигает 5 % для $Z = 11$, $Z = 26$ и $Z = 42$ для первого, второго и третьего борновского приближения соответственно.

4. Показано, что при использовании коэффициентов для LQZ из [30] для $Z \leq 3$ погрешность третьего борновского приближения оказывается ниже погрешности метода LQZ.

5. Погрешность борновских приближений при расчете поправки Мотта растет с ростом Z . С ростом скорости относительная погрешность снижается. Относительная погрешность при использовании второго борновского приближения в вычислении поправки Мотта выше, чем при вычислении дифференциального сечения рассеяния.

6. Точность поправки Мотта в третьем борновском приближении остается высокой при высокой энергии.

7. Получено выражение для сечения первичного смещения атома в третьем борновском приближении через специальные функции. Для железа погрешность в вычислении первичного сечения смещения атома – менее 5 % при энергии выше 1,93 МэВ и выше 0,380 МэВ для второго и третьего борновского приближений соответственно; для серебра – при энергиях выше 3,72 и 1,41 МэВ. Показано, что в некоторых случаях погрешность третьего борновского приближения выше, чем второго. Проанализированы причины.

8. Показано, что даже при превышении пороговой энергии в 100 раз погрешность упрощенной формулы для второго борновского приближения может превышать для тяжелых элементов 4 %.

9. Для ряда примеров рассчитано, начиная с какой энергии электронов отличие сечения, полученного по асимптотической формуле, от полученного по формуле Мак-Кинли – Фешбаха, будет менее 1 %. Отношение полученной энергии электрона к пороговой кинетической энергии электрона, при которой происходит смещение, колеблется для рассмотренных случаев от 15,1 до 209,7. Это показывает, что требуется с большой осторожностью применять упрощенную формулу для расчета сечения первичного смещения атома.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rutherford, E. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom / E. Rutherford // Philosophical Magazine. Series 6. – 1911. – Vol. 21. – P. 669–688.
2. Gordon, W. Über den Stoss zweier Punktladungen nach der Wellenmechanik / W. Gordon // Z. Physik. – 1928. – 48. – P. 180–191.

3. Mott, N. F. The Solution of the Wave Equation for the Scattering of Particles by a Coulombian Centre of Force. / N. F. Mott // Proc. Roy. Soc. – 1928. – A118. – P. 542–549.
4. Mott, N. F. The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei / N. F. Mott // Proc. Roy. Soc. A. – 1929. – Vol. 124 – P. 425–442.
5. Mott, N. F. The Polarisation of Electrons by Double Scattering / N. F. Mott // Proc. Roy. Soc. A. – 1932. – Vol. 135. – P. 429–458.
6. Motz, J. W. Electron Scattering without Atomic or Nuclear Excitation / J. W. Motz, Haakon Olsen, H. V. Koch // Rev. Mod. Phys. – 1964. – Vol. 135. – P. 881–928.
7. McKinley, W. A. The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei / W. A. McKinley, Jr. H. Feshbach // Phys. Rev. – 1948. – Vol. 74, nr 12. – P. 1759–1763.
8. Johnson, W. R. Coulomb Scattering of Polarized Electrons / W. R. Johnson, T. A. Weber, C. J. Mullin // Phys. Rev. – 1961. – Vol. 121, nr 4. – P. 933–939.
9. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит. – Т. IV / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. – 1989. – 728 с.
10. Weaver, B. A. Energy loss of relativistic heavy ions in matter / B. A. Weaver, A. J. Westphal // Nucl. Instrum. Methods B. – 2002. – Vol. 187. – P. 285–301.
11. Howe, L. M. Electron displacement damage in cobalt in a high voltage electron microscope / L. M. Howe // The Philosophical Magazine: A. Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics. – 1970. – Vol. 22. – P. 965–981.
12. Bourgoin, J. C. Threshold energy for atomic displacement in diamond / J. C. Bourgoin, B. Massarani // Phys. Rev. B. – 1976. – Vol. 14, nr 8. – P. 3690–3694.
13. Рязанов, А. И. Разработка теоретических моделей и проведение численных расчетов образования первичных радиационных дефектов в материалах коллиматоров большого адронного коллайдера в ЦЕРНе при взаимодействии с ними пучков протонов с энергиями 7 ТэВ / А. И. Рязанов, Е. В. Семенов. – М. : Рос. науч. центр «Курчат. ин-т», 2007. – 50 с.
14. Nuclear and Non-ionizing Energy-Loss Of Electrons With Low And Relativistic Energies In Matherials And Space Environment [Electronic resource] / M. J Boschini [et al.] // 13th ICATPP Conference on Astroparticle, Particle, Space Physics and Detectors for Physics Applications, Como, Italy, 3–7 oct. 2011. – P. 961–982. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1111.4042v4>.
15. Jun, I. Effects of Secondary Particles on the Total Dose and the Displacement Damage in Space Proton Environments / I. Jun // Ieee Transactions on Nuclear Science. – 2001. – Vol. 48, nr 1. – P. 162–175.
16. Khandelwal, G. S. Displacement Cross Sections for Fast Electrons Incident on Gold / G. S. Khandelwal, E. Merzbacher // Phys. Rev. – 1963. – Vol. 130, nr 5. – P. 1822–1825.
17. Jackson, J. D. z^3 Corrections to Energy Loss and Range / J. D. Jackson, R. L. McCarthy // Phys. Rev. B. – 1972. – Vol. 6, nr 11. – P. 4131–4141.
18. Morgan Jr., S. H. Corrections to the Bethe-Bloch Formula for Average Ionization Energy Loss of Relativistic Heavy Nuclei Close Collisions / S. H. Morgan Jr., P. B. Eby // Nucl. Instrum. Methods. – 1973. – Vol. 106. – P. 429–435.
19. Idoeta, R. Review and calculation of Mott scattering cross section by unscreened point nuclei / R. Idoeta, F. Legarda // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. – 1992. – Vol. B71. – P. 116–125.
20. Lindhard, J. Relativistic theory of stopping for heavy ions / J. Lindhard, A. H. Sorensen // Phys. Rev. A. – 1996. – Vol. 53, nr 4. – P. 2443–2456.
21. Kats, P. B. Comparison of the Lindhard – Sorensen and Mott – Bloch corrections to the Bethe stopping formula at moderately relativistic energies / P. B. Kats, K. V. Halenka, O. O. Voskresenskaya // Phys. Part. Nuclei Lett. – 2021. – Vol. 18, nr 3. – P. 267–276.

22. Kats, P. B. Normalized Mott Cross Section in Different Approaches / P. B. Kats, K. V. Halenka, O. O. Voskresenskaya // *Phys. Part. Nuclei Lett.* – 2021. – Vol. 18, nr 3. – P. 277–283.
23. Oen, O. S. Cross sections for atomic displacements in solids by fast electrons / O. S. Oen // *Oak Ridge National Laboratory (ORNL)*. – 1973. – Report nr 4897.
24. Displacement Mechanisms in Electron-Irradiated Molybdenum / R. Rizk [et al.] // *Phys. Stat. Sol. (a)*. – 1973. – Vol. 18. – P. 241–246.
25. Swift heavy ion irradiation effects in nanocrystalline gold / Y. Chimi [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*. – 2006. – Vol. 245. – P. 171–175.
26. MeV electron irradiation induced crystallization in metallic glasses: Atomic structure, crystallization mechanism and stability of an amorphous phase under the irradiation / T. Nagase [et al.] // *Journal of Non-Crystalline Solids*. – 2012. – Vol. 358. – P. 502–518.
27. Iwamoto, Y. Implementing displacement damage calculations for electrons and gamma rays in the Particle and Heavy-Ion Transport code System / Y. Iwamoto // *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research B*. – 2018. – Vol. 419. – P. 32–37.
28. The dynamics of electron beam scattering on metal membranes: nanopore formation in metal membranes using transmission electron microscopy / Hyun-Mi Kim [et al.] // *Nano Convergence*. – 2018. – Vol. 5, nr 32. – P. 1–7.
29. Ванина, Е. А. Упорядочение радиационных дефектов в неорганических системах / Е. А. Ванина, Е. М. Веселова, В. А. Рокосей. – Благовещенск : Изд-во АмГУ, 2014. – 115 с.
30. Lijian, T. Analytic Fitting to the Mott Cross Section of Electrons / T. Lijian, H. Qing, L. Zhengming // *Radiat. Phys. Chem.* – 1995. – Vol. 45, nr 2. – P. 235–245.
31. An Expression for the Mott Cross Section of Electrons and Positrons on Nuclei with Z up to 118 / M. J. Boschini [et al.] // *Radiation Physics and Chemistry*. – 2013. – Vol. 90. – P. 39–66.
32. Выражение для мотовских поправок к формуле Бете – Блоха в терминах мотовских парциальных амплитуд / О. О. Воскресенская [и др.] // *Письма в ЖЭТФ*. – 1996. – Т. 64, вып. 9. – С. 604–607.
33. Oen, O. S. Cross section for atomic displacements in solids by fast positrons / O. S. Oen // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*. – 1988. – Vol. 33. – P. 744–747.
34. Some approaches to the calculation of the normalized Mott cross section, displacement cross section, and the Mott correction to the Bethe formula / P. B. Kats [et al.] // *Radiat. Phys. Chem.* – 2022. – Vol. 192. – Art. 109919.
35. Кац, П. Б. Расчет сечения смещения атомов, вызванного упругими столкновениями релятивистских электронов с ядрами / П. Б. Кац, А. М. Билькевич // *Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов VII междунар. науч.-практ. конф., Брест, 19 окт. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. А. А. Козинского. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2018. – С. 93–94.*
36. Similarities and distinctions of defect production by fast electron and proton irradiation: moderately doped silicon and silicon carbide of n-type / V. V. Emtsev [et al.] // *Физика и техника полупроводников*. – 2012. – Т. 46, вып. 4. – С. 473–481.

REFERENCES

1. Rutherford, E. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom / E. Rutherford // *Philosophical Magazine. Series 6*. – 1911. – Vol. 21. – P. 669–688.

2. Gordon, W. Über den Stoss zweier Punktladungen nach der Wellenmechanik / W. Gordon // *Z. Physik.* – 1928. – 48. – P. 180–191.
3. Mott, N. F. The Solution of the Wave Equation for the Scattering of Particles by a Coulombian Centre of Force. / N. F. Mott // *Proc. Roy. Soc.* – 1928. – A118. – P. 542–549.
4. Mott, N. F. The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei / N. F. Mott // *Proc. Roy. Soc. A.* – 1929. – Vol. 124 – P. 425–442.
5. Mott, N. F. The Polarisation of Electrons by Double Scattering / N. F. Mott // *Proc. Roy. Soc. A.* – 1932. – Vol. 135. – P. 429–458.
6. Motz, J. W. Electron Scattering without Atomic or Nuclear Excitation / J. W. Motz, Haakon Olsen, H. V. Koch // *Rev. Mod. Phys.* – 1964. – Vol. 135. – P. 881–928.
7. McKinley, W. A. The Coulomb Scattering of Relativistic Electrons by Nuclei / W. A. McKinley, Jr. H. Feshbach // *Phys. Rev.* – 1948. – Vol. 74, nr 12. – P. 1759–1763.
8. Johnson, W. R. Coulomb Scattering of Polarized Electrons / W. R. Johnson, T. A. Weber, C. J. Mullin // *Phys. Rev.* – 1961. – Vol. 121, nr 4. – P. 933–939.
9. Landau, L. D. Теоретическая физика : учеб. пособие : в 10 т. / L. D. Landau, Ye. M. Lifshic. – М. : Наука, gl. ried. fiz.-mat. lit. – Т. IV / V. B. Bieriestieckij, Ye. M. Lifshic, L. P. Pitajevskij. – 1989. – 728 s.
10. Weaver, B. A. Energy loss of relativistic heavy ions in matter / B. A. Weaver, A. J. Westphal // *Nucl. Instrum. Methods B.* – 2002. – Vol. 187. – P. 285–301.
11. Howe, L. M. Electron displacement damage in cobalt in a high voltage electron microscope / L. M. Howe // *The Philosophical Magazine: A. Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics.* – 1970. – Vol. 22. – P. 965–981.
12. Bourgoïn, J. C. Threshold energy for atomic displacement in diamond / J. C. Bourgoïn, B. Massarani // *Phys. Rev. B.* – 1976. – Vol. 14, nr 8. – P. 3690–3694.
13. Riazanov, A. I. Razrabotka teoreticheskikh modeliej i proviedienije chisliennykh raschiotov obrazovanija piervichnykh radiacionnykh diefektov v materialakh kollimatorov bol'shogo adronnogo kollajdera v CERNe pri vzaimodiejstvii s nimi puchkov protonov s energiyami 7 TeV / A. I. Riazanov, Ye. V. Siemionov. – М. : Ros. nauch. centr «Kurchat. in-t», 2007. – 50 s.
14. Nuclear and Non-ionizing Energy-Loss Of Electrons With Low And Relativistic Energies In Matherials And Space Environment [Electronic resource] / M. J Boschini [et al.] // 13th ICATPP Conference on Astroparticle, Particle, Space Physics and Detectors for Physics Applications, Como, Italy, 3–7 oct. 2011. – P. 961–982. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/1111.4042v4>.
15. Jun, I. Effects of Secondary Particles on the Total Dose and the Displacement Damage in Space Proton Environments / I. Jun // *Ieee Transactions on Nuclear Science.* – 2001. – Vol. 48, nr 1. – P. 162–175.
16. Khandelwal, G. S. Displacement Cross Sections for Fast Electrons Incident on Gold / G. S. Khandelwal, E. Merzbacher // *Phys. Rev.* – 1963. – Vol. 130, nr 5. – P. 1822–1825.
17. Jackson, J. D. z^3 Corrections to Energy Loss and Range / J. D. Jackson, R. L. McCarthy // *Phys. Rev. B.* – 1972. – Vol. 6, nr 11. – P. 4131–4141.
18. Morgan Jr., S. H. Corrections to the Bethe-Bloch Formula for Average Ionization Energy Loss of Relativistic Heavy Nuclei Close Collisions / S. H. Morgan Jr., P. B. Eby // *Nucl. Instrum. Methods.* – 1973. – Vol. 106. – P. 429–435.
19. Idoeta, R. Review and calculation of Mott scattering cross section by unscreened point nuclei / R. Idoeta, F. Legarda // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research.* – 1992. – Vol. B71. – P. 116–125.
20. Lindhard, J. Relativistic theory of stopping for heavy ions / J. Lindhard, A. H. Sorensen // *Phys. Rev. A.* – 1996. – Vol. 53, nr 4. – P. 2443–2456.

21. Kats, P. B. Comparison of the Lindhard – Sorensen and Mott – Bloch corrections to the Bethe stopping formula at moderately relativistic energies / P. B. Kats, K. V. Halenka, O. O. Voskresenskaya // *Phys. Part. Nuclei Lett.* – 2021. – Vol. 18, nr 3. – P. 267–276.
22. Kats, P. B. Normalized Mott Cross Section in Different Approaches / P. B. Kats, K. V. Halenka, O. O. Voskresenskaya // *Phys. Part. Nuclei Lett.* – 2021. – Vol. 18, nr 3. – P. 277–283.
23. Oen, O. S. Cross sections for atomic displacements in solids by fast electrons / O. S. Oen // *Oak Ridge National Laboratory (ORNL)*. – 1973. – Report nr 4897.
24. Displacement Mechanisms in Electron-Irradiated Molybdenum / R. Rizk [et al.] // *Phys. Stat. Sol. (a)*. – 1973. – Vol. 18. – P. 241–246.
25. Swift heavy ion irradiation effects in nanocrystalline gold / Y. Chimi [et al.] // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*. – 2006. – Vol. 245. – P. 171–175.
26. MeV electron irradiation induced crystallization in metallic glasses: Atomic structure, crystallization mechanism and stability of an amorphous phase under the irradiation / T. Nagase [et al.] // *Journal of Non-Crystalline Solids*. – 2012. – Vol. 358. – P. 502–518.
27. Iwamoto, Y. Implementing displacement damage calculations for electrons and gamma rays in the Particle and Heavy-Ion Transport code System / Y. Iwamoto // *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research B*. – 2018. – Vol. 419. – P. 32–37.
28. The dynamics of electron beam scattering on metal membranes: nanopore formation in metal membranes using transmission electron microscopy / Hyun-Mi Kim [et al.] // *Nano Convergence*. – 2018. – Vol. 5, nr 32. – P. 1–7.
29. Vanina, Ye. A. Uporiadochienne radiacionnykh diefektov v nieorganichieskikh sistiemah / Ye. A. Vanina, Ye. M. Viesielova, V. A. Rokosiej. – *Blagovieshchiensk : Izd-vo AmGU*, 2014. – 115 s.
30. Lijian, T. Analitic Fitting to the Mott Cross Section of Electrons / T. Lijian, H. Qing, L. Zhengming // *Radiat. Phys. Chem.* – 1995. – Vol. 45, nr 2. – P. 235–245.
31. An Expression for the Mott Cross Section of Electrons and Positrons on Nuclei with Z up to 118 / M. J. Boschini [et al.] // *Radiation Physics and Chemistry*. – 2013. – Vol. 90. – P. 39–66.
32. Vyrasheniye dlia motovskikh popravok k formulie Bete – Blokha v tierminakh motovskikh parcial'nykh amplitud / O. O. Voskriesienskaja [i dr.] // *Pis'ma v ZhETF*. – 1996. – T. 64, vyp. 9. – S. 604–607.
33. Oen, O. S. Cross section for atomic displacements in solids by fast positrons / O. S. Oen // *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B*. – 1988. – Vol. 33. – P. 744–747.
34. Some approaches to the calculation of the normalized Mott cross section, displacement cross section, and the Mott correction to the Bethe formula / P. B. Kats [et al.] // *Radiat. Phys. Chem.* – 2022. – Vol. 192. – Art. 109919.
35. Кас, P. B. Raschiot siechienija smieshchienija atomov, vyzvannogo uprugimi stolknovienijami rielativistskikh eliektronov s jadrami / P. B. Кас, A. M. Bil'kievich // *Vychislitel'nyje mietody, modeli i obrazovatel'nyje tiekhnologii : sb. materialov VII miezhdunar. nauch.-prakt. konf., Briest, 19 okt. 2018 g. / Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. A. A. Kozinskogo*. – Briest : BrGU im. A. S. Pushkina, 2018. – S. 93–94.
36. Similarities and distinctions of defect production by fast electron and proton irradiation: moderately doped silicon and silicon carbide of n-type / V. V. Emtsev [et al.] // *Физика и техника полупроводников*. – 2012. – Т. 46, вып. 4. – С. 473–481.

УДК 539.12

**Антон Васильевич Бурый¹, Алина Валентиновна Ивашкевич²,
Елена Михайловна Овсюк³**

^{1,2} аспирант 2-го года обучения Института физики имени Б. И. Степанова
Национальной академии наук Беларуси

³ канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. теоретической физики и прикладной информатики
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

Anton Bury¹, Alina Ivashkevich², Elena Ovsyuk³

^{1,2} 2-rd Year Post-Graduate Student of the B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus

³ Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor,

Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics

Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin

e-mail: ¹anton.buryy.97@mail.ru; ²ivashkevich.alina@yandex.by; ³e.ovsiyuk@mail.ru

РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 И КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ СО СПИНОМ 2, СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЙ СЛУЧАЙ

Паули и Фирцем было установлено существование калибровочной симметрии для безмассовой частицы со спином, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные состояния поля со спином 2 определяются произвольным векторным полем, такие решения не дают вклада в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля. Это приводит к необходимости среди всех решений для поля со спином 2 выделять калибровочные, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные. В сферически симметричном случае, чтобы описать калибровочные состояния для поля со спином 2, необходимо иметь в явном виде решения со сферической симметрией для безмассового поля со спином 1. Построение четырех независимых решений уравнения для частицы со спином 1 является основной целью данной работы.

Ключевые слова: спин 1, спин 2, теория Паули – Фирца, безмассовая частица, калибровочные степени свободы, сферическая симметрия, точные решения.

Exact Solutions of the Wave Equation for Spin 1 Massless Particle, and Gauge Solutions for Spin 2 Massless Field, Spherically Symmetric Case

It is known that for massless spin 2 fields according to Pauli – Fierz theory there exists the gauge symmetry which extends the gauge symmetry in Maxwell electrodynamics. The gauge states for spin 2 field are determined by an arbitrary 4-vector field. These states do not contribute into observable physical quantities like energy-momentum tensor. This leads to the task of finding and eliminating the gauge solutions from the complete sets of solutions for spin 2 field. Therefore, taking in mind the case of spherical symmetry, in the present paper we will construct the complete set of spherical solutions for Duffin – Kemmer – Petiau massless equation. The solving of this task is the goal of the present paper.

Key words: spin 1, spin 2, Pauli – Fierz theory, massless particle, gauge degrees of freedom, spherical symmetry, exact solutions.

Введение

Теория массивного и безмассового полей со спином 2, начиная с работ В. Паули и М. Фирца [1; 2], всегда присутствовала в литературе. Большая часть работ выполнена в рамках формализма уравнений второго порядка Паули – Фирца.

Первое систематическое исследование теории частицы со спином 2 в рамках теории релятивистских волновых уравнений первого порядка выполнено Ф. И. Федоровым [3].

Оказалось, что частица со спином 2 требует для своего описания 30-компонентной волновой функции. Позднее это описание было заново переоткрыто и дополнительно исследовано в работе Т. Редже [4].

В формализме уравнений первого порядка для описания поля используется набор из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга и тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. В его основе лежит лагранжев формализм, при этом все свойства симметрии тензоров вместе с условиями связи на них содержатся в исходном лагранжиане.

Описания массивной и безмассовой частиц существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия, которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла, она была установлена еще Паули и Фирцем [1; 2; 5–8].

Основные калибровочные скалярная и тензорная компоненты, входящие в описание безмассового поля со спином 2, определяются произвольным векторным полем $\Lambda_\alpha(x)$ следующими формулами [1; 2]:

$$\bar{\Phi} = \nabla^\alpha \Lambda_\alpha, \quad \bar{\Phi}_{(\alpha\beta)} = \nabla_\alpha \Lambda_\beta + \nabla_\beta \Lambda_\alpha - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}(x) \nabla^\sigma \Lambda_\sigma;$$

приводим их сразу в общековариантной форме. Калибровочные степени свободы не должны давать вклада в физически наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса. Это приводит к необходимости выделять в безмассовом случае калибровочные решения, оставляя только некалибровочные.

Чтобы найти калибровочные решения для поля со спином 2 в сферически симметричном случае, необходимо иметь явный вид решений со сферической симметрией для безмассового поля со спином 1. Построение 4-х независимых решений уравнения для безмассовой частицы со спином 1 является целью данной работы.

1. Безмассовая векторная частица, сферические волны

Напомним подстановку для волновой функции в безмассовом уравнении Даффина – Кеммера в базисе сферической тетрады [9; 10]:

$$x^\alpha = (t, r, \theta, \phi), \quad dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2,$$

$$e_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad e_{(3)}^\alpha = (0, 1, 0, 0), \quad e_{(1)}^\alpha = (0, 0, \frac{1}{r}, 0), \quad e_{(2)}^\alpha = (1, 0, 0, \frac{1}{r \sin \theta});$$

$$\bar{H} = e^{-i\epsilon t} h(r) D_0, \quad \bar{H}_1 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} h_0(r) D_0 \\ h_1(r) D_{-1} \\ h_2(r) D_0 \\ h_3(r) D_{+1} \end{vmatrix}, \quad \bar{H}_2 = e^{-i\epsilon t} \begin{vmatrix} E_1(r) D_{-1} \\ E_2(r) D_0 \\ E_3(r) D_{+1} \\ B_1(r) D_{+1} \\ B_2(r) D_0 \\ B_3(r) D_{-1} \end{vmatrix}, \quad (1.1)$$

где $D_\sigma = D_{-m, \sigma}^j(\phi, \theta, 0)$ – функции Вигнера; $j = 1, 2, \dots; m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$.

После разделения переменных в [10; 11] была получена система 10-ти радиальных уравнений (штрих обозначает дифференцирование по координате r):

$$-E_2' - \frac{2}{r} E_2 - \frac{1}{r\sqrt{2}} a (E_1 + E_3) = 0, \quad i\epsilon E_1 - B_3' - \frac{1}{r} B_3 + \frac{1}{r\sqrt{2}} a B_2 = 0,$$

$$i\epsilon E_2 - \frac{1}{r\sqrt{2}} a (B_1 - B_3) = 0, \quad i\epsilon E_3 + B_1' + \frac{1}{r} B_1 - \frac{1}{r\sqrt{2}} a B_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} -i\epsilon h_1 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = -E_1, \quad -i\epsilon h_2 - h'_0 = -E_2, \quad -i\epsilon h_3 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = -E_3, \\ h'_3 + \frac{1}{r} h_3 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = -B_1, \quad -\frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_3 = -B_2, \quad -h'_1 - \frac{1}{r} h_1 - \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = -B_3; \end{aligned} \quad (1.2)$$

используется обозначение $a = \sqrt{j(j+1)}$.

Известно, что на решениях можно диагонализировать оператор пространственного отражения [10]; при этом возникают два типа состояний с соответствующими ограничениями на радиальные функции:

$$\begin{aligned} P = (-1)^{j+1}, \quad h_0 = 0, h_2 = 0, h_3 = -h_1, E_3 = -E_1, E_2 = 0, B_3 = B_1; \\ P = (-1)^j, \quad h_3 = h_1, \quad B_3 = -B_1, \quad B_2 = 0, \quad E_3 = E_1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отметим, что система уравнений (1.2) должна допускать решения калибровочного типа, когда $E_i = 0, B_i = 0$; для таких решений система (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \quad 0 = 0, \\ -i\epsilon h_1 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = 0, \quad -i\epsilon h_2 - h'_0 = 0, \quad -i\epsilon h_3 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = 0, \\ h'_3 + \frac{1}{r} h_3 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = 0, \quad -\frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_1 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_3 \equiv 0, \quad -h'_1 - \frac{1}{r} h_1 - \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Убеждаемся, что при четности $P = (-1)^{j+1}$ уравнения для чисто калибровочных решений имеют только тривиальное решение: $h_0 = 0, h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$.

В случае противоположной четности $P = (-1)^j$ уравнения для калибровочных решений выглядят так:

$$P = (-1)^j, \quad -i\epsilon h_1 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_0 = 0, \quad -i\epsilon h_2 - h'_0 = 0, \quad h'_1 + \frac{1}{r} h_1 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} h_2 = 0. \quad (1.5)$$

С помощью первого и второго уравнений можно исключить переменные h_1 и h_2 , в результате приходим к тождеству

$$h_1 = -\frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon} h_0, \quad h_2 = \frac{i}{\epsilon} h'_0, \quad -\frac{d}{dr} \frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon} h_0 - \frac{1}{r} \frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon} h_0 + \frac{1}{r} \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{i}{\epsilon} \frac{d}{dr} h_0 = 0 \Rightarrow 0 \equiv 0.$$

Следовательно, функция $h_0(r)$ может быть любой $h_0(r) = \Phi(r)$; при этом сопутствующие переменные вычисляются по формулам

$$h_3 = +h_1(r) = -\frac{ia}{\sqrt{2}r\epsilon} \Phi(r), \quad h_2(r) = \frac{i}{\epsilon} \frac{d}{dr} \Phi(r). \quad (1.6)$$

Произвольность функции $h_0(r)$ указывает на калибровочный характер таких решений.

Возвратимся к общей системе уравнений (1.2) и учтем в ней ограничения по четности. В случае $P = (-1)^{j+1}$ получаем

$$0 = 0, \quad \frac{aB_2}{\sqrt{2r}} - B_1' - \frac{B_1}{r} + iE_1\epsilon = 0, \quad 0 = 0, \quad -\frac{aB_2}{\sqrt{2r}} + B_1' + \frac{B_1}{r} - iE_1\epsilon = 0,$$

$$E_1 = i\epsilon h_1, \quad 0 = 0, \quad -E_1 = -i\epsilon h_1, \quad B_1 = h_1' + \frac{h_1}{r}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{2a}}{r} h_1, \quad B_1 = h_1' + \frac{h_1}{r}; \quad (1.7)$$

т. е. имеем 4 уравнения

$$\frac{aB_2}{\sqrt{2r}} - B_1' - \frac{B_1}{r} + iE_1\epsilon = 0, \quad E_1 = i\epsilon h_1, \quad B_1 = h_1' + \frac{h_1}{r}, \quad B_2 = \frac{\sqrt{2a}}{r} h_1. \quad (1.8)$$

Исключая три переменные, находим уравнение для основной функции

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{a^2}{r^2}\right)h_1 = 0; \quad (1.9)$$

это уравнение можно привести к бесселеву виду:

$$h_1(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} F(r), \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+1/2)^2}{r^2}\right]F(r) = 0, \quad z = \epsilon r, \quad h_1(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z). \quad (1.10)$$

Будем обозначать это решение номером 1:

$$1) \quad P = (-1)^{j+1}, \quad h_0 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = -h_1 = -\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z). \quad (1.11)$$

В случае четности $P = (-1)^j$ получаем систему из 6-ти уравнений:

$$E_2' + \sqrt{2} \frac{a}{r} E_1 + 2 \frac{1}{r} E_2 = 0, \quad B_1' + \frac{B_1}{r} + iE_1\epsilon = 0, \quad -\frac{\sqrt{2a}B_1}{r} + iE_2\epsilon = 0,$$

$$E_1 = -\frac{ah_0}{\sqrt{2r}} + i\epsilon h_1, \quad E_2 = h_0' + i\epsilon h_2, \quad B_1 = -\frac{ah_2}{\sqrt{2r}} - h_1' - \frac{h_1}{r}. \quad (1.12)$$

Исключая переменные E_1, E_2 и B_1 , находим 3 уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{a^2}{r^2}\right)h_0 + i\epsilon \frac{\sqrt{2a}}{r} h_1 + i\epsilon \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)h_2 = 0,$$

$$i\epsilon \frac{\sqrt{2a}}{2r} h_0 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2\right)h_1 + \frac{\sqrt{2a}}{2r} \frac{d}{dr} h_2 = 0, \quad (1.13)$$

$$i\epsilon \frac{d}{dr} h_0 + \frac{\sqrt{2a}}{r} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)h_1 + \left(\frac{a^2}{r^2} - \epsilon^2\right)h_2 = 0.$$

С помощью третьего уравнения можно исключить переменную h_2 :

$$h_2 = \frac{i\epsilon r^2}{\epsilon^2 r^2 - a^2} \frac{d}{dr} h_0 + \frac{\sqrt{2a}r}{\epsilon^2 r^2 - a^2} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)h_1. \quad (1.14)$$

В результате первое и второе уравнения системы (1.13) приводят к одному и тому же уравнению, в которое входят переменные h_0, h_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 h_1}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} - \frac{\epsilon}{\epsilon r + a} - \frac{\epsilon}{\epsilon r - a} \right] \frac{dh_1}{dr} + \left[\epsilon^2 + \frac{2-a^2}{r^2} + \frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r + a)} - \frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r - a)} \right] h_1 + \\ & + \frac{ia}{\sqrt{2}\epsilon r} \frac{d^2 h_0}{dr^2} + \left[\frac{ia\sqrt{2}}{\epsilon r^2} + \frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r + a)} - \frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r - a)} \right] \frac{dh_0}{dr} + \left[\frac{i\epsilon a}{\sqrt{2}r} - \frac{ia^3}{\sqrt{2}\epsilon r^3} \right] h_0 = 0; \end{aligned} \quad (1.15)$$

его можно решать, накладывая два разных условия:

$$\underline{h_0 = 0}, \quad \frac{d^2 h_1}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} - \frac{\epsilon}{\epsilon r + a} - \frac{\epsilon}{\epsilon r - a} \right] \frac{dh_1}{dr} + \left[\epsilon^2 + \frac{2-a^2}{r^2} + \frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r + a)} - \frac{\epsilon^2}{a(\epsilon r - a)} \right] h_1 = 0; \quad (1.16)$$

$$\underline{h_1 = 0}, \quad \frac{ia}{\sqrt{2}\epsilon r} \frac{d^2 h_0}{dr^2} + \left[\frac{ia\sqrt{2}}{\epsilon r^2} + \frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r + a)} - \frac{i\epsilon}{\sqrt{2}(\epsilon r - a)} \right] \frac{dh_0}{dr} + \left[\frac{i\epsilon a}{\sqrt{2}r} - \frac{ia^3}{\sqrt{2}\epsilon r^3} \right] h_0 = 0. \quad (1.17)$$

Оба уравнения принадлежат классу общего уравнения Гойна, т. е. имеют 4 регулярные особые точки.

Вернемся к системе (1.13); будем искать такое преобразование над переменными, которое устраняет из уравнений мнимую единицу i и квадратные корни.

Существуют две возможности:

$$\begin{aligned} \text{I. } & h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1}H_0, \quad h_1 = i\sqrt{j}H_1, \quad h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_2, \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{j}{r^2} \right) H_0 - \epsilon \frac{j}{r} H_1 - \epsilon \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) H_2 = 0, \\ & \epsilon \frac{j+1}{r} H_0 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 \right) H_1 + \frac{j+1}{r} \frac{d}{dr} H_2 = 0, \\ & \epsilon \frac{d}{dr} H_0 + \frac{j}{r} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) H_1 + \left(\frac{j(j+1)}{r^2} - \epsilon^2 \right) H_2 = 0; \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \text{II. } & h_0 = i\sqrt{2}\sqrt{j}H_0, \quad h_1 = \sqrt{j+1}H_1, \quad h_2 = \sqrt{2}\sqrt{j}H_2, \\ & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) H_0 + \epsilon \frac{j+1}{r} H_1 + \epsilon \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) H_2 = 0, \\ & -\epsilon \frac{j}{r} H_0 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 \right) H_1 + \frac{j}{r} \frac{d}{dr} H_2 = 0, \\ & -\epsilon \frac{d}{dr} H_0 + \frac{j+1}{r} \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) H_1 + \left(\frac{j(j+1)}{r^2} - \epsilon^2 \right) H_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Рассмотрим случай I. Подставив выражения для H_2 в первое и второе уравнения из (1.18), приходим к двум одинаковым уравнениям следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 H_1}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} - \frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] \frac{dH_1}{dr} + \left[\epsilon^2 + \frac{2-j(j+1)}{r^2} - \frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] H_1 + \\ & + \frac{j+1}{\epsilon r} \frac{d^2 H_0}{dr^2} + \left[\frac{2(j+1)}{\epsilon r^2} - \frac{2\epsilon(j+1)}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] \frac{dH_0}{dr} + \left[\frac{\epsilon(j+1)}{r} - \frac{(j+1)^2 j}{r^3 \epsilon} \right] H_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Это уравнение можно решать так. Пусть $H_0(r) = 0$, тогда

$$\frac{d^2 H_1}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} - \frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] \frac{dH_1}{dr} + \left[\epsilon^2 + \frac{2-j(j+1)}{r^2} - \frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] H_1 = 0; \quad (1.21)$$

Пусть $H_1(r) = 0$, тогда

$$\frac{d^2 H_0}{dr^2} + \left(\frac{2}{r} - \frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right) \frac{dH_0}{dr} + \left(\epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) H_0 = 0. \quad (1.22)$$

Эти уравнения принадлежат классу общего уравнения Гойна.

Аналогично рассматриваем случай II. Подставим выражения для H_2 в первое и второе уравнения из (18), в результате приходим к двум одинаковым уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_1}{dr^2} + \left[\frac{4}{r} - \frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] \frac{dH_1}{dr} + \left[\epsilon^2 + \frac{2-j(j+1)}{r^2} - \frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] H_1 - \\ - \frac{j}{\epsilon r} \frac{d^2 H_0}{dr^2} + \left[-\frac{2j}{\epsilon r^2} + \frac{2\epsilon j}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right] \frac{dH_0}{dr} + \left[-\frac{\epsilon j}{r} + \frac{j^2(j+1)}{r^3 \epsilon} \right] H_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Это уравнение может быть решено так. Пусть $H_0(r) = 0$, тогда

$$\frac{d^2 H_1}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} - \frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right) \frac{dH_1}{dr} + \left(\epsilon^2 + \frac{2-j(j+1)}{r^2} - \frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right) H_1 = 0; \quad (1.24)$$

Пусть $H_1(r) = 0$, тогда

$$\frac{d^2}{dr^2} H_0 + \left(\frac{2}{r} - \frac{2\epsilon^2 r}{\epsilon^2 r^2 - j(j+1)} \right) \frac{d}{dr} H_0 + \left(\epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) H_0 = 0. \quad (1.25)$$

Эти уравнения также принадлежат классу общего уравнения Гойна.

Ниже излагается другой способ анализа, приводящий к возможности построить решения в функциях Бесселя. Для этого нужно будет накладывать условие Лоренца.

2. Условие Лоренца

Условие Лоренца должно быть пересчитано к тетрадному представлению

$$\nabla_\alpha \Psi^\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha e_{(a)}^\alpha \Psi^a = 0, \quad (\nabla_\alpha e_{(a)}^\alpha) \Psi^a + e_{(a)}^\alpha \partial_\alpha \Psi^a = 0; \quad (2.1)$$

в (2.1) предполагается использование декартового базиса в представлении компонент векторной полевой функции. С учетом известного равенства

$$\nabla_\alpha e_{(a)}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} e_{(a)}^\alpha$$

находим

$$\nabla_\alpha e_{(0)}^\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha e_{(1)}^\alpha = \frac{\cos \theta}{r \sin \theta}, \quad \nabla_\alpha e_{(2)}^\alpha = 0, \quad \nabla_\alpha e_{(a)}^\alpha = \frac{2}{r}.$$

Следовательно, условие Лоренца примет вид

$$\partial_t \Phi_0 - \frac{1}{r} \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \Psi_1 - \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \Psi_2 - \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \Phi_3 = 0. \quad (2.2)$$

При разделении переменных в уравнении Даффина – Кеммера использовался циклический базис. Нужное преобразование над 4-векторной составляющей $\bar{H}_1 = UH_1$ задается матрицей U :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

В соответствии с этим функции в (2.2) выражаются через циклические компоненты так:

$$\Psi_0 = \bar{\Psi}_0, \quad \Psi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3, \quad \Psi_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3, \quad \Psi_3 = \bar{\Psi}_2. \quad (2.4)$$

В результате условие Лоренца (2.2) примет вид

$$\partial_t \bar{\Psi}_0 - \frac{1}{r}(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta})(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3) - \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi (-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\Psi}_3) - (\partial_r + \frac{2}{r})\bar{\Psi}_2 = 0. \quad (2.5)$$

Подстановка для векторной части волновой функции в циклическом базисе такая:

$$\bar{H}_1 = e^{-i\epsilon t} \begin{pmatrix} h_0(r)D_0 \\ h_1(r)D_{-1} \\ h_2(r)D_0 \\ h_3(r)D_{+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_0 \\ \bar{\Psi}_1 \\ \bar{\Psi}_2 \\ \bar{\Psi}_3 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

для входящих сюда функций Вигнера выполняются рекуррентные соотношения [11]:

$$\begin{aligned} \partial_\phi D_\sigma &= imD_\sigma, \quad \partial_\theta D_0 = +\frac{a}{2}D_{-1} - \frac{a}{2}D_{+1}, \quad \frac{-m}{\sin \theta} D_0 = -\frac{a}{2}D_{-1} - \frac{a}{2}D_{+1}, \\ \partial_\theta D_{+1} &= +\frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_{+2}, \quad \frac{-m - \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1} = -\frac{a}{2}D_0 - \frac{b}{2}D_{+2}, \\ \partial_\theta D_{-1} &= +\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0, \quad \frac{-m + \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1} = -\frac{b}{2}D_{-2} - \frac{a}{2}D_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $a = \sqrt{j(j+1)}$, $b = \sqrt{(j-1)(j+2)}$. С учетом этого из равенства (2.5) получаем

$$\begin{aligned} & -i\epsilon h_0 D_0 + \frac{1}{\sqrt{2}r} (\partial_\theta D_{-1} + \frac{-m + \cos \theta}{\sin \theta} D_{-1}) h_1 + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}r} (-\partial_\theta D_{+1} + \frac{-m - \cos \theta}{\sin \theta} D_{+1}) h_3 - (\partial_r + \frac{2}{r}) h_2 D_0 = 0. \end{aligned}$$

Учтем в последнем соотношении рекуррентные формулы из (2.7):

$$-i\epsilon h_0 D_0 + \frac{1}{\sqrt{2}r} ((\frac{b}{2} D_{-2} - \frac{a}{2} D_0) + (-\frac{b}{2} D_{-2} - \frac{a}{2} D_0)) h_1 +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2r}}\left(-\frac{a}{2}D_0-\frac{b}{2}D_{+2}\right)+\left(-\frac{a}{2}D_0-\frac{b}{2}D_{+2}\right)h_3-\left(\partial_r+\frac{2}{r}\right)h_2D_0=0,$$

откуда после приведения подобных находим радиальное представление для условия Лоренца

$$-i\epsilon h_0-\frac{a}{\sqrt{2r}}h_1-\frac{a}{\sqrt{2r}}h_3-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)h_2=0.$$

Ограничения по четности дают

$$P=(-1)^{j+1}, \quad h_0=0, h_2=0, h_3=-h_1 \Rightarrow 0 \equiv 0; \quad (2.8)$$

$$P=(-1)^j, \quad h_3=+h_1 \Rightarrow -i\epsilon h_0-\frac{2a}{\sqrt{2r}}h_1-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)h_2=0. \quad (2.9)$$

Решение, соответствующее решению (2.8), было получено выше. Условие (2.9) позволяет из системы трех уравнений (1.13) исключить переменную h_0 :

$$-i\epsilon h_0=\frac{2a}{\sqrt{2r}}h_1+\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)h_2.$$

Рассматриваем по отдельности подстановки I и II:

$$\begin{aligned} \text{I. } h_0 &= \sqrt{2}\sqrt{j+1}H_0, \quad h_1 = i\sqrt{j}H_1, \quad h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_2, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_0 - \epsilon\frac{j}{r}H_1 - \epsilon\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)H_2 &= 0, \\ \epsilon\frac{j+1}{r}H_0 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2\right)H_1 + \frac{j+1}{r}\frac{d}{dr}H_2 &= 0, \\ \epsilon\frac{d}{dr}H_0 + \frac{j}{r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + \left(\frac{j(j+1)}{r^2} - \epsilon^2\right)H_2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\text{условие Лоренца} \quad -\epsilon H_0 = \frac{j}{r}H_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)H_2;$$

$$\begin{aligned} \text{II. } h_0 &= i\sqrt{2}\sqrt{j}H_0, \quad h_1 = \sqrt{j+1}H_1, \quad h_2 = \sqrt{2}\sqrt{j}H_2, \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{a^2}{r^2}\right)H_0 + \epsilon\frac{j+1}{r}H_1 + \epsilon\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)H_2 &= 0, \\ -\epsilon\frac{j}{r}H_0 + \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \epsilon^2\right)H_1 + \frac{j}{r}\frac{d}{dr}H_2 &= 0, \\ -\epsilon\frac{d}{dr}H_0 + \frac{j+1}{r}\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)H_1 + \left(\frac{j(j+1)}{r^2} - \epsilon^2\right)H_2 &= 0, \\ \text{условие Лоренца} \quad \epsilon H_0 &= \frac{j+1}{r}H_1 + \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r}\right)H_2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае I первое и второе уравнения системы (2.10) после исключения функции H_2 с помощью третьего уравнения приводят к одному и тому же уравнению.

Из условия Лоренца выразим переменную H_0 и подставим в третье уравнения системы (2.10), в результате получим

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_1 = \frac{2(j+1)}{r^2}H_2, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right)H_2 = \frac{2j}{r^2}H_1 + \frac{2}{r^2}H_2, \quad (2.12)$$

или в матричной форме

$$\Delta \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix} = \frac{2}{r^2} \begin{vmatrix} 0 & j+1 \\ j & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}.$$

Диагонализируем матрицу смешивания:

$$\bar{H} = T_1 H, \quad T_1 \Delta T_1^{-1} \bar{H} = T_1 A T_1^{-1} \bar{H}, \quad T_1 A T_1^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad H = T^{-1} \bar{H},$$

$$T_1^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \\ -\frac{j}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \end{vmatrix}, \quad T_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & j \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j & 0 \\ 0 & j+1 \end{vmatrix}.$$

В результате система (2.12) преобразуется в следующую:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j-1)j}{r^2}\right)\bar{H}_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2}\right)\bar{H}_2 = 0; \quad (2.13)$$

простой подстановкой эти уравнения приводятся к бесселевому виду

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(r) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \bar{F}_1(r), \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j-1/2)^2}{r^2}\right)\bar{F}_1 = 0, \\ \bar{H}_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \bar{F}_2(r), \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+3/2)^2}{r^2}\right)\bar{F}_2 = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\text{I. } z = \epsilon r, \quad \bar{H}_1(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}(z), \quad \bar{H}_2(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}(z). \quad (2.14)$$

Исходные функции задаются соотношениями

$$\text{I. } H_1 = \frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_1 + \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2, \quad H_2 = -\frac{j}{2j+1} \bar{H}_1 + \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2.$$

Рассмотрим случай II. Первое и второе уравнения системы (2.11) после исключения функции H_2 с помощью третьего уравнения приводят к одному и тому же уравнению, одно из них можем отбросить, например, первое.

Из условия Лоренца выразим переменную H_0 и подставим в третье уравнение системы (2.11), в результате получим

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]H_1 = \frac{2j}{r^2}H_2, \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]H_2 = \frac{2(j+1)}{r^2}H_1 + \frac{2}{r^2}H_2,$$

или в матричной форме

$$\Delta \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix} = \frac{2}{r^2} \begin{vmatrix} 0 & j \\ j+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}.$$

Дїаганалїзуем матрыцу смешивания

$$\begin{vmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \end{vmatrix} = T_2 \begin{vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{vmatrix}, \quad T_2 A T_2^{-1} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -j & 0 \\ 0 & j+1 \end{vmatrix}, \quad T_2^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \\ -\frac{j+1}{2j+1} & \frac{j+1}{2j+1} \end{vmatrix}, \quad T_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{j}{j+1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результате получаем два раздельных уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j-1)j}{r^2} \right) \bar{H}_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} \right) \bar{H}_2 = 0. \quad (2.15)$$

Простой подстановкой они приводятся к бесселевому виду

$$\begin{aligned} \bar{H}_1(r) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \bar{F}_1(r), \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j-1/2)^2}{r^2} \right) \bar{F}_1 = 0, \\ \bar{H}_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \bar{F}_2(r), \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+3/2)^2}{r^2} \right) \bar{F}_2 = 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$z = \epsilon r, \quad \bar{H}_1(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}(z), \quad \bar{H}_2(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}(z). \quad (2.16)$$

Исходные функции строятся так:

$$\text{II. } H_1 = \frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_1 + \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2, \quad H_2 = -\frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_1 + \frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_2.$$

Таким образом, в двух случаях получаем следующие решения:

$$\begin{aligned} \text{I. } H_1' &= \frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_1' + \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2', \quad H_2' = -\frac{j}{2j+1} \bar{H}_1' + \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2'; \\ \text{II. } H_1'' &= \frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_1'' + \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2'', \quad H_2'' = -\frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_1'' + \frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_2'', \end{aligned}$$

где

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}(z), \quad \bar{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}(z).$$

Легко убедиться, что два решения I и II связаны линейным преобразованием:

$$H'' = T_2^{-1} T_1 H' = \begin{vmatrix} \frac{j+1}{2j+1} & \frac{j}{2j+1} \\ -\frac{j+1}{2j+1} & \frac{j+1}{2j+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ j+1 & j \end{vmatrix} H' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j+1 \end{vmatrix} H'. \quad (2.17)$$

Следовательно, мы можем использовать только один случай: либо I, либо II (для определенности будем использовать вариант I). Поскольку уравнения для функций \bar{H}_1 и \bar{H}_2 не связаны между собой, то два линейно независимых решения можно выбрать так (нумеруем их как 2 и 3):

$$2) \quad \bar{H}_1 = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}, \quad H_1 = \frac{j+1}{2j+1} \bar{H}_1, \quad H_2 = -\frac{j}{2j+1} \bar{H}_1, \quad H_0 = -\frac{j}{z} H_1 - \left(\frac{d}{dz} + \frac{2}{z}\right) H_2; \quad (2.18)$$

$$3) \quad \bar{H}_2 = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}, \quad H_1 = \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2, \quad H_2 = \frac{j}{2j+1} \bar{H}_2, \quad H_0 = -\frac{j}{z} H_1 - \left(\frac{d}{dz} + \frac{2}{z}\right) H_2. \quad (2.19)$$

Преобразуем эти решения к переменным h_i :

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1}H_0, \quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j}H_1, \quad h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1}H_2;$$

в результате получаем

$$2) \quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j} \frac{j+1}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}, \quad h_2 = -i\sqrt{2}\sqrt{j+1} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1} \left(-\frac{j}{z} \frac{j+1}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} + \frac{j}{2j+1} \left(\frac{d}{dz} + \frac{2}{z}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} \right); \quad (2.20)$$

$$3) \quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}, \quad h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1} \left(-\frac{j}{z} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} - \frac{j}{2j+1} \left(\frac{d}{dz} + \frac{2}{z}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} \right). \quad (2.21)$$

3. Градиентное решение

Пока для безмассового поля со спином 1 найдены только три решения. Известно, что должно существовать еще одно решение градиентного типа, найдем его. Исходим из определения

$$\Psi_\alpha(x) = \partial_\alpha \Lambda(x), \quad \Lambda(x) = e^{-ict} D_0 f(r), \quad D_0 = D_{-m,0}^j(\theta, \phi, 0). \quad (3.1)$$

Тетрадное представление этого 4-вектора $\Psi_a(x) = e_{(a)}^\beta \Psi_\beta$ такое:

$$\Psi_{(0)} = e_{(0)}^\beta \Psi_\beta = -i\epsilon e^{-ict} D_0 f, \quad \Psi_{(3)} = e_{(3)}^\beta \Psi_\beta = e^{-ict} \frac{df}{dr} D_0,$$

$$\Psi_{(1)} = e_{(1)}^\beta \Psi_\beta = e^{-ict} \frac{f}{r} \partial_\theta D_0, \quad \Psi_{(2)} = e_{(2)}^\beta \Psi_\beta = e^{-ict} \frac{f}{r} \frac{im}{\sin \theta} D_0.$$

Преобразуя вектор $\Psi^{(a)}$ к циклическим компонентам

$$\Psi_0 = \bar{\Psi}_0, \quad \Psi_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_3, \quad \Psi_2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_1 - \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_3, \quad \Psi_3 = \bar{\Psi}_2,$$

получаем

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{(0)} &= -i\epsilon e^{-ict} D_0 f, \quad \bar{\Psi}_2 = e^{-ict} \frac{df}{dr} D_0, \\ \bar{\Psi}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ict} \frac{f}{r} \left(\partial_\theta + \frac{m}{\sin\theta}\right) D_0, \quad \bar{\Psi}_3 = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ict} \frac{f}{r} \left(\partial_\theta - \frac{m}{\sin\theta}\right) D_0.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Отсюда, учитывая рекуррентные соотношения

$$\partial_\theta D_0 = +\frac{a}{2} D_{-1} - \frac{a}{2} D_{+1}, \quad \frac{-m}{\sin\theta} D_0 = -\frac{a}{2} D_{-1} - \frac{a}{2} D_{+1},$$

находим

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{(0)} &= -i\epsilon e^{-ict} D_0 f = e^{-ict} \bar{h}_0 D_0, \quad \bar{\Psi}_2 = e^{-ict} \frac{df}{dr} D_0 = e^{-ict} \bar{h}_2 D_0, \\ \bar{\Psi}_1 &= -\frac{a}{\sqrt{2}} e^{-ict} \frac{1}{r} f D_{-1} = e^{-ict} \bar{h}_1 D_{-1}, \quad \bar{\Psi}_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ict} \frac{a}{r} f D_{+1} = e^{-ict} \bar{h}_3 D_{+1}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Таким образом, получены выражения для радиальных компонент четвертого решения:

$$\bar{h}_0 = -i\epsilon f, \quad \bar{h}_2 = \frac{df}{dr}, \quad \bar{h}_1 = -\frac{\sqrt{j(j+1)/2}}{r} f, \quad \bar{h}_3 = -\frac{\sqrt{j(j+1)/2}}{r} f. \quad (3.4)$$

Принимая во внимание ограничения по четности, заключаем, что построенное решение (3.4) имеет четность $P = (-1)^j$:

$$\bar{h}_0(r) = -i\epsilon f(r), \quad \bar{h}_2(r) = \frac{d}{dr} f(r), \quad \bar{h}_3(r) = +\bar{h}_1(r) = -\frac{\sqrt{j(j+1)/2}}{r} f(r). \quad (3.5)$$

Будем предполагать, что скалярная функция $\Lambda(x)$ является решением уравнения Клейна – Фока:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \Lambda(x) = 0, \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \bar{l}^2 \right] \Lambda(x) = 0;$$

с учетом подстановки для $\Lambda(x) = e^{-ict} f(r) D_{-m,0}^j(\phi, \theta, 0)$ получаем радиальное уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] f(r) = 0. \quad (3.6)$$

Его можно привести к бesselу типу в переменной $z = \epsilon r$:

$$f(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} F(r), \quad \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \epsilon^2 - \frac{(j+1/2)^2}{r^2} \right] F(r) = 0, \quad f(r) = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z); \quad (3.7)$$

таким образом, четвертое решение описывается соотношениями

$$4) \quad h_3 = h_1 = -\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}} \frac{1}{z\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_0 = -\frac{i}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_2 = \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}. \quad (3.8)$$

4. Сводка результатов

Соберем все 4 решения вместе:

$$1) \quad h_0 = 0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = -h_1 = -\frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}(z);$$

$$2) \quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j} \frac{j+1}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} = A_1 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$

$$h_2 = -i\sqrt{2}\sqrt{j+1} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} = A_2 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1} \left(-\frac{j}{z} \frac{j+1}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} + \frac{j}{2j+1} \left(\frac{d}{dz} + \frac{2}{z} \right) \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2} \right) \Rightarrow$$

$$h_0 = -\sqrt{2}\sqrt{j+1} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} = A_0 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2};$$

$$3) \quad h_3 = +h_1 = i\sqrt{j} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} = A_1 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$

$$h_2 = i\sqrt{2}\sqrt{j+1} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} = A_2 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2},$$

$$h_0 = \sqrt{2}\sqrt{j+1} \left(-\frac{j}{z} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} - \frac{j}{2j+1} \left(\frac{d}{dz} + \frac{2}{z} \right) \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2} \right) \Rightarrow$$

$$h_0 = -\sqrt{2}\sqrt{j+1} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2} = A_0 \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2};$$

$$4) \quad h_3 = h_1 = -\frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}} \frac{1}{z\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_0 = -\frac{i}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_2 = \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}.$$

Эти решения можно проверить подстановкой в исходную систему (1.2), исключая в ней переменные E_i, B_i . Для решения 1 получаем тождества.

Для решения 2

$$2) \quad h_0 = \frac{B_0}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_1 = h_3 = \frac{B_1}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}, \quad h_2 = \frac{B_2}{\sqrt{z}} J_{j-1/2}$$

получаем

$$B_0 = \frac{i\sqrt{2}j}{\sqrt{j(j+1)}} B_1, \quad B_2 = -\frac{\sqrt{2}j}{\sqrt{j(j+1)}} B_1.$$

Для решения 3

$$3) \quad h_0 = \frac{B_0}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}, \quad h_1 = h_3 = \frac{B_1}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}, \quad h_2 = \frac{B_2}{\sqrt{z}} J_{j+3/2}$$

получаем

$$B_0 = \frac{i(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}}B_1, \quad B_2 = \frac{(j+1)\sqrt{2}}{\sqrt{j(j+1)}}B_1.$$

Для решения 4 получаем тождества. В случае 2 убеждаемся, что оба ответа приводят к одному и тому же результату

$$2) \quad \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = +i\sqrt{2} \frac{j}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = -\sqrt{2} \frac{j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

В случае 3 убеждаемся, что оба ответа также приводят к одному и тому же результату

$$3) \quad \frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1} = +i\sqrt{2} \frac{j+1}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \sqrt{2} \frac{j+1}{\sqrt{j(j+1)}}.$$

Следует специально отметить, что из решений типа 2 и 3 можно образовать линейную комбинацию, которая соответствует второму калибровочному решению (согласно общей теории, из четырех решений два должны быть калибровочными, а два – физически наблюдаемыми)

$$\frac{2j+1}{j+1}h_1^{(2)} + \frac{2j+1}{j}h_1^{(3)} = i\sqrt{j} \frac{1}{\sqrt{z}} (J_{j-1/2} + J_{j+3/2}) = i\sqrt{j} \frac{1}{\sqrt{z}} (2j+1) \frac{1}{z} J_{j+1/2};$$

отсюда следует

$$\frac{1}{j+1}h_1^{(2)} + \frac{1}{j}h_1^{(3)} = i\sqrt{j} \frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2};$$

с учетом равенства

$$-\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{j+1}} \frac{2j+1}{j} h_0 = \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}$$

находим

$$\frac{1}{j(j+1)} (jh_1^{(2)} + (j+1)h_1^{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{j(j+1)}} (2j+1) \left(-i \frac{1}{z} h_0\right).$$

Таким образом, найденная комбинация соответствует второму калибровочному решению

$$h_1^{gauge} \equiv \frac{j}{2j+1}h_1^{(2)} + \frac{j+1}{2j+1}h_1^{(3)} = -i \frac{\sqrt{j(j+1)}}{\sqrt{2}} \frac{1}{z} h_0^{gauge},$$

где

$$h_0^{gauge} = -\sqrt{2}\sqrt{j+1} \frac{j}{2j+1} \frac{1}{\sqrt{z}} J_{j+1/2}.$$

Построенные 4 независимых решения для безмассовой частицы со спином 1 позволяют найти явные выражения для четырех калибровочных решений системы уравнений Паули – Фирца для безмассовой частицы со спином 2; этот вопрос будет рассмотрен в отдельной работе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // *Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат.* – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.
4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // *Nuovo Cimento.* – 1957. – Vol. 5. – Nr 2. – P. 325–326.
5. Об уравнениях для частицы со спином 2 во внешних электромагнитных и гравитационных полях / А. А. Богуш [и др.] // *Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2003. – № 1. – С. 62–67.
6. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2003. – Vol. 6, nr 3. – P. 772–778.
7. Анализ вклада калибровочных степеней свободы в структуру тензора энергии-импульса безмассового поля со спином 2 / В. В. Кисель [и др.] // *Вес. НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук.* – 2015. – № 2. – С. 58–63.
8. Нерелятивистский предел в теории частицы со спином 2 / В. В. Кисель [и др.] // *Докл. НАН Беларусі.* – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 21–27.
9. Редьков, В. М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2009. – 486 с.
10. Редьков, В. М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск : Беларус. навука, 2011. – 339 с.
11. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука. – 1975. – 439 с.

REFERENCES

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. Fiodorov, F. I. K teorii chasticy so spinom 2 / F. I. Fiodorov // *Uchion. zap. BGU. Sier. fiz.-mat.* – 1951. – Vyp. 12. – S. 156–173.
4. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // *Nuovo Cimento.* – 1957. – Vol. 5. – Nr 2. – P. 325–326.
5. Ob uravnenijakh dla chasticy so spinom 2 vo vnieshnikh eliektromagnitnykh i gravitacionnykh poliakh / A. A. Bogush [i dr.] // *Vies. NAN Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk.* – 2003. – № 1. – S. 62–67.
6. Red'kov, V. M. Graviton in a curved spacetime background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems.* – 2003. – Vol. 6, nr 3. – P. 772–778.

7. Analiz vkladu kalibrovochnykh stiepieniej svobody v strukturu tenzora energii-impul'sa biezmassovogo polia so spinom 2 / V. V. Kisiel' [i dr.] // Vies. NAN Bielarusi. Sier. fiz.-mat. navuk. – 2015. – № 2. – S. 58–63.

11. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л. : Наука. – 1975.

8. Nierelativistskij priediel v teorii chasticy so spinom 2 / V. V. Kisiel' [i dr.] // Dokl. NAN Bielarusi. – 2015. – Т. 59, № 3. – S. 21–27.

9. Ried'kov, V. M. Polia chastic v rimanovom prostranstvie i gruppa Lorentsa / V. M. Ried'kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2009. – 486 s.

10. Ried'kov V. M. Tietradnyj formalizm, sfierichieskaja simmetrija i bazis Shredingera / V. M. Ried'kov. – Minsk : Bielarus. navuka, 2011. – 339 s.

11. Varshalovich, D. A. Kvantovaja teoriya uglovogo momenta / D. A. Varshalovich, A. N. Moskaliou, V. K. Khersonskij. – L. : Nauka. – 1975. – 439 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 21.10.2022

УДК 539.12...17; 539.128.2

*Alexander Garkun¹, Elena Kokoulina², Michael Levchuk³, Maxim Nevmerzhitky⁴,
Alexei Shaplov⁵, Denis Shohonov⁶, Roman Shulyakovsky⁷*

¹*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Vice-Director of IAP of the NAS of Belarus*

²*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent,
Head of Sector at Joint Institute for Nuclear Research*

³*Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of Institute of Physics
of the NAS of Belarus, Chief Researcher of IAP of the NAS of Belarus*

⁴*Researcher of IAP of the NAS of Belarus*

⁵*Researcher of IAP of the NAS of Belarus*

⁶*Postgraduate Student of Institute of Physics of the NAS of Belarus*

⁷*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent,*

Lead Researcher of IAP of the NAS of Belarus, Lead Researcher of Institute for Nuclear Problems of BSU

Александр Сергеевич Гаркун¹, Елена Сергеевна Кокорулина², Михаил Иванович Левчук³,

Максим Николаевич Невмержицкий⁴, Алексей Олегович Шаплов⁵,

Денис Александрович Шохонов⁶, Роман Георгиевич Шуляковский⁷

¹*канд. физ.-мат. наук, зам. директора ИПФ НАН Беларуси*

²*д-р физ.-мат. наук, доц.,*

начальник сектора Объединенного института ядерных исследований

³*д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник Института физики НАН Беларуси,*

гл. науч. сотрудник ИПФ Беларуси

⁴*науч. сотрудник ИПФ НАН Беларуси*

⁵*науч. сотрудник ИПФ НАН Беларуси*

⁶*аспирант Института физики НАН Беларуси*

⁷*канд. физ.-мат. наук, доц., ведущий науч. сотрудник ИПФ НАН Беларуси,*

ведущий науч. сотрудник Института ядерных проблем БГУ

e-mail: shulyakovsky@iaph.bas-net.by

Simple Instanton Solutions in Quantum Mechanics and Quantum Field Theory

The simplest instanton solutions appearing in one-dimensional quantum mechanical tasks with rectangular and linear potentials are considered. Using the method of Feynman functional integrals in imaginary time, the well-known expressions for the probabilities of sub-barrier tunnelling are reproduced with pre-exponential accuracy. An instanton solution is obtained for two-dimensional scalar field theory (in a limited spatial region) with a classically degenerated vacuum states; the probability of a tunnel transition is calculated in WKB approximation. A soliton solution is obtained for three-dimensional scalar field theory in space with cylinder geometry.

Key words: *quantum tunneling, potential barrier, cold electron emission, scalar field theory with double-well potential, instanton, soliton.*

ПРОСТЕЙШИЕ ИНСТАНТОННЫЕ РЕШЕНИЯ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Рассмотрены простейшие инстантонные решения, возникающие в одномерных квантово-механических задачах с прямоугольным и линейным потенциалами. Методом фейнмановских функциональных интегралов во мнимом времени воспроизведены известные выражения для вероятностей подбарьерного туннелирования с предэкспоненциальной точностью. Получено инстантонное решение для двумерной скалярной полевой теории (в ограниченной пространственной области) с классически вырожденными вакуумными состояниями; вычислена вероятность туннельного перехода в ВКБ-приближении. Получено солитонное решение для трехмерной скалярной полевой теории в пространстве с геометрией цилиндра.

Ключевые слова: *квантовое туннелирование, потенциальный барьер, холодная электронная эмиссия, скалярная полевая теория с двумерным потенциалом, инстантон, солитон.*

Introduction

Instantons [1] are non-trivial solutions of *classical* Lagrange-Euler equations with a finite action in the Euclidean space, or, what is the same, in imaginary time [2]. Instantons acquire physical meaning in the *quantum* version of the theory. Here, using the Feynman

formalism of path integrals [3], instantons describe quantum tunnelling between classically degenerated vacuum states [4]. The term «instanton» (from the English «instant»/«instant») was proposed by G. t'Hooft [5; 6] (in the original work of A. M. Polyakov et al. [1], such solutions were called «pseudoparticles»), since in physically interesting theories (such as quantum chromodynamics or Glashow – Weinberg – Salam theory) such tunnelling, if it occurs, occurs very rapidly («instantly»), since the potential barrier turns out to be large and, according to the Heisenberg uncertainty relation $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, the tunnelling time Δt turns out to be very small. This leads to an extremely low probability of instanton processes: for strong interactions this quantity is of the order of $\exp(-4\pi/\alpha_s) \sim 10^{-7}$, where $\alpha_s(0,6 \text{ GeV}) \approx 0,8$ at $\Lambda_{QCD} = 200 \text{ MeV}$. The scale of the running constant of strong interactions corresponds to the characteristic size of QCD instantons ($\sim 1/3 \text{ Fm}$) obtained from phenomenological considerations (see, for example, [7]) and analysis of the Shifman – Weinstein – Zakharov sum rule [8]. For weak interactions, the situation is even more pessimistic: the corresponding probability is proportional to the suppressing exponent $\exp(-4\pi/\alpha_w) \sim 10^{-170}$, where $\alpha_w = g^2/4\pi = \alpha/\sin^2\theta_w \approx 0,032$. Such smallness can be compensated in processes at high energies or high temperatures, for example, in the processes of collision of hadrons at LHC or heavy ions with the formation of a quark-gluon plasma at RHIC facility [9; 10]. Experimental confirmation of the existence of instanton processes will serve as an important confirmation of the correctness of the Standard Model and our knowledge of the world of elementary particles and fundamental interactions, along with the experimental discovery of massive vector bosons, top quark and Higgs boson. It is important to note that the existence of instanton effects makes it possible to explain at the phenomenological level the problem of the baryon asymmetry of the visible part of the Universe [11] and the problem of spontaneous violation of the chiral invariance of strong interactions [12].

Traditionally, an introduction to instanton physics begins with a consideration of one-dimensional *quantum-mechanical* tasks with double-well or periodic potentials, as well as task of the motion of a particle on a circle [4]. At the same time, more obvious and traditional for student courses in quantum mechanics, tasks of passing a rectangular potential barrier and task of cold emission of electrons from a metal are ignored. In this paper, this methodological gap is filled (Sections 1, 2). An important application of the instanton method is the study of the chaotic behaviour of quantum mechanical systems with enforced tunnelling transitions [13; 14].

In *field theory*, consideration of instanton solutions traditionally begins with rather complex models: the Abelian Higgs model in space-time (1 + 1) or SU(2) Yang – Mills gauge theory in four dimensions. The simplest field theory model could be a scalar field theory in space-time (1 + 1) with a degenerate vacuum state (for example, a sine-Gordon model or a theory with a double-well potential). However, the existence of instantons describing tunnelling transitions between classically degenerate vacuums is forbidden [15] (the Derrick – Hobart theorem), see also [4]. At the same time, there are at least two cases in which the Derrick – Hobart «no-go» theorem is not valid. First, this is the case of a scalar field theory in a *limited spatial volume* [16]. In the case of two dimensions, instanton solutions are known analytically [17]. Secondly, the quantum-field consideration of tunnelling effects does not necessarily imply the presence of classical solutions in imaginary time (instantons). That is, there can be transitions that are not described by instantons, associated with tunnelling from one vacuum state to another and back in a finite region of space in a finite time. Such processes require finite energy and can go according to the Heisenberg uncertainty relation. Sections 3 of this article are devoted to consideration of tunnelling effects in scalar field models.

It should be noted that classical solutions in scalar field models are considered to describe the processes of false vacuum decay. These are «bounce» solutions [16].

Also, soliton solution is obtained for three-dimensional scalar field theory in space with cylinder geometry (Sections 4).

1. Instantons in the task of passing a rectangular potential barrier

Let's consider one of the simplest quantum mechanical problems, one-dimensional task of passing a rectangular potential barrier (Figure 1). The Lagrangian has the form:

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & 0 < x < a. \\ 0, & x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

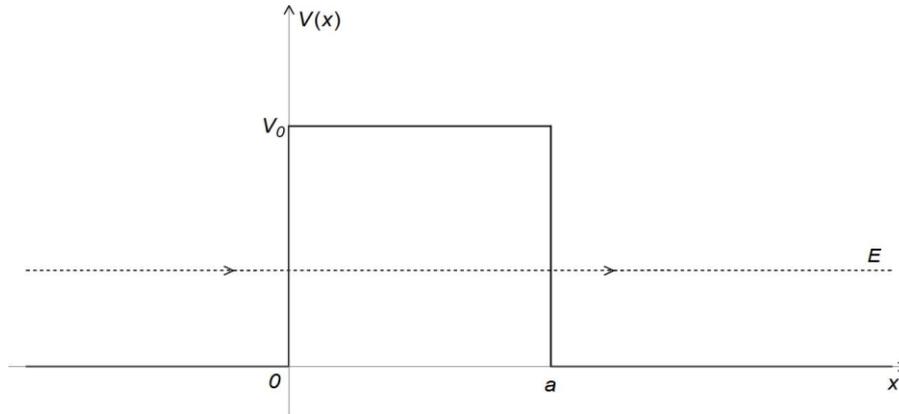


Figure 1. – Rectangular potential barrier

Here m is the mass of the particle, V_0 is the height of the potential barrier, and a is its width. This standard task can be solved exactly on the basis of stationary Schrödinger equation:

$$\hat{H}\varphi(x) = E\varphi(x), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x), \quad E < V_0. \quad (2)$$

The transition coefficient has the form [18]:

$$D(E) = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \operatorname{sh}^2 \left(\frac{a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right)}. \quad (3)$$

If $E \ll V_0$ and $a \gg \hbar$ the expression (3) is simplified:

$$D(E) \approx 16 \frac{E}{V_0} \exp \left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right). \quad (4)$$

Often, the pre-exponential factor is neglected for estimation, considering it to be approximately equal to one. This estimate is obviously a rough one:

$$D(E) \propto \exp \left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} \right). \quad (5)$$

In this section the solution of this task **by instanton method** with pre-exponential accuracy (4) is presented. Let's go to imaginary time (or to Euclidean space):

$$t \rightarrow -i\tau, \quad \tau^* = \tau. \quad (6)$$

Where τ is «a time» in Euclidean space. The action corresponding to Lagrangian (1) changes as follows:

$$S = \int_0^{\Delta t} dt L = \int_0^{\Delta t} dt \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right) \rightarrow i \int_0^T \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right) d\tau, \quad S_E = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right) d\tau. \quad (7)$$

Here S_E is Euclidean action, T – «time» interval in Euclidean space: $\Delta t \rightarrow -iT$. Of course, the transition to Euclidean space is only a mathematical technique. Imaginary time has no physical sense. Formally, this corresponds to the classical problem of motion in a rectangular potential well (potential « $-V(x)$ », Figure 2).

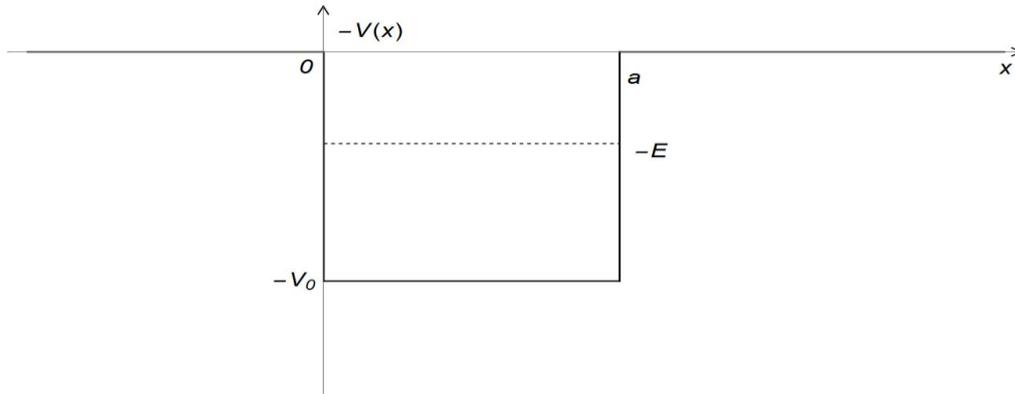


Figure 2. – The problem of a rectangular potential barrier in Euclidean space (formally, the potential «turns over» and turns into a rectangular potential well)

Thus, instanton is a non-trivial classical solution of the equations of motion following from action (7). The easiest way to find it is to write down the Euclidean energy:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V_0 = -E, \quad V_0 > 0, \quad E > 0. \quad (8)$$

We are talking about movement in a classically allowed area (Figure 2). The equation is easy to integrate:

$$x^{inst}(\tau, E) = \tau \sqrt{\frac{2}{m}(V_0 - E)}, \quad x^{inst}(T) = a, \quad x^{inst}(0) = 0. \quad (9)$$

The first initial condition immediately gives the Euclidean time of particle movement from one potential wall to another:

$$T = \sqrt{\frac{ma^2}{2(V_0 - E)}}. \quad (10)$$

A more important quantity is Euclidean action on the instanton solution (7):

$$S_0 \equiv \tilde{S}_E[x^{inst}(\tau, E)] = a\sqrt{2m(V_0 - E)}. \quad (11)$$

Here the tilde means truncated action for a period:

$$\tilde{S}_E[x^{inst}(\tau, E)] = S_E[x^{inst}(\tau, E)] - ET. \quad (12)$$

Namely truncated Euclidean action gives the correct contribution to the amplitude [16]. Strictly speaking, the instanton corresponds to the transition «vacuum → vacuum», then the tilde is obviously not needed. At nonzero energies, the corresponding solution is sometimes called instanton-like.

According to Feynman formulation of quantum mechanics (with the help of functional integrals over classical trajectories) the Euclidean amplitude of the transition from the initial to the final state is given by the following expression:

$$\langle x_f | \exp(-\hat{H}T) | x_i \rangle = \int D[x(\tau)] \exp(-\tilde{S}_E[x(\tau)]). \quad (13)$$

Here and further $\hbar = c = 1$. The initial conditions in the functional integral are assumed, but usually not written. $D[x(\tau)]$ is the measure of integration in the functional space (more details can be found in the monograph by R. Feynman and A. Hibbs [3]).

In the zero approximation with exponential accuracy, the expression for the barrier penetration coefficient (5) is reproduced with exponential accuracy:

$$\begin{aligned} \int ND[x(\tau)] \exp(-\tilde{S}_E[x(\tau)]) \propto \exp(-\tilde{S}_E[x^{inst}(\tau)]) &= \exp(-a\sqrt{2m(V_0 - E)}), \\ D(E) \propto \exp(-2\tilde{S}_E[x^{inst}(\tau)]) &= \exp(-2a\sqrt{2m(V_0 - E)}). \end{aligned} \quad (14)$$

Note that the reverse transition from the Euclidean space to the Minkowski space-time, as in many other tasks, is not required.

For more accurate calculations, it is necessary to take into account the first quantum correction to the action on the classical solution. For large values of the Euclidean action $S_E \gg 1$, one can write:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_E[x(\tau)] &\approx \tilde{S}_E[x^{inst}(\tau)] + \delta S_E[x^{inst}(\tau)] + \frac{1}{2} \delta^{(2)} S_E[x^{inst}(\tau)] = \\ &= a\sqrt{2m(V_0 - E)} + \frac{1}{2} \int_0^T d\tau \delta x(\tau) (-m\partial_\tau^2 + \partial_x^2 V[x^{inst}(\tau)]) \delta x(\tau). \end{aligned} \quad (15)$$

The first variation of the action is zero on the classical solution. Assume that there is a set of nonzero eigenvalues ε_n and a set eigenfunctions $y_n(\tau)$ of operator

$\hat{O} = -m\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} V[x^{inst}(\tau)] = -m\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ that form a complete basis:

$$\hat{O}y_n(\tau) = -m\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} y_n(\tau) = \varepsilon_n y_n(\tau). \quad (16)$$

We can write the decomposition:

$$\delta x(\tau) = \sum_n c_n y_n(\tau). \quad (17)$$

Then the amplitude (13) can be written as follows:

$$\langle x_f | \exp(-\hat{H}T) | x_i \rangle = \frac{B}{\sqrt{\det \hat{O}}} e^{-a\sqrt{2m(V_0 - E)}} = N e^{-a\sqrt{2m(V_0 - E)}}. \quad (18)$$

We assume that the Jacobian of the transition from functional integration over $\delta x(\tau)$ to integration over c_n enters to the normalization factor B . In order to determine the correct

pre-exponential factor N , we consider the exactly solvable task of free motion using the Schrödinger equation and the method of functional integrals:

$$\begin{aligned} \langle x_f | \exp(-\hat{H}T) | x_i \rangle &= \int dp \langle x_f | \exp(-(\hat{p}^2 / 2m)T) | p \rangle \langle p | x_i \rangle = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \exp(-(p^2 / 2m)T - ipa) = \exp\left(-\frac{a^2 m}{2T}\right) \sqrt{\frac{m}{2\pi T}}; \\ \int_{x_i}^{x_f} D[x(\tau)] \exp\left(-\int_0^T \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2\right) d\tau\right) &= \exp\left(-\frac{a^2 m}{2T}\right) \frac{B}{\sqrt{\det \hat{A}}}. \end{aligned} \quad (19)$$

If we calibrate the expression for the amplitude of the tunneling through rectangular barrier (18) according to the known result (19), then the factor N at low energies gives the correct pre-exponential factor:

$$N = \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \sqrt{\frac{\det \hat{A}}{\det \hat{O}}} \approx \frac{4}{a} \sqrt{\frac{E}{V_0}}. \quad (20)$$

Taking this into account, the normalized amplitude (18) leads to the correct expression for the barrier penetration coefficient with pre-exponential accuracy (4).

2. Instanton method for the task of cold emission of electrons from a metal

Let's consider one-dimensional quantum-mechanical task about transition of a linear (triangular) potential (Figure 3), which models the effect of cold electron emission of electrons:

$$L = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x), \quad V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) & x > 0. \end{cases} \quad (21)$$

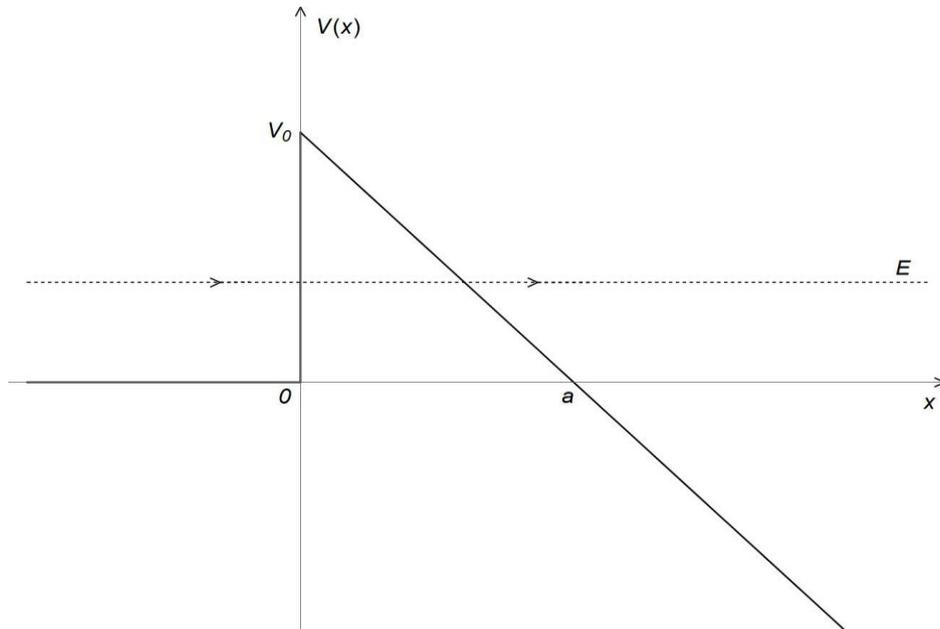


Figure 3. – One-dimensional model of the effect of cold electron emission from metal

Following the reasoning given in Section 1, we obtain the following results.

The Euclidean action of the original task corresponds to an analogous task with an «inverted» potential (Figure 4):

$$S_E = \int_0^T \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right) \right) d\tau, \quad x(T_0) = a, \quad x(0) = 0. \quad (22)$$

The instanton solution that minimizes this action corresponds to the movement of a particle from point 0 to a point a at time T_0 at **zero energy**:

$$x^{inst}(\tau) = a \left(1 - \left(1 - \frac{\tau}{T_0} \right)^2 \right), \quad T_0 = a \sqrt{\frac{2m}{V_0}}. \quad (23)$$

The Euclidean action on an instanton:

$$S_E[x^{inst}(\tau)] = 2 \int_0^{T_0} \frac{m}{2} \left(\frac{dx^{inst}}{d\tau} \right)^2 d\tau = 2 \int_0^{T_0} V_0 \left(1 - \frac{\tau}{T_0} \right)^2 d\tau = \frac{2}{3} a \sqrt{2mV_0}. \quad (24)$$

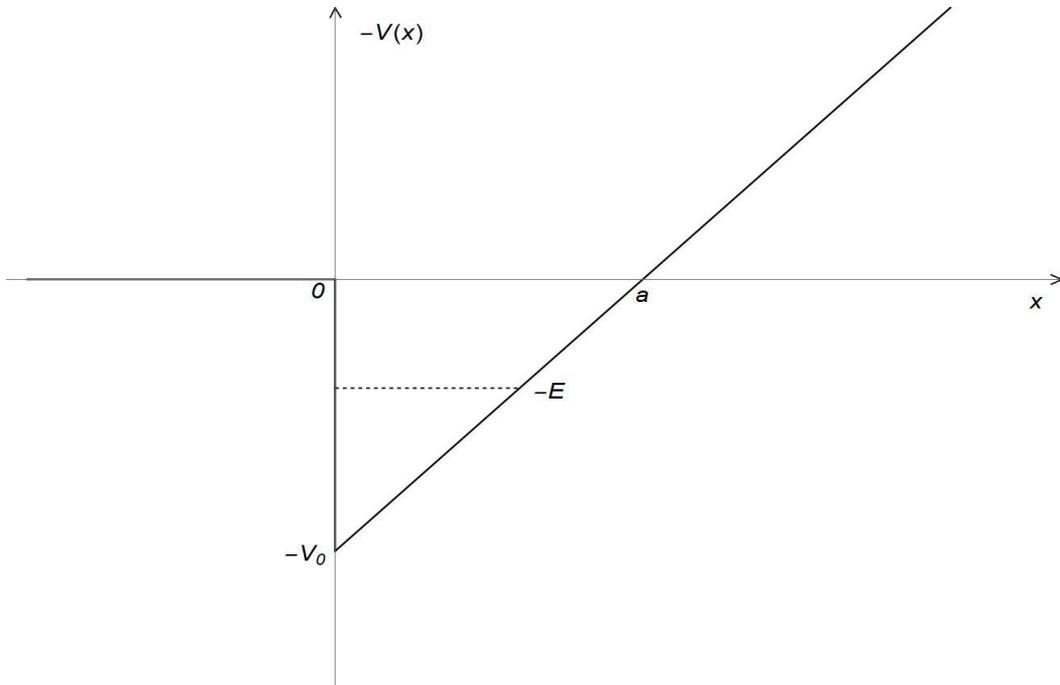


Figure 4. – Euclidean version of the one-dimensional problem of cold electron emission from a metal

Instanton (strictly speaking, instanton-like) solution at **non-zero** negative energy $-E$:

$$x^{inst}(\tau, E) = a \left(1 + \frac{E}{V_0} - \left(\sqrt{\frac{V_0 - E}{V_0}} - \frac{\tau}{T_0} \right)^2 \right). \quad (25)$$

Let us introduce standard notation for the work function $W = V_0 - E$ of electrons from a metal. We take into account that the tangent of the slope of the potential energy graph is related to the force acting from the external field on the elementary charge $-V_0 a^{-1} = -e\mathcal{E}$. In such notation, the instanton solution will take the form:

$$x^{inst}(\tau, W) = a + \frac{E}{e\mathcal{E}} - \left(\sqrt{\frac{W}{e\mathcal{E}}} - \frac{\tau}{T_0} \right)^2, \quad (26)$$

and the truncated action

$$\tilde{S}_E[x^{inst}(\tau, W)] = \frac{2\sqrt{2m}}{3e\mathcal{E}} W^{3/2} \quad (27)$$

determines the exponent in the barrier transmission coefficient

$$D(W) \approx D_0 \exp\left(-\frac{4\sqrt{2m}}{3e\mathcal{E}} W^{3/2}\right). \quad (28)$$

The transmission coefficient determines the main physical value of the effect, the strength of the electron emission current.

3. Instantons in 2-dimensional scalar field theory with a double-well potential

Pure scalar field models do not have instanton solutions. Their presence would automatically mean the possibility of tunneling between classical vacuums.

This, however, is impossible, since it requires infinite energy even at a finite potential barrier. In contrast to similar quantum mechanical tasks in field theory we are talking about the tunneling of one field vacuum state into another in infinite space.

That is, the density of action on the instanton will be finite, and the action will be infinite. To solve the problem, one can consider a field theory model in a two-dimensional space-time in a limited spatial region. We will consider such a region as a circle of length L . That is, geometry $R^1 \otimes S^1$.

So, the Lagrangian of the model has the form:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi), \quad \mu = 0, 1, \quad (29)$$

where:

$$V(\phi) = \lambda(\phi^2 - \rho^2)^2. \quad (30)$$

Spatially homogeneous solutions in Euclidean space with finite action (instantons) formally coincide with *static* kinks of the same model:

$$\phi^{inst}(\tau, x) = \pm \rho \tanh\left((\tau - \tau_0)\rho\sqrt{2\lambda}\right). \quad (31)$$

The most important quantity of interest to us, the action on the instanton, coincides with the energy of the static kink, multiplied by the length of the spatial region:

$$S_E[\phi^{inst}(\tau, x)] = S_0 = \frac{4\sqrt{2\lambda}\rho^3 L}{3}. \quad (32)$$

With exponential accuracy, the tunneling probability amplitude is

$$\langle -\rho | \exp(-\hat{H}T) | \rho \rangle \sim \exp\left(-\frac{4\sqrt{2\lambda}\rho^3 L}{3}\right). \quad (33)$$

Obviously, as the length of the spatial interval goes to infinity, the amplitude goes to zero, as it should be according to the Derrick – Hobart «no-go» theorem [15].

4. Soliton solutions in scalar field theory with a classically degenerate state in space-time (1 + 2)

Any instanton solution in Euclidean space of dimension D is simultaneously a static soliton solution in Minkowski space-time of dimension $(1 + D)$. In this case, the (Euclidean) action on the instanton solution is formally the energy of the corresponding static soliton.

Therefore, the *static* soliton solution in space-time $R^1 \otimes S^1 \otimes R^1$ (cylinder geometry) can be immediately written based on the results of Section 3 (see, also, [17]):

$$\phi^{sol}(t, x, y) = \pm \rho \tanh\left(\rho \sqrt{2\lambda}(y - y_0)\right). \quad (34)$$

The x coordinate can be considered compactified and the problem can be considered as the simplest model of string theory with a nontrivial classical solution. Such models were used, for example, in the monograph by B. Zwiebach [19]. Along the x coordinate, the solutions are homogeneous, which is unimportant when its length is small.

From static solutions, you can go to «*running*» ones using the Lorentz transformations:

$$\phi^{sol}(t, x, y) = \pm \rho \tanh\left(\rho \sqrt{2\lambda} \gamma (y - vt)\right), \quad (35)$$

where v is the velocity of motion of the moving reference frame relative to the stationary one; γ is the Lorentz factor. Obviously, similar solutions can be obtained for the «sine-Gordon» theory in 3-dimensional space-time.

Conclusion

The instanton method was demonstrated for the first time on the example of the simplest quantum-mechanical tasks on the passing of rectangular and linear potential barriers, which has some methodological importance.

For two-dimensional scalar field-theoretical model in two-dimensional space with a cylinder geometry, instanton solutions are written. It formally coincides with kinks. With the help of Feynman's method of functional integrals, the probability of tunnel transitions is calculated with exponential accuracy. The proposed theory, due to its simplicity, is convenient for modeling the mechanisms of nonperturbative processes of multiple particle production under various energy regimes.

For the same model, but already in three-dimensional space-time, soliton solutions are obtained. It can be used to demonstrate certain effects in string theory. It is important that the smaller the scale of the compactified coordinate, the more significant will be the contribution of classical soliton solutions to the probabilities of various processes described by such theory.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations / A. Belavin [et al.] // Phys. Lett. B. – 1975. – Vol. 59. – P. 85–87.
2. Инстантонная азбука / А. И. Вайнштейн [и др.] // УФН. – 1982. – Т. 136, № 4. – С. 553–591.
3. Фейнман, Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям / Р. Фейнман, А. Хиббс. – М. : Мир, 1968. – 382 с.
4. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М. : Мир, 1985. – 416 с.
5. 'tHooft, G. Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies / G. 'tHooft // Phys. Rev. Lett. – 1976. – Vol. 37. – P. 8–11.

6. t'Hooft, G. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudo-particle / G. t'Hooft // *Phys. Rev. D.* – 1976. – Vol. 14. – P. 3432–3450.
7. Schäfer, T. Instantons in QCD / T. Schäfer, E. V. Shuryak // *Rev. Mod. Phys.* – 1998. – Vol. 70. – P. 323–426.
8. QCD and resonance physics. Theoretical foundations / M. A. Shifman [et al.] // *Nucl. Phys. B.* – 1979. – Vol. 147. – P. 385–447.
9. Ringwald, A. High Energy Breakdown of Perturbation Theory in the Electroweak Instanton Sector / A. Ringwald // *Nucl. Phys. B.* – 1990. – Vol. 330. – P. 1–18.
10. Рубаков, В. А. Электрослабое несохранение барионного числа в ранней Вселенной и в столкновениях частиц при высоких энергиях / В. А. Рубаков, М. Е. Шапошников // *УФН.* – 1996. – Т. 166, № 5. – С. 493–537.
11. Сахаров, А. Д. Нарушение CP-инвариантности. C-асимметрия и барионная асимметрия Вселенной / А. Д. Сахаров // *Письма в ЖЭТФ.* – 1967. – Т. 5, вып.1. – С. 32–35.
12. Дьяконов, Д. И. Введение в непертурбативную квантовую хромодинамику / Д. И. Дьяконов // *Материалы XXI Зим. шк. ЛИЯФ.* – Л., 1986. – С. 2–107.
13. Kuvshinov, V. Chaos enforced instanton tunnelling in one-dimensional model with periodic potential / V. Kuvshinov, A. Kuzmin, R. Shulyakovsky // *Acta Phys. Pol. B.* – 2002. – Vol. 33. – P. 1721–1728.
14. Kuvshinov, V. Chaos assisted instanton tunnelling in one dimensional perturbed periodic potential / V. Kuvshinov, A. Kuzmin, R. Shulyakovsky // *Phys. Rev. E.* – 2003. – Vol. 67. – P. 015201-1 – 015201-4.
15. Derrick, G. H. Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles / G. H. Derrick // *J. Math. Phys.* – 1964. – Vol. 5. – P. 1252–1254.
16. Рубаков, В. А. Классические калибровочные поля / В. А. Рубаков. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 336 с.
17. Шуляковский, Р. Г. Аналитические инстантонные решения в 2-мерных полевых моделях / Р. Г. Шуляковский // *Письма в ЭЧАЯ.* – 2008. – № 5. – С. 704–708.
18. Галицкий, В. М. Задачи по квантовой механике : в 2 ч. / В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – Ч. 1. – 304 с.
19. Цвибах, Б. Начальный курс теории струн / Б. Цвибах. – М. : Эдиториал УРСС, 2011. – 784 с.

REFERENCES

1. Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills equations / A. Belavin [et al.] // *Phys. Lett. B.* – 1975. – Vol. 59. – P. 85–87.
2. Instantonnaja azbuka / A. I. Vajnshtejn [i dr.] // *UFN.* – 1982. – Т. 136, № 4. – S. 553–591.
3. Fejnman, R. Kvantovaja miekhanika i integraly po trajektorijam / R. Fejnman, A. Khibbs. – М. : Mir, 1968. – 382 s.
4. Radzhararaman, R. Solitony i instantony v kvantovoj tieorii polia / R. Radzhararaman. – М. : Mir, 1985. – 416 s.
5. t'Hooft, G. Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies / G. t'Hooft // *Phys. Rev. Lett.* – 1976. – Vol. 37. – P. 8–11.
6. t'Hooft, G. Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudo-particle / G. t'Hooft // *Phys. Rev. D.* – 1976. – Vol. 14. – P. 3432–3450.
7. Schäfer, T. Instantons in QCD / T. Schäfer, E. V. Shuryak // *Rev. Mod. Phys.* – 1998. – Vol. 70. – P. 323–426.

8. QCD and resonance physics. Theoretical foundations / M. A. Shifman [et al.] // Nucl. Phys. B. – 1979. – Vol. 147. – P. 385–447.
9. Ringwald, A. High Energy Breakdown of Perturbation Theory in the Electroweak Instanton Sector / A. Ringwald // Nucl. Phys. B. – 1990. – Vol. 330. – P. 1–18.
10. Rubakov, V. A. Eliektroslaboje niesokhranienije barionnogo chisla v ranniej Vsieliennoj I v stolknovienijakh chastic pri vysokikh energijakh / V. A. Rubakov, M. Ye. Shaposhnikov // UFN. – 1996. – T. 166, № 5. – S. 493–537.
11. Sakharov, A. D. Narushenije CP-invariantnosti. C-asimmetrija i barionnaja asimmetrija Vsieliennoj / A. D. Sakharov // Pis'ma v ZhETF. – 1967. – T. 5, vyp. 1. – S. 32–35.
12. D'jakonov, D. I. Vviedienije v niepierturbativnuju kvantovuju khromodinamiku / D. I. D'jakonov // Materialy XXI Zim. shk. LIFT. – 1986. – S. 2–107.
13. Kuvshinov, V. Chaos enforced instanton tunnelling in one-dimensional model with periodic potential / V. Kuvshinov, A. Kuzmin, R. Shulyakovsky // Acta Phys. Pol. B. – 2002. – Vol. 33. – P. 1721–1728.
14. Kuvshinov, V. Chaos assisted instanton tunnelling in one dimensional perturbed periodic potential / V. Kuvshinov, A. Kuzmin, R. Shulyakovsky // Phys. Rev. E. – 2003. – Vol. 67. – P. 015201-1 – 015201-4.
15. Derrick, G. H. Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles / G. H. Derrick // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5. – P. 1252–1254.
16. Rubakov, V. A. Klassichieskije kalibrovochnyje polia / V. A. Rubakov. – M. : Editorial URSS, 1999. – 336 s.
17. Shuliakovskij, R. G. Analitichieskije instantonnyje rieshenija v 2-miernykh polievnykh modeliakh / R. G. Shuliakovskij // Pis'ma v EChAYa. – 2008. – № 5. – S. 704–708.
18. Galickij, V. M. Zadachi po kvantovoj miekhanike : v 2 ch. / V. M. Galickij, B. M. Karnakov, V. I. Kogan. – M. : Editorial URSS, 2001. – Ch. 1. – 304 s.
19. Cvibakh, B. Nachal'nyj kurs teorii strun / B. Cvibakh. – M. : Editorial URSS, 2011. – 784 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 29.09.2022

УДК 539.12:530.145

*Анастасія Міхайловна Кузьмич¹, Владимир Анестиевич Плетюхов²*¹магістрант фіз.-мат. факультэта*Брэстскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна
²д-р фіз.-мат. наук, проф., проф. каф. агульнай і тэарэтычнай фізікі
Брэстскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. С. Пушкіна**Anastasia Kuzmich¹, Vladimir Pletyukhov²*¹Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of the Brest State A. S. Pushkin University²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: pletyukhov@yandex.by

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ОПИСАНИЯ СИММЕТРИЙ ДВУМЕРНЫХ СТРУКТУР**

Изучены свойства внутренней симметрии системы двух уравнений Дирака и уравнения Дирака – Кэлера в пространстве размерности $2 + 1$. При этом использовался метод, основанный на приведении исследуемых уравнений к вещественной форме. Показано, что группы внутренней симметрии лагранжиана обеих теорий совпадают. Этот результат дает основание полагать, что уравнение Дирака – Кэлера может служить в качестве модели геометризованного (тензорного) описания дираковских частиц в двумерных кристаллических структурах, например, в графене. Кроме того, показано, что установленная симметрия существенно шире тех, что обычно обсуждаются в литературе применительно к указанным уравнениям.

Ключевые слова: внутренняя симметрия, уравнение Дирака, уравнение Дирака – Кэлера, графен.

***Application of Methods of the Theory of Relativistic Wave Equations
to Describe the Symmetries of Two-Dimensional Structures***

The article presents the findings of investigation into the properties of the internal symmetry between a two Dirac equations system and Dirac – Kähler equation in a $2 + 1$ dimensional space. The research method employed herein involved reducing the above equations to the real form. The investigation performed proves that the Lagrangian internal symmetry groups coincide for both theories. The result obtained strongly suggests that Dirac – Kähler equation may serve as a model for a geometrized (tensor) description of Dirac particles in two-dimensional crystal structures, e.g. in graphene. Besides, the article demonstrates that the established symmetry is much broader than those traditionally discussed in the above equations studies.

Key words: internal symmetry, Dirac equations, Dirac – Kähler equation, graphene.

Введение

Полевое описание элементарных частиц посредством релятивистских волновых уравнений (РВУ) первого порядка базируется на теории представлений группы Лоренца – группы унимодулярных ортогональных преобразований $SO(3,1)$ в псевдоевклидовом пространстве размерности $3 + 1$.

При этом одно из основных требований, вытекающих из постулатов специальной теории относительности, заключается в том, что волновая функция указанных РВУ должна преобразовываться по некоторому приводимому представлению группы Лоренца, которое состоит из зацепляющихся неприводимых представлений этой группы (под зацепляющимися мы понимаем неприводимые представления, связанные между собой операцией дифференцирования; графическое изображение такого приводимого представления, где зацепляющиеся неприводимые компоненты соединены чертой, называется «схемой зацеплений» [1]).

В то же время в ряде публикаций, посвященных изучению плоских кристаллических структур типа графена, показано, что электронам и дыркам в зоне проводимости

в таких структурах можно сопоставить квазичастицы со спином $\frac{1}{2}$ и нулевой эффективной массой [2; 3]. Другими словами, имеется принципиальная возможность теоретического описания свойств графена хорошо разработанными методами теории РВУ.

Для этого необходимо адаптировать теорию РВУ к псевдоевклидовому пространству размерности $2 + 1$. Кроме того, известно, что в пространстве размерности $3 + 1$ частицы со спином $\frac{1}{2}$ и дополнительными степенями свободы можно описывать посредством полного набора антисимметричных тензорных полей, подчиняющихся уравнению Дирака – Кэлера [1].

С учетом данного обстоятельства представляет интерес исследование уравнения Дирака – Кэлера на предмет его возможности служить в качестве модели геометризованного описания квазичастиц в графене посредством тензорных полей. С этой целью следует провести сравнительный анализ внутренней симметрии системы двух уравнений Дирака и уравнения Дирака – Кэлера в пространстве размерности $2 + 1$.

Настоящая работа посвящена решению указанных задач.

Редукция теории РВУ на пространство размерности $2 + 1$

В пространстве $2 + 1$ неприводимые представления группы $SO(2,1)$ задаются одним целым либо полуцелым числом – весом n – и тремя параметрами: одним вещественным и двумя мнимыми. При этом размерность пространства представления с весом n равна $2n + 1$. Весу 1 соответствует фундаментальное (векторное) представление группы $SO(2,1)$, которая в физической литературе называется частной группой Лоренца. Весу 0 соответствует скалярное, $1/2$ – спинорное, $3/2$ – спин-векторное представление; весом 2 характеризуется симметричный тензор второго ранга $\psi_{(ij)}$ со следом, равным нулю (индексы i, j пробегает значения 0, 1, 2, индекс $i = 0$ обозначает временную координату).

Антисимметричный тензор второго ранга $\psi_{[ij]}$ имеет три независимые компоненты и при преобразованиях группы $SO(2,1)$ ведет себя как вектор ψ_i . Одинаково ведут себя величины $\psi_i, \psi_{[ij]}$ и при операции пространственного отражения, но при операции отражения времени T они ведут себя по-разному: у вектора ψ_i меняет знак одна компонента ψ_0 , у тензора $\psi_{[ij]}$ – две компоненты $\psi_{[01]}, \psi_{[02]}$.

Поэтому с точки зрения различения указанных ковариантов по отношению к группе $SO(2,1) \otimes T$ целесообразнее ввести две тройки величин $\{\psi_0 + \psi_{[12]}, \psi_1 + \psi_{[02]}, \psi_2 + \psi_{[01]}\}$ и $\{\psi_0 - \psi_{[12]}, \psi_1 - \psi_{[02]}, \psi_2 + \psi_{[01]}\}$, которые по отношению к преобразованиям частной группы Лоренца $SO(2,1)$ ведут себя как вектор, а при отражении времени переходят друг в друга. Будем их обозначать 1 и $\hat{1}$ соответственно.

Аналогичным образом из скаляра ψ и полностью антисимметричного тензора третьего ранга $\psi_{[ijk]}$ можно построить величины $\psi + \psi_{[ijk]}$ и $\psi - \psi_{[ijk]}$, которые являются времени-сопряженными по отношению друг к другу скалярами с весами 0 и $\hat{0}$. В общем случае каждому неприводимому представлению частной группы Лоренца с весом n можно сопоставить сопряженное в вышеуказанном смысле представление \hat{n} .

В отношении зацепляющихся неприводимых представлений частной группы Лоренца имеет место следующая картина.

Во-первых, зацепляться могут только однотипные представления – тензорные с тензорными (n – целое), спинорные со спинорными (n – полуцелое).

Во-вторых, с представлениями веса n (\hat{n}) зацепляются представления с весами $n - 1, n + 1, \hat{n} (\hat{n} - \hat{1}, \hat{n} + \hat{1}, n)$. Исключение из этого правила составляет скалярное представление 0 ($\hat{0}$), которое зацепляется только с векторным представлением 1 ($\hat{1}$).

Таким образом, всевозможные неприводимые представления группы $SO(2,1) \otimes T$ распадаются на два класса, которые можно изобразить в виде схем зацеплений

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & - & 1 & - & 2 & - & 3 & - & \dots \\ & & | & & | & & | & & \\ 0 & - & 1 & - & 2 & - & 3 & - & \dots \end{array} \quad (1.1)$$

или

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} & - & \frac{3}{2} & - & \frac{5}{2} & - & \dots \\ | & & | & & | & & \\ \frac{1}{2} & - & \frac{3}{2} & - & \frac{5}{2} & - & \dots \end{array}, \quad (1.2)$$

причем в (1.1) и (1.2) каждое неприводимое представление может быть кратным (повторяющимся).

При построении релятивистского квантово-механического уравнения для частицы со спином S в пространстве $2 + 1$ соответствующая волновая функция должна преобразовываться по приводимому представлению, включающему не менее двух зацепляющихся неприводимых компонент, содержащих спин S ($0 \leq S \leq n$ либо $\frac{1}{2} \leq S \leq n$).

Так, на основе схемы

$$0 - 1 \quad (1.3)$$

можно построить РВУ для частицы со спином $S = 0$. Его тензорная формулировка имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_i \psi_i + m\psi &= 0, \\ \partial_i \psi + m\psi_i &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Если записать систему (1.4) в виде матрично-дифференциального уравнения

$$(\gamma_i \partial_i + m)\Psi = 0, \quad (1.5)$$

то в базисе $\Psi = (\psi, \psi_0, \psi_1, \psi_2)$ для матриц γ_i получим выражения

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Схема зацеплений

$$1 - \dot{1} \quad (1.7)$$

позволяет построить систему

$$\begin{aligned} \partial_j \psi_{[ij]} + m\psi_i &= 0, \\ -\partial_i \psi_j + \partial_j \psi_i + m\psi_{[ij]} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

которая является редуцированным аналогом уравнения Даффина – Кеммера для частицы со спином $S = 1$. В базисе

$$\Psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_{[01]}, \psi_{[02]}, \psi_{[12]}) \quad (1.9)$$

эта система соответствует РВУ стандартного вида (1.5) с матрицами γ_i размерности 6×6 , удовлетворяющими, как и матрицы (1.6), алгебре матриц Даффина – Кеммера

$$\gamma_i \gamma_j \gamma_k + \gamma_k \gamma_j \gamma_i = \delta_{ij} \gamma_k + \delta_{jk} \gamma_i. \quad (1.10)$$

Опираясь на схему зацеплений

$$\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, \quad (1.11)$$

можно построить РВУ для частицы со спином $S = 1/2$, инвариантное относительно преобразований группы $SO(2,1) \otimes T$. Матрицы γ_i этого РВУ имеют блочную структуру

$$\gamma_0 = I_2 \otimes \sigma_3, \quad \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad (1.12)$$

где σ_i – матрицы Паули размерности 2×2 , удовлетворяющие алгебре Клиффорда.

Аналогичным образом редуцируются на пространство $2 + 1$ и другие РВУ, в т. ч. те, которые будут рассмотрены ниже.

Внутренняя симметрия системы двух уравнений Дирака в псевдоевклидовом пространстве $2 + 1$

Исследуем внутреннюю симметрию системы двух безмассовых уравнений Дирака в пространстве $2 + 1$, которую многие авторы используют для описания решеточной структуры графена. Для этого используем метод, развитый в работах [4; 5] и основанный на предварительном приведении исследуемых диракоподобных РВУ к вещественной форме. В работе [6] данный метод был апробирован на уравнении Дирака в пространстве $2 + 1$ и получены результаты, которые отличаются от тех, что приводятся в [4; 5]. Группа внутренней симметрии, установленная в нашем подходе, оказывается более широкой по сравнению с той, что получена в [4; 5], и коррелирует с известными результатами исследования свойств внутренней симметрии уравнения Дирака в пространстве обычной размерности $3 + 1$.

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma_k \partial_k \psi_1 = 0, \\ \gamma_k \partial_k \psi_2 = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

в которой ψ_1 и ψ_2 – биспиноры первого ранга, γ_k – матрицы 4×4 , удовлетворяющие алгебре матриц Дирака, индекс k пробегает значения $0, 1, 2$.

Будем использовать метрику, соответствующую выбору $x_0 = ict$. Для матриц γ_k используем представление, в котором

$$\gamma_0 = \sigma_3 \otimes I_2, \quad \gamma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1, \quad \gamma_2 = \sigma_2 \otimes \sigma_2, \quad (2.2)$$

Возьмем от (2.1) комплексное сопряжение и с учетом мнимого характера временной координаты x_0 получим для комплексно-сопряженных функций ψ_1^*, ψ_2^* уравнения

$$\begin{cases} (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_1^* = 0, \\ (-\gamma_0 \partial_0 - \gamma_1 \partial_1 + \gamma_2 \partial_2) \psi_2^* = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Рассматривая (2.1) и (2.3) совместно, придем к 16-компонентной системе уравнений, которую можно представить в универсальной матричной форме

$$\Gamma_k \partial_k \Psi = 0. \quad (2.4)$$

При выборе волновой функции Ψ в виде

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_1^*, \psi_2^*) \quad (2.5)$$

для матриц Γ_k в (2.4) получим выражения

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \quad (2.6)$$

Далее перейдем в базис, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены:

$$\Psi = (\psi_1^r, \psi_2^r, \psi_1^i, \psi_2^i) - \text{столбец}, \quad (2.7)$$

$$\psi_{1,2}^r = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} + \psi_{1,2}^*), \quad \psi_{1,2}^i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{1,2} - \psi_{1,2}^*).$$

Указанный переход от представления (2.5) осуществляется с помощью унитарного преобразования базиса в пространстве состояний

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_8 & -I_8 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Матрицы Γ_k в базисе (2.7) имеют вид

$$\Gamma_0 = \gamma_5 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_5 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \quad (2.9)$$

Лагранжиан уравнения (2.4) с матрицами Γ_k (2.9)

$$L = -\bar{\Psi} \Gamma_k \partial_k \Psi = -\Psi^+ \eta \Gamma_k \partial_k \Psi \quad (2.10)$$

эквивалентен лагранжиану исходной системы (2.1)

$$L = L_1 + L_2 = -\bar{\psi}_1 \gamma_k \partial_k \psi_1 - \bar{\psi}_2 \gamma_k \partial_k \psi_2 = -\psi_1^+ \gamma_0 \gamma_k \partial_k \psi_1 - \psi_2^+ \gamma_0 \gamma_k \partial_k \psi_2 \quad (2.11)$$

при выборе матрицы билинейной инвариантной формы способом

$$\eta = I_4 \otimes \gamma_0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.4) с волновой функцией (2.7), матрицами Γ_k (2.9) и лагранжианом (2.10), (2.12) будем называть вещественной формой исходной системы (2.1). Эту форму мы будем использовать при установлении самой полной группы симметрии лагранжевой формулировки системы (2.1).

Наряду с базисом (2.7), (2.9) для решения поставленной задачи будем использовать также фермионный базис, в котором диракоподобные матрицы Γ_k имеют структуру

$$\Gamma_k = I_4 \otimes \gamma_k. \quad (2.13)$$

Переход из базиса (2.7) в фермионный базис осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2} [I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (2.14)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2} [I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Матрица билинейной формы η при этом принимает вид

$$\eta = \gamma_4 \otimes \gamma_0, \quad \gamma_4 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2. \quad (2.15)$$

Инвариантность уравнения (2.1) с матрицами Γ_k (2.13) относительно преобразований внутренней симметрии

$$\Psi' (x_k) = Q \Psi (x_k) \quad (2.16)$$

обеспечивается матрицами четырех типов

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3 \gamma_5, \quad Q_3 = q^{(3)} \otimes \gamma_3, \quad Q_4 = q^{(4)} \otimes \gamma_5, \quad (2.17)$$

где

$$\gamma_3 = \sigma_2 \otimes \sigma_3, \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (2.18)$$

q^α ($\alpha = 1 \div 4$) – произвольные комплексные матрицы 4×4 , на которые накладываются лишь ограничения, обусловленные вещественным характером рассматриваемого РВУ.

Дальнейшие расчеты удобнее всего проводить в представлении

$$\Psi = (\psi_1, \psi_2, \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2) - \text{столбец}, \quad (2.19)$$

где $\bar{\psi}_1 = \psi_1^\dagger \gamma_0, \bar{\psi}_2 = \psi_2^\dagger \gamma_0$. Переход от представления (2.7) в представление (2.19) осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_8 \\ I_2 \otimes \gamma_0 & -I_2 \otimes \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_8 & I_2 \otimes \gamma_0 \\ I_8 & -I_2 \otimes \gamma_0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

В представлении (2.21) матрицы Q_α (2.17), (2.18) принимают вид

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{pmatrix} \alpha_1 I_4 & \alpha_2 I_4 & b_1 \gamma_0 \gamma_2 & b_2 \gamma_0 \gamma_2 \\ \alpha_3 I_4 & \alpha_4 I_4 & b_3 \gamma_0 \gamma_2 & b_4 \gamma_0 \gamma_2 \\ -b_1^* \gamma_0 \gamma_2 & -b_2^* \gamma_0 \gamma_2 & \alpha_1^* I_4 & \alpha_2^* I_4 \\ -b_3^* \gamma_0 \gamma_2 & -b_4^* \gamma_0 \gamma_2 & \alpha_3^* I_4 & \alpha_4^* I_4 \end{pmatrix}, \\ Q_2 &= \begin{pmatrix} \alpha_5 \gamma_3 \gamma_5 & \alpha_6 \gamma_3 \gamma_5 & b_5 \gamma_1 & b_6 \gamma_1 \\ \alpha_7 \gamma_3 \gamma_5 & \alpha_8 \gamma_3 \gamma_5 & b_7 \gamma_1 & b_8 \gamma_1 \\ b_5^* \gamma_1 & b_6^* \gamma_1 & -\alpha_5^* \gamma_3 \gamma_5 & -\alpha_6^* \gamma_3 \gamma_5 \\ b_7^* \gamma_1 & b_8^* \gamma_1 & -\alpha_7^* \gamma_3 \gamma_5 & -\alpha_8^* \gamma_3 \gamma_5 \end{pmatrix}, \\ Q_3 &= \begin{pmatrix} \alpha_9 \gamma_3 & \alpha_{10} \gamma_3 & b_9 \gamma_1 \gamma_5 & b_{10} \gamma_1 \gamma_5 \\ \alpha_{11} \gamma_3 & \alpha_{12} \gamma_3 & b_{11} \gamma_1 \gamma_5 & b_{12} \gamma_1 \gamma_5 \\ -b_9^* \gamma_1 \gamma_5 & -b_{10}^* \gamma_1 \gamma_5 & \alpha_9^* \gamma_3 & \alpha_{10}^* \gamma_3 \\ -b_{11}^* \gamma_1 \gamma_5 & -b_{12}^* \gamma_1 \gamma_5 & \alpha_{11}^* \gamma_3 & \alpha_{12}^* \gamma_3 \end{pmatrix}, \\ Q_4 &= \begin{pmatrix} \alpha_{13} \gamma_5 & \alpha_{14} \gamma_5 & b_{13} \gamma_1 \gamma_3 & b_{14} \gamma_1 \gamma_3 \\ \alpha_{15} \gamma_5 & \alpha_{16} \gamma_5 & b_{15} \gamma_1 \gamma_3 & b_{16} \gamma_1 \gamma_3 \\ b_{13}^* \gamma_1 \gamma_3 & b_{14}^* \gamma_1 \gamma_3 & -\alpha_{13}^* \gamma_5 & -\alpha_{14}^* \gamma_5 \\ b_{15}^* \gamma_1 \gamma_3 & b_{16}^* \gamma_1 \gamma_3 & -\alpha_{15}^* \gamma_5 & -\alpha_{16}^* \gamma_5 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

где α_i, b_i ($i = 1 \div 16$) – произвольные комплексные параметры преобразования внутренней симметрии.

Найдем теперь, какие ограничения на параметры α_i, b_i накладывает условие

$$Q\eta Q^\dagger = \eta \quad (2.22)$$

инвариантности лагранжиана (2.10). Учитывая, что матрицы Q_1, Q_2 коммутируют, а Q_3, Q_4 антикоммутируют с матрицами уравнения Γ_k , условие (2.22) можно переписать в виде двух независимых условий:

$$Q_1^\dagger \eta Q_1 + Q_2^\dagger \eta Q_2 - Q_3^\dagger \eta Q_3 - Q_4^\dagger \eta Q_4 + Q_1^\dagger \eta Q_2 + Q_2^\dagger \eta Q_1 - Q_3^\dagger \eta Q_4 - Q_4^\dagger \eta Q_3 = \eta, \quad (2.23)$$

$$-Q_1^\dagger \eta Q_3 - Q_1^\dagger \eta Q_4 - Q_2^\dagger \eta Q_3 - Q_2^\dagger \eta Q_4 + Q_3^\dagger \eta Q_1 + Q_3^\dagger \eta Q_2 + Q_4^\dagger \eta Q_1 + Q_4^\dagger \eta Q_2 = 0. \quad (2.24)$$

Соотношения (2.23), (2.24) накладывают на 64 параметра α_i, b_i 28 условий, подробный вид которых мы не выписываем ввиду их громоздкости (они приведены в работе [7]). В результате получается 36-параметрическая группа внутренней симметрии лагранжевой формулировки теории с 20-ю вещественными и 16-ю мнимыми параметрами. Детальное исследование математической структуры этой группы [7] показывает, что она изоморфна группе $SO(5,4)$, т. е. значительно шире, чем те группы внутренней симметрии, которые рассматриваются в работах других авторов [2; 3; 8; 9].

Группу внутренней симметрии лагранжиана системы двух уравнений Дирака с ненулевой массой в пространстве $2 + 1$ можно получить группы $SO(5,4)$ путем исключения из рассмотрения преобразований Q_3 и Q_4 , которые антикоммутируют с матри-

цами Γ_k . В результате приходим к 20-параметрической группе с 12-ю вещественными и 8-ю мнимыми параметрами, которая представляет собой расширение группы $SO(3,2)$.

Внутренняя симметрия дирак-кэлеровского поля в пространстве размерности 2+1

Уравнение Дирака – Кэлера (ДК), охватывающее полный набор антисимметричных тензорных полей в пространстве $3 + 1$, обычно трактуется либо в качестве геометрического (тензорного) аналога уравнения Дирака, приводящего для ряда квантово-механических задач к совпадающим результатам, либо как альтернативный уравнению Дирака способ описания не только спиновых, но и других внутренних степеней свободы дираковских частиц с единых позиций.

С учетом данного обстоятельства представляет интерес исследование уравнения ДК в пространстве $2 + 1$ на предмет возможности этого уравнения служить в качестве модели геометризованного описания квазичастиц в графене посредством тензорных полей. Для этого необходимо в первую очередь провести анализ внутренней симметрии уравнения ДК.

Тензорная форма уравнения ДК в пространстве $2 + 1$ может быть получена из тензорной формы этого уравнения в пространстве $3 + 1$ путем исключения из последнего всех величин, содержащих измерение x_3 .

В результате получим 8-компонентную систему

$$\begin{aligned} \partial_k \psi_k + m\psi &= 0, \\ \partial_i \psi_{[ki]} + \partial_k \psi + m\psi_k &= 0, \\ -\partial_k \psi_i + \partial_i \psi_k + \partial_j \psi_{[kij]} + m\psi_{[ki]} &= 0, \\ \partial_k \psi_{[ij]} + \partial_j \psi_{[ki]} + \partial_i \psi_{[jk]} + m\psi_{[kij]} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где латинские индексы k, i, j пробегает значения 1, 2, 3; $\psi, \psi_k, \psi_{[ki]}, \psi_{[kij]}$ – соответственно скаляр, вектор, антисимметричные тензоры второго и третьего рангов в пространстве $2 + 1$ (мы используем метрику $g_{ki} = \text{diag}(1, 1, 1)$, поэтому не различаем ковариантные и контравариантные индексы).

Систему (3.1) можно записать в универсальной матричной форме релятивистского волнового уравнения (РВУ) первого порядка:

$$\left(\Gamma_k^{(8)} \partial_k + m \right) \Psi^{(8)} = 0. \quad (3.2)$$

Вводя для тензорных компонент волновой функции

$$\Psi^{(8)} = (\psi, \psi_k, \psi_{[ki]}, \psi_{[kij]}) = (\psi, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_{[12]}, \psi_{[10]}, \psi_{[20]}, \psi_{[012]}) \quad (3.3)$$

собираемый индекс $A = (\bar{0}, k, [ki], [kij])$, матрицы $\Gamma_k^{(8)}$ в (3.2) можно выразить через элементы полной матричной алгебры e^{AB} [10, с. 181] следующим образом:

$$\Gamma_k = e^{\bar{0}k} + e^{k\bar{0}} - e^{i,[ki]} - e^{[ki],i} + \frac{1}{2} e^{[ij],[kij]} + \frac{1}{2} e^{[kij],[ij]}. \quad (3.4)$$

Матрица η билинейной вещественной лоренц-инвариантной формы $\bar{\Psi}\Psi = \Psi^+ \eta \Psi$ в пространстве $2 + 1$ находится тем же способом, что и система (3.1): из матрицы η , записанной в пространстве $3 + 1$ [4], исключаются строки и столбцы, обусловленные третьим пространственным измерением. В результате в базисе (3.3) получим

$$\eta = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1). \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить, что матрицы Γ_k (3.4) и η (3.5) удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\Gamma_k^{(8)}\Gamma_i^{(8)} + \Gamma_i^{(8)}\Gamma_k^{(8)} = 2\delta_{ki}I_8, \quad (3.6)$$

$$\eta\Gamma_4^{(8)} = \Gamma_4^{(8)}\eta, \quad \eta\Gamma_1^{(8)} = -\Gamma_1^{(8)}\eta, \quad \eta\Gamma_2^{(8)} = -\Gamma_2^{(8)}\eta. \quad (3.7)$$

Из тензорного базиса (3.3) с помощью унитарного преобразования

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & -i & -i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & -i & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

можно перейти в фермионный базис, в котором по определению матрицы $\Gamma_k^{(8)}$ имеют вид

$$\Gamma_k^{(8)} = I_2 \otimes \gamma_k, \quad (3.9)$$

где матрицы γ_k определены согласно (2.6).

Для матрицы η в этом базисе получается выражение

$$\eta = \sigma_3 \otimes \gamma_0. \quad (3.10)$$

Очевидно, что систему из двух уравнений Дирака (2.1) также можно представить в виде 8-компонентного РВУ (3.2) с матрицами $\Gamma_k^{(8)}$ (3.9). Если при этом лагранжиан указанной системы выбрать в виде разности лагранжианов каждого из уравнений, т. е. положить

$$L = L_1 - L_2, \quad (3.11)$$

то для матрицы η получим выражение, совпадающее с (3.10).

Исследуем внутреннюю симметрию уравнения ДК (3.2). При этом будем использовать метод, развитый в работах [5; 11], который предполагает переход к вещественной форме записи релятивистских волновых уравнений и позволяет установить наиболее полную группу симметрии лагранжиана.

Беря от уравнения (3.2) комплексное сопряжение и рассматривая сопряженное уравнение совместно с исходным, получим систему, которую можно представить в аналогичном (3.2) виде:

$$(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi = 0. \quad (3.12)$$

Здесь $\Psi = (\Psi^{(8)}, \Psi^{(8)*})$ – 16-компонентная функция-столбец и для матриц Γ_k имеют место выражения

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \otimes \gamma_0, \quad \Gamma_1 = \gamma_0 \otimes \gamma_1, \quad \Gamma_2 = I_4 \otimes \gamma_2. \quad (3.13)$$

Переходя к представлению, в котором вещественные и мнимые компоненты волновой функции разделены, т. е.

$$\Psi = (\Psi_r^{(8)}, \Psi_i^{(8)}), \quad \Psi_r^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^{(8)} + \Psi^{(8)*}), \quad \Psi_i^{(8)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^{(8)} - \Psi^{(8)*}), \quad (3.14)$$

вместо (3.12) получим для матриц Γ_k выражения, совпадающие с (2.9).

Лагранжиан уравнения (3.12)

$$L = -\bar{\Psi}(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi = -\Psi^+\eta(\Gamma_k \partial_k + m)\Psi \quad (3.15)$$

эквивалентен лагранжиану исходного уравнения (3.2) при выборе матрицы билинейной формы η в представлении (3.14) в виде

$$\eta = I_2 \otimes \eta^{(8)} = I_2 \otimes \sigma_3 \otimes \gamma_0 = -i\gamma_1\gamma_2 \otimes \gamma_0. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.12) с волновой функцией (3.14), матрицами Γ_k (2.9) и лагранжианом будем называть вещественной формой исходного уравнения ДК в пространстве $2 + 1$, поскольку соответствующая этому уравнению тензорная система является вещественной. Данную форму мы и будем использовать при исследовании свойств внутренней симметрии уравнения ДК в указанном пространстве.

Преобразования внутренней симметрии Q , оставляющие инвариантным лагранжиан (3.15), должны коммутировать в матрицами Γ_k и удовлетворять условию (2.22), а также сохранять структуру (3.14) в том смысле, что если Ψ_N – вещественная (мнимая) компонента, то и $\Psi'_N(x_k) = Q_{NM}\Psi_M(x_k)$ также должна быть вещественной (мнимой).

Наиболее общий вид преобразования Q , удовлетворяющего условию коммутации с матрицами Γ_k , проще всего определить в фермионном базисе, в котором матрицы Γ_k имеют структуру (2.13). Переход из базиса (3.14) в фермионный базис в данном случае можно осуществить посредством унитарного преобразования

$$A = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 + i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 - i\gamma_2)], \quad (3.17)$$

$$A^{-1} = A^+ = \frac{1}{2}[I_4 \otimes (I_4 - i\gamma_2) + \gamma_5 \otimes (I_4 + i\gamma_2)].$$

Условию коммутации с Γ_k удовлетворяют матрицы Q двух типов, имеющие в фермионном базисе вид

$$Q_1 = q^{(1)} \otimes I_4, \quad Q_2 = q^{(2)} \otimes i\gamma_3\gamma_5. \quad (3.18)$$

Здесь $q^{(1)}, q^{(2)}$ – произвольные комплексные матрицы 4×4 .

Параметризуя матрицы $q^{(1)}, q^{(2)}$ посредством базисных элементов $e_N (N = 0 \div 15)$ в пространстве 4×4

$$e^N: I_4, \gamma_k, \gamma_3, \gamma_5, i\gamma_k\gamma_5, i\gamma_3\gamma_5, i\gamma_{[k}\gamma_{i]}, i\gamma_{[k}\gamma_{3]}, \quad (3.19)$$

получим 32-параметрическое преобразование, задаваемое базисными операторами

$$J_N = e_N \otimes I_4, \quad L_N = e_N \otimes i\gamma_3\gamma_5. \quad (3.20)$$

Применяя к бесконечно малым преобразованиям

$$\delta Q_1 = 1 + \omega_N J_N, \quad \delta Q_2 = 1 + \theta_N L_N, \quad (3.21)$$

условие сохранения структуры (3.14) волновой функции, получим ограничения на параметры ω_N, θ_N :

$$\begin{aligned} &\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_9, \omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{15}, \\ &\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_4, \theta_6, \theta_7, \theta_9, \theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{15} - \text{вещественные;} \quad (3.22) \\ &\omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{10}, \omega_{13}, \omega_{14}, \theta_3, \theta_5, \theta_8, \theta_{10}, \theta_{13}, \theta_{14} - \text{мнимые.} \end{aligned}$$

Генератор L_0 коммутирует со всеми остальными генераторами и соответствует преобразованию типа γ_5 -преобразований для безмассового уравнения Дирака. Генераторы J_1, \dots, J_{15} с девятью вещественными и шестью мнимыми параметрами образуют

группу, изоморфную группе $SO(3,3)$. Генераторы L_1, \dots, L_{15} представляют собой расширение этой группы. В результате имеем 30-параметрическую непрерывную группу преобразований, которая характеризуется следующей структурой перестановочных соотношений для некоммутирующих пар генераторов:

$$[J_N, J_M] \sim J_K, [L_N, L_M] \sim J_K, [J_N, L_M] \sim L_K, (N, M, K = 1 \div 15). \quad (3.23)$$

Проверка условия (2.22), принимающего для бесконечно малых однопараметрических преобразований (3.21) вид

$$(\omega_N J_N)^+ \eta = -\omega_N \eta J_N, (\theta_N L_N)^+ \eta = -\theta_N \eta L_N, \quad (3.24)$$

показывает, что оно выполняется для преобразований с генераторами $J_1, J_3, J_4, J_5, J_6, J_8, J_9, J_{12}, J_{13}, J_{15}, L_1, L_3, L_4, L_5, L_6, L_8, L_9, L_{12}, L_{13}, L_{15}$.

Следовательно, внутренняя симметрия лагранжиана уравнения ДК в пространстве $2 + 1$ описывается 20-параметрической непрерывной группой, генераторы которой удовлетворяют перестановочным соотношениям вида (3.23).

Эта группа представляет собой расширение 10-параметрической группы $SO(3,2)$, задаваемой генераторами $J_1, J_3, J_4, J_5, J_6, J_8, J_9, J_{12}, J_{13}, J_{15}$ с шестью вещественными ($\omega_1, \omega_4, \omega_6, \omega_9, \omega_{12}, \omega_{15}$) и четырьмя мнимыми ($\omega_3, \omega_5, \omega_8, \omega_{13}$) параметрами.

В силу сказанного ранее точно такая же симметрия имеет место в пространстве $2 + 1$ и для системы из двух уравнений Дирака с лагранжианом (3.11).

Заключение

Таким образом, как и в обычном четырехмерном многообразии Минковского, в пространстве $2 + 1$ уравнение ДК может выступать в качестве альтернативы (либо геометрического аналога) уравнению Дирака. Новизна же ситуации заключается в том, что в пространстве $2 + 1$ уравнению ДК соответствует система не из четырех, а из двух уравнений Дирака, что делает его привлекательным с точки зрения возможности описания решеточной структуры графена. Отметим, что установленная симметрия существенно шире $SU(2) \otimes SU(2)$ -симметрии, обсуждаемой в работах [2; 3] применительно к системе из двух уравнений Дирака.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 326 с.
2. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E. V. Gorbunov [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. 66. – Art. 045108.
3. Gusynin, V. P. AC Conductivity of graphene: from tight-binding model to $(2 + 1)$ -dimensional quantum electrodynamics / P. V. Gusynin // Int. J. Mod. Phys. – 2007. – Vol. 21. – P. 4611–4658.
4. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск : БГУ. – 2007. – 196 с.
5. Плетюхов, В. А. Вещественное поле Дирака – Кэлера и дираковские частицы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2009. – № 2. – С. 3–7.
6. Плетюхов, В. А. Внутренняя симметрия уравнения Дирака в пространстве $2 + 1$ / В. А. Плетюхов // Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2011. – № 1. – С. 30–34.

7. Плетюхов, В. А. Внутренняя симметрия дираковских и дирак-кэлеровских полей в пространстве $2 + 1$ / В. А. Плетюхов, П. П. Андрусевич // Вучон. зап. Брэсц. ун-та. – 2013. – Вып. 9, ч. 2. Прыродазн. навукі. – С. 23–44.
8. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, M. De J. A. Galicia // Few Body Syst. – 2005. – Vol. 37. – P. 71–78.
9. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / S. K. Novoselov [et al.] // Science. – 2004. – Vol. 306. – P. 666–669.
10. Богущ, А. А. Введение в теорию классических полей / А. А. Богущ, Л. Г. Мороз. – Минск, 1968. – 368 с.
11. Плетюхов, В. А. Внутренняя симметрия восьмикомпонентного дираковского поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, П. П. Андрусевич // Вест. НАН Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 89–94.

REFERENCES

1. Plietukhov, V. A. Rielativistskije volnovyje uravnenija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielarus. navuka, 2015. – 326 s.
2. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems / E. V. Gorbar [et al.] // Phys. Rev. – 2002. – Vol. 66. – Art. 045108.
3. Gusynin, V. P. AC Conductivity of grapheme: from tight-binding model to $(2 + 1)$ – dimensional quantum electrodynamics / P. V. Gusynin // Int. J. Mod. Phys. – 2007. – Vol. 21. – P. 4611–4658.
4. Strazhev, V. I. Uravnenije Diraka – Keliera. Klassichieskoje polie / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Cionienko. – Minsk : BGU. – 2007. – 196 s.
5. Plietukhov, V. A. Vieshchiestviennoje polie Diraka – Keliera i dirakovskije chasticity / V. A. Plietukhov, V. I. Strazhev // Viestn. BGU. Ser. 1. – 2009. – № 2. – S. 3–7.
6. Plietukhov, V. A. Vnutrienniaja simmetrija uravnenija Diraka v prostranstvie $2 + 1$ / V. A. Plietukhov // Viesn. Besc. un-ta. Ser. 4, Fizika. Matematyka. – 2011. – № 1. – S. 30–34.
7. Plietukhov, V. A. Vnutrienniaja simmetrija dirakovskikh i dirak-kelievovskikh poliej v prostranstvie $2 + 1$ / V. A. Plietukhov, P. P. Andrusievich // Vuchon. zap. Besc. un-ta. – 2013. – Vyp. 9, ch. 2. Pryrodazn. navuki. – S. 23–44.
8. Bashir, A. Fermions in odd space-time dimensions: back to basics / A. Bashir, M. De J. A. Galicia // Few Body Syst. – 2005. – Vol. 37. – P. 71–78.
9. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / S. K. Novoselov [et al.] // Science. – 2004. – Vol. 306. – P. 666–669.
10. Bogush, A. A. Vviedienije v tieoriju klassichieskikh poliej / A. A. Bogush, L. G. Moroz. – Minsk. – 1968. – 368 s.
11. Plietukhov, V. A. Vnutrienniaja simmetrija vos'mikomponentnogo dirakovskogo polia / V. A. Plietukhov, V. I. Strazhev, P. P. Andrusievich // Vies. NAN Bielarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2010. – № 4. – S. 89–94.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 03.10.2022

УДК 517.9

Марина Геннадьевна Кот

канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Marina Kot

PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor of Department of Algebra,
Geometry and Mathematical Modelling of the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: mtorkaylo@mail.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДЕЛЬТА-ОБРАЗНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Уравнения и системы, записываемые в виде $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$, возникают в разных приложениях и интенсивно изучаются. Входящее в это уравнение произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций, поэтому одной из основных задач является придание смысла выражению в левой части уравнения, т. е. фактически построение оператора, который соответствует данному формальному выражению. Это достигается с помощью специальных аппроксимаций оператора умножения на δ -функцию. Для исследования уравнений с δ -образными коэффициентами применяется подход, основные этапы которого: построение аппроксимаций рассматриваемого выражения с помощью операторов конечного ранга; нахождение явного вида резольвенты аппроксимирующего семейства; нахождение предела резольвенты и выделение случаев резонанса, когда предельный оператор не совпадает с $-\Delta$; описание спектра построенных предельных операторов; исследование поведения собственных значений аппроксимирующих операторов. Цель данной работы заключается в исследовании асимптотического поведения аппроксимирующих семейств операторов.

Ключевые слова: обобщенная функция; собственные значения; собственные вектор-функции, метод Ньютона; асимптотика, резонанс, оператор.

Asymptotics of Solutions to Some Differential Equations with Delta-Shaped Coefficients

The equations can be written as $L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f$ there are in different applications and studied intensively. In this equation work δu not determined in the classical theory of generalized functions, so one of the main objectives is to give meaning to the expression on the left side of the equation, that is, the actual construction of the operator, which corresponds to a given formal expression. This is achieved by special approximations multiplication by δ -function. For the study of equations with δ -shaped coefficients an approach is used, the main steps of which are: the construction of approximations considered expressions with operators of finite rank; finding the explicit form approximating the resolvent family; resolvent limit of determination and allocation of cases of resonance; description of the spectrum constructed limit operators; study of the behavior of the eigenvalues of approximating operators. The purpose of this work is to study the asymptotic behavior of approximating families of operators.

Key words: generalized function; eigenvalues; behavior of vector-functions, Newton's method; asymptotic behavior, resonance, operator.

Введение

В ряде задач оптимального управления управляющие воздействия имеют импульсный характер и описываются с помощью δ -функций, что приводит к уравнениям, содержащим обобщенные функции.

С классической точки зрения понятие решения таких уравнений не определено, т. к. обычно у такого уравнения нет гладких решений, а при подстановке в уравнение негладкой функции появляется произведение на обобщенную функцию, которое не определено.

К этому классу относятся также стохастические дифференциальные уравнения, т. к. в них входят производные от заданных случайных процессов, которые не являются обычными функциями.

Поэтому при исследовании таких уравнений в первую очередь возникает вопрос о том, какую функцию можно считать решением уравнения.

Одним из основных подходов решения задач, связанных с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций, является метод введения новых объектов, которые называют новыми обобщенными функциями или мнемо-функциями [1]. В этой теории основным объектом являются семейства f_ε гладких функций, зависящие от малого параметра ε , а мнемофункция есть класс эквивалентных семейств, где отношение эквивалентности задано таким образом, что на множестве классов эквивалентности корректно определена операция умножения. Мнемофункции связаны с обобщенными функциями с помощью отношения ассоциированности.

Работа посвящена исследованию одного класса систем дифференциальных уравнений с частными производными на R^3 , содержащих в коэффициентах δ -функцию Дирака. Это системы, символически записываемые в виде

$$-\Delta u + A(\varepsilon)\delta u = f, \quad (1)$$

где Δ – есть оператор Лапласа, а коэффициент $A(\varepsilon)$ есть матрица, элементы которой называются константами связи.

Точечное взаимодействие описывается с помощью операторов вида $Lu = -\Delta u + q_\varepsilon u$, где о потенциале q_ε известно лишь то, что это функция, отличная от нуля в ε -окрестности заданной точки при некотором малом ε . Такой потенциал в смысле обобщенных функций близок к $a(\varepsilon)\delta$, где $a(\varepsilon) = \int q_\varepsilon(x) dx$. Поэтому соответствующие уравнения символически записывают в виде (1).

Выражение в левой части уравнения (1) является формальным, т. к. произведение δu не определено в классической теории обобщенных функций. Определить понятие решения такого уравнения эквивалентно сопоставлению этому формальному выражению оператора в пространстве $L_2(R^3)$, что обычно нужно в квантовой механике.

Подход к интерпретации формального выражения из (1) как оператора в пространстве $L_2(R^3)$ был предложен в [2].

В данной работе задача о поведении семейств операторов, аппроксимирующих формальные выражения, рассматривается в векторном случае для систем дифференциальных уравнений вида (1). При переходе от одного уравнения к системам обычно возникают дополнительные сложности, в частности, множество расширений оператора L_0 более обширно – уже в случае системы из двух уравнений это множество зависит от четырех параметров. В связи с этим одной из целей работы является описание отличий векторного случая от скалярного. Исследование проведено с помощью аппроксимации оператора умножения на δ -функцию операторами конечного ранга.

Кроме того, в прикладных задачах встречаются аппроксимирующие операторы с конкретным малым ε . Поэтому представляет интерес информация о свойствах таких операторов при малых ε , т. е. описание асимптотического поведения аппроксимирующих операторов, в частности, их собственных значений и собственных функций.

Основная часть

Рассмотрим формальные выражения

$$L_0 u = -\Delta u + A(\varepsilon)\delta u, \quad (2)$$

соответствующие системам из двух уравнений, т. е. когда $u = (u_1, u_2)$, а коэффициент $A(\varepsilon)$ является матрицей

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{11}(\varepsilon) & a_{12}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & a_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Пусть φ – финитная функция из пространства Шварца $D(R^3)$ такая, что $\int \varphi(x) dx = 1$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Здесь и далее рассматриваются интегралы по всему пространству R^3 . Покажем, что семейство операторов

$$L_\varepsilon u = -\Delta u + A(\varepsilon) \int u(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x)$$

аппроксимирует (2); построим резольвенты $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$, для описания которых введем ряд обозначений.

Пусть $R_0(\lambda)$ есть резольвента невозмущенного оператора $R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}$. Эта резольвента действует по формуле $R_0(\lambda)f = E_\lambda * f$, где $*$ – свертка функций, а $E_\lambda(x)$ – фундаментальное решение для оператора $-\Delta u - \lambda u$, заданное формулой

$$E_\lambda(x) = \frac{1}{4\pi\|x\|} e^{-\mu\|x\|},$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\operatorname{Re} \mu > 0$. Обозначим

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$f_1 = \int (R_0(\lambda)f_1)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy,$$

$$f_2 = \int (R_0(\lambda)f_2)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

$$b(\varepsilon, \lambda) = \int (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(y) \varphi_\varepsilon(y) dy. \quad (4)$$

$$\det A(\varepsilon) = a = a_{11}(\varepsilon)a_{22}(\varepsilon) - a_{12}(\varepsilon)a_{21}(\varepsilon),$$

$$R_0(\lambda)f = \begin{pmatrix} R_0(\lambda)f_1 \\ R_0(\lambda)f_2 \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Резольвента аппроксимирующего оператора L_ε имеет вид

$$(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} f = R_0(\lambda)f - (S(\varepsilon, \lambda) \cdot F) \cdot (R_0(\lambda)\varphi_\varepsilon)(x), \quad (5)$$

где матрица-функция

$$S(\varepsilon, \lambda) = \left[[A(\varepsilon)]^{-1} + b(\varepsilon, \lambda)I \right]^{-1}, \quad (6)$$

или в явном виде

$$S(\varepsilon, \lambda) = \frac{a}{1 + b(\varepsilon, \lambda)(a_{22}(\varepsilon) + a_{11}(\varepsilon)) + ab^2(\varepsilon, \lambda)} \begin{bmatrix} \frac{a_{11}(\varepsilon)}{a} + b(\varepsilon, \lambda) & \frac{a_{12}(\varepsilon)}{a} \\ \frac{a_{21}(\varepsilon)}{a} & \frac{a_{22}(\varepsilon)}{a} + b(\varepsilon, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Резольвента определена, если $\lambda \notin R^+$, $1 + b(\varepsilon, \lambda)(a_{22}(\varepsilon) + a_{11}(\varepsilon)) + ab^2(\varepsilon, \lambda) \neq 0$ [3].

Далее найдем предел построенных резольвент, при этом основной задачей является нахождение матрицы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S(\varepsilon, \lambda) := D(\lambda) \quad (7)$$

и описание всех случаев резонанса, т. е. получение условий на матрицу коэффициентов $A(\varepsilon)$, при которых $D(\lambda) \neq 0$.

Поскольку, согласно (6) $S(\varepsilon, \lambda) = [F(\varepsilon, \lambda)]^{-1}$, где $F(\varepsilon, \lambda)$ есть заданная матрица-функция, задачу о нахождении предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(\varepsilon, \lambda)]^{-1}$$

рассмотрим в общем виде для матриц-функций $F(\varepsilon, \lambda)$ произвольной размерности. Общий подход заключается в приведении матриц-функций к нормальной диагональной форме. Пусть Ω есть область в C и $A(\Omega)$ – кольцо функций, аналитических в Ω .

Теорема 1. Для любой матрицы-функций F вида

$$F(\mu, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\mu) \varepsilon^k, \quad (8)$$

где коэффициенты $F_k(\mu)$ есть матрицы с элементами из $A(\Omega)$, существуют матрицы-функции $G(\mu, \varepsilon)$ и $T(\mu, \varepsilon)$, приводящие $F(\mu, \varepsilon)$ к диагональному виду:

$$G(\mu, \varepsilon)F(\mu, \varepsilon)T(\mu, \varepsilon) = \text{diag} \{ \varepsilon^{v_1} f_1(\mu), \varepsilon^{v_2} f_2(\mu), \dots, \varepsilon^{v_n} f_n(\mu) \},$$

где функции $f_k(\mu)$ являются элементами кольца $A(\Omega)$, полученного присоединением к $A(\Omega)$ некоторой функции вида $\frac{1}{h}$, $h \in A(\Omega)$.

Это позволяет дать общий ответ на вопрос о поведении при $\varepsilon \rightarrow 0$ обратных к матрицам вида

$$F_1(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{k_0}} F(\mu, \varepsilon),$$

где $F(\mu, \varepsilon)$ имеет вид (8).

Теорема 2. Пусть нормальная форма матрицы-функции $F(\mu, \varepsilon)$ есть

$$\text{diag} \{ \varepsilon^{v_1} f_1(\mu), \varepsilon^{v_2} f_2(\mu), \dots, \varepsilon^{v_n} f_n(\mu) \},$$

где $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем:

1) если $k_0 < v_1$, то $[F_1(\mu, \varepsilon)]^{-1}$ неограниченно возрастает;

2) если $k_0 = \nu_1$, то существует конечный ненулевой предел $[F_1(\mu, \varepsilon)]^{-1}$;

3) если $k_0 > \nu_1$, то предел $[F_1(\mu, \varepsilon)]^{-1}$ равен 0.

Матрицы-функции, входящие в выражения для резольвент аппроксимирующих операторов, имеют специальный вид

$$F(\mu, \varepsilon) = R(\varepsilon) + b(\varepsilon, \mu)I,$$

где $R(\varepsilon) = [A(\varepsilon)]^{-1}$, а $b(\varepsilon, \mu)$ задана формулой (4) и допускает разложение

$$b(\varepsilon, \mu) = M_{-1} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\mu}{4\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} M_k \mu^{k+1} \varepsilon^k, \quad (9)$$

где $\mu^2 = -\lambda$, $\text{Re } \mu > 0$ и

$$M_k = \frac{1}{4\pi} \int \left(\int \varphi(y) \varphi(x-y) dy \right) |x|^k dx.$$

Задача заключается в нахождении тех матриц $R(\varepsilon)$, при которых существует ненулевой конечный предел обратных. Полученный результат зависит от вида рассматриваемой матрицы $R(\varepsilon)$ и по-разному формулируется, если разложение $R(\varepsilon)$ начинается с $\frac{1}{\varepsilon}$ и разложение начинается с $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Для каждого из этих случаев получены соотношения (условия резонанса), при которых

$$D(\mu) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [R(\varepsilon) + b(\varepsilon, \mu)I]^{-1} \neq 0.$$

Для формулировки результата рассмотрим разложение определителя по степеням ε :

$$\det F(\mu, \varepsilon) = \sum_k \Delta_k(\mu) \varepsilon^k. \quad (10)$$

Для матриц размерности два первые из функций $\Delta_k(\mu)$ выписаны в явном виде.

Теорема 3. Пусть

$$R(\varepsilon) = R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + R^{(1)} \varepsilon + \dots,$$

где $R^{(-1)} \neq 0$. Резонанс имеет место в следующих случаях.

1) Если $\Delta_{-2} = 0, \Delta_{-1}(\mu) \neq 0$ и $F^{-1} \neq 0$, то

$$D(\mu) = \frac{1}{\Delta_{-1}(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(-1)} + M_{-1} & -R_{12}^{(-1)} \\ -R_{21}^{(-1)} & R_{11}^{(-1)} + M_{-1} \end{pmatrix} \neq 0.$$

2) Если $\Delta_{-2} = 0, \Delta_{-1} = 0, F^{-1} = 0$ и при этом $\Delta_0(\mu) \neq 0$, то

$$D(\mu) = \frac{1}{\Delta_0(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(0)} - \frac{\mu}{4\pi} & -R_{12}^{(0)} \\ -R_{21}^{(0)} & R_{11}^{(-1)} - \frac{\mu}{4\pi} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Теорема 4. Пусть

$$R(\varepsilon) = R^{(-2)} \frac{1}{\varepsilon^2} + R^{(-1)} \frac{1}{\varepsilon} + R^{(0)} + \dots,$$

где $R^{(-2)} \neq 0$. Резонанс имеет место только при условиях

$$\Delta_{-4} = 0, \Delta_{-3} = 0, \Delta_{-2}(\mu) \neq 0,$$

и тогда

$$D(\mu) = \frac{1}{\Delta_{-2}(\mu)} \begin{pmatrix} R_{22}^{(-2)} & -R_{12}^{(-2)} \\ -R_{21}^{(-2)} & R_{11}^{(-2)} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Для перехода от условий на матрицы $R(\varepsilon)$ к условиям на исходные матрицы коэффициентов $A(\varepsilon)$ построим их разложения в зависимости от вида $R(\varepsilon)$. Обнаружено существенное отличие от скалярного случая, заключающееся в том, что в скалярном случае условия резонанса могут быть выполнены только для коэффициентов вида $a(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \dots$, а в векторном случае условия резонанса могут быть выполнены, когда $A(\varepsilon)$ имеет конечный предел или даже стремится к бесконечности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Далее детально рассмотрим случай, когда коэффициент $A(\varepsilon)$ имеет вид

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}(\varepsilon) \\ a_{21}(\varepsilon) & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Специальный вид матрицы коэффициентов соответствует тому, что в рассматриваемой системе вторая компонента воздействует на первую, а первая воздействует на вторую. Пусть

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} &= k_{-2}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + o(1), \\ \frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} &= k_{-2}^2 \frac{1}{\varepsilon^2} + k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + o(1). \end{aligned} \quad (12)$$

Теорема 5. Если для матрицы коэффициентов выполнено (12), то предел $D(\lambda)$ может быть конечным и ненулевым только в трех следующих случаях.

$$1) \ k_{-2}^1 = 0, k_{-1}^1 = 0, \text{ т.е. } \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} = k_0^1 + o(1).$$

Тогда, если $k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2 \neq 0$, то

$$D(\mu) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и предел резольвент есть

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) f - \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_{-2}^2}{k_0^1 k_{-2}^2 - M_{-1}^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^1(0) \\ u_0^2(0) \end{pmatrix} \cdot E(\lambda).$$

2) $k_{-2}^1 = 0, k_{-2}^2 = 0$, т. е.

$$\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} = k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} = k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + o(\varepsilon),$$

и при этом выполнено условие резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$.

Тогда

$$D(\mu) = \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M_{-1} \mu}{2\pi}} \begin{pmatrix} M_{-1} & k_{-1}^2 \\ k_{-1}^1 & M_{-1} \end{pmatrix}$$

и предел резольвент есть

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) f - \frac{1}{k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2 + \frac{M_{-1} \mu}{2\pi}} \begin{pmatrix} M_{-1} & k_{-1}^2 \\ k_{-1}^1 & M_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^1(0) \\ u_0^2(0) \end{pmatrix} \cdot E(\lambda).$$

3) $k_{-2}^2 = 0, k_{-1}^2 = 0$, т. е.

$$\frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} = k_0^2 + o(1).$$

Тогда, если $k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}^2 \neq 0$, то

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}^2} \end{pmatrix}$$

и предел резольвент есть

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) f - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{-2}^1}{k_0^2 k_{-2}^1 - M_{-1}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^1(0) \\ u_0^2(0) \end{pmatrix} \cdot E(\lambda).$$

Исследуем поведение собственных значений аппроксимирующих операторов L_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эти собственные значения определяются как неявные функции из уравнения

$$f(\varepsilon, \lambda) := \frac{1}{a_{12}(\varepsilon) a_{21}(\varepsilon)} - b^2(\varepsilon, \lambda) = 0, \quad (13)$$

где $b(\varepsilon, \lambda)$ зависит от способа аппроксимации. Здесь левая часть $f(\varepsilon, \lambda)$ есть аналитическая функция от ε, μ при $\varepsilon \neq 0$. Уравнение (13) устанавливает связь между способом аппроксимации и поведением коэффициентов и задает зависимость собственных значений от ε .

У уравнений вида (13), как правило, имеется несколько гладких ветвей решений. Задача заключается в описании поведения этих ветвей в зависимости от выбранных коэффициентов и выбранной функции φ . Проанализируем уравнение (13) с помощью диаграмм Ньютона, соответствующих рассматриваемым функциям $f(\varepsilon, \lambda)$.

Диаграмма Ньютона строится по функции $f(x, y)$, допускающей разложение

$$f(x, y) = \sum c_{kj} x^k y^j.$$

В методе Ньютона ветви решений уравнения $f(x, y) = 0$ строятся с помощью граней из диаграммы Ньютона.

Обнаружено, что разным случаям резонанса соответствуют разные диаграммы Ньютона для функций $f(\varepsilon, \lambda)$ из (13) и, соответственно, разные поведения собственных значений.

Наиболее интересным является второй случай резонанса (рисунок 1), когда $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$.

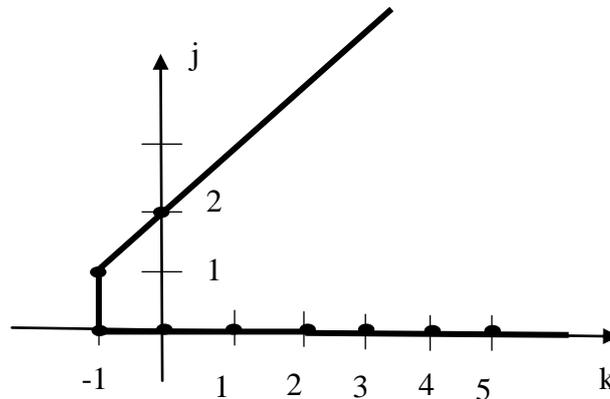


Рисунок 1. – Диаграмма Ньютона для уравнения (13) в случае второго резонанса

Здесь диаграмма Ньютона содержит вертикальный отрезок и наклонную полу-прямую, что позволяет получить следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть

$$\frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} = k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + o(\varepsilon),$$

$$\frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} = k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + o(\varepsilon)$$

и выполнено условие резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$. Тогда существует одна ветвь собственных значений $\lambda_0(\varepsilon)$, имеющая конечный предел $\lambda_0 = -\mu_0^2$, где

$$\mu_0 = \frac{-2\pi(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2)}{M_{-1}}.$$

Остальные ветви решений, если они существуют, уходят в бесконечность со скоростью $\frac{1}{\varepsilon}$ [4].

Это согласовано с тем, что в этом случае резонанса предельный оператор имеет одно собственное значение.

В общем случае (рисунок 2) у диаграммы Ньютона таких отрезков или полупрямых не существует, что соответствует тому, что при малых ε оператор L_ε не имеет собственных значений.

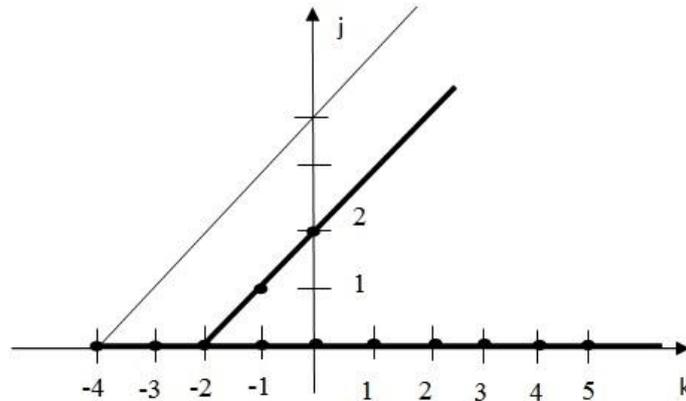


Рисунок 2. – Диаграмма Ньютона для уравнения (13) в общем случае

Таким образом, различие в виде диаграмм в разных случаях резонанса приводит к различному поведению собственных значений.

Каждой из ветвей $\lambda_j(\varepsilon)$ решений уравнения (13) соответствует семейство собственных вектор-функций. Собственные вектор-функции при фиксированном ε есть ненулевые решения системы

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 - \lambda_j(\varepsilon)u_1 + a_{12}(\varepsilon) \int u_2(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x) &= 0, \\ -\Delta u_2 - \lambda_j(\varepsilon)u_2 + a_{21}(\varepsilon) \int u_1(y) \varphi_\varepsilon(y) dy \varphi_\varepsilon(x) &= 0. \end{aligned}$$

Решения этой системы, имеющие в $L_2(R^3, C^2)$ норму 1 при всех ε , строятся в явном виде:

$$\begin{aligned} v_1(x, \varepsilon) &= \frac{-a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda_j(\varepsilon))(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)}{\sqrt{[1+(a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda_j(\varepsilon)))^2] \int [(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)]^2 dx}}, \\ v_2(x, \varepsilon) &= \frac{(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)}{\sqrt{[1+(a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda_j(\varepsilon)))^2] \int [(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)]^2 dx}}. \end{aligned} \tag{14}$$

Поведение семейства функций $(R_0(\lambda_j(\varepsilon))\varphi_\varepsilon)(x)$ и выражений $a_{12}(\varepsilon)b(\varepsilon, \lambda_j(\varepsilon))$ зависит от поведения ветви $\lambda_j(\varepsilon)$ и от поведения коэффициента $a_{12}(\varepsilon)$. В соответствии с описанными выше качественно различными случаями поведения $\lambda_j(\varepsilon)$ получаем разные описания асимптотического поведения собственных вектор-функций (14).

Самый содержательный результат получается в случае второго резонанса, когда одна из ветвей имеет конечный предел, а остальные стремятся к бесконечности.

Теорема 7. Пусть

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} &= k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + o(\varepsilon), \\ \frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} &= k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

выполнено условие резонанса $k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$ и $\lambda_0(\varepsilon)$ есть ветвь собственных значений, имеющая конечный предел $\lambda_0(0) = -\mu_0^2$, где

$$\mu_0 = \frac{-2\pi(k_{-1}^1 k_0^2 + k_0^1 k_{-1}^2)}{M_{-1}}.$$

Если $-\mu_0^2$ не лежит на положительной полуоси, то семейство собственных вектор-функций (14) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к вектор-функции

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = C \frac{1}{4\pi \|x\|} e^{-\mu_0 \|x\|} \begin{pmatrix} \frac{a_1^1 M_{-1}}{\sqrt{1 + [a_1^1 M_{-1}]^2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1 + [a_1^1 M_{-1}]^2}} \end{pmatrix}, C = \left\| \frac{e^{-\mu_0 \|x\|}}{4\pi \|x\|} \right\|^{-1}, \quad (15)$$

которая является собственной вектор-функцией предельного оператора.

Для всех других ветвей собственных значений предел семейства нормированных собственных вектор-функций не существует.

Теорема 8. Пусть

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{12}(\varepsilon)} &= k_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^1 + k_1^1 \varepsilon + o(\varepsilon), \\ \frac{1}{a_{21}(\varepsilon)} &= k_{-1}^2 \frac{1}{\varepsilon} + k_0^2 + k_1^2 \varepsilon + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

выполнено условие резонанса

$$k_{-1}^1 k_{-1}^2 = M_{-1}^2$$

и $\lambda_j(\varepsilon)$ есть одна из ветвей собственных значений, стремящихся к бесконечности. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ нормированное семейство собственных вектор-функций сходится почти всюду и слабо к нулю и, следовательно, не имеет предела в пространстве L_2 .

Заключение

Таким образом, найден явный вид предела в смысле резольвентной сходимости семейства операторов, аппроксимирующего формальное выражение с δ -образными коэффициентами, получены условия резонанса, выявлены отличия от скалярного случая.

Получен общий вид условий резонанса для семейства матриц-функций, зависящих от двух переменных, на основе приведения их к нормальной форме.

Кроме того, описано асимптотическое поведение собственных значений и вектор-функций для различных случаев резонанса. В частности, показано, что непрерывная ветвь собственных значений может иметь конечный предел только в том случае, если предельный оператор имеет собственные значения, а собственные функции, соответствующие ветвям, уходящим в бесконечность, слабо сходятся к нулю и при этом не имеют предела в смысле сходимости по норме [4].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверлио [и др.]. – М. : Мир, 1991. – 566 с.
2. Березин, Ф. А. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / Ф. А. Березин, Л. Д. Фаддеев // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137, № 5. – С. 1011–1014.
3. Кот, М. Г. О резольвентной сходимости операторов, аппроксимирующих систему уравнений с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. БГУ. Физика. Математика. Информатика. – 2015. – № 1. – С. 111–117.
4. Кот, М. Г. Асимптотика собственных вектор-функций операторов, аппроксимирующих дифференциальные уравнения с δ -образными коэффициентами / М. Г. Кот // Вестн. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2017. – № 3. – С. 15–26.
5. Романчук, Т. А. Явление резонанса для матрично-значных функций / Т. А. Романчук // Вестн. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2008. – № 2. – С. 8–16.
6. Антоневиц, А. Б. Аппроксимации операторов с дельта-образными коэффициентами / А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук // Актуальные проблемы математики : сб. науч. тр. ГрГУ им. Я. Купалы ; редкол.: Е. А. Ровба [и др.]. – Гродно, 2008. – С. 11–28.
7. Антоневиц, А. Б. Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций / А. Б. Антоневиц, Т. А. Романчук. – Саарбрюккен, 2012. – 142 с.
8. Кащенко, И. С. Асимптотическое разложение решений уравнений : метод указания / И. С. Кащенко. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 44 с.
9. Васильев, В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума / В. А. Васильев // Функцион. анализ и его прил. – 1977. – Т. 11, вып. 3. – С. 1–11.
10. Забрейко, П. П. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Тр. ин-та математики НАН Беларуси. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 32–45.
11. Забрейко, П. П. Диаграммы Ньютона и алгебраические кривые. II / П. П. Забрейко, А. В. Кривко-Красько // Тр. ин-та математики НАН Беларуси. – 2015. – Т. 23, № 1. – С. 64–75.

REFERENCES

1. Rieszajemyje modeli v kvantovoj mekhanikie / S. Al'beverio [i dr.]. – M. : Mir, 1991. – 566 s.
2. Bieriezin, F. A. Zamiechanije ob uravnenii Shredingiera s singuliarnym potencialom / F. A. Bieriezin, L. D. Faddiejev // Dokl. AN SSSR. – 1961. – T. 137, № 5. – S. 1011–1014.
3. Kot, M. G. O riezol'vientnoj skhodimosti opieratorov, approksimirujushchikh sistiemu uravnenij s δ -obraznymi koefficijentami / M. G. Kot // Viestn. BGU. Fizika. Matematika. Informatika. – 2015. – № 1. – S. 111–117.
4. Kot, M. G. Asimptotika sobstviennykh viektor-funkcij opieratorov, approksimirujushchikh diffierencial'nyje uravnenija s δ -obraznymi koefficijentami / M. G. Kot // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2017. – № 3. – S. 15–26.
5. Romanchuk, T. A. Javlienije riezonansa dlia matrichno-znachnykh funkcij / T. A. Romanchuk // Vies. Nac. akad. navuk Bielarusi. Ser. fiz.-mat. navuk. – 2008. – № 2. – S. 8–16.
6. Antonievich, A. B. Approksimacii opieratorov s delta-obraznymi koefficijentami / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk // Aktual'nyje problemi matematiki : sb. nauch. tr. GrGU im. Ya. Kupaly ; riedkol.: Ye. A. Rovba [i dr.]. – Grodno, 2008. – S. 11–28

7. Antonievich, A. B. Uravnienija s delta-obraznymi koefficientami: mietod koniechnomiernyh approksimacij / A. B. Antonievich, T. A. Romanchuk. – Saarbrückien, 2012. – 142 s.
8. Kashchienko, I. S. Asimptotichieskoje razlozhenije rieshenij uravnienij : mietod ukazaniya / I. S. Kashchienko. – Yaroslavl' : YarGU, 2011. – 44 s.
9. Vasil'jev, V. A. Asimptotika eksponencial'nykh integralov, diagramma N'jutona i klasifikacija tochiek minimuma // Funkcion. analiz i jego pril. – 1977. – T. 11, vyp. 3. – S. 1–11.
10. Zabriejko, P. P. Diagrammy N'jutona i algiebraicheskie krivyje / P. P. Zabriejko, A. V. Krivko-Kras'ko // Tr. in-ta matematiki NAN Bielarusi. – 2014. – T. 22, № 2. – S. 32–45.
10. Zabriejko, P. P. Diagrammy N'jutona i algiebraicheskie krivyje. II / P. P. Zabriejko, A. V. Krivko-Kras'ko // Tr. in-ta matematiki NAN Bielarusi. – 2015. – T. 23, № 1. – S. 64–75.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 31.10.2022

УДК 519.6 + 517.983.54

Олег Викторович Матысикканд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Oleg Matysik**PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: matysikoleg@mail.ru

**НЕЯВНАЯ ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ
НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА**

Доказана сходимость неявного метода с априорным и апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного оператора в предположении, что погрешности имеются в правой части уравнения. Получены оценки погрешности метода, оценки для априорного и апостериорного моментов останова. Сформулирован и описан алгоритм решения некорректной модельной задачи. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: некорректное уравнение первого рода, неявный итерационный метод, гильбертово пространство, самосопряженный оператор, правило останова по невязке.

The Implicit Iterative Procedure for Approximate Solution of Ill-Posed Equations of the First Kind

We prove the convergence of the implicit method with a priori and a posteriori choice of the number of iterations in the original norm of the Hilbert space in the case of a self-adjoint operator, under the assumption that the errors are in the right-hand side of the equation. Obtained error estimates of the method, the estimates for the a priori and a posteriori moments stop. An algorithm for solving an incorrect model problem is formulated and described. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

Key words: ill-posed equation of the first kind, implicit iteration method, Hilbert space, self-adjoint operator, residual stop rule.

Введение

Встречается большой класс задач, где решения неустойчивы к малым изменениям исходных данных, т. е. сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Задачи подобного типа принадлежат к классу некорректных задач.

Значительная часть задач, встречающихся в прикладной математике, физике, технике и управлении, может быть представлена в виде операторного уравнения первого рода

$$Ax = y, \quad x \in X, \quad y \in Y \quad (1)$$

с заданным оператором $A: X \rightarrow Y$ и элементом y , где X и Y – метрические пространства, а в особо оговариваемых случаях – банаховы или даже гильбертовы. Ж. Адамаром (J. Hadamard) [1] было введено следующее понятие корректности:

Определение 1. Задачу отыскания решения $x \in X$ уравнения (1) называют корректной (или корректно поставленной, или корректной по Адамару), если при любой фиксированной правой части $y = y_0 \in Y$ уравнения (1) его решение:

- а) существует в пространстве X ;
- б) определено в пространстве X однозначно;

в) устойчиво в пространстве X , т. е. непрерывно зависит от правой части $y \in Y$. В случае нарушения любого из этих условий задачу называют некорректной (некорректно поставленной); более конкретно при нарушении условия в) ее принято называть неустойчивой.

Из определения видно, что корректность по Адамару эквивалентна однозначной определенности и непрерывности обратного оператора A^{-1} на всем пространстве Y .

На протяжении многих лет в математике считалось, что только корректные задачи имеют право на существование, что только они правильно отражают реальный мир. О некорректных задачах сложилось мнение, что они не имеют физической реальности, поэтому их решение бессмысленно. В результате долгое время некорректные задачи не изучались. Однако на практике все чаще и настойчивее стала возникать необходимость решать некорректные задачи. К таким задачам относятся задача Коши для уравнения Лапласа, задача решения интегрального уравнения первого рода, задача дифференцирования функции, заданной приближенно, численное суммирование рядов Фурье, когда коэффициенты известны приближенно в метрике l_2 , обратная задача гравиметрии, обратная задача теории потенциала, задача спектроскопии, задача аналитического продолжения функции, известной на части области, на всю область. Некорректны также и задача проектирования оптимальных систем, конструкций, задача создания систем автоматической обработки результатов физического эксперимента, задача Коши для уравнения теплопроводности с обращенным временем и т. д.

Однако обычные методы, применяемые для решения корректных задач, невозможно было применить к некорректным задачам, поэтому необходимо было пересмотреть определение корректности по Адамару. Это было сделано в 1943 г. А. Н. Тихоновым [2].

Определение 2. Задача отыскания решения уравнения (1) называется корректной по Тихонову на множестве $M \subset X$, а множество M – ее классом корректности, если:

- а) точное решение задачи существует в классе M ;
- б) в классе M решение задачи единственно при любой правой части $y \in F = AM \subset Y$;
- в) принадлежащее множеству M решение задачи устойчиво относительно правых частей $y \in F$.

Если $M = X$ и $F = Y$, то корректность по Тихонову совпадает с корректностью по Адамару.

После работ А. Н. Тихонова систематическое изучение некорректных задач и способов их решения началось в 50-х годах, но особенно широкий размах оно приняло в последние 50 лет. Основные результаты отражены в монографиях М. М. Лаврентьева [3], А. Н. Тихонова и В. Я. Арсенина [4], В. К. Иванова, В. В. Васина и В. П. Тананы [5], А. Б. Бакушинского [6], Г. М. Вайникко и А. Ю. Веретенникова [7] и др.

Наиболее общим из известных в настоящее время подходов к решению некорректных задач является подход, основанный на введенном А. Н. Тихоновым понятии регуляризатора.

Пусть имеется некорректная в классическом смысле задача математической физики.

Определение 3. Параметрическое семейство операторов $\{R_\alpha\}$, действующих из пространства правых частей Y в пространство решений X , называется регуляризирующим (регуляризирующим алгоритмом, или регуляризатором), если:

- 1) при любом $\alpha > 0$ оператор R_α определен на всем пространстве Y ;

2) если существует точное решение исходной задачи $x \in X$, то для любого $\delta > 0$ существует $\alpha(\delta)$ такое, что для всех $y_\delta \in Y$, $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ имеет место соотношение $\|R_{\alpha(\delta)}y_\delta - x\|_X \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$. Параметр α называется параметром регуляризации, $x_{\alpha,\delta} = R_{\alpha(\delta)}y_\delta$ – регуляризованными решениями.

Использование регуляризатора задачи дает возможность сколь угодно точного ее решения при достаточно точных исходных данных. В работе [8] А. Н. Тихонов предлагает способ построения регуляризующих операторов для уравнения (1). Это *метод регуляризации* решения некорректных задач. Он основан на вариационном принципе. В методе рационально выбирается параметр регуляризации, используется априорный способ выбора и предложены принципы невязки и сглаживающего функционала.

Для решения некорректных задач В. К. Иванов в работе [9] излагает *метод квазирешений*. Большое применение для регуляризации некорректных задач имеет также и *метод невязки*, предложенный Д. Л. Филлипсом [10] и В. К. Ивановым [11].

Особое место среди методов решения некорректных задач занимают итерационные методы, поскольку они легко реализуются на ПЭВМ. Различные итерационные схемы решения некорректно поставленных задач были предложены в работах [12–19].

В настоящей статье предлагается неявный итерационный метод решения некорректных задач, представляющий собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k . Для рассматриваемого метода исследована сходимость в исходной норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности и априорный момент останова; обоснована возможность применения к методу правила останова по малости невязки; решена численная модельная некорректная задача.

Выбор параметра k и, следовательно, соответствующей схемы для решения некорректных задач зависит от степени s истокорпредставимости точного решения ($x = A^s z$, $s > 0$). В работе показано, что для $s \leq 5$ целесообразно использовать предложенный метод при $k = 1$, для $6 \leq s \leq 27$ при $k = 2$ и т. д.

Сравнение предлагаемого метода с хорошо известным *явным методом итераций Ландвебера* [12] $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле *метод Ландвебера* предпочтительнее рассматриваемого неявного метода. Однако предлагаемый неявный метод обладает следующим важным достоинством. В *методе Ландвебера* на параметр α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, что может привести

на практике к необходимости большого числа итераций. В предлагаемом неявном методе ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет. Это позволяет считать $\alpha > 0$ произвольно большим (независимо от $\|A\|$), в связи с чем оптимальную оценку для неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Рассмотренный в статье итерационный метод найдет практическое применение в прикладной математике: он может быть использован для решения задач, встречающихся в теории оптимального управления, математической экономике, геофизике, теории потенциала, синтезе антенн, акустике, диагностике плазмы, в наземной или воздушной геологоразведке, при решении обратной кинематической задачи сейсмологии, космических исследованиях (спектроскопии) и медицине (компьютерной томографии) [3–8].

Основная часть

1. Постановка задачи.

В действительном гильбертовом пространстве H исследуется уравнение первого рода

$$Ax = y, \quad (2)$$

где A – положительно определенный ограниченный и самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, однако принадлежит спектру оператора A , и, следовательно, задача некорректна. Пусть $y \in R(A)$, т. е. при точной правой части y уравнение (2) имеет единственное решение x . Для отыскания этого решения предлагается неявная итерационная процедура

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A^k)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

В случае приближенной правой части y_δ ($\|y - y_\delta\| \leq \delta$) соответствующие методу (3) итерации примут вид

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^k)^2 x_{n,\delta} + 2\alpha A^{k-1}y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0, \quad k \in N. \quad (4)$$

Ниже, как обычно, под сходимостью метода (4) понимается утверждение о том, что приближения (4) сколь угодно близко подходят к точному решению уравнения при подходящем выборе n и достаточно малых δ . Иными словами, метод (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

2. Сходимость метода в случае априорного выбора числа итераций.

2.1. Сходимость при точной правой части.

Воспользовавшись интегральным представлением положительно определенного самосопряженного оператора A и формулой (3), по индукции получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^{-1} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda y, \quad \text{где } M = \|A\|, \quad E_\lambda - \text{спектральная функция оператора } A.$$

Отсюда легко выводится сходимость итерационного процесса (3) при $n \rightarrow \infty$ для $\alpha > 0$.

2.2. Сходимость при приближенной правой части.

Итерационный процесс (4) является сходящимся, если нужным образом выбирать число итераций n в зависимости от уровня погрешности δ . Справедлива

Теорема 1. *Итерационный процесс (4) сходится при $\alpha > 0$, если выбирать число итераций n в зависимости от δ так, чтобы $n^{1/k} \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству подобной теоремы из [15; 16].

При этом легко показывается оценка $\|x_n - x_{n,\delta}\| \leq 2k(n\alpha)^{1/k} \delta, \quad n \geq 1$.

2.3. Оценка погрешности.

Скорость сходимости метода (4) будем оценивать при дополнительном предположении о возможности истокообразного представления точного решения x уравнения (2), т. е. $x = A^s z, \quad s > 0$. Тогда $y = A^{s+1} z$ и, следовательно, получим

$$x - x_n = \int_0^M \lambda^s \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda z. \quad \text{Для оценки } \|x - x_n\| \text{ найдем максимум модуля подынте-}$$

гальной функции $f(\lambda) = \lambda^s \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n}$. Нетрудно показать, что при условии $\alpha > 0$

справедливо неравенство $\|x - x_n\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\|$. Таким образом, общая оценка погрешности метода (4) запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta, \quad n \geq 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим ее правую часть в точке, в которой производная от нее равна нулю; в результате получим априорный момент

останова $n_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}} (2k)^{-\frac{s+k}{s+1}} \alpha^{-1} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{k}{s+1}} \|z\|^{\frac{k}{s+1}}$ и оптимальную оценку погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1+s) \left(\frac{s}{k}\right)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}} \delta^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}}. \quad (5)$$

Замечание 1. Оценка погрешности (5) имеет порядок $O(\delta^{s/(s+1)})$, и, как следует из [7], она является оптимальным в классе задач с истокообразно представимыми решениями $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 2. Оптимальная оценка (5) не зависит от α , но от параметра α зависит $n_{\text{опт}}$, поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать α , удовлетворяющим условию $\alpha > 0$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно

выбрать $\alpha_{\text{опт}} = s^{\frac{s+k}{s+1}} (2k)^{-\frac{s+k}{s+1}} e^{-\frac{s}{s+1}} \delta^{-\frac{k}{s+1}} \|z\|^{\frac{k}{s+1}}$.

Приведем погрешность метода (4) при счете с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (4), а z_n – значение, полученное по той же формуле с учетом погрешностей вычисления γ_n , т. е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha^2 A^{2k})^{-1} \left[(E - \alpha A^k)^2 z_n + 2\alpha A^{k-1} y_\delta \right] + \alpha \gamma_n, \quad z_0 = 0.$$

Оценка погрешности метода (4) в этом случае имеет вид

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k} \|z\| + 2k(n\alpha)^{1/k} \delta + n\alpha\gamma, \quad n \geq 1,$$

где $\gamma = \sup_i |\gamma_i|$.

Оценку $\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}}$ можно оптимизировать по k . Для этого производную по k от $\varphi(k) = (s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{-\frac{s}{k(s+1)}}$ приравняем к нулю.

Получим $(s/k)^{\frac{s(1-k)}{k(s+1)}} e^{\frac{-s}{k(s+1)}} \cdot \frac{s}{k^2(s+1)} \cdot \left(k - \ln \frac{s}{k}\right) = 0$. Отсюда видно, что опти-

мальное k должно удовлетворять равенству $k = \ln \frac{s}{k}$. Но k должно быть целым числом,

поэтому, как показывают расчеты, для $s \leq 5$ $k_{\text{опт}} = 1$, для $6 \leq s \leq 27$ $k_{\text{опт}} = 2$.

3. Апостериорный выбор числа итераций.

Априорный выбор числа итераций n получен в предположении, что точное решение x уравнения (2) истокообразно представимо. Однако обычно сведения об истокообразности искомого решения неизвестны, и тем самым приведенные в разделе 2 оценки погрешности оказываются неприменимыми.

Тем не менее метод (4) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент m останова итерационного процесса (4) определим условием [13; 15–17]:

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \quad (6)$$

Предположим, что при начальном приближении невязка достаточно велика, — больше уровня останова, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения пра-

вила (6) к методу (4). Рассмотрим семейство функций $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha\lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2\lambda^{2k})^n} \right] \geq 0$.

Нетрудно показать, что при $\alpha > 0$ для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| &\leq 2k(n\alpha)^{1/k}, \quad n > 0, \\ \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| &\leq 1, \quad n > 0, \\ 1 - \lambda g_n(\lambda) &\rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in (0, M], \\ \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| &\leq s^{s/k} (2kn\alpha e)^{-s/k}, \quad n > 0, \quad 0 \leq s < \infty. \end{aligned}$$

Аналогично подобным леммам из [15–16] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для $\forall w \in H$ $(E - Ag_n(A))w \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Тогда для $\forall v \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^{s/k} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $0 \leq s < \infty$.

Лемма 3. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Если для некоторых $n_k < \bar{n} = \text{const}$ и $v_0 \in \overline{R(A)}$ при $k \rightarrow \infty$ имеем $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$, то $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$.

Леммы 1–3 использовались при доказательстве следующих теорем.

Теорема 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $\|A\| \leq M$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (4) выбирается по правилу (6), тогда $x_{m(\delta),\delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть $x = A^s z$, $s > 0$. Тогда

$$\text{справедливы оценки } m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} + 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{k/(s+1)} \right\}^{1/k} \delta. \quad (7)$$

Доказательство теорем 2–3 аналогично доказательству подобных теорем из [15; 16].

Замечание 3. Порядок оценки (7) есть $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$, и, как следует из [7], он оптимален

в классе задач с истокообразно представимыми решениями $x = A^s z$, $s > 0$.

Замечание 4. Хотя формулировка теоремы 3 дается с указаниями степени истокопредставимости s и истокопредставляющего элемента z , на практике их значение не потребуется, т. к. они не содержатся в правиле останова (6). И тем не менее в теореме 3 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций m , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокопредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (6), как показывает теорема 2, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

4. Численный модельный пример.

4.1. Формулировка и описание алгоритма решения модельной задачи.

Задача. Решаем в пространстве $L_2(0,1)$ модельную задачу в виде уравнения

$$\int_0^1 K(t,s) x(s) ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8)$$

с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1, \end{cases}$ точной правой

частью $y(t) = \frac{t(t-1)(t^2-t-1)}{12}$ и точным решением $x(t) = t(1-t)$.

Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ , и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения \tilde{y}_i , $i = \overline{1, m}$, полученные следующим образом: $\tilde{y}_i = [y(t_i) \cdot 10^k + 0,5] / 10^k$, где $y(t_i)$ – значения функции $y(t)$ в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1, m}$, $h = 1/m$. Квадратные скобки означают целую часть числа и $k = 4$. При $k = 4$ величина погрешности $\delta = 10^{-4}$. Действительно, имеем $\int_0^1 [y(t) - \tilde{y}(t)]^2 dt \approx \sum_{i=1}^m [y(t_i) - \tilde{y}_i]^2 h \leq mh(10^{-k})^2 = 10^{-2k}$.

Заменим интеграл в уравнении (8) квадратурной суммой, например, по формуле правых прямоугольников $\left(\int_a^b f(x) dx = h \sum_{k=1}^n y_k = h[y_1 + y_2 + \dots + y_n] \right)$, $h = \frac{b-a}{n}$,

$y_k = f(x_k)$, $x_k = a + kh$ с узлами $s_j = jh$, $j = \overline{1, m}$, $h = 1/m$, т. е. $\int_0^1 K(t, s)x(s)ds \approx \sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j$. Тогда получим равенство $\sum_{j=1}^m K(t, s_j)hx_j + \rho_m(t) = y(t)$, где $\rho_m(t)$ – остаток квадратурной замены. Записав последнее равенство в точках $t_i = ih$, $i = \overline{1, m}$ получим уравнения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j + \rho_m(t_i) = y(t_i), \quad i = \overline{1, m}.$$

Отбросив теперь остаточный член, получим линейную алгебраическую систему уравнений относительно приближенного решения

$$\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j = \tilde{y}_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Выберем для определенности $m = 32$ и будем решать систему (9) методом итераций (4) при $k = 1$, который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n+1)} + \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)h \left(\sum_{l=1}^m K(t_j, s_l)hx_l^{(n+1)} \right) = x_i^{(n)} - 2\alpha \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)x_j^{(n)}h + \\ + \alpha^2 \sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)h \left(\sum_{l=1}^m K(t_j, s_l)hx_l^{(n)} \right) + 2\alpha \tilde{y}_i, \quad x_i^{(0)} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (10)$$

При решении задачи итерационным методом (4) вычислялись:

$$\|Ax^{(n)} - \tilde{y}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m K(t_i, s_j)hx_j^{(n)} - \tilde{y}_i \right]^2 h \right\}^{1/2} - \text{дискретная норма невязки,}$$

$$\|x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2} - \text{норма приближенного решения и дискретная норма разности}$$

$$\text{между точным и приближенным решениями } \|x - x^{(n)}\|_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \left[x(t_i) - x_i^{(n)} \right]^2 h \right\}^{1/2}.$$

Оператор, описанный выше интегральным уравнением, непрерывен, взаимнооднозначен и аддитивен. Задача была решена методом (4) при $\delta = 10^{-4}$. Результаты счета приведены в *таблице 1* (ввиду симметрии приведена лишь половина таблицы). Для решения предложенной задачи сведений об истокорпредставимости точного решения не потребовалось, т. к. здесь воспользовались правилом останова по невязке (4), выбрав уровень останова $\varepsilon = 1,5\delta$. Пример счета показал, что для достижения оптимальной точности методом итераций (4) при $\alpha = 9,4$ требуется только одна итерация, что соответствует результатам раздела 2. На *рисунке 1* изображены графики точного решения и приближенного решения, полученного методом (4) при $\delta = 10^{-4}$.

4.2. Результат работы программы.

Программа для решения предложенной задачи была написана на языке программирования C#.

Таблица.

Узлы t_i	Правые части $y(t_i)$	Точное решение $x(t_i)$	Приближенное решение, полученное методом (4)
			$\delta = 10^{-4}$
0	0	0	0
0.0312	0.00259	0.03027	0.02429
0.0625	0.00517	0.05859	0.04865
0.0937	0.00768	0.08496	0.07275
0.125	0.01011	0.10938	0.09629
0.1562	0.01243	0.13184	0.11898
0.1875	0.01463	0.15234	0.14056
0.2187	0.01668	0.17089	0.1608
0.2500	0.01855	0.1875	0.17948
0.2812	0.02025	0.20215	0.19641
0.3125	0.02175	0.21484	0.21142
0.3437	0.02304	0.22559	0.22437
0.375	0.02411	0.23438	0.23514
0.4062	0.02495	0.24121	0.24361
0.4375	0.02555	0.24609	0.24972
0.4687	0.02591	0.24902	0.25341
0.5000	0.02604	0.25000	0.25464
$\ Ax^{(n)} - \tilde{y}\ _m$			0.00015
$\ x^{(n)}\ _m$			0.17972
$\ x - x^{(n)}\ _m$			0.00798

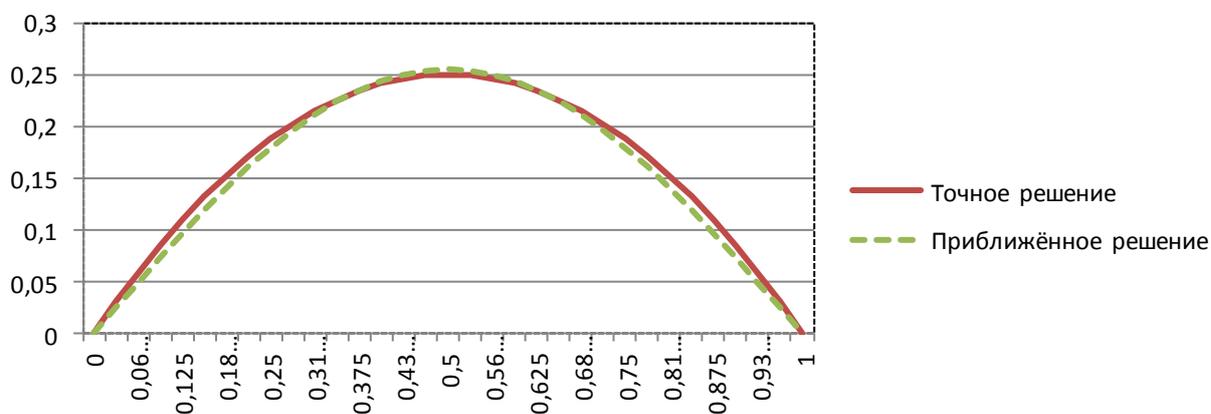


Рисунок.

Заключение

В настоящей статье изучены некоторые свойства предложенного неявного итерационного метода решения некорректных задач: доказана сходимость метода с априорным и апостериорным выбором параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства в случае положительного ограниченного самосопряженного оператора; получены оценки погрешности метода, оценки для априорного и апостериорного моментов останова; описан алгоритм решения численного некорректного модельного примера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932. – 560 s.
2. Тихонов, А. Н. Об устойчивости обратных задач / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39, № 5. – С. 195–198.
3. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : СО АН СССР, 1962. – 92 с.
4. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1979. – 288 с.
5. Иванов, В. К. Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. – 206 с.
6. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
7. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
8. Тихонов, А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А. Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 151, № 3. – С. 501–504.
9. Иванов, В. К. О некорректно поставленных задачах / В. К. Иванов // Мат. сб. – 1963. – Т. 61 (103), № 2. – С. 211–223.
10. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Assoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, Nr. 1. – P. 84–97.
11. Иванов, В. К. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений / В. К. Иванов. – Киев : Наук. думка, 1968. – 287 с.
12. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
13. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
14. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
15. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
16. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
17. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
18. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr 367. – P. 271–279.
19. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr 416. – P. 1–12.

REFERENCES

1. Hadamard, J. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivees partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932. – 560 s.

2. Tikhonov, A. N. Ob ustojchivosti obratnykh zadach / A. N. Tikhonov // Dokl. AN SSSR. – 1943. – T. 39, № 5. – S. 195–198.
3. Lavrient'jev, M. M. O niekotorykh niekorriektnykh zadachakh matematichieskoj fiziki / M. M. Lavrient'jev. – Novosibirsk : SO AN SSSR, 1962. – 92 s.
4. Tikhonov, A. N. Mietody rieshenija niekorriektnykh zadach / A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin. – M. : Nauka, 1979. – 288 s.
5. Ivanov, V. K. Tieorija liniejnykh niekorriektnykh zadach i jejo prilozhenija / V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana. – M. : Nauka, 1978. – 206 s.
6. Bakushinskij, A. V. Odin obshchij prijom postrojenija riegularizujushchikh algoritmov dlja liniejnogo niekorriektnogo uravnenija v gilbiertovom prostranstvie / A. V. Bakushinskij // Zhurn. vychisl. matematiki i mat. fiziki. – 1967. – T. 7, № 3. – S. 672–677.
7. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorriektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Yu. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.
8. Tikhonov, A. N. O reshenii niekorriektno postavliennykh zadach i mietodie riegularizacii / A. N. Tikhonov // Dokl. AN SSSR. – 1963. – T. 151, № 3. – S. 501–504.
9. Ivanov, V. K. O niekorriektno postavliennykh zadachakh / V. K. Ivanov // Mat. sb. – 1963. – T. 61 (103), № 2. – S. 211–223.
10. Phillips, D. L. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind / D. L. Phillips // J. Accoc. Comput. Mach. – 1962. – Vol. 9, nr 1. – P. 84–97.
11. Ivanov, V. K. Tieorija priblizhonnykh mietodov i jejo primienienije k chisliennomu resheniju singuliarnykh integral'nykh uravnenij / V. K. Ivanov. – Kijev : Nauk. dumka, 1968. – 287 s.
12. Landweber, L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind / L. Landweber // Am. J. Math. – 1951. – Vol. 73. – P. 615–624.
13. Yemielin, I. V. K tieorii niekorriektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.
14. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody rieshenija obratnykh zadach matematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
15. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.
16. Matysik, O. V. Iteracionnayja riegularizacija niekorriektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.
17. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr. 300. – P. 290–299.
18. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr. 367. – P. 271–279.
19. Matysik, O. V. Alternating step size method for solving ill-posed linear operator equations in energetic space / O. V. Matysik, M. M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2022. – Nr. 416. – P. 1–12.

УДК 001.891.57+004.94+517.9+519.62

Зоя Николаевна Серая¹, Алексей Игоревич Серый²¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Zoya Seraya¹, Alexey Sery²**¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Simulation
of the Brest State A. S. Pushkin University²Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin Universitye-mail: ¹szn2006@yandex.ru; ²alexey_sery@mail.ru

О РАЗНОВИДНОСТЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РОСТА ДЕРЕВА

На основе формулы, выражающей зависимость высоты дерева от времени в модели Басса, сформулирована задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева. Получено численное решение такой задачи методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Полученные результаты дают удовлетворительное согласие с данными наблюдений. Также получены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева на основе других эмпирических зависимостей высоты дерева от времени.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения, метод Рунге – Кутты, модель Полетаева, модель Басса.

On the Varieties of Differential Equations of Tree Growth

Based on the formula expressing the dependence of the height of a tree on time in the Bass model, the Cauchy problem for an ordinary differential equation describing the dependence of the stem volume of a tree on time in the Poletaev model is formulated. A numerical solution of such a problem is obtained by the fourth-order Runge – Kutta method. The obtained results give a satisfactory agreement with the observational data. Ordinary differential equations describing the dependence of the stem volume of a tree on time in the Poletaev model are also obtained, based on other empirical dependences of the height of a tree on time.

Key words: mathematical modeling, differential equations, Runge – Kutta method, Poletaev model, Bass model.

Введение

Исследования в области математического моделирования роста дерева ведутся уже не одно десятилетие, о чем свидетельствуют публикации [1–12]. Одной из основополагающих работ в этой области можно считать [1, с. 171–190], где были заложены теоретические основы данного направления в моделировании. В [2, с. 125–138] исследовалась модель роста (в т. ч. в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений) для одновидового и двухвидового сообщества в условиях конкуренции за свет, когда геометрическое подобие между приростом объема и высоты отсутствует; найдены условия прекращения роста дерева. В [3, с. 22] получены: а) зависимость диаметра дерева от времени в модели Полетаева; б) обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее динамику роста дерева с учетом влияния со стороны окружающего древостоя. В [4, с. 8] приводится также другой вариант системы обыкновенных дифференциальных уравнений, полученный в рамках модели Полетаева. В [5, с. 55–70] дается обзор и сравнительный анализ (в т. ч. критического характера) различных концепций моделирования хода роста древостоев. В [6, р. 247] приводятся различные варианты за-

висимости диаметра дерева от времени, в [7, р. 244] – различные варианты зависимости высоты дерева от времени. В [8, р. 11] приводятся различные соотношения между высотой и диаметром дерева. В [8, р. 17; 9, р. 14–15] приводятся различные эмпирические зависимости между объемом, высотой и диаметром дерева (не учитывающие зависимость от времени), более сложные по сравнению с полуэмпирическими, предложенными в [2, с. 128; 4, с. 8]. Исследования в [7; 10–12] посвящены также моделированию ветвления дерева в процессе роста.

Исходная постановка задачи

В [2, с. 127–128] рассмотрена модель роста дерева в условиях ограниченности световых ресурсов. На основе закона сохранения энергии получена следующая система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) P_{max} Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) Q + P_{max} p_0 V^d} b V^d - c V H, \quad (1)$$

$$\frac{dH}{dt} = (k + mH) \left(R(Q) - \frac{H}{H_{max}} \right). \quad (2)$$

При этом использованы следующие обозначения: V – объем ствола дерева, H – его высота, t – время, Q – доля солнечной радиации, падающей на наружную поверхность кроны ($0 < Q < 1$), $R(Q)$ – коэффициент конкуренции, H_{max} – потенциальная высота дерева, d – фрактальная размерность кроны ($\frac{2}{3} \leq d < 1$), k, m – видоспецифичные параметры, P_{max} – максимальная интенсивность фотосинтеза единицы листовой поверхности, $a = \alpha I_0$, где I_0 – начальная интенсивность светового потока, α – один из коэффициентов исходного уравнения в теории Полетаева [1, с. 176], параметры b и c также зависят от коэффициентов исходного уравнения в указанной теории, $p_0 = c_1 k$, где c_1 – коэффициент пропорциональности между площадью поверхности дерева S и объемом его ствола в формуле

$$S = c_1 V^d. \quad (3)$$

Уравнение (1) получено на основе модели Полетаева, уравнение (2) – на основе модели Басса. Задание начальных условий ($H = H_0, V = V_0$ при $t = t_0$) позволяет численно решить задачу Коши для системы (1) – (2).

Решение одного из исходных уравнений в элементарных функциях

Оказывается, что систему (1) – (2) можно свести к одному уравнению, поскольку уравнение (2) относится к уравнениям с разделяющимися переменными [13, с. 72]. Выполнив разделение переменных, можно привести (2) к виду

$$\frac{dH}{H^2 + \left(\frac{k}{m} - H_{max} R(Q) \right) H - \frac{k H_{max} R(Q)}{m}} = - \frac{m}{H_{max}} dt. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$p = \frac{k}{m} - H_{max}R(Q), \quad (5)$$

$$q = -\frac{kH_{max}R(Q)}{m}. \quad (6)$$

Результат интегрирования левой части (4) зависит от знака величины $p^2 - 4q$. Расписывая ее с учетом (5) и (6), получаем:

$$\left(\frac{k}{m} - H_{max}R(Q)\right)^2 + \frac{4kH_{max}R(Q)}{m} = \left(\frac{k}{m} + H_{max}R(Q)\right)^2 > 0. \quad (7)$$

Учитывая, что при выполнении условия

$$p^2 - 4q > 0 \quad (8)$$

справедливо соотношение [14, с. 227]

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \ln \left| \frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 - 4q}} \right|, \quad (9)$$

после интегрирования (4) по высоте от H_0 до H , а по времени – от t_0 до t , получаем:

$$-\frac{m}{H_{max}}(t - t_0) = \frac{1}{\frac{k}{m} + H_{max}R(Q)} \left(\ln \left| \frac{H - H_{max}R(Q)}{H + \frac{k}{m}} \right| - \ln \left| \frac{H_0 - H_{max}R(Q)}{H_0 + \frac{k}{m}} \right| \right). \quad (10)$$

На ранних стадиях роста со всей очевидностью выполняется соотношение

$$H < H_{max}R(Q). \quad (11)$$

Если бы по мере роста удалось достичь равенства в (11), то числитель дроби под знаком первого логарифма в скобках правой части (10) обратился бы в ноль, а само значение логарифма – в бесконечность с отрицательным знаком. Из выражения для левой части (10) следует, что за конечное время этого достичь невозможно. Это означает, что неравенство (11) справедливо на протяжении всей жизни дерева. Из этого следует, что справедливо также неравенство

$$H_0 < H_{max}R(Q). \quad (12)$$

Дальнейшие преобразования (10) с учетом (11) и (12) приводят к следующей зависимости:

$$H(t) = \frac{\left(H_0 + \frac{k}{m}\right)H_{max}R(Q)}{H_{max}R(Q) - H_0} - \frac{k}{m} \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q)\right)(t - t_0)\right) \frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max}R(Q) - H_0} + \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q)\right)(t - t_0)\right). \quad (13)$$

Постановка задачи Коши для одного уравнения

Для упрощения исходной задачи Коши для системы двух уравнений подставим (13) в правую часть (1), в результате чего получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) P_{max} Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) Q + P_{max} p_0 V^d} b V^d -$$

$$- cV \frac{\left(H_0 + \frac{k}{m} \right) H_{max} R(Q)}{H_{max} R(Q) - H_0} - \frac{k}{m} \exp\left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) (t - t_0) \right)}{\frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max} R(Q) - H_0} + \exp\left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) (t - t_0) \right)}.$$
 (14)

При $t_0 = 0$, $H_0 = 0$ уравнение (14) упрощается и принимает вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) P_{max} Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d)) Q + P_{max} p_0 V^d} b V^d -$$

$$- \frac{cV k}{m} \frac{1 - \exp\left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) t \right)}{\frac{k}{m H_{max} R(Q)} + \exp\left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + mR(Q) \right) t \right)}.$$
 (15)

При этом ни в (14), ни в (15) сингулярностей во второй дроби, стоящей в правой части, не возникает.

Это означает, что на выбор значения H_0 нет дополнительных ограничений помимо (12), поэтому для простоты его действительно можно положить равным нулю.

Кроме того, следует отметить, что допущения, принятые в модели Полетаева, не позволяют считать ее точность очень высокой, особенно на ранних стадиях развития дерева (сразу после посадки саженцев, черенков или семян), в связи с чем глубина посадки (в пределах, реализуемых на практике) не должна играть заметной роли в рамках этой модели.

Это означает, что высоту можно отсчитывать от поверхности почвы, а не от корневой системы.

При этом и в (14), и в (15) возникает неопределенность вида $\{0/0\}$ в первой дроби правой части при выборе начального приближения $V_0 = 0$.

Таким образом, в отличие от высоты дерева, для его объема нулевое начальное приближение недопустимо.

В качестве такого приближения можно условно взять начальный объем семени, черенка или саженца соответствующего дерева.

Численное решение задачи Коши

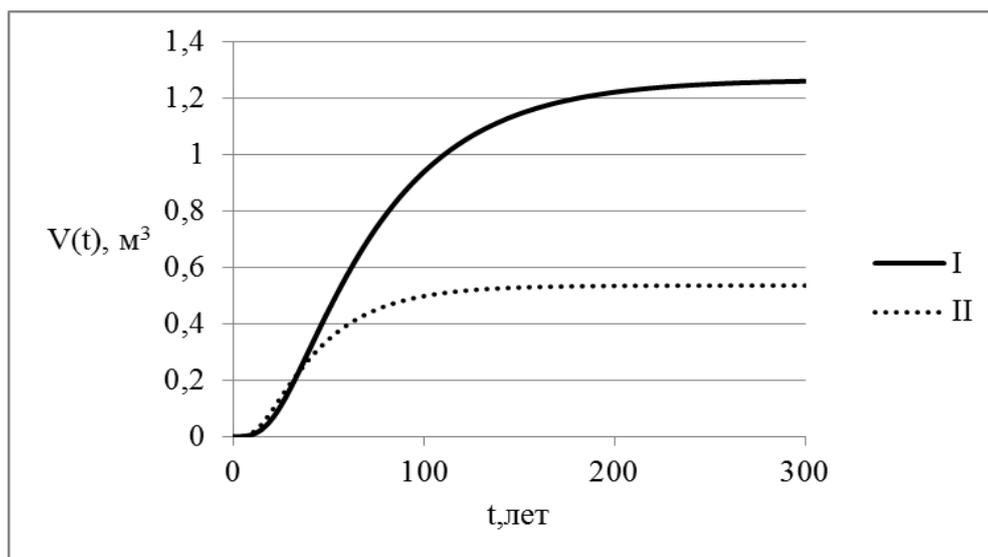
В качестве примеров рассмотрим задачу Коши для ели сибирской и пихты белокорой. Соответствующие значения коэффициентов, присутствующих в уравнении (15) [2, с. 134], представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Значения коэффициентов, входящих в уравнение (15), для ели сибирской и пихты белокорой

Коэффициент	Ель сибирская	Пихта белокорая
a	300	38
p	85	37
P_m	12	7,6
b	0,0107	0,025
c	0,00096	0,00196
H_m	25	20

Значения других параметров, не представленные в [2], были выбраны следующими: $d = 0,8$, $Q = 0,5$, $R(Q) = 0,5$, $k = 25$, $m = 0,5$, $V = 0,0001$. Следует отметить, что расчетные кривые наиболее чувствительны к значению параметра d .

В качестве численного метода был выбран метод Рунге – Кутты четвертого порядка. Исследуемый временной интервал равен 300 годам, размер шага по времени – три года (т. е. 100 точек). Расчеты выполнялись в средах Mathematica, Mathcad, а также на основе программного кода, написанного в Visual Basic. Результаты, представленные на рисунке 1 и в таблице 2, находятся в удовлетворительном согласии с данными наблюдений [2, с. 129].



I – Ель сибирская, II – Пихта белокорая

Рисунок 1. – Зависимость объема дерева от времени согласно уравнению (15)

Таким образом, с течением времени рост объема ствола дерева сначала ускоряется, затем выходит на постоянный (линейный по времени) уровень, после чего замедляется (т. е. наступает стадия, которую по аналогии с некоторыми физическими эффектами можно назвать стадией насыщения). У пихты белокорой эта стадия более ярко выражена и наступает раньше по сравнению с елью сибирской. Оба графика с математической точки зрения характеризуются наличием точки перегиба и горизонтальной асимптоты.

Таблица 2. – Значения объема в соответствии с решением уравнения (15) для ели сибирской и пихты белокорой, м³

Время, годы	Ель сибирская	Пихта белокорая	Время, годы	Ель сибирская	Пихта белокорая
0	0,0001	0,0001	150	1,143132	0,528634
3	0,000524	0,000732	153	1,150228	0,52931
6	0,00201	0,003398	156	1,156917	0,529921
9	0,005733	0,010436	159	1,163222	0,530474
12	0,013221	0,024005	162	1,169165	0,530975
15	0,025904	0,044498	165	1,174765	0,531427
18	0,044577	0,070297	168	1,180043	0,531837
21	0,069231	0,099152	171	1,185015	0,532207
24	0,099234	0,129233	174	1,1897	0,532542
27	0,133615	0,159307	177	1,194114	0,532845
30	0,171313	0,188596	180	1,198272	0,533119
33	0,211329	0,21663	183	1,202189	0,533367
36	0,252796	0,243139	186	1,205878	0,533592
39	0,295001	0,26799	189	1,209353	0,533795
42	0,337371	0,291133	192	1,212626	0,533978
45	0,379458	0,31258	195	1,215708	0,534144
48	0,420916	0,332377	198	1,218611	0,534294
51	0,461485	0,350594	201	1,221344	0,53443
54	0,500972	0,367316	204	1,223918	0,534553
57	0,539236	0,382634	207	1,226342	0,534664
60	0,576183	0,396641	210	1,228624	0,534764
63	0,611749	0,409432	213	1,230773	0,534855
66	0,645899	0,421098	216	1,232796	0,534937
69	0,678618	0,431727	219	1,234701	0,535012
72	0,709906	0,441403	222	1,236494	0,535079
75	0,739779	0,450204	225	1,238183	0,53514
78	0,768261	0,458204	228	1,239772	0,535195
81	0,795382	0,465473	231	1,241269	0,535244
84	0,821181	0,472073	234	1,242677	0,535289
87	0,845698	0,478064	237	1,244003	0,53533
90	0,868977	0,483499	240	1,245252	0,535367
93	0,891065	0,488429	243	1,246427	0,5354
96	0,912007	0,492899	246	1,247533	0,53543
99	0,931851	0,496951	249	1,248574	0,535458
102	0,950645	0,500623	252	1,249555	0,535482
105	0,968436	0,503951	255	1,250477	0,535504
108	0,985269	0,506965	258	1,251346	0,535525
111	1,001189	0,509695	261	1,252163	0,535543
114	1,01624	0,512168	264	1,252932	0,535559
117	1,030466	0,514407	267	1,253657	0,535574
120	1,043907	0,516434	270	1,254338	0,535588
123	1,056603	0,518269	273	1,25498	0,5356
126	1,068591	0,51993	276	1,255584	0,535611
129	1,07991	0,521434	279	1,256152	0,535621
132	1,090593	0,522794	282	1,256687	0,53563
135	1,100675	0,524026	285	1,257191	0,535638
138	1,110187	0,52514	288	1,257665	0,535645
141	1,11916	0,526149	291	1,258111	0,535652
144	1,127624	0,527061	294	1,25853	0,535658
147	1,135605	0,527887	297	1,258925	0,535664

Другие варианты уравнений

В [4, с. 8] приводится следующая система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, похожая на систему (1) – (2):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max} b V^{2/3}}{p} \ln \left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)} \right) - cVH, \quad (16)$$

$$\frac{dH}{dt} = (k + mH) \left(1 - \frac{H}{H_{max}} \right). \quad (17)$$

При этом использованы следующие обозначения: V – объем ствола дерева, a – начальная крутизна кривой, показывающая зависимость уровня фотосинтеза от интенсивности освещения, p – параметр самозатенения, H_{max} – потенциальная высота дерева, k, m – видоспецифичные параметры, c – коэффициент, характеризующий расход энергии на транспорт ассимилятов во все части растения, b – коэффициент пропорциональности расходов энергии на построение живой ткани. Смысл остальных величин – тот же, что и в уравнениях (1) – (2).

Решая уравнение (17) так же, как и уравнение (2), получаем результат, аналогичный (13):

$$H(t) = \frac{\left(H_0 + \frac{k}{m} \right) H_{max} - \frac{k}{m} \exp \left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}{\frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max} - H_0} + \exp \left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}. \quad (18)$$

Подставляя правую часть (18) в правую часть (16), получаем, как и в случае (14), одно уравнение вместо двух, что упрощает задачу Коши:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max} b V^{2/3}}{p} \ln \left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)} \right) - cV \frac{\left(H_0 + \frac{k}{m} \right) H_{max} - \frac{k}{m} \exp \left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}{\frac{H_0 + \frac{k}{m}}{H_{max} - H_0} + \exp \left(- \left(\frac{k}{H_{max}} + m \right) (t - t_0) \right)}. \quad (19)$$

При $t_0 = 0$, $H_0 = 0$ уравнение (19) упрощается и принимает вид:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max} b V^{2/3}}{p} \ln \left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)} \right) -$$

$$-\frac{cV_k}{m} \cdot \frac{1 - \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + m\right)t\right)}{\frac{k}{mH_{max}} + \exp\left(-\left(\frac{k}{H_{max}} + m\right)t\right)}. \quad (20)$$

При этом, в отличие от (14) и (15), сингулярности в правых частях (19) и (20) полностью отсутствуют.

Важным также является вопрос о связи между объемом, высотой и диаметром D ствола дерева. Так, в [2, с. 129; 4, с. 8] используется следующая зависимость:

$$D = \sqrt{\frac{4V}{\pi H f(V)}}, \quad (21)$$

где f – видовое число, показывающее отклонение формы ствола от идеального цилиндра (причем наличие зависимости f от V подчеркивается лишь в [4, с. 8]). Если эта зависимость известна, то можно на основе численного решения уравнения (14) с учетом (13) (либо на основе численного решения уравнения (19) с учетом (18)) из (21) найти зависимость $D(t)$.

Иная зависимость предложена в [3, с. 18], где λ_1 и λ_2 – видоспецифичные параметры.

$$D = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp\left(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t - t_0)\right)}{1 + \exp\left(-2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}(t - t_0)\right)}. \quad (22)$$

Если условия применимости формулы (22) не противоречат условиям применимости соотношения (21), то можно приравнять правые части (21) и (22) и при найденных зависимостях объема и высоты от времени найти также зависимость $f(t)$. Зависимость $f(V)$ можно получить в параметрическом виде, сопоставляя зависимости $f(t)$ и $V(t)$ (после решения уравнений (14), (15) или (19), (20)), где t играет роль параметра. Указанное замечание можно распространить и на иные зависимости $D(t)$ [6, р. 247], предложенные с 1939 г. по 1993 г. Корфом, Вейбулом, Ричардсом, Кумарасвами и Зейде:

$$D = D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b\right)^c\right), \quad (23)$$

$$D = D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c, \quad (24)$$

$$D = D_{max} \exp(-bt^c), \quad (25)$$

$$D = g - a \exp(-bt^c). \quad (26)$$

При этом D_{max} – максимальный диаметр дерева, a , b , c , g – параметры, причем параметр a в (23) в некоторых случаях может интерпретироваться как максимальный возраст дерева, а параметр c в (25) должен быть отрицательным.

В [7, р. 244] приводятся следующие зависимости высоты дерева от времени (логистическая, Бергаланфи и Вейбула):

$$H(t) = H_{max} / (1 + (H_{max}/H_0 - 1) \exp(-g_1 t)), \quad (27)$$

$$H(t) = g_2(1 - g_3 \exp(-g_1 t))^3, \quad (28)$$

$$H(t) = g_2(1 - \exp(-g_1 t^\mu)). \quad (29)$$

При этом H_0 – начальная высота, H_{max} – максимальная высота, g_1, g_2, g_3, μ – параметры. Если подставить (27) – (29) вместо (13) в (1), то получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d))P_{max}Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d))Q + P_{max}p_0 V^d} bV^d - \frac{cVH_{max}}{1 + (H_{max}/H_0 - 1)\exp(-g_1 t)}, \quad (30)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d))P_{max}Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d))Q + P_{max}p_0 V^d} bV^d - cg_2 V(1 - g_3 \exp(-g_1 t))^3, \quad (31)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{a(1 - \exp(-p_0 V^d))P_{max}Q}{a(1 - \exp(-p_0 V^d))Q + P_{max}p_0 V^d} bV^d - cg_2 V(1 - \exp(-g_1 t^\mu)). \quad (32)$$

Если же подставить (27) – (29) вместо (18) в (16), то получим:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max}bV^{2/3}}{p} \ln\left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)}\right) - \frac{cVH_{max}}{1 + (H_{max}/H_0 - 1)\exp(-g_1 t)}, \quad (33)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max}bV^{2/3}}{p} \ln\left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)}\right) - cg_2 V(1 - g_3 \exp(-g_1 t))^3, \quad (34)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{P_{max}bV^{2/3}}{p} \ln\left(\frac{P_{max} + a}{P_{max} + a \exp(-pV^d)}\right) - cg_2 V(1 - \exp(-g_1 t^\mu)). \quad (35)$$

Можно также учитывать различные соотношения между высотой и диаметром дерева, приведенные в [8, p. 11]:

$$H(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2, \quad (36)$$

$$H(D) = 1,3 + D^2 / (a_0 + a_1 D + a_2 D^2), \quad (37)$$

$$H(D) = 1,3 + (D / (a_0 + a_1 D))^3, \quad (38)$$

$$H(D) = \exp(a_0 + a_1 \ln D + a_2 \ln^2(D^2)), \quad (39)$$

$$H(D) = a_0 + a_1 \ln D, \quad (40)$$

$$H(D) = \exp(a_0 + a_1 \ln D + a_2 D). \quad (41)$$

При этом a_0, a_1, a_2 – регрессионные коэффициенты. Если считать известными зависимости (13), (18) или (27) – (29), то можно, подставляя правую часть (13), (18) или (27) – (29) в левую часть каждой из формул (36) – (41), получить неявную зависимость $D(t)$, которую во всех случаях, кроме (41), можно сделать явной. Таким образом, всего получается 30 вариантов зависимостей, 25 из которых могут быть сведены к явным. При этом остается в силе замечание, приведенное после (22). Конкретные численные расчеты требуют знания значений коэффициентов a_0, a_1, a_2 .

С другой стороны, если считать известными зависимости (22) – (26), то из (36) – (41) можно получить 30 новых зависимостей $H(t)$, альтернативных по отношению к (13), (18), (27) – (29):

$$H(t) = a_0 + a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right)^2, \quad (42)$$

$$H(t) = 1,3 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right)^2 \times \left(a_0 + a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} + a_2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(\frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right)^2 \right)^{-1}, \quad (43)$$

$$H(t) = 1,3 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{3/2} \left(\frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right)^3 \times \left(a_0 + a_1 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right)^{-3}, \quad (44)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right) \right) + 4a_2 \ln^2 \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right), \quad (45)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right), \quad (46)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln \left(\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))} \right) \right) + a_2 \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \cdot \frac{1 - \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}{1 + \exp(-2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(t - t_0))}, \quad (47)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) + a_2 D_{max}^2 \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right)^2, \quad (48)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^2 \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right)^2 \times \left(a_0 + a_1 D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) + a_2 D_{max}^2 \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right)^2 \right)^{-1}, \quad (49)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^3 \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right)^3 \left(a_0 + a_1 D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right)^{-3}, \quad (50)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln \left(D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right) \right) + 4a_2 \ln^2 \left(D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right) \quad (51)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln \left(D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right), \quad (52)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln \left(D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right) + a_2 D_{max} \left(1 - \left(1 - (t/a)^b \right)^c \right) \right). \quad (53)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c + a_2 D_{max}^2 (1 - a \exp(-bt))^{2c}, \quad (54)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^2 (1 - a \exp(-bt))^{2c} \times \\ \times \left(a_0 + a_1 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c + a_2 D_{max}^2 (1 - a \exp(-bt))^{2c} \right)^{-1}. \quad (55)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^3 (1 - a \exp(-bt))^{3c} \left(a_0 + a_1 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right)^{-3}, \quad (56)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln \left(D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right) + 4a_2 \ln^2 \left(D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right) \right), \quad (57)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln \left(D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right), \quad (58)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln \left(D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right) + a_2 D_{max} (1 - a \exp(-bt))^c \right). \quad (59)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 D_{max} \exp(-bt^c) + a_2 D_{max}^2 \exp(-2bt^c), \quad (60)$$

$$H(t) = 1,3 + D_{max}^2 \exp(-2bt^c) / \left(a_0 + a_1 D_{max} \exp(-bt^c) + a_2 D_{max}^2 \exp(-2bt^c) \right), \quad (61)$$

$$H(t) = 1,3 + \left(D_{max} \exp(-bt^c) / \left(a_0 + a_1 D_{max} \exp(-bt^c) \right) \right)^3, \quad (62)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln D_{max} - a_1 bt^c + 4a_2 \ln^2 D_{max} + 4a_2 b^2 t^{2c} \right), \quad (63)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln D_{max} - a_1 bt^c, \quad (64)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln D_{max} - a_1 bt^c + a_2 D_{max} \exp(-bt^c) \right). \quad (65)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 (g - a \exp(-bt^c)) + a_2 (g - a \exp(-bt^c))^2, \quad (66)$$

$$H(t) = 1,3 + (g - a \exp(-bt^c))^2 \left(a_0 + a_1 (g - a \exp(-bt^c)) + a_2 (g - a \exp(-bt^c))^2 \right)^{-1}, \quad (67)$$

$$H(t) = 1,3 + \left((g - a \exp(-bt^c)) / \left(a_0 + a_1 (g - a \exp(-bt^c)) \right) \right)^3, \quad (68)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln (g - a \exp(-bt^c)) + 4a_2 \ln^2 (g - a \exp(-bt^c)) \right), \quad (69)$$

$$H(t) = a_0 + a_1 \ln (g - a \exp(-bt^c)), \quad (70)$$

$$H(t) = \exp \left(a_0 + a_1 \ln (g - a \exp(-bt^c)) + a_2 (g - a \exp(-bt^c)) \right). \quad (71)$$

Полученные зависимости можно подставить в (1) или (16), получая еще 60 вариантов дифференциальных уравнений. Для численного решения соответствующих задач Коши требуется знать конкретные значения соответствующих коэффициентов.

Заклучение

Исследована математическая модель роста дерева. На основе аналитического решения обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего зависимость высоты дерева от времени в модели Басса, сформулирована задача Коши для обыкно-

венного дифференциального уравнения, описывающего зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева. Показано, что в такой задаче начальное значение объема ствола дерева не может быть принято в точности равным нулю. Получено численное решение задачи методом Рунге – Кутты четвертого порядка. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с данными наблюдений. Получены обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие зависимость объема ствола дерева от времени в модели Полетаева на основе других эмпирических зависимостей высоты дерева от времени. Результаты могут представлять интерес для построения более точных математических моделей роста дерева, а также для экологии, лесного и сельского хозяйства.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полетаев, И. А. О математических моделях элементарных процессов в биогеоценозах / И. А. Полетаев // Проблемы кибернетики. – 1966. – Вып. 16. – С. 171–190.
2. Колобов, А. Н. Численно-аналитическое исследование модели роста дерева в условиях конкуренции за свет / А. Н. Колобов // Мат. биология и биоинформатика. – 2012. – Т. 7, № 1. – С. 125–138.
3. Моделирование динамики роста деревьев по данным геоботанических исследований (на примере постоянных пробных площадей на территории заповедника «Бастак») / А. Н. Колобов [и др.] // Регион. проблемы. – 2007. – № 8. – С. 17–24.
4. Колобов, А. Н. Моделирование пространственно-временной динамики древесных сообществ : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук : 03.01.02 / А. Н. Колобов ; Ин-т автоматизации и процессов управления ДВО РАН. – Владивосток, 2013. – 20 с.
5. Рогозин, М. В. Модели динамики и моделирование развития древостоев / М. В. Рогозин, Г. С. Разин // Сиб. лес. журн. – 2015. – № 2. – С. 55–70.
6. Sedmak, R. Modelling of tree diameter growth using growth functions parameterised by least squares and Bayesian methods / R. Sedmak, L. Scheer // Journal of Forest Science. – 2015. – Vol. 58, nr 6. – P. 245–252.
7. Tree Growth Modelling Constrained by Growth Equations / Lei Yi [et al.] // Computer Graphics Forum. – 2018. – Vol. 37, nr 1. – P. 239–253.
8. Nagel, J. Tree Growth Open Source Software [Electronic resource] / J. Nagel. – Mode of access: <http://treegross.sourceforge.net/treegross.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
9. Simulation of Individual Tree Growth and Stand Development in Loblolly Pine Plantations on Cutover, Site-Prepared Areas [Electronic resource]. – Mode of access: <https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/93565/FWS-1-87.pdf?sequence=1>. – Date of access: 13.09.2022.
10. Nagel, J. Computer Simulations of Biological Growth Patterns: Tree Modeling Success and Applications [Electronic resource] / J. Nagel, Robert L. Jr. – Mode of access: <https://digitalcommons.usu.edu/gradreports/1055>. – Date of access: 26.08.2022.
11. Branching Out: Modeling Leaf Weight by Tree Growth Simulation [Electronic resource]. – Mode of access: <https://sites.math.washington.edu/~morrow/mcm/16647.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
12. Random Tree Growth by Vertex Splitting [Electronic resource] / F. David [et al.]. – Mode of access: <https://arxiv.org/pdf/0811.3183v2.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
13. Матвеев, Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Н. М. Матвеев. – 5-е изд., доп. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.
14. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.

REFERENCES

1. Polietajev, I. A. O matematicheskikh modeliakh elementarnykh processov v biogeoecozakh / I. A. Polietajev // Problemy kibernetiki. – 1966. – Vyp. 16. – S. 171–190.
2. Kolobov, A. N. Chislennno-analitichieskoje issliedovanie modeli rosta dierieva v uslovijakh konkurenciji za sviet / A. N. Kolobov // Mat. biologija i bioinformatika. – 2012. – T. 7, № 1. – S. 125–138.
3. Modelirovanija dinamiki rosta dieriev'jev proo dannym gieobotanichieskikh issliedovanij (na primierie postojannykh probnykh ploshchadiej na territoriji zapovednika «Bastak») / A. N. Kolobov [i dr.] // Rieion. problimy. – 2007. – № 8. – S. 17–24.
4. Kolobov, A. N. Modelirovanije prostranstvienno-vriemiennoj dinamiki dreviesnykh soobshchestv : avtorief. dis. ... kand. fiz.-mat. nauk : 03.01.02 / A. N. Kolobov ; In-t avtomatiki i processov upravlienija DVO RAN. – Vladivostok, 2013. – 20 s.
5. Rogozin, M. V. Modeli dinamiki i modelirovanije razvitija drevostojev / M. V. Rogozin, G. S. Razin // Sib. lies. zhurn. – 2015. – № 2. – S. 55–70.
6. Sedmak, R. Modelling of tree diameter growth using growth functions parameterised by least squares and Bayesian methods / R. Sedmak, L. Scheer // Journal of Forest Science. – 2015. – Vol. 58, nr 6. – P. 245–252.
7. Tree Growth Modelling Constrained by Growth Equations / Lei Yi [et al.] // Computer Graphics Forum. – 2018. – Vol. 37, nr 1. – P. 239–253.
8. Nagel, J. Tree Growth Open Source Software [Electronic resource] / J. Nagel. – Mode of access: <http://treegross.sourceforge.net/treegross.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
9. Simulation of Individual Tree Growth and Stand Development in Loblolly Pine Plantations on Cutover, Site-Prepared Areas [Electronic resource]. – Mode of access: <https://vtechworks.lib.vt.edu/bitstream/handle/10919/93565/FWS-1-87.pdf?sequence=1>. – Date of access: 13.09.2022.
10. Nagel, J. Computer Simulations of Biological Growth Patterns: Tree Modeling Success and Applications [Electronic resource] / J. Nagel, Robert L. Jr. – Mode of access: <https://digitalcommons.usu.edu/gradreports/1055>. – Date of access: 26.08.2022.
11. Branching Out: Modeling Leaf Weight by Tree Growth Simulation [Electronic resource]. – Mode of access: <https://sites.math.washington.edu/~morrow/mcm/16647.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
12. Random Tree Growth by Vertex Splitting [Electronic resource] / F. David [et al.]. – Mode of access: <https://arxiv.org/pdf/0811.3183v2.pdf>. – Date of access: 13.09.2022.
13. Matviejev, N. M. Mietody integrirovaniija obyknoviennykh diffierencial'nykh uravnienij : uchieb. posobije / N. M. Matviejev. – 5-je izd., dop. – SPb. : Lan', 2003. – 832 s.
14. Vodniev, V. T. Osnovnyje matematichieskije formuly : spravochnik / V. T. Vodniev, A. F. Naumovich, N. F. Naumovich ; pod ried. Yu. S. Bogdanova. – 3-je izd., pierierab. i dop. – Minsk : Vysh. shk., 1995. – 380 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 19.10.2022

УДК 513.82

*Александр Андреевич Юдов¹, Елена Вячеславовна Кисилюк²*¹*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*²*преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Aleksandr Yudov¹, Yelena Kisilyuk²*¹*PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,
Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
of the Brest State A. S. Pushkin University*²*Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Informatics
of the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: modelmath@brsu.brest.by*

КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

Изучаются однородные пространства, порожденные группой Ли движений пространства Минковского. Среди таких пространств выделяются редуктивные однородные пространства.

Ключевые слова: группа, подгруппа, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, коммутатор, редуктивное однородное пространство, редуктивное дополнение.

Classification and Investigation of Reductive Homogeneous Spaces Generated by the Lie Group of Motions of the Minkowski Space

We study homogeneous spaces generated by the Lie group of motions of the Minkowski space. Among such spaces, reductive homogeneous spaces are singled out.

Key words: group, subgroup, homogeneous space, Lie group, Lie algebra, commutator, reductive homogeneous space, reductive complement.

Введение

Однородные пространства являются предметом исследования математиков на протяжении более чем сто лет. Актуальность исследования таких пространств объясняется тем, что они находят применение, что они служат аппаратом при исследовании геометрии, алгебры, теоретической физики. Особую важность представляют однородные пространства, порожденные группой Ли движений различных (псевдоевклидовых пространств) В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства Минковского.

Нахождение редуктивных однородных пространств, порожденных группой Ли движений пространства Минковского

Определение 1. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли \overline{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G}_i$, где $ad\overline{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли \overline{G}_i .

Рассмотрим однородное пространство H/G_{12} , где G_{12} – подгруппа Ли группы Ли H вращений шестимерного Лоренцового пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{G_{12}} = \{i_5, i_6, i_9\}$, где:

$$i_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению двадцати случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 1 & 0 & \sigma & s & t \\ 0 & 0 & 1 & p & q & r \end{pmatrix}.$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов X_1, X_2, X_3 , определяющих инвариантные подпространства m причем базис в алгебре \overline{H} выберем следующим образом: $i_6, i_7, i_8, i_9, i_5, i_{10}$.

Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, X_2, X_3\}$ задаются векторами:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_9 + \mu i_5 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_9 + s i_5 + t i_{10}, X_3 = i_8 + p i_9 + q i_5 + r i_{10}. \quad (2)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая, $a = i_5$ получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= i_6 + p i_7. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_6 + \lambda i_9 + \mu i_5 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_9 + s i_5 + t i_{10}) + \gamma_1(i_8 + p i_9 + q i_5 + r i_{10}) = i_5(\mu \alpha_1 + s \beta_1 + q \gamma_1) + i_6 \alpha_1 + i_7 \beta_1 + i_8 \gamma_1 + i_9(\lambda \alpha_1 + \sigma \beta_1 + p \gamma_1) + i_{10}(\nu \alpha_1 + t \beta_1 + r \gamma_1). \quad (4)$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\mu \alpha_1 + s \beta_1 + q \gamma_1 = 0, \gamma_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \lambda, \delta_1 = 0, \lambda \alpha_1 + \sigma \beta_1 + p \gamma_1 = 0, \nu \alpha_1 + t \beta_1 + r \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\lambda s + q = 0, \lambda \sigma + p = 0, \lambda t + r = 0$.

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3), получим:

$$\mu \alpha_2 + s \beta_2 + q \gamma_2 = 0, \alpha_2 = 0, \beta_2 = \sigma, \gamma_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \sigma \beta_2 + p \gamma_2 = 1, \nu \alpha_2 + t \beta_2 + r \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma s = 0, \sigma^2 = 1, \sigma t = 0$.

Аналогично, сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\mu + p s = 0, \lambda + p \sigma = 0, \nu + t p = 0.$$

Таким образом, в случае 1^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda s + q = 0, \\ \lambda \sigma + p = 0, \\ \lambda t + r = 0, \\ \sigma s = 0, \\ \sigma^2 = 1, \\ \sigma t = 0, \\ \mu + ps = 0, \\ \lambda + p\sigma = 0, \\ v + tp = 0. \end{cases}$$

Из системы получаем следующее:

$$t = 0, s = 0, \mu = 0, q = 0, v = 0, r = 0, \sigma = \pm 1, p = \mp \lambda.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\{i_6 + \lambda i_9, i_7 \pm i_9, i_8 \mp \lambda i_9\}.$$

Аналогично рассматриваются случаи $2^0 - 20^0$.

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \mu & v \\ 0 & 1 & \sigma & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & q & r \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5 + v i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_5 + t i_{10}, X_3 = i_9 + q i_5 + r i_{10}. \quad (5)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_6, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_6, \\ [a, X_3] &= i_7. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5 + v i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_5 + t i_{10}) + \gamma_1(i_9 + q i_5 + r i_{10}) = i_5(\mu \alpha_1 + s \beta_1 + q \gamma_1) + i_6 \alpha_1 + i_7 \beta_1 + i_8(\lambda \alpha_1 + \sigma \beta_1) + i_9 \gamma_1 + i_{10}(v \alpha_1 + t \beta_1 + r \gamma_1). \quad (7)$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\mu \alpha_1 + s \beta_1 + q \gamma_1 = 0, \alpha_1 = \lambda, \beta_1 = 0, \lambda \alpha_1 + \sigma \beta_1 = 1, \gamma_1 = 0, v \alpha_1 + t \beta_1 + r \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu \lambda = 0, \lambda^2 = 1, v \lambda = 0$.

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\mu \alpha_2 + s \beta_2 + q \gamma_2 = 0, \alpha_2 = \sigma, \beta_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \sigma \beta_2 = 0, \gamma_2 = 1, v \alpha_2 + t \beta_2 + r \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует:

$$\mu\sigma + q = 0, \lambda\sigma = 0, \nu\sigma + r = 0.$$

Аналогично сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$s = 0, \sigma = 0, t = 0.$$

Таким образом, в случае 2^0 получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu\lambda = 0, \\ \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ \mu\sigma + q = 0, \\ \lambda\sigma = 0, \\ \nu\sigma + r = 0, \\ s = 0, \\ \sigma = 0, \\ t = 0. \end{array} \right.$$

Из системы получаем следующее: $\lambda = \pm 1, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0, s = 0, t = 0, q = 0, r = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$3^0 \{i_6 \pm i_8, i_7, i_9\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & 0 & \nu \\ 0 & 1 & \sigma & s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 3^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_{10}, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10}, X_3 = i_5 + p i_{10}. \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_6 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_6 + s i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_{10}) + \gamma_1(i_5 + p i_{10}) = i_5 \gamma_1 + i_6 \alpha_1 + i_7 \beta_1 + i_8(\lambda \alpha_1 + \sigma \beta_1) + i_9(\mu \alpha_1 + s \beta_1) + i_{10}(\nu \alpha_1 + t \beta_1 + p \gamma_1). \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9) и сравнивая формулу (10) со второй формулой (9), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 + \sigma\mu = 1, \\ \mu(\lambda + s) = 0, \\ \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0, \\ s^2 = 1 - \mu\sigma, \\ \nu\sigma + ts = 0. \end{cases}$$

Из этой системы вытекает следующую система:

$$\begin{cases} \mu(\lambda + s) = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0. \end{cases}$$

Данная система приводит к рассмотрению следующих двух случаев: $a)\lambda = -s; b)\mu = 0, \sigma = 0$. Рассматривая исходную систему в случае $a)$, мы получаем следующее:

$$\lambda = \pm\sqrt{1 - \sigma\mu}, \text{ где } 1 - \sigma\mu \geq 0;$$

$$\begin{cases} \nu\lambda + t\mu = 0, \\ \nu\sigma - t\lambda = 0. \end{cases}$$

Определитель полученной системы отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Таким образом, $\nu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\{i_6 \pm \sqrt{1 - \sigma\mu}i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \sigma\mu}i_9, i_5 + \rho i_{10}\}.$$

Рассматривая исходную систему в случае $b)$, мы получаем следующее:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ \nu\lambda = 0, \\ s^2 = 1, \\ ts = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda = \pm 1, \nu = 0, s = \pm 1, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\begin{aligned} &\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_5 + \rho i_{10}\}, \\ &\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_5 + \rho i_{10}\}, \\ &\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_5 + \rho i_{10}\}, \\ &\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_5 + \rho i_{10}\}. \end{aligned}$$

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & \nu & 0 \\ 0 & 1 & \sigma & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 4^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_5, X_2 = i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_5, X_3 = i_{10}. \quad (11)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_6 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= i_9 + \sigma i_6 + s i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_6 + \lambda i_8 + \mu i_9 + \nu i_5) + \beta_1(i_7 + \sigma i_8 + s i_9 + t i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\nu \alpha_1 + t \beta_1) + i_6 \alpha_1 + i_7 \beta_1 + \\ + i_8(\lambda \alpha_1 + \sigma \beta_1) + i_9(\mu \alpha_1 + s \beta_1) + i_{10} \gamma_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с первой формулой (12) и сравнивая формулу (13) со второй формулой (12), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 + \sigma \mu = 1, \\ \mu(\lambda + s) = 0, \\ \nu \lambda + t \mu = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0, \\ s^2 = 1 - \mu \sigma, \\ \nu \sigma + t s = 0. \end{cases}$$

Из этой системы вытекает следующую систему:

$$\begin{cases} \mu(\lambda + s) = 0, \\ \sigma(\lambda + s) = 0. \end{cases}$$

Данная система приводит к рассмотрению следующих двух случаев: $a) \lambda = -s; b) \mu = 0, \sigma = 0$. Рассматривая исходную систему в случае a , мы получаем следующее:

$$\begin{aligned} \lambda = \pm \sqrt{1 - \sigma \mu}, \text{ где } 1 - \sigma \mu \geq 0; \\ \begin{cases} \nu \lambda + t \mu = 0, \\ \nu \sigma - t \lambda = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Определитель полученной системы отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Таким образом, $\nu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\{i_6 \pm \sqrt{1 - \sigma \mu} i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \sigma \mu} i_9, i_{10}\}.$$

Рассматривая исходную систему в случае b , мы получаем следующее:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ \nu \lambda = 0, \\ s^2 = 1, \\ t s = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\lambda = \pm 1, \nu = 0, s = \pm 1, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы)

$$\begin{aligned} &\{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_{10}\}, \\ &\{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_{10}\}, \\ &\{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_{10}\}, \\ &\{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_{10}\}. \end{aligned}$$

В случае 5^0 система инвариантности противоречива.

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 6^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_{10}, X_2 = i_8 + \sigma i_9 + s i_{10}, X_3 = i_5 + p i_{10}. \quad (14)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_9 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= i_6 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_{10}) + \beta_1(i_8 + \sigma i_9 + s i_{10}) + \gamma_1(i_5 + p i_{10}) = i_5 \gamma_1 + i_6 \alpha_1 + \\ + i_7 \alpha_1 \lambda + i_8 \beta_1 + i_9(\alpha_1 \mu + \beta_1 \sigma) + i_{10}(\alpha_1 \nu + \beta_1 s). \end{aligned} \quad (16)$$

Сравнивая формулу (16) с первой формулой (15), получим:

$$\gamma_1 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_1 \lambda = \mu, \beta_1 = 1, \alpha_1 \mu + \beta_1 \sigma = \lambda, \alpha_1 \nu + \beta_1 s = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = \lambda, s = 0, \mu = 0$.

Сравнивая формулу (16) со второй формулой (15), получим:

$$\gamma_2 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_2 \lambda = \sigma, \beta_2 = 0, \alpha_2 \mu + \beta_2 \sigma = 0, \alpha_2 \nu + \beta_2 s = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = \lambda, s = 0, \mu = 0$.

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\begin{aligned} &\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_5 + p i_{10}\}. \\ &7^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 7^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_5, X_2 = i_8 + \sigma i_9 + s i_5, X_3 = i_{10}. \quad (17)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_9 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= i_6 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_9 + \nu i_5) + \beta_1(i_8 + \sigma i_9 + s i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\nu \alpha_1 + s \beta_1) + i_6 \alpha_1 + \\ + i_7 \lambda \alpha_1 + i_8 \beta_1 + i_9(\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1) + i_{10} \gamma_1. \end{aligned} \quad (19)$$

Сравнивая формулу (19) с первой формулой (18), получим:

$$\nu \alpha_1 + s \beta_1 = 0, \alpha_1 = 0, \lambda \alpha_1 = \mu, \beta_1 = 1, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 = \lambda, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0, \mu = 0, \sigma = \lambda$.

Сравнивая формулу (19) со второй формулой (18), получим:

$$\nu \alpha_2 + s \beta_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda \alpha_2 = \sigma, \beta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\nu = 0, \lambda = \sigma, \mu = 0$.

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_{10}\}.$$

В случаях $8^0, 9^0$ системы инвариантности противоречивы.

$$10^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 10^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_6 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_9, X_2 = i_5, X_3 = i_{10}. \quad (23)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_8 + \lambda i_9 + \mu i_6 + \nu i_7, \\ [a, X_2] &= 0, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_6 + \lambda i_7 + \mu i_8 + \nu i_9) + \beta_1 i_5 + \gamma_1 i_{10} = i_5 \beta_1 + i_6 \alpha_1 + i_7 \alpha_1 \lambda + i_8 \alpha_1 \mu + i_9 \alpha_1 \nu + i_{10} \gamma_1. \quad (25)$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:

$$\beta_1 = 0, \alpha_1 = \mu, \alpha_1 \lambda = \nu, \mu \alpha_1 = 1, \nu \alpha_1 = \lambda, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = \pm 1, \nu = \pm \lambda$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.
В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\begin{aligned} &\{i_6 + \lambda i_7 + i_8 + \lambda i_9, i_5, i_{10}\}, \\ &\{i_6 + \lambda i_7 - i_8 - \lambda i_9, i_5, i_{10}\}. \end{aligned}$$

В случаях $11^0 - 13^0$ системы инвариантности противоречивы.

$$14^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 14^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10}, X_2 = i_9 + \sigma i_{10}, X_3 = i_5 + t i_{10}. \quad (26)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_9 + \lambda i_6, \\ [a, X_2] &= i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_{10}) + \beta_1(i_9 + \sigma i_{10}) + \gamma_1(i_5 + t i_{10}) &= i_5 \gamma_1 + i_7 \alpha_1 + i_8 \alpha_1 \lambda + i_9 \beta_1 + \\ &+ i_{10}(\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Сравнивая формулу (28) с первой формулой (27), получим:

$$\gamma_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = 0, \lambda \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = 0$.

Сравнивая формулу (28) со второй формулой (27), получим:

$$\gamma_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = 0$.

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\begin{aligned} &\{i_7, i_9, i_5 + i_{10}\}. \\ 15^0 &\begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 15^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_5, X_2 = i_9 + \sigma i_5, X_3 = i_{10}. \quad (29)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_9 + \lambda i_6, \\ [a, X_2] &= i_7, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_5) + \beta_1(i_9 + \sigma i_5) + \gamma_1 i_{10} = i_5(\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1) + i_7 \alpha_1 + i_8 \lambda \alpha_1 + i_9 \beta_1 + i_{10} \gamma_1. \quad (31)$$

Сравнивая формулу (31) с первой формулой (30), получим:

$$\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = 0, \lambda \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = 0$.

Сравнивая формулу (31) со второй формулой (30), получим:

$$\mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 = 0, \alpha_2 = 1, \lambda \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = 0, \lambda = 0$.

Отметим, что оставшаяся формула не приводит к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\begin{aligned} &\{i_7, i_9, i_{10}\}. \\ &16^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 16^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, X_2 = i_5, X_3 = i_{10}. \quad (32)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_5$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= i_9 + \lambda i_6 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= 0, \\ [a, X_3] &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, X_2, X_3\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9) + \beta_1 i_5 + \gamma_1 i_{10} = i_5 \beta_1 + i_7 \alpha_1 + i_8 \lambda \alpha_1 + i_9 \mu \alpha_1 + i_{10} \gamma_1. \quad (34)$$

Сравнивая формулу (34) с первой формулой (33), получим:

$$\beta_1 = 0, \lambda = 0, \alpha_1 = \mu, \lambda \alpha_1 = 0, \mu \alpha_1 = 1, \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\mu = \pm 1$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, X_2, X_3\}$ имеют вид (базисы):

$$\begin{aligned} &\{i_7 + i_9, i_5, i_{10}\}, \\ &\{i_7 - i_9, i_5, i_{10}\}. \end{aligned}$$

В случаях $17^0 - 20^0$ системы инвариантности противоречивы.

Теорема 1. Относительно оператора i_5 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли \overline{H} :

$$\begin{aligned} & \{i_6 + \lambda i_9, i_7 \pm i_9, i_8 \mp \lambda i_9\}, \\ & \{i_6 \pm i_8, i_7, i_9\}, \\ & \{i_6 \pm \sqrt{1 - \sigma\mu} i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \sigma\mu} i_9, i_5 + p i_{10}\}, \\ & \{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\}, \\ & \{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\}, \\ & \{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_5 + p i_{10}\}, \\ & \{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_5 + p i_{10}\}, \\ & \{i_6 \pm \sqrt{1 - \sigma\mu} i_8 + \mu i_9, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \sigma\mu} i_9, i_{10}\}, \\ & \{i_6 + i_8, i_7 + i_9, i_{10}\}, \\ & \{i_6 + i_8, i_7 - i_9, i_{10}\}, \\ & \{i_6 - i_8, i_7 + i_9, i_{10}\}, \\ & \{i_6 - i_8, i_7 - i_9, i_{10}\}, \\ & \{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_5 + p i_{10}\}, \\ & \{i_6 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_9, i_{10}\}, \\ & \{i_6 + \lambda i_7 + i_8 + \lambda i_9, i_5, i_{10}\}, \\ & \{i_6 + \lambda i_7 - i_8 - \lambda i_9, i_5, i_{10}\}, \\ & \{i_7, i_9, i_5 + i_{10}\}, \\ & \{i_7, i_9, i_{10}\}, \\ & \{i_7 + i_9, i_5, i_{10}\}, \\ & \{i_7 - i_9, i_5, i_{10}\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Относительно операторов i_5, i_6, i_8 инвариантно только следующее четырехмерное подпространство алгебры Ли $\overline{H} : \{i_7, i_9, i_{10}\}$.

Условие прямой суммы для подпространства $m_1 = \{i_7, i_9, i_{10}\}$ выполняются, т. е.

$$\overline{H} = \overline{G}_{12} + m_1.$$

Таким образом, получена следующая теорема:

Теорема 3. Однородное пространство H/G_{12} редуکتивно. Редуکتивным дополнением является только следующее подпространство: i_7, i_9, i_{10} .

Заклyчение

В работе получено редуکتивное однородное пространство. Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

REFERENCES

1. Kobajasi, Sh. Osnovy diffierencial'noj geometrii : v 2 t. / Sh. Kobajasi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981. – T. 2. – 413 s.
2. Kopp, V. G. O podgruppakh vrashchienij piatimiernykh i shestimiernykh jevklidovykh i lorencevykh prostranstv / V. G. Kopp // Uchion. zap. Kazan. un-ta. – 1966. – № 1 (126). – S. 13–22.
3. Rashevskij, P. K. Rimanova geometrija i tenzornyj analiz / P. K. Rashevskij. – M. : Nauka, 1967. – 664 s.
4. Khelgason, S. Diffierencial'naja geometrija i simmetrichieskije prostranstva / S. Khelgason. – M. : Mir, 1964. – 538 s.
5. Yudov, A. A. Klassifikacija odnomiernykh podmnogoobrazij prostranstva Minkovskogo, imiejushchikh kasatiel'nuju mnimojevklidova i jevklidova tipa / A. A. Yudov, N. S. Kovalik // Viesn. Bresc. un-ta. Ser. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 106–115.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 09.11.2022

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша (не меней за 14 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc, *.docx ці *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 08.09.2016 № 206). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. боб.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносака.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш, чым 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуравецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаноўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.
- References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выпіска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: highmath@brsu.brest.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 24.11.2022. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 13,49. Ул.-выд. арк. 6,56. Тыраж 100 экз. Заказ № 382.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.