

Вестнік

Брэсцкага ўніверсітэта

Рэдакцыйная калегія

галоўны рэдактар
А. М. Сендзер

намеснік галоўнага рэдактара
А. Я. Будзько

адказны рэдактар
М. М. Сендзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)
А. І. Басік (Беларусь)
В. М. Волкаў (Беларусь)
М. А. Громаў (Расія)
А. У. Дзямідчык (Беларусь)
М. І. Ляўчук (Беларусь)
І. П. Маргынаў (Беларусь)
А. І. Мелькер (Расія)
В. С. Манахаў (Беларусь)
У. А. Плецохоў (Беларусь)
В. М. Радзькоў (Беларусь)
В. Р. Самойленка (Украіна)
А. А. Трафімук (Беларусь)
Уба Люба (Польшча)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Вестнік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

№ 1 / 2022

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіяй Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай
камісіяй Рэспублікі Беларусь ад 28.01.2022 № 14
(са змяненнямі, унесенымі загадам ВАК ад 07.02.2022 № 25)
часопіс «Вестнік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»

ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў у 2022 г.
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

◇ ◇ ◇

У адпаведнасці з дагаворам паміж установай адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»
і ТАА «Навуковая электронная бібліятэка» (ліцэнзійны дагавор
№ 457-11/2020 ад 03.11.2020) часопіс «Вестнік Брэсцкага ўніверсітэта.

Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»

размяшчаецца на платформе eLIBRARY.RU

і ўключаны ў Расійскі індэкс навуковага цытавання (РІНЦ)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

Ворсин Н. Н., Гладышук А. А., Кушнер Т. Л., Тарасюк Н. П., Чугунов С. В. Применение широкого плоского витка для вихретокового зондирования двумерного электронного газа в нитридных гетеропереходах	5
Ивашкевич А. В., Бурый А. В., Овсюк Е. М., Редьков В. М. Собственные состояния оператора спиральности для частицы со спином 2 во внешнем магнитном поле	13
Кузьмич А. М., Плетюхов В. А. Описание внутренних степеней свободы дираковских частиц посредством тензорных полей	29
Плетюхов В. А. Объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда в теории релятивистских волновых уравнений.....	34
Сендер Н. Н. Эллипсометрическое определение показателей преломления и коэффициентов поглощения одноосных поглощающих кристаллов с использованием отражения и преломления света на границе изотропная среда – кристалл	42
Серый А. И. Об условиях бета-равновесия электронно-нуклонного вещества при низких температурах вблизи порога нейтронизации.....	55

МАТЭМАТЫКА

Будько А. Е. О времени отыскания команд в программах элементарных машин Тьюринга.....	64
Грицук Д. В. Производная π -длина π -разрешимой группы	74
Матысик О. В. Сходимость в гильбертовом пространстве неявной итерационной процедуры решения некорректных уравнений с апостериорным выбором параметра регуляризации	82
Морозов В. В. Модификации метода Ньютона в полиномиальном анализе банаховых уравнений.....	91
Юдов А. А., Кислюк Е. В. Дифференциальная геометрия однородных пространств со структурной группой – группой Ли движений пространства Минковского	98



Vesnik

of Brest University

Editorial Board

editor-in-chief
A. M. Sender

deputy editor-in-chief
A. Ya. Budzko

managing editor
M. M. Sender

A. B. Antanievich (Belarus)
A. I. Basik (Belarus)
V. M. Volkau (Belarus)
M. A. Gromau (Russia)
A. U. Dziamidchyk (Belarus)
M. I. Liauchuk (Belarus)
I. P. Martynau (Belarus)
A. I. Melkier (Russia)
V. S. Manakhau (Belarus)
U. A. Plietsiukhou (Belarus)
V. M. Razkou (Belarus)
V. R. Samoilenka (Ukraine)
A. A. Trafimuk (Belarus)
Uba Liuba (Poland)

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»

№ 1 / 2022

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 nr 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 28, 2022 nr 14 (with the amendments made by the order of Supreme Certification Commission from February 07, 2022 nr 25) the journal «Vesnik of Brest University.

Series 4. Physics. Mathematics» has been included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in 2022 in physics-mathematical sciences (Physics)

◇ ◇ ◇

According to the agreement between Educational Establishment «Brest State A. S. Pushkin University» and Pvt Ltd «Scientific Electronic Library» (licence contract № 457-11/2020 from 03.11.2020) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» is placed on the platform eLIBRARY.RU and included in the Russian Science Citation Index (RSCI)

CONTENTS

PHYSICS

Nikolai Vorsin, Anatolii Gladyschchuk, Tatiana Kushner, Nikolai Tarasyuk, Sergei Chugunov Application of a Wide Flat Loop for Vortex Probing of Two-Dimensional Electronic Gas in Nitride Heterojunctions	5
Alina Ivashkevich, Anton Buryy, Elena Ovsyuk, Victor Red'kov The Eigenvalue Problem for Helicity Operator for a Spin 2 Particle in Presence of External Magnetic Field	13
Anastasia Kuzmich, Vladimir Pletyukhov Description of Internal Degrees of Freedom of the Dirac's Particles by Means of Tensor Fields	29
Vladimir Pletyukhov United Maxwell-Kalb-Ramond Field in the Theory of Relativistic Wave Equations.....	34
Nikolai Sender Ellipsometric Determination of Refraction Indicators and Absorption Coefficients of Uniaxial Absorbing Crystals by Using Reflections and Refractions of Light at the Boundary Isotropic Medium Crystal	42
Alexey Sery On the Condition of Beta Equilibrium of the Electron-Nucleon Substances at Low Temperatures Near the Neutronization Threshold	55

MATHEMATICS

Aleksandr Budko On the Time of Finding Commands in the Programs of Elementary Turing Machines.....	64
Dmitry Gritsuk The Derived π -Length of the π -Solvable Group	74
Oleg Matysik The Convergence in the Hilbert Space of an Implicit Iteration Procedure for Solving Ill-posed Equations with A posteriori Choice of Regularization Parameter	82
Vladimir Morozov Modifications of Newton's Method in the Polynomial Analysis of Banach Equations.....	91
Aleksandr Yudov, Yelena Kisilyuk Differential Geometry of Homogeneous Spaces with a Structure Group – Lie Group of Motions of Minkowski Space	98

ФІЗИКА

УДК 621.3.013.24

**Николай Николаевич Ворсин¹, Анатолий Антонович Гладышук²,
Татьяна Леонидовна Кушнер³, Николай Петрович Тарасюк⁴,
Сергей Владимирович Чугунов⁵**

¹канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физики

Брестского государственного технического университета

²канд. физ.-мат. наук, проф. каф. физики

Брестского государственного технического университета

³канд. физ.-мат. наук, зав. каф. физики

Брестского государственного технического университета

⁴ст. преподаватель каф. физики

Брестского государственного технического университета

⁵ст. преподаватель каф. физики

Брестского государственного технического университета

**Nikolai Vorsin¹, Anatolii Gladyschuk², Tatiana Kushner³, Nikolai Tarasyuk⁴,
Sergei Chugunov⁵**

¹Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Department Physics
of Brest State Technical University

²Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of department Physics
of Brest State Technical University

³Candidate of Physics and Mathematics, Head department Physics
of Brest State Technical University

⁴Senior Lecturer of Department Physics of Brest State Technical University

⁵Senior Lecturer of Department Physics of Brest State Technical University
e-mail: vorsin@hotmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ШИРОКОГО ПЛОСКОГО ВИТКА ДЛЯ ВИХРЕТОКОВОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ДВУМЕРНОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В НИТРИДНЫХ ГЕТЕРОПЕРЕХОДАХ

Описаны результаты исследований, проведенных при построении вихретокового измерителя электропроводности двумерного электронного газа в нитридных гетеропереходах. В основу измерителя положены две идеи: использование в качестве зонда широкого плоского витка и специального автогенератора зондирующего тока, который сводит задачу измерения активной проводимости витка к измерению постоянного тока.

Ключевые слова: вихретоковое зондирование, двумерный электронный газ, поверхностное сопротивление, отрицательная электропроводность.

Application of a Wide Flat Loop for Vortex Probing of Two-Dimensional Electronic Gas in Nitride Heterojunctions

The results of studies carried out in the construction of an eddy current meter of electrical conductivity of a two-dimensional electron gas in nitride heterojunctions are described. The meter is based on two ideas: the use of a wide flat loop as a probe and a special probe current auto alternator, which reduces the task of measuring the active conductivity of a loop to measuring a direct current.

Key words: Eddy current sensing, 2D electron gas, surface resistance, negative conductivity.

Введение

Вихретоковое зондирование, занимающее существенное место в системах неразрушающего контроля, дает хорошие результаты только на объектах из материалов с высокой электропроводностью – металлы, сильно легированные полупроводники, насыщенные электролиты. С уменьшением электропроводности объекта зондирования вихретоковый отклик ослабевает и теряется в шумах индикаторного устройства. В какой-то мере работоспособность метода можно восстановить улучшением чувствительности индикаторного устройства и увеличением частоты зондирующего тока. Однако возможности этих способов ограничены и требуют применения дополнительных мер. В настоящей работе приведены результаты попыток расширения диапазона вихретокового зондирования в область слабой электропроводности, характерной для двумерного электронного газа (ДЭГ) в квантовой яме гетероперехода. Задача расширения диапазона возникла при построении прибора экспресс-контроля выращиваемых гетеропереходов GaN-AlGaIn для создания СВЧ-транзисторов.

Широковитковый датчик

Удельное сопротивление ДЭГ в нитридных гетеропереходах может находиться в диапазоне от 100 Ом/□ до 1000 Ом/□ (Ом на квадрат), в зависимости от примененных материалов и технологий. Обычный вихретоковый датчик накладного типа в виде проволочного витка создает достаточный сигнал только в низкоомной части диапазона – до 100 Ом/□. В высокоомной области диапазона, особенно в верхней его части, сигнал датчика оказывается очень слабым и не ощущается индикаторным устройством. Идея расширения диапазона удовлетворительной работы датчика заключается в расширении создаваемой им кольцевой токовой полосы на зондируемой пленке. При этом должна увеличиться поглощаемая пленкой электромагнитная мощность в сравнении с обычным тонким витком и, следовательно, величина реакции датчика. Следует заметить, что такие проблемы в [1; 2] пытаются решить другим путем – за счет улучшения чувствительности индикаторного устройства, но возможности этого способа сильно ограничены.

Теоретический анализ процесса вихретокового зондирования осуществляется разбиением зондируемой области на множество кольцевых зон, каждая из которых является тонким контуром, в пределах которого плотность тока считается неизменной. Сам возбуждающий виток при таком анализе также считается тонким контуром. Все эти контуры связаны между собой и возбуждающим витком магнитной связью, что описывается системой линейных уравнений для комплексных амплитуд токов в контурах и витке. Коэффициентами в уравнениях являются собственные и взаимные индуктивности контуров, которые предварительно вычисляются по известным формулам [3]:

$$M_{pk} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{pk} \frac{d\vec{l}_p d\vec{l}_k}{a}, \quad (1)$$

где $d\vec{l}_p$, $d\vec{l}_k$ – элементы p -го и k -го контуров, a – расстояние между этими элементами. Интегрирование проводится по обоим контурам. Эта же формула используется для вычисления собственной индуктивности контура, толщина которого в этом случае считается конечной (толстый контур). Индуктивность принимается равной взаимной индуктивности двух бесконечно тонких контуров, из которых первый проходит по осевой линии, а второй – по внутренней границе «толстого» контура [3].

Переход к широкому витку в данной схеме анализа означает необходимость дробления на кольцевые зоны не только зондируемой поверхности, но и самого витка. Это приведет к увеличению числа уравнений и неизвестных, что выльется всего лишь

в увеличение времени решения и расходования памяти компьютера. Результатом решения является не только распределение тока в зондируемой поверхности, но и распределение тока в возбуждающем витке. Кроме того, определяются макроскопические параметры, такие как индуктивность возбуждающего витка и его колебательная добротность с учетом потерь энергии колебаний в активном сопротивлении витка и зондируемой поверхности. Следует заметить, что при вихретоковом зондировании одним из основных параметров датчика является относительное изменение колебательной добротности витков в результате их связи с зондируемым объектом – Q_0/Q .

На рисунке 1 изображена постановочная часть задачи.

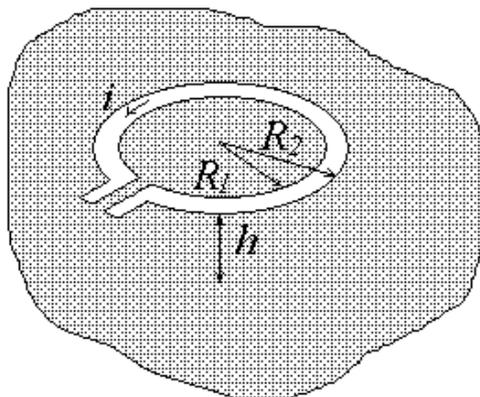


Рисунок 1. – Обозначения в расчетах параметров широкого витка

Виток характеризуется внутренним – R_1 , внешним – R_2 радиусами, d – толщиной фольги, из которой он изготовлен, и ρ – удельным сопротивлением материала витка. Заданными также являются расстояние до резистивной поверхности – h и ее удельное сопротивление – δ в Ом/□. Составление и решение системы уравнений осуществлялось в системе МЭПЛ, которая является плохим инструментом по быстродействию, но хороша по краткости текста программы и наглядности представления результатов.

На рисунке 2 приведен результат такого расчета для частоты 400 МГц, $R_1 = 5$ мм, $R_2 = 10$ мм, $h = 0.15$ мм, $d = 0.05$ мм, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом*м (медь) и $\delta = 200$ Ом/□. График выражает в относительных единицах зависимость плотности тока в поверхности от номера, выделяемого на ней контура – кольцевой зоны. Видно, что непосредственно под витком плотность тока имеет максимум, который по ширине приблизительно совпадает с шириной витка.

Следовательно, увеличивая ширину витка, можно увеличить ширину токовой полосы в резистивной поверхности под ним и увеличить вклад этой поверхности в потери электромагнитной мощности витка.

Убедиться в этом можно, проводя расчет макроскопических параметров витка для неизменного среднего диаметра и расстояния до резистивной поверхности. При указанных выше характеристиках витка эти параметры на частоте 400 МГц равны: $Q_0 = 976$, $L = 16$ нГн, $Q = 50,3$, $Q_0/Q = 25$. Аналогичный расчет для витка с $R_1 = 6,5$, $R_2 = 7,5$, т. е. миллиметровой ширины дает $Q_0 = 416$, $L = 29$ нГн, $Q = 63$, $Q_0/Q = 6,6$. Таким образом, применение широкого витка позволяет улучшить показатель относительного изменения добротности более чем в 3,8 раза. Многочисленные эксперименты с витками разного сечения и ширины подтверждают этот вывод.

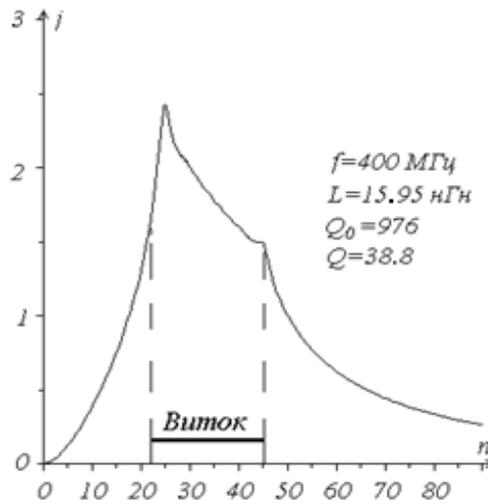


Рисунок 2. – Зависимость относительной плотности вихревого тока от номера кольцевой зоны

Имея механизм расчета, вносимого в виток активного сопротивления, можно рассчитать зависимость его величины от удельного сопротивления проводящей пленки под витком и получить формулу вычисления ее удельного сопротивления. На рисунке 3 показан график этой зависимости для частоты тока 400 МГц. Конечно, линейный вид этого графика можно предсказать заранее, поскольку все процессы в витке и проводящей поверхности под ним строго линейны. Интерес представляет только коэффициент пропорциональности между удельным и вносимым сопротивлением. Очевидно, этот коэффициент является функцией расстояния от витка до плоскости. Показанный на рисунке 3 график построен для расстояния 0,15 мм, а коэффициент, соответствующий этому расстоянию, равен $k = 7,5$.

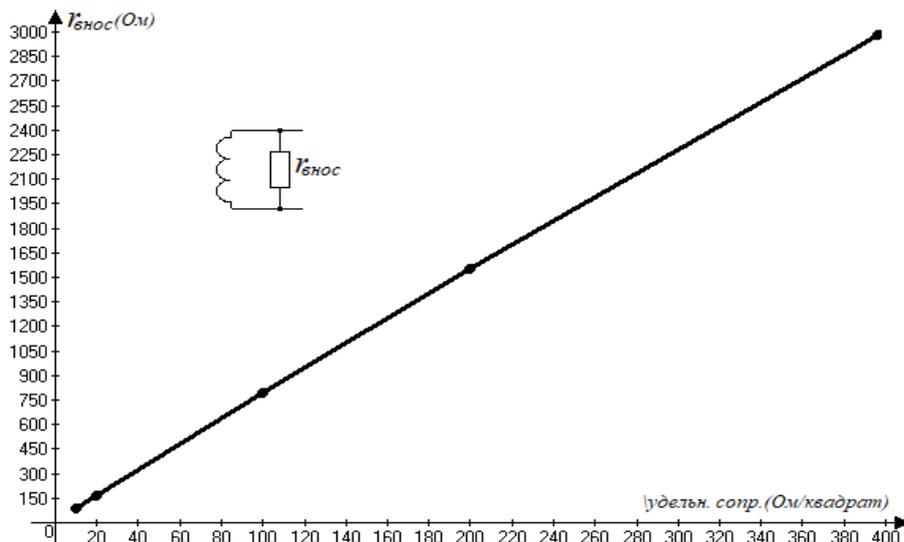


Рисунок 3. – График зависимости величины вносимого в виток сопротивления от удельного сопротивления поверхности

Не составляет труда определить зависимость коэффициента пропорциональности от расстояния между витком и проводящей плоскостью. Разумеется, расчеты проводятся для выбранных размеров витка.

На рисунке 4 приведен график этой зависимости. Можно было ожидать, что величина коэффициента пропорциональности будет выражаться квадратичной зависимостью от расстояния до проводящей плоскости. Однако для использованного интервала расстояний 0–1 мм зависимость близка к линейной и аппроксимируется формулой

$$k = 7,4 + 3,94h(\text{мм}). \quad (2)$$

Данная формула используется для расчета измеряемого удельного сопротивления – ρ .

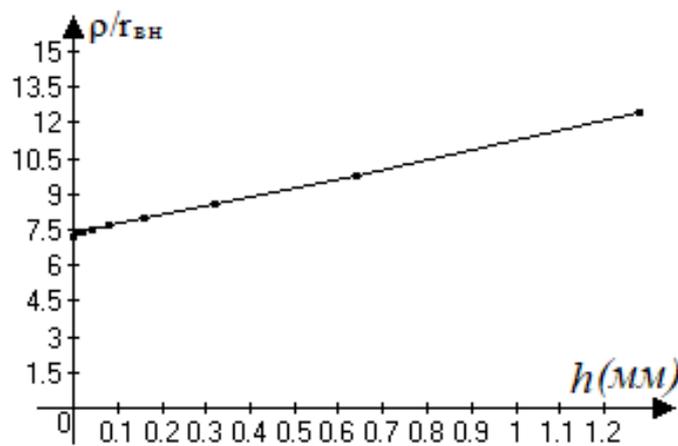


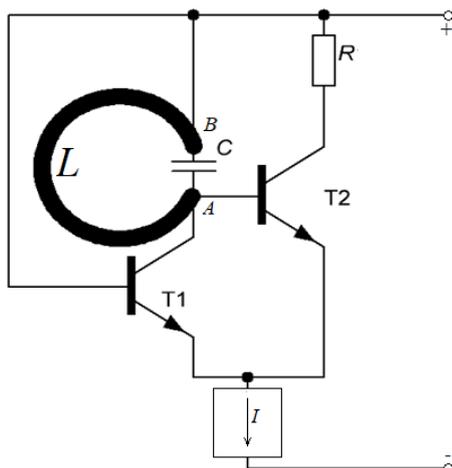
Рисунок 4. – Зависимость вносимой в виток проводимости от расстояния до поверхности, практически, линейная

Индикаторное устройство

Малогабаритность и относительная простота прибора во многом обеспечена удачным выбором основы индикаторного устройства, которая свела задачу измерения вносимого в виток активного сопротивления к измерению постоянного тока с последующей оцифровкой результата и простым вычислением.

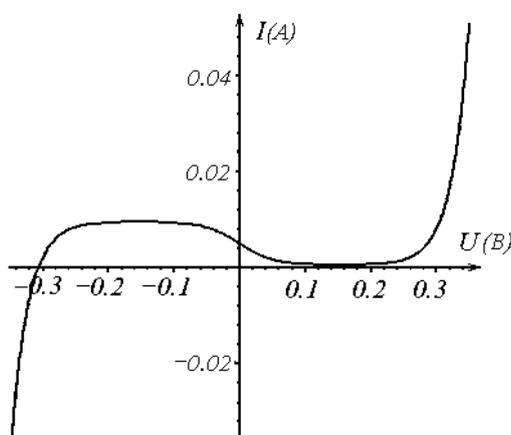
Использован двухтранзисторный генератор электрических колебаний, функциональная схема которого показана на рисунке 5. Генератор создает гармонический ток в индикаторном витке L и одновременно является измерителем его активного сопротивления. Частота генерируемых колебаний (около 400 МГц) определяется резонатором из сосредоточенных элементов $L = 16 \text{ нГн}$ и $C = 10 \text{ пф}$.

Источник питающего тока создает через транзисторы ток I, не зависящий от напряжений на электродах транзисторов. Первый транзистор T1 включен по схеме с общей базой (ОБ), второй – T2 – по схеме с общим коллектором. Оба каскада не инвертируют сигнал при усилении, поэтому обратная связь (ОС), образованная соединением эмиттеров, будет положительной, и в контуре могут возникнуть незатухающие колебания на частоте резонанса. К особенности данного генератора следует отнести нулевую величину постоянного напряжения между базой и коллектором каждого транзистора. Кремниевые дрейфовые транзисторы сохраняют в таком режиме усилительные характеристики. Второй весьма важной особенностью рассматриваемого генератора является целостность резонатора – колебательного контура, в котором нет дробления реактивных элементов L и C.



Рисунек 5. – Структурная схема измерительного автогенератора

Для определения измерительных характеристик генератора удобно использовать концепцию отрицательного сопротивления (или проводимости). Мысленно заменим резонатор, включенный между точками А и В, источником постоянного напряжения U и вычислим зависимость от него тока I , отдаваемого этим источником в двухтранзисторную цепочку. В результате получается весьма громоздкая формула, график которой показан на рисунке 6.



Рисунек 6. – ВАХ транзисторной цепочки измерительного автогенератора

Видно, что в диапазоне напряжения от $-0,06\text{В}$ до $+0,06\text{В}$ исследуемая двухтранзисторная цепочка обладает отрицательной дифференциальной проводимостью. Величина проводимости в рабочей точке $U = 0$ выражается следующей формулой:

$$g = \frac{dI}{dU} = \frac{I}{4U_T}(1-2\alpha) + \frac{I_{e0}}{2U_T}(1-2\alpha) + \frac{I_{c0}}{U_T}(2-\alpha), \quad (3)$$

в которой I – ток, задаваемый источником питания, U_T – температурный потенциал, равный при комнатной температуре 26 мВ , α – коэффициент передачи в коллектор эмиттерного тока используемых транзисторов – величина, близкая к 1, I_{e0} и I_{c0} – обратные токи

соответственно эмиттерного и коллекторного переходов. Два последних слагаемых в данной формуле можно отбросить, ввиду того что обратные токи переходов транзисторов на несколько порядков меньше тока питания I . Первое слагаемое определяет отрицательную проводимость, которую можно записать очень простой формулой:

$$g_- \approx -\frac{I}{4U_T}. \quad (4)$$

Формула для отрицательной проводимости g_- , создаваемой двухтранзисторной цепочкой, указывает на очень эффективный инструмент регулирования величины отрицательной проводимости. Действительно, ток питания I можно задавать и изменять в очень широких пределах – от долей микроампера до десятков миллиампер (примерно на 5 порядков) в тех же пределах, т. е. на 5 порядков будет изменяться величина отрицательной проводимости, создаваемой цепочкой на зажимах резонатора.

Если отрицательная проводимость по модулю превысит положительную проводимость подключенного к ней резонатора, то в нем возникнут колебания с резонансной частотой и нарастающей амплитудой. При росте амплитуды рабочая точка на графике ВАХ будет заходить в области с нулевой проводимостью ($\pm 0,16$ В на графике ВАХ), что уменьшит среднюю величину модуля отрицательной проводимости. Если эта средняя величина по-прежнему будет превышать положительную проводимость колебательного контура, рост амплитуды колебаний продолжится. Начиная с амплитуды 0,18 В рабочая точка на графике ВАХ будет заходить на участки положительной проводимости, что приведет к резкому уменьшению средней величины модуля отрицательной проводимости. В конце концов средняя величина модуля отрицательной проводимости сравняется с положительной проводимостью колебательного контура и рост амплитуды колебаний в нем прекратится. Цепь будет вырабатывать колебания с постоянной равновесной амплитудой.

Описанный механизм стабилизации амплитуды колебаний может использоваться на практике, если заведомо известны параметры резонатора, по которым можно определить требуемую величину отрицательной проводимости и требуемый ток питания I . В случае построения измерительного генератора параметры колебательного контура заранее не известны и могут варьироваться в широких пределах.

В этом случае необходим автоматический подбор тока I под параметры подключенного резонатора. Реализация такой автоматики не представляет трудности, а принцип ее работы состоит в том, чтобы измерять амплитуду вырабатываемых колебаний и автоматически устанавливать такую величину тока питания I , при которой эта амплитуда составит заданную величину (в нашем случае 2 мВ). При этом величина постоянного тока питания легко измеряется, и по ней с помощью (4) вычисляется отрицательная проводимость, создаваемая транзисторной цепочкой. Модуль этой проводимости равен проводимости активных потерь резонатора, которая легко пересчитывается (2) в величину поверхностного удельного сопротивления ДЭГ в исследуемой подложке.

Конструкция измерителя

Идея применения широкого витка и описанного индикаторного устройства была использована для построения бесконтактного измерителя удельного сопротивления ДЭГ, который образуется в квантовой яме гетероперехода GaN-AlGaIn. Конструкция прибора показана на рисунке 7.

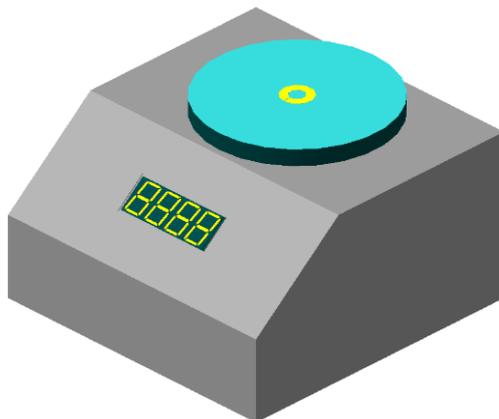


Рисунок 7. – Внешний вид измерителя

Он позволяет измерять удельное сопротивление проводящей поверхности в диапазоне 20–600 Ом/□. Измерительная часть представляет собой цилиндрический столик диаметром 95 мм и высотой 5 мм. В центре верхнего основания расположен плоский виток. На наклонной поверхности корпуса расположен цифровой индикатор, отображающий измеряемую величину в Ом/□. Подложка, содержащая исследуемый гетеропереход, просто укладывается на верхнюю поверхность столика, которая имеет хорошую плоскостность и чистоту обработки. При этом без всякой задержки на цифровом индикаторе отображается значение удельного поверхностного сопротивления ДЭГ. Прибор может соединяться с компьютером через USB-порт. После запуска на компьютере соответствующей программы показания прибора дублируются на мониторе и могут сохраняться в текстовом файле при нажатии кнопки «Запомнить». Кроме того, имеется возможность прописать толщину подложки, которая влияет на результат измерений (2). По умолчанию толщина подложки полагается равной 400 мкм.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стеблев, Ю. И. Синтез заданных характеристик вихретоковых преобразователей / Ю. И. Стеблев // Дефектоскопия. – 1984. – № 11. – С. 12–20.
2. Fava, J. Design and construction of eddy current sensors with rectangular planar coils / J. Fava, A. E. Obrutsky, M. Ruch // 16 the World Conf. On Non-Destr. Testing. – Montreal, 2004. – P. 34–46.
3. Калантаров, П. Л. Расчет индуктивностей : справ. кн. / П. Л. Калантаров, Л. А. Цейтлин. – Л. : Энергоатомиздат, 1986. – 488 с.

REFERENCES

1. Stiebliev, Yu. I. Sintez zadannykh kharakteristik vikhrietokovykh prieobrazovateliej / Yu. I. Stiebliev // Diefiektoskopija. – 1984. – № 11. – S. 12–20.
2. Fava, J. Design and construction of eddy current sensors with rectangular planar coils / J. Fava., A. E. Obrutsky, M. Ruch // 16 the World Conf. On Non-Destr. Testing. – Montreal, 2004. – P. 34–46.
3. Kalantarov, P. L. Raschiot induktivnostiej : sprav. kn. / P. L. Kalantarov, L. A. Zeitlin. – L. : Energoatomizdat, 1986. – 488 s.

УДК 539.12

Alina Ivashkevich¹, Anton Buryy², Elena Ovsyuk³, Victor Red'kov⁴^{1, 2}Graduate Student of B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus³PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor,
Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics
of the Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin⁴PhD (Physics and Mathematics), Chief Researcher
of the Center «Fundamental Interactions and Astrophysics»
of the B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus**Алина Валентиновна Ивашкевич¹, Антон Васильевич Бурый²,****Елена Михайловна Овсюк³, Виктор Михайлович Редьков⁴**^{1, 2}аспірант Інстытута фізікі імя Б. І. Степанова НАН Беларусі³канд. фіз.-мат. навук, зав. каф. тэарэтычнай фізікі і прыкладнай інфарматыкі
Мозырскага дзяржаўнага педагагічнага ўніверсітэта імя І. П. Шамякіна⁴д-р фіз.-мат. навук, гл. навуц. супрацоўнік

Інстытута фізікі імя Б. І. Степанова НАН Беларусі

e-mail: ¹ivashkevich.alina@yandex.by; ²anton.buryy.97@mail.ru; ³e.ovsyuk@mail.ru;⁴v.redkov@ifanbel.bas-net.by

Eigenstates of the Helicity Operator for a Particle with Spin 2 in an External Magnetic Field

The helicity operator for a symmetric tensor of the second rank describing a particle with spin 2 is detailed in a cylindrical coordinate system and a cylindrical tetrad. First, the case of a free particle is investigated. After separating the variables, a system of 10 differential equations of the first order for the variable r is obtained. It is divided into two subsystems of 4 and 6 equations. A system of 4 equations is solved using the exclusion method and reduced to a single equation for the main function; its solutions are constructed in terms of Bessel functions. A system of 6 equations is reduced to two related second-order equations for two functions, which give a 4th-order differential equation; the latter is solved by factorization; exact solutions are constructed in Bessel functions. The whole analysis is generalized to the case of the presence of an external magnetic field. Solutions are constructed in degenerate hypergeometric functions. The spectra for the eigenstates of the helicity operator are described as the roots of polynomial equations of the 3rd and 5th orders.

Key words: spin 2; cylindrical symmetry, tetrad method, helicity operator, eigenvalue problem, exact solutions.

СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРА СПИРАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 2 ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Оператор спиральности для симметричного тензора второго ранга, описывающего частицу со спином 2, детализируется в цилиндрической системе координат и цилиндрической тетраде. Сначала исследуется случай свободной частицы. После разделения переменных получена система из 10-ти дифференциальных уравнений первого порядка по переменной r . Она разбивается на две подсистемы из 4-х и 6-ти уравнений. Система из 4-х уравнений решается с помощью метода исключения и сводится к одному уравнению для основной функции, его решения строятся в терминах функций Бесселя. Система из 6-ти уравнений приводится к двум связанным уравнениям второго порядка для двух функций, которые дают дифференциальное уравнение 4-го порядка; последнее решается методом факторизации; точные решения строятся в функциях Бесселя. Весь анализ обобщается на случай присутствия внешнего магнитного поля. Решения строятся в вырожденных гипергеометрических функциях. Спектры для собственных состояний оператора спиральности описываются как корни полиномиальных уравнений 3-й и 5-й степеней.

Ключевые слова: спин 2, симметричный тензор 2-го ранга, цилиндрическая симметрия, тетрадный метод, оператор спиральности, задача на собственные значения, точные решения.

Introduction, helicity operator in cylindric basis, separating the variables

It is known that the eigenvalues states of the helicity operator play a substantial role in studying any spin particle in external electromagnetic (or gravitational) fields with cylindric symmetry. In the present work we specify this problem for a spin 2 particle in Minkowski space-time, starting with the following relations in Cartesian coordinates

$$\Sigma^{cart} = J^{23} \frac{\partial}{\partial x} + J^{31} \frac{\partial}{\partial y} + J^{12} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \Sigma^{Cart} H^{cart} = \sigma H^{cart}, \quad (1)$$

$H^{Cart}(x, y, z)$ consists of 10 components of the symmetric tensor referring to the spin 2 particle.

We will apply description of this field in cylindric coordinates $x^\alpha = (t, r, \phi, z)$ and the corresponding tetrad

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (2)$$

Transition from Cartesian tetrad to cylindric one is performed by means of the local transformation (belonging to the Lorentz group)

$$L_b^a(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Therefore, the tensor of the second rank H transforms according to the rule

$$H^{cart} = [H_{(ab)}^{cart}], \quad H^{cyl} = (L \otimes L) H^{cart} = L H^{cart} \tilde{L}.$$

Correspondingly the helicity operator transforms to cylindric tetrad as follows (we apply 10-dimensional representation for S)

$$H^{cyl} = (L \otimes L) H^{cart} \Rightarrow H^{cyl} = S H^{cart},$$

$$\Sigma^{cyl} = S(\phi) [J^{23} (\cos \phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}) + J^{31} (\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}) + J^{12} \frac{\partial}{\partial z}] S(-\phi), \quad (4)$$

whence we get

$$\begin{aligned} \Sigma^{cyl} = & [S(\phi) J^{23} S_2(-\phi) \cos \phi + S_2(\phi) J^{31} S(-\phi) \sin \phi] \frac{\partial}{\partial r} \\ & + \frac{1}{r} [-S(\phi) J^{23} S(-\phi) \sin \phi + S_2(\phi) J^{31} S_2(-\phi) \cos \phi] \frac{\partial}{\partial \phi} \\ & + \frac{1}{r} [-\sin \phi S(\phi) J^{23} \frac{\partial S(-\phi)}{\partial \phi} + \cos \phi S(\phi) J^{31} \frac{\partial S(-\phi)}{\partial \phi}] + S(\phi) J^{12} S(-\phi) \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Taking in mind the structure of the field function (it contains the multipliers $e^{im\phi}$ and e^{ikz}) we can transform the last relation to the form

$$\begin{aligned} \Sigma^{cyl} = & [S(\phi) J^{23} S(-\phi) \cos \phi + S(\phi) J^{31} S(-\phi) \sin \phi] \frac{d}{dr} + \frac{im}{r} [-S(\phi) J^{23} S(-\phi) \sin \phi + S(\phi) J^{31} S(-\phi) \cos \phi] \\ & + \frac{1}{r} [-\sin \phi S(\phi) J^{23} \frac{\partial S(-\phi)}{\partial \phi} + \cos \phi S(\phi) J^{31} \frac{\partial S(-\phi)}{\partial \phi}] + S(\phi) J^{12} S(-\phi) ik. \end{aligned}$$

Let us find expression for 10 components of the field function H^{cyl} in the cylindric tetrad basis. We will apply the following notations

$$H^{cyl} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{pmatrix}, S(\phi) = \begin{pmatrix} \cos^2\phi & \sin^2\phi & \cdot & \cdot & \cdot & \sin 2\phi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & \cdot & \cdot & \cdot & -\sin 2\phi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cos\phi & -\sin\phi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \sin\phi & \cos\phi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\cos\phi\sin\phi & \cos\phi\sin\phi & \cdot & \cdot & \cdot & \cos 2\phi & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cos\phi & \sin\phi & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\sin\phi & \cos\phi & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & 1 \end{pmatrix};$$

the inverse matrix equals $S^{-1} = S(-\phi)$. After simple calculation we derive the following expression for helicity operator in cylindric basis

$$\Sigma^{cyl} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dr} + \frac{im}{r} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + ik \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

taking in mind explicit form of generators for tensor we obtain its shorter form

$$\bar{J}^{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -2 & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}, \bar{J}^{12} = \begin{vmatrix} -2i & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & +2i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & +i & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -i & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -i & \cdot \\ \cdot & 0 \\ \cdot & +i \\ \cdot & 0 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

The eigenvalue equation $\bar{\Sigma}\bar{H} = \sigma\bar{H}$ gives the following differential system of 11 equations

$$\begin{aligned} 2c_{3'} &= -\frac{2(m-1)}{r}c_3 + i\sqrt{2}(\sigma - 2k)f_1, \quad 2(c_{1'} + c_{3'}) = -\frac{2(m+1)}{r}c_1 + \frac{2(m-1)}{r}c_3 + i\sqrt{2}\sigma f_2, \\ 2c_{1'} &= i\sqrt{2}(2k + \sigma)f_3 + \frac{2(m+1)}{r}c_1, \quad c_{2'} + f_{2'} + f_{3'} = i\sqrt{2}(k + \sigma)c_1 + \frac{m}{r}(c_2 + f_2) - \frac{m+2}{r}f_3, \\ c_{1'} + c_{3'} &= -\frac{m+1}{r}c_1 + i\sqrt{2}\sigma c_2 + \frac{m-1}{r}c_3, \quad c_{2'} + f_{1'} + f_{2'} = i\sqrt{2}(\sigma - k)c_3 + \frac{m-2}{r}f_1 - \frac{m}{r}(c_2 + f_2), \\ d_{2'} &= i\sqrt{2}(\sigma - k)d_1 - \frac{m}{r}d_2, \quad d_{1'} + d_{3'} = \frac{m-1}{r}d_1 + i\sqrt{2}\sigma d_2 - \frac{m+1}{r}d_3, \quad d_{2'} = i\sqrt{2}(k + \sigma)d_3 + \frac{m}{r}d_2, \end{aligned}$$

the 10-th equation is trivial, $\sqrt{2}\sigma f_0 = 0$. It is convenient to apply special notations for 8 operators:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} \pm \frac{m}{r}\right) &= a_m^\pm, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} \pm \frac{m+1}{r}\right) = a_{m+1}^\pm, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} \pm \frac{m-1}{r}\right) = a_{m-1}^\pm, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} + \frac{m+2}{r}\right) &= a_{m+2}^+, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dr} - \frac{m-2}{r}\right) = a_{m-2}^-. \end{aligned} \quad (8)$$

Then the above system is presented as three independent subsystems:

$$I \quad a_m^+ d_2 = i(\sigma - k)d_1, \quad a_{m-1}^- d_1 + a_{m+1}^+ d_3 = i\sigma d_2, \quad a_m^- d_2 = i(\sigma + k)d_3; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} II \quad a_{m-1}^+ c_3 &= i\left(\frac{\sigma}{2} - k\right)f_1, \quad a_{m+1}^+ c_1 + a_{m-1}^- c_3 = i\frac{\sigma}{2}f_2, \\ a_{m+1}^- c_1 &= i\left(\frac{\sigma}{2} + k\right)f_3, \quad a_m^- c_2 + a_m^- f_2 + a_{m+2}^+ f_3 = i(\sigma + k)c_1, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} a_{m+1}^+ c_1 + a_{m-1}^- c_3 &= i\sigma c_2, \quad a_m^+ c_2 + a_{m-2}^- f_1 + a_m^+ f_2 = i(\sigma - k)c_3; \\ III \quad \sigma f_0 &= 0 \Rightarrow \sigma \neq 0, f_0 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Consider the system I; after eliminating the variables d_1 and d_3 we get one 2-nd order equation for the primary function

$$\left[\frac{1}{i(\sigma - k)} a_{m-1}^- a_m^+ + \frac{1}{i(\sigma + k)} a_{m+1}^+ a_m^- - i\sigma \right] d_2 = 0. \quad (12)$$

Similarly, in the system II one can eliminate the variables f_1, f_2, f_3 :

$$f_1 = \frac{2}{i(\sigma - 2k)} a_{m-1}^+ c_3, \quad f_2 = \frac{2}{i\sigma} a_{m+1}^+ c_1 + \frac{2}{i\sigma} a_{m-1}^- c_3, \quad f_3 = \frac{2}{i(\sigma + 2k)} a_{m+1}^- c_1,$$

this results in the system for c_1, c_2, c_3 :

$$\begin{aligned} a_m^- c_2 + \frac{2}{i\sigma} a_m^- a_{m+1}^+ c_1 + \frac{2}{i\sigma} a_m^- a_{m-1}^- c_3 + \frac{2}{i(\sigma + 2k)} a_{m+2}^+ a_{m+1}^- c_1 &= i(\sigma + k) c_1, \\ a_m^+ c_2 + \frac{2}{i(\sigma - 2k)} a_{m-2}^- a_{m-1}^+ c_3 + \frac{2}{i\sigma} a_m^+ a_{m+1}^+ c_1 + \frac{2}{i\sigma} a_m^+ a_{m-1}^- c_3 &= i(\sigma - k) c_3, \\ a_{m+1}^+ c_1 + a_{m-1}^- c_3 &= i\sigma c_2. \end{aligned}$$

With the use of third equation we may eliminate the variable c_2 , so deriving the system for c_1, c_3 :

$$\begin{aligned} [3a_m^- a_{m+1}^+ + \frac{2\sigma}{(\sigma + 2k)} a_{m+2}^+ a_{m+1}^- + \sigma(\sigma + k)] c_1 + 3a_m^- a_{m-1}^- c_3 &= 0, \\ [3a_m^+ a_{m-1}^- c_3 + \frac{2\sigma}{(\sigma - 2k)} a_{m-2}^- a_{m-1}^+ + \sigma(\sigma - k)] c_3 + 3a_m^+ a_{m+1}^+ c_1 &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

In order to take into account the presence of external magnetic field, it suffices to make one change, $m \Rightarrow m + eBr^2 / 2$, this leads to new 8 operators instead of operators (8).

The system I, the free particle

Let us turn to the case I, first consider eq. (12) for the free particle. Allowing for the identities

$$a_{m-1}^- a_m^+ = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{2r^2}, \quad a_{m-1}^+ a_m^- = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} + \frac{(2-m)m}{2r^2}$$

we get

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k}{\sigma r} \frac{d}{dr} - \frac{mk + m(m-1)\sigma}{\sigma r^2} - (k^2 - \sigma^2) \right] d_2 = 0. \quad (14)$$

Near the point $r = 0$, this equation becomes simpler

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k}{\sigma r} \frac{d}{dr} - \frac{mk + m(m-1)\sigma}{\sigma r^2} \right] d_2 = 0, \quad d_2 = r^A, \quad A = m, -\frac{k}{\sigma} - m + 1.$$

At infinity, $r \rightarrow \infty$, we have

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k}{\sigma r} \frac{d}{dr} - (k^2 - \sigma^2) \right] d_2 = 0, \quad d_2 = e^{\pm i\sqrt{\sigma^2 - k^2} r}. \quad (15)$$

Therefore, solutions should be searched in the form $d_2 = r^A e^{Cr} f$. Imposing the known restrictions on A and C , we get

$$A = m, -\frac{k}{\sigma} - m + 1; C = \pm i\sqrt{\sigma^2 - k^2}, r \frac{d^2 f}{dr^2} + (2A + \frac{k}{\sigma} + 2Cr) \frac{df}{dr} + (2AC + \frac{k}{\sigma} C) f = 0. \quad (16)$$

Changing the variable, $z = -2Cr$, we reduce the equation to hypergeometric form (let $C = +i\sqrt{\sigma^2 - k^2}$):

$$z \frac{d^2 f}{dz^2} + (2A + \frac{k}{\sigma} - z) \frac{df}{dz} - (A + \frac{k}{2\sigma})f = 0, \quad (17)$$

$$d_2 = z^A e^{-z/2} \Phi(c, a, z), \quad a = A + \frac{k}{2\sigma}, \quad c = 2A + \frac{k}{\sigma} = 2a.$$

Solutions will be regular in the point $r = 0$, if we take positive A ; we should distinguish two cases:

$$(a) \quad m > 0, \quad d_2 \sim z^A = z^m \rightarrow 0; \quad (18)$$

$$(b) \quad m < 0, \quad d_2 \sim z^A = z^{1-m-\frac{k}{\sigma}}, \quad 1-m > k/\sigma.$$

Solutions under consideration may be presented in terms of Bessel functions. Indeed, starting with the equation (14), let us make the substitution $d_2(r) = \varphi(r)\bar{d}_2(r)$, then we obtain

$$\bar{d}_2'' + (2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{k}{\sigma r})\bar{d}_2' + (\frac{k}{\sigma r} \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\varphi''}{\varphi} - \frac{mk + m(m-1)\sigma}{\sigma r^2} - (k^2 - \sigma^2))\bar{d}_2 = 0.$$

The function φ is fixed as follows

$$2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{k}{\sigma r} = \frac{1}{r} \Rightarrow \varphi = r^{(1-k/\sigma)/2}; \quad (19)$$

accordingly the above equation takes the form

$$\bar{d}_2'' + \frac{1}{r}\bar{d}_2' + (-(k^2 - \sigma^2) - \frac{(m-1/2+k/2\sigma)^2}{r^2})\bar{d}_2 = 0.$$

In the variable $y = i\sqrt{k^2 - \sigma^2} r$, it has the structure of Bessel equation

$$(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + 1 - \frac{v^2}{y^2})\bar{d}_2 = 0, \quad v = m - \frac{1}{2} + \frac{k}{2\sigma}, \quad d_2(y) = r^{\frac{1-k/\sigma}{2}} \bar{d}_2(z). \quad (20)$$

The case I, particle in magnetic field

In presence of the magnetic field, the equation for d_2 takes the form (let $eB \Rightarrow B$)

$$[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k}{r\sigma} \frac{d}{dr} + \frac{-2\sigma(B(2m-1) + 2k^2) + 2Bk + 4\sigma^3}{4\sigma} - \frac{B^2}{4} r^2 + \frac{-km - (m-1)m\sigma}{r^2\sigma}]d_2 = 0. \quad (21)$$

Near the point $r = 0$, we get

$$[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k}{r\sigma} \frac{d}{dr} - \frac{km + (m-1)m\sigma}{\sigma r^2\sigma}]d_2 = 0,$$

which coincides with that in the case of a free particle. At infinity we have

$$(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k}{r\sigma} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4} B^2 r^2)d_2 = 0, \quad d_2 = e^{Cr^2}, \quad C = \pm \frac{B}{4}.$$

In the new variable, $r^2 = x$, the above equation reads

$$[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{(k+\sigma)}{2\sigma x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{16} B^2 + \frac{B(k-2m\sigma+\sigma)}{8\sigma x} - \frac{(k^2-\sigma^2)}{4x} + \frac{m(\sigma-k)}{4\sigma x^2} - \frac{m^2}{4x^2}]d_2 = 0. \quad (22)$$

Its solutions are searched in the form $d_2 = x^A e^{Cx} f(x)$, imposing the known constraints

$$A = \frac{m}{2}, \frac{1-m}{2} - \frac{k}{2\sigma}, \quad \text{and} \quad C = -\frac{B}{4}, + \frac{B}{4} \quad (23)$$

(below assume $C = -\frac{B}{4}$, $B > 0$), we reduce equation for $f(x)$ to the form

$$xf'' + (2A + \frac{k+\sigma}{2\sigma} + 2Cx)f' + [\frac{B(k-2m\sigma+\sigma)+4C(k+\sigma)}{8\sigma} - \frac{(k^2-\sigma^2)-8AC}{4}]f = 0.$$

In the variable $2Cx = -z$, it reads as an equation of confluent hypergeometric type

$$zf'' + (c-z)f' - af = 0, \quad z \frac{d^2 f''}{dz^2} + (2A + \frac{k+\sigma}{2\sigma} - z) \frac{df}{dz} - (\frac{m}{2} + \frac{k^2-\sigma^2}{2B} + A)f = 0. \quad (24)$$

Imposing the usual constraint to get polynomials

$$a = \frac{m}{2} + \frac{k^2-\sigma^2}{2B} + A = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

we find the quantization rule for σ :

$$\sigma = \pm \sqrt{k^2 + (A + \frac{m}{2} + n)2B}. \quad (25)$$

Depending on the sign of m , we distinguish two cases:

$$m > 0, \quad \sigma = \pm \sqrt{k^2 + (m+n)2B}, \quad m < 0, \quad \sigma = \pm \sqrt{k^2 + (n + \frac{1-k/\sigma}{2})2B}, \quad (26)$$

the second equation determines σ in inexplicit form. Assuming that solutions are regular at the point $z = 0$, for function d_2 we have two different representations depending on the sign of m :

$$m > 0, \quad d_2 \sim z^{m/2} e^{-z/2} \Phi(-n, c, z), \quad c = m + \frac{1}{2} + \frac{k}{2\sigma}; \quad (27)$$

$$m < 0, \quad d_2 \sim z^{\frac{1-m}{2} - \frac{k}{2\sigma}} e^{-z/2} \Phi(-n, c', z), \quad c = \frac{3}{2} - m, \frac{1-m}{2} > \frac{k}{2\sigma}. \quad (28)$$

Note that the second equation for σ in (26) leads to a cubic equation

$$\sigma^3 - \sigma[(k^2 + B(2n+1))] + Bk = 0, \quad B > 0; \quad (29)$$

in the dimensionless variables $\sigma/k = X$, $B/k^2 = b$ it reads simpler, $X^3 - X[1 + b(2n+1)] + b = 0$.

The case II, free particle

Let us turn to the case II for the free particle. The system (13) in explicit form reads

$$[(3 + \frac{2\sigma}{\sigma+2k})(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2}) + 2\sigma(\sigma+k)]c_1 + 3(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1-2m)}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m^2-1)}{r^2})c_3 = 0,$$

$$[(3 + \frac{2\sigma}{\sigma-2k})(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-1)^2}{r^2}) + 2\sigma(\sigma-k)]c_3 + 3(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(1+2m)}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m^2-1)}{r^2})c_1 = 0.$$

This system may be considered as linear with respect to the variables c_1'', c_3'' :

$$= - \left| \begin{array}{cc|c} 3 + \frac{2\sigma}{2k + \sigma} & 3 & c_1'' \\ 3 & 3 - \frac{2\sigma}{2k - \sigma} & c_3'' \end{array} \right|$$

$$= - \left| \begin{array}{l} [(3 + \frac{2\sigma}{\sigma + 2k})(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+1)^2}{r^2}) + 2\sigma(k + \sigma)]c_1 + 3(\frac{(1-2m)}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m^2-1)}{r^2})c_3 \\ 3(\frac{(1+2m)}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m^2-1)}{r^2})c_1 + [(3 + \frac{2\sigma}{\sigma - 2k})(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(-m+1)^2}{r^2}) - 2\sigma(k - \sigma)]c_3 \end{array} \right|,$$

evidently it is symmetric under the change $c_3 \Leftrightarrow c_1, m \Leftrightarrow -m, \sigma \Leftrightarrow -\sigma$. Its solution has the form

$$c_1'' = \frac{1}{8} \frac{(9m - 8)\sigma^2 - 36k^2m}{\sigma^2 r} c_1'$$

$$+ [\frac{18\sigma k^2 + 12k^3 - 9\sigma^2 k - 5\sigma^3}{8\sigma} - \frac{1}{8} \frac{(m+1)(-17\sigma^2 m - 8\sigma^2 + 36k^2 m)}{\sigma^2 r^2}] c_1$$

$$- \frac{3m(-4\sigma k + 12k^2 - 5\sigma^2)}{8\sigma^2 r} c_3' + [\frac{3(2k^2 + \sigma^2 - 3\sigma k)(\sigma + 2k)}{8\sigma} + \frac{3m(-4\sigma mk + 12k^2 m + 5\sigma^2 + 4\sigma k - 12k^2 - 5\sigma^2 m)}{8\sigma^2 r^2}] c_3,$$

$$c_3'' = \frac{3m(4\sigma k + 12k^2 - 5\sigma^2)}{8\sigma^2 r} c_1'$$

$$+ [-\frac{3(\sigma + k)(-\sigma^2 + 4k^2)}{8\sigma} + \frac{3m(6k + 5\sigma)(-\sigma + 2k)(m + 1)}{8\sigma^2 r^2}] c_1$$

$$+ \frac{136k^2 m - 9\sigma^2 m - 8\sigma^2}{8\sigma^2 r} c_3'$$

$$+ [-\frac{1}{8} \frac{-9\sigma^2 k + 5\sigma^3 - 8\sigma k^2 + 12k^3}{\sigma} - \frac{1}{8} \frac{(-17\sigma^2 m + 8\sigma^2 + 36k^2 m)(m - 1)}{\sigma^2 r^2}] c_3.$$

Shortly we can present the above equations as follows

$$\frac{d^2}{dr^2} c_1 = K_1 \frac{d}{dr} c_1 + (\frac{L_1}{r^2} + M_1) c_1 + (\frac{F_1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{G_1}{r^2} + H_1) c_3,$$

$$\frac{d^2}{dr^2} c_3 = K_3 \frac{d}{dr} c_3 + (\frac{L_3}{r^2} + M_3) c_3 + (\frac{F_3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{G_3}{r^2} + H_3) c_1. \tag{30}$$

Let us eliminate from this system the variable $c_3(r)$. To this end, first we present this function as $c_3(r) = \varphi(r)\bar{c}_3(r)$, and impose the constraints

$$(\frac{F_1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{G_1}{r^2} + H_1)\varphi\bar{c}_3 = \varphi \frac{F_1}{r} \frac{d}{dr} \bar{c}_3.$$

Whence it follows

$$\frac{F_1}{r} \frac{\varphi'}{\varphi} \bar{c}_3 + \frac{F_1}{r} \bar{c}_3' + \frac{G_1}{r^2} \bar{c}_3 + H_1 \bar{c}_3 = \frac{F_1}{r} \frac{d}{dr} \bar{c}_3, \quad \text{or} \quad \frac{F_1}{r} \bar{c}_3' + (\frac{F_1}{r} \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{G_1}{r^2} + H_1) \bar{c}_3 = \frac{F_1}{r} \frac{d}{dr} \bar{c}_3.$$

Further we derive equation for determining the function $\varphi(r)$:

$$\frac{F_1}{r} \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{G_1}{r^2} - H_1 \Rightarrow \ln \varphi = -\frac{G_1}{F_1} \ln r - \frac{H_1}{2F_1} r^2 \Rightarrow \ln(\varphi r^{G_1/F_1}) = -\frac{H_1}{2F_1} r^2,$$

whence it follows $\varphi = r^{-G_1/F_1} e^{-\frac{H_1}{2F_1} r^2}$. Therefore, the initial system may be re-written differently

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} c_1 &= K_1 \frac{d}{dr} c_1 + \left(\frac{L_1}{r^2} + M_1\right) c_1 + \varphi \frac{F_1}{r} \frac{d}{dr} \bar{c}_3, \quad c_3 = \varphi \bar{c}_3, \\ \frac{d^2}{dr^2} \varphi \bar{c}_3 &= K_3 \frac{d}{dr} \varphi \bar{c}_3 + \left(\frac{L_3}{r^2} + M_3\right) \varphi \bar{c}_3 + \left(\frac{F_3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{G_3}{r^2} + H_3\right) c_1. \end{aligned} \quad (31)$$

From eq. (31), we express the derivative $\frac{d}{dr} \bar{c}_3$:

$$\frac{d}{dr} \bar{c}_3 = \frac{1}{F_1} \frac{r}{\varphi} \left(\frac{d^2}{dr^2} c_1 - K_1 \frac{d}{dr} c_1 - \left(\frac{L_1}{r^2} + M_1\right) c_1 \right),$$

below we will need the second derivative as well

$$\frac{d^2}{dr^2} \bar{c}_3 = \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{F_1} \frac{r}{\varphi} \left(\frac{d^2}{dr^2} c_1 - K_1 \frac{d}{dr} c_1 - \left(\frac{L_1}{r^2} + M_1\right) c_1 \right) \right\}.$$

Expression for function c_3 itself is found by integrating

$$\bar{c}_3 = \int \frac{1}{F_1} \frac{r}{\varphi} \left(\frac{d^2}{dr^2} c_1 - K_1 \frac{d}{dr} c_1 - \left(\frac{L_1}{r^2} + M_1\right) c_1 \right) dr.$$

Now we turn to the second equation from (31)

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi \bar{c}_3 = K_3 \frac{d}{dr} \varphi \bar{c}_3 + \left(\frac{L_3}{r^2} + M_3\right) \varphi \bar{c}_3 + \left(\frac{F_3}{r} \frac{d}{dr} + \frac{G_3}{r^2} + H_3\right) c_1;$$

taking into account two identities

$$\frac{d^2}{dr^2} \varphi \bar{c}_3 = \frac{d}{dr} [\varphi' \bar{c}_3 + \varphi \bar{c}_3'] = \varphi'' \bar{c}_3 + 2\varphi' \bar{c}_3' + \varphi \bar{c}_3'', \quad K_3 \frac{d}{dr} \varphi \bar{c}_3 = K_3 [\varphi' \bar{c}_3 + \varphi \bar{c}_3'],$$

we transform the above equation to other form

$$\varphi'' \bar{c}_3 + 2\varphi' \bar{c}_3' + \varphi \bar{c}_3'' = K_3 \varphi' \bar{c}_3 + K_3 \varphi \bar{c}_3' + \left(\frac{L_3}{r^2} + M_3\right) \varphi \bar{c}_3 + \frac{F_3}{r} c_1' + \frac{G_3}{r^2} c_1 + H_3 c_1.$$

Whence after re-grouping the terms we obtain

$$\varphi \bar{c}_3'' + (2\varphi' - K_3 \varphi) \bar{c}_3' + (\varphi'' - K_3 \varphi' - \left(\frac{L_3}{r^2} + M_3\right) \varphi) \bar{c}_3 - \frac{F_3}{r} c_1' - \frac{G_3}{r^2} c_1 - H_3 c_1 = 0,$$

which is equivalent to

$$[\bar{c}_3'' + (2\frac{\varphi'}{\varphi} - K_3) \bar{c}_3'] + (\frac{\varphi''}{\varphi} - K_3 \frac{\varphi'}{\varphi} - \left(\frac{L_3}{r^2} + M_3\right)) \bar{c}_3 - [\frac{F_3}{\varphi r} c_1' + \frac{1}{\varphi} \frac{G_3}{r^2} c_1 + \frac{1}{\varphi} H_3 c_1] = 0.$$

With the help of temporary notation

$$\Delta(r) = \frac{\varphi''}{\varphi} - K_3 \frac{\varphi'}{\varphi} - \left(\frac{L_3}{r^2} + M_3\right),$$

we re-write the last equation differently

$$\frac{1}{\Delta(r)}[\bar{c}'_3 + (2\frac{\phi'}{\phi} - K_3)\bar{c}_3] + \bar{c}_3 - \frac{1}{\Delta(r)}[\frac{1}{\phi} \frac{F_3}{r} c'_1 + \frac{1}{\phi} \frac{G_3}{r^2} c_1 + \frac{1}{\phi} H_3 c_1] = 0.$$

After differentiating this equation we derive

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{\Delta(r)} [\bar{c}'_3 + (2\frac{\phi'}{\phi} - K_3)\bar{c}_3] \right\} + \bar{c}_3 - \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{\Delta(r)} \left[\frac{1}{\phi} \frac{F_3}{r} c'_1 + \frac{1}{\phi} \frac{G_3}{r^2} c_1 + \frac{1}{\phi} H_3 c_1 \right] \right\} = 0, \quad (32)$$

this is the fourth order differential equation for function $c_1(r)$. In similar manner, we can derive a 4-th order equation for function $c_3(r)$.

Equations of the 4-th order for functions $c_1(r)$ and $c_3(r)$ in explicit form read

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 c_1}{dr^4} + \frac{2 d^3 c_1}{r dr^3} + \left(\frac{5}{4} \sigma^2 - 2k^2 + \frac{-3-4m-2m^2}{r^2} \right) \frac{d^2 c_1}{dr^2} + \left(\frac{1}{4} \frac{5\sigma^2 - 8k^2}{r} + \frac{3+4m+2m^2}{r^3} \right) \frac{dc_1}{dr} \\ & + \left[-\frac{5}{4} \sigma^2 k^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 + k^4 + \frac{1(-5\sigma^2 + 8k^2)(m+1)^2}{r^2} + \frac{(m+3)(m-1)(m+1)^2}{r^4} \right] c_1 = 0, \\ & \frac{d^4 c_3}{dr^4} + \frac{2 d^3 c_3}{r dr^3} + \left(\frac{5}{4} \sigma^2 - 2k^2 + \frac{-3+4m-2m^2}{r^2} \right) \frac{d^2 c_3}{dr^2} + \left(\frac{1}{4} \frac{5\sigma^2 - 8k^2}{r} + \frac{3-4m+2m^2}{r^3} \right) \frac{dc_3}{dr} \\ & + \left[-\frac{5}{4} \sigma^2 k^2 + \frac{1}{4} \sigma^4 + k^4 + \frac{1(-5\sigma^2 + 8k^2)(m-1)^2}{r^2} + \frac{(m-3)(m+1)(m-1)^2}{r^4} \right] c_3 = 0. \end{aligned}$$

Both equations may be factorized:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + [-k^2 + \frac{1}{4} \sigma^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2}] \right\} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + [-k^2 + \sigma^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2}] \right\} c_1 = 0, \\ & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + [-k^2 + \frac{1}{4} \sigma^2 - \frac{(m-1)^2}{r^2}] \right\} \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + [-k^2 + \sigma^2 - \frac{(m-1)^2}{r^2}] \right\} c_3 = 0, \end{aligned}$$

where two multipliers are permutable. It suffices to solve 2-nd order equations for c_1 :

$$I, \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 + \sigma^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2} \right] c_1 = 0; \quad II, \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - k^2 + \frac{1}{4} \sigma^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2} \right] c_1 = 0. \quad (33)$$

They reduce to Bessel equations

$$\begin{aligned} I, \quad x = i\sqrt{k^2 - \sigma^2} r, \quad & \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(m+1)^2}{x^2} \right] c_1'(x) = 0; \\ II, \quad y = i\sqrt{k^2 - \frac{\sigma^2}{4}} r, \quad & \left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + 1 - \frac{(m+1)^2}{y^2} \right] c_1''(y) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Similarly, for function c_3 we get

$$\begin{aligned} I', \quad x = i\sqrt{k^2 - \sigma^2} r, \quad & \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 - \frac{(m-1)^2}{x^2} \right] c_3'(x) = 0; \\ II', \quad y = i\sqrt{k^2 - \frac{\sigma^2}{4}} r, \quad & \left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + 1 - \frac{(m-1)^2}{y^2} \right] c_3''(y) = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

The case II, presence of magnetic field

In this case, we obtain the following system of equations for the variables c_1, c_3 (let $eB \Rightarrow B$):

$$\begin{aligned} & [(3 + \frac{2\sigma}{\sigma + 2k})(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2/2 + 1)^2}{r^2}) + (3 - \frac{2\sigma}{\sigma + 2k})B + 2\sigma(\sigma + k)]c_1 \\ & + 3[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1 - 2(m + Br^2/2)}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(m + Br^2/2)^2 - 1}{r^2} - B]c_3 = 0, \\ & [(3 + \frac{2\sigma}{\sigma - 2k})(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m + Br^2/2 - 1)^2}{r^2}) + (-3 + \frac{2\sigma}{\sigma - 2k})B + 2\sigma(\sigma - k)]c_3 \end{aligned}$$

Whence it follows 4-th order equations for c_1 and c_3 :

$$\begin{aligned} & c_1'''' + \frac{2}{r}c_1'''' + (-\frac{e^2B^2r^2}{2} + \frac{5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB + 8\sigma B + 12kB}{4\sigma} - \frac{2m^2 + 4m + 3}{r^2})c_1'' \\ & + (-\frac{3}{2}B^2r + \frac{1}{4} \frac{5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB + 8\sigma B + 12kB}{r\sigma} + \frac{2m^2 + 4m + 3}{r^3})c_1' \\ & + [\frac{1}{16}B^4r^4 - \frac{1}{16} \frac{B^2(5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB + 8\sigma B + 12kB)r^2}{\sigma} \\ & - \frac{1}{4} \frac{(m+1)^2(5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB + 8\sigma B + 12kB)}{r^2\sigma} + \frac{(m+3)(m-1)(m+1)^2}{r^4} \\ & - \frac{1}{4\sigma}(-\sigma^5 + 5\sigma^3Bm - 5\sigma^3B + 5\sigma^3k^2 - 21\sigma^2kB - 6\sigma m^2B^2 + \\ & + 4\sigma B^2m + 16B^2\sigma - 8\sigma k^2Bm + 8\sigma k^2B - 4\sigma k^4 + 12kB^2m - 12kB^2 + 12k^3B)]c_1 = 0; \\ & c_3'''' + \frac{2}{r}c_3'''' + (-\frac{1}{2}B^2r^2 + \frac{1}{4} \frac{5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB - 8\sigma B + 12kB}{\sigma} - \frac{2m^2 - 4m + 3}{r^2})c_3'' \\ & + (-\frac{3}{2}B^2r + \frac{1}{4} \frac{5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB - 8\sigma B + 12kB}{r\sigma} + \frac{2m^2 - 4m + 3}{r^3})c_3' \\ & + [\frac{1}{16}B^4r^4 - \frac{1}{16} \frac{B^2(5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB - 8\sigma B + 12kB)r^2}{\sigma} - \\ & - \frac{1}{4} \frac{(m-1)^2(5\sigma^3 - 8\sigma k^2 - 8\sigma mB - 8\sigma B + 12kB)}{r^2\sigma} + \frac{(m-3)(m+1)(m-1)^2}{r^4} \\ & - \frac{1}{4\sigma}(-\sigma^5 + 5\sigma^3Bm + 5\sigma^3B + 5\sigma^3k^2 - 21\sigma^2kB - 6\sigma m^2B^2 \\ & - 4\sigma B^2m + 16B^2\sigma - 8\sigma k^2Bm - 8\sigma k^2B - 4\sigma k^4 + 12kB^2 + 12kB^2m + 12k^3B)]c_3 = 0. \end{aligned}$$

Both equations can be factorized. For the variable c_1 we get

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4}B^2r^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2} \right. \\ & \left. + \frac{\sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 8B\sigma(m-1) + 12kB \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2}}{8\sigma} \right\} \\ & \times \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4}B^2r^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2} \right\} \end{aligned}$$

$$+\frac{\sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 8B\sigma(m-1) + 12kB \mp 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2}}{8\sigma}c_1 = 0.$$

To get the equation for the variable c_3 it suffices to make one formal change $m+1 \Leftrightarrow m-1$, so we omit its explicit form. It suffices to examine one 2-nd order equation

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{4} B^2 r^2 - \frac{(m+1)^2}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{\sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 8B\sigma(m-1) + 12kB \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2}}{8\sigma} \right\} c_1 = 0.$$

In the variable $x = Br^2 / 2$, it reads

$$\frac{d^2 c_1}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dc_1}{dx} + \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \frac{(m+1)^2}{x^2} \right. \\ \left. + \frac{\sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 8B\sigma(m-1) + 12kB \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2}}{16\sigma Bx} \right] c_1 = 0.$$

With the use of substitution $c_1(x) = e^{Ax} x^C F(x)$, we obtain the following equation for $F(x)$:

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + (2Ax + 2C + 1) \frac{dF}{dx} + \left\{ (A^2 - \frac{1}{4})x + \frac{1}{4} \frac{4C^2 - (m+1)^2}{x} \right. \\ \left. + \frac{1}{16\sigma B} [16A\sigma(1+2C)B + \sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 8B\sigma(m-1) + 12kB \right. \\ \left. \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2} \right\} F = 0.$$

Imposing restrictions on parameters, $A = -\frac{1}{2}$ and $C = +|\frac{m+1}{2}|$, we simplify the above equation

$$x \frac{d^2 F}{dx^2} + (2C + 1 - x) \frac{dF}{dx} + \frac{1}{16\sigma B} [-8\sigma(1+2C)B + \sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 8B\sigma(m-1) + 12kB \\ \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2}] F = 0;$$

it may be identified with the confluent hypergeometric equation with parameters

$$\alpha = -\frac{1}{16\sigma eB} [-8\sigma(1+2C)B + \sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 8B\sigma(m-1) + 12kB \\ \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2}], \quad \gamma = 2C + 1.$$

The known polynomial condition gives the following quantization rule

$$\frac{1}{16\sigma B} [-8\sigma B(1+2C) - 8B\sigma(m-1) + \sigma(5\sigma^2 - 8k^2) + 12kB \\ \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2}] = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

or differently

$$\sigma(5\sigma^2 - 8k^2) + 12kB \pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2} = 8\sigma B(2n + m + |m + 1|). \quad (36)$$

With the use of notation $N = 2n + m + |m + 1|$, we get

$$\pm 3\sqrt{\sigma^6 - 24kB\sigma^3 + 16(2\sigma^2 + k^2)B^2} = 8\sigma BN - \sigma(5\sigma^2 - 8k^2) - 12kB. \quad (37)$$

After squaring the above equation we obtain algebraic equation with the structure

$$\sigma[a_5\sigma^5 + a_4\sigma^4 + \dots + a_0] = 0,$$

or explicitly

$$\sigma^6 - 5(BN + k^2)\sigma^4 + 21kB\sigma^3 + [4(BN + k^2)^2 - 18B^2]\sigma^2 - 12kB(BN + k^2)\sigma = 0. \quad (38)$$

So we arrive to 5-th order equation (let $BN + k^2 = \gamma$; the root $\sigma = 0$ is nonphysical)

$$\sigma^5 - 5\gamma\sigma^3 + 21kB\sigma^2 + [4\gamma^2 - 18B^2]\sigma - 12kB\gamma = 0. \quad (39)$$

In dimensionless variables $X = \sigma/k, b = B/k^2, \Gamma = \gamma/\sigma^2 = bN + 1$, it reads

$$X^5 - 5\Gamma X^3 + 21bX^2 + (4\Gamma^2 - 18b^2)X - 12b\Gamma = 0; \quad (40)$$

this equation may be studied numerically.

To the spectra for σ defined by (39)–(40), there correspond the following explicit solutions

$$c_1(x) = e^{-x/2} x^C G(x), \quad C = +\frac{|m+1|}{2}. \quad (41)$$

When solving the equation for function c_3 we obtain similar result with formal change $m+1 \Leftrightarrow m-1$. In this case, we have the following solutions

$$\begin{aligned} c_3(x) &= e^{-x/2} x^{C'} G(x), \quad C' = +\frac{|m-1|}{2}, \quad m' = m - 2, \\ 2n + m' + |m' + 1| &= N', \quad bN' + 1 = \Gamma', \\ X'^5 - 5\Gamma' X'^3 + 21bX'^2 + (4\Gamma'^2 - 18b^2)X' - 12b\Gamma' &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Solutions (42) and (41) provide us with one the same spectrum for σ .

Conclusions

Explicit form of the helicity operator for symmetric 2-nd rank tensor describing the spin 2 particle is specified in cylindrical coordinates. After separating the variables the system of 10 first order differential equations is derived. It is split into two independent subsystems of 4 and 6 equations. The system of 4 equations is solved straightforwardly in terms of confluent hypergeometric functions, there are found corresponding eigenvalues and eigenfunctions. Subsystem of 6 equations leads to one ordinary 4-th order differential equation. Corresponding operator is factorized into permutable 2-nd order operators, so the problem reduces to solving two differential equations of the 2-nd order. Their solutions are constructed in terms of Bessel functions. This analysis is extended to presence of external uniform magnetic field, when solutions are constructed in terms of confluent hypergeometric functions. The helicity eigenvalues are found in inexplicit form, as solutions of polynomial equations of 3-rd and 5-th orders.

REFERENCES

1. Bogush, A. A. On matrices of the equations for spin 2 particles / A. A. Bogush, B. V. Krylov, F. I. Fedorov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 1968. – № 1. – P. 74–81.
2. On equations for a spin 2 particle in external electromagnetic and gravitational fields / A. A. Bogush [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2003. – № 1. – P. 62–67.
3. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field / H. A. Buchdahl // Nuovo Cimento. – 1958. – № 10. – P. 96–103.
4. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces / H. A. Buchdahl // Nuovo Cimento. – 1962. – № 25. – P. 486–496.
5. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // J. Phys. A. – 1982. – № 15. – P. 253–268.
6. De Broglie, L. Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1941. – № 212. – P. 657–659.
7. Fedorov, F. I. To the theory of particles with spin 2 / F. I. Fedorov // Proceedings of Belarus State University. Ser. Phys.-Math. – 1951. – № 12. – P. 156–173.
8. Fedorov, F. I. Equations of the first order for gravitational field / F. I. Fedorov // Doklady of the Academy of Sciences of USSR. – 1968. – № 179. 4. – P. 802–805.
9. Fedorov, F. I. The first order equations for gravitational field in vacuum / F. I. Fedorov, A. A. Kirilov // Acta Physica Polonica B. – 1976. – Vol. 7, nr 3. – P. 161–167.
10. Feinberg, V. Ya. On the theory of interaction of particles with higher spins with electromagnetic and meson fields / V. Ya. Feinberg // Proceedings of the Lebedev Physics Institute of the Academy of Sciences of the USSR. – 1955. – № 6. – P. 269–332.
11. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – № 173. – P. 211–232.
12. Fradkin, E. S. To the theory of particles with higher spins / E. S. Fradkin // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1950. – Vol. 20, nr 1. – P. 27–38.
13. Gel'fand, I. M. General relativistically invariant equations and infinite-dimensional representations of the Lorentz group // I. M. Gel'fand, A. M. Yaglom // Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 1948. – Vol. 18, nr 8. – P. 703–733.
14. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 121–145.
15. Johnson, K. The impossibility of a consistent theory of a charged higher spin Fermi fields / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // Ann. Phys. – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 126–145.
16. Kisel, V. V. On relativistic wave equations for a spin 2 particle / V. V. Kisel // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 1986. – № 5. – P. 94–99.
17. Kisel, V. V. Contribution of gauge degrees of freedom in the energy-momentum tensor of the massless spin 2 field / V. V. Kisel [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 2015. – № 2. – P. 58–63.
18. Kisel, V. V. Nonrelativistic approximation in the theory of a spin two particle / V. V. Kisel [et al.] // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 2015. – Vol. 59, nr 3. – P. 21–27.
19. Krylov, B. V. Equations of the first order for graviton / B. V. Krylov, F. I. Fedorov // Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus. – 1967. – Vol. 11, nr 8. – P. 681–684.

20. Krylov, B. V. On the systems of the first order for graviton / B. V. Krylov // Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series. – 1972. – № 6. – P. 82–89.
21. Loide, R. K. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations / R. K. Loide // J. Phys. A. – 1986. – Vol. 19, nr 5. – P. 827–829.
22. Ovsyuk, E. M. Maxwell Electrodynamics and boson fields in spaces of constant curvature / E. M. Ovsyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York : Nova Science Publishers Inc., 2014. – 498 p.
23. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Vol. 12. – P. 297–300.
24. Red'kov, V. M. Graviton in a curved space-time background and gauge symmetry / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, V. V. Kisel // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2003. – Vol. 6, nr 3. – P. 772–778.
25. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // Nuovo Cimento. – 1957. – Vol. 5, nr 2. – P. 325–326.
26. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 188, nr 5. – P. 2218–2222.
27. Solutions of equation for spin 3/2 particle and helicity operators / A. V. Ivashkevich [et al.] // Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics. – 2020. – № 1. – P. 15–35.
28. Eigenvalue states of the helicity operator for symmetric tensor describing the spin 2 field / A. V. Buryy [et al.] // Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics. – 2021. – № 2. – P. 5–24.
29. On the matrix equation for a spin 2 particle in pseudo-Riemannian space-time, tetrad method / A. Ivashkevich [et al.] // Proceedings of Balkan Society of Geometers. – 2021. – Vol. 28. – P. 1–23.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 15.03.2022

УДК 539.12:530.145

Анастасия Михайловна Кузьмич¹, Владимир Анестиевич Плетюхов²

¹студентка физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Anastasia Kuzmich¹, Vladimir Pletyukhov²

¹Student of the Faculty of Physics and Mathematics

at the Brest State A. S. Pushkin University

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,

Professor of the Department of General and Theoretical Physics

at the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: pletyukhov@yandex.by

ОПИСАНИЕ ВНУТРЕННИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ДИРАКОВСКИХ ЧАСТИЦ ПОСРЕДСТВОМ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрено 48-компонентное тензорное поле, которое может служить для геометризованного описания киральных дираковских частиц с внутренними степенями свободы. Дана квантовая формулировка теории на основе статистики Ферми – Дирака.

Ключевые слова: тензорное поле, дираковские частицы, внутренние степени свободы.

Description of Internal Degrees of Freedom of the Dirac's Particles by Means of Tensor Fields

The 48-component tensor field, which can be used for the geometrized description of the chiral Dirac particles with internal degrees of freedom, is considered. Its quantum formulation on the basis of Fermi – Dirac statistics is given.

Key words: tensor field, Dirac particles, internal degrees of freedom.

Введение

В современных теоретико-полевых моделях для описания изоспиновых степеней свободы дираковских частиц используются унитарные компактные группы внутренней симметрии, коммутирующие с группой Лоренца. Фактически в основе этого описания лежит распадающаяся в релятивистски-инвариантном смысле система уравнений Дирака. Вводимые таким образом внутренние квантовые числа имеют негеометрическое, т. е. принципиально иное по сравнению со спином, происхождение.

Однако существует точка зрения, что не только спин, но и все другие степени свободы фундаментальных частиц должны допускать пространственно-временную интерпретацию. Впервые предположение о том, что в качестве геометрической модели семейств фермионов может служить не распадающаяся по полной группе Лоренца система тензорных уравнений, получившая в литературе название «уравнение Дирака – Кэлера» [1], было высказано в работах [2; 3]. С теоретико-групповых позиций эта возможность обусловлена динамической неразличимостью уравнения Дирака – Кэлера (ДК) и системы четырех уравнений Дирака с некомпактной группой внутренней симметрии $SU(2,2)$. В рамках вторично-квантованной модели реализация геометризованного подхода к описанию дираковских частиц посредством поля ДК предполагает квантование этого поля по «аномальной» статистике Ферми – Дирака.

В работе [4], а также [5; 6] была показана возможность такого квантования, обусловленная тем, что условие теоремы Паули о связи спина и статистики не распространяется на поля с некомпактными группами внутренней симметрии.

SU(6,6) – симметричное обобщение поля Дирака – Кэлера

Отдавая должное уравнению ДК, приходится тем не менее констатировать, что его способность служить в качестве модели для геометризованного описания всех известных внутренних степеней свободы фундаментальных частиц, например, кварков или лептонов, ограничена вследствие недостаточного числа компонент волновой функции, равного 16. Последовательная реализация и обобщение данного подхода в рамках 4-мерного пространства предполагает использование тензорных систем уравнений с аналогичными уравнению ДК алгебраическими, групповыми и квантовыми свойствами, но с бóльшим числом компонент волновой функции.

Рассмотрим одну из таких систем, предложенную в [8]. Она базируется на схеме зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца:

$$2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \oplus (0,1) \oplus (1,0) \oplus 2(1,1) \oplus \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \oplus \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Тензорная формулировка интересующей нас системы уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \varphi_{\lambda, \alpha\beta} + \frac{1}{3}(\partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} \partial_\lambda \varphi_\rho) + m\varphi_{\alpha\beta} &= 0, \\ \partial_\lambda \varphi_{\alpha, \lambda\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha \varphi_\beta - \partial_\beta \varphi_\alpha - i\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho} \partial_\lambda \varphi_\rho) - \delta_{\alpha\beta} \partial_\rho \varphi_\rho - i\varepsilon_{\alpha\eta\lambda\rho} \partial_\eta \varphi_{\lambda, \rho\beta} + m\varphi_{\lambda\alpha, \lambda\beta} &= 0, \\ \partial_\alpha \varphi_{\lambda\alpha, \lambda\beta} + \partial_\alpha \varphi_{\alpha\beta} + m\varphi_\beta &= 0, \\ \partial_\nu \varphi_{\mu\nu, \alpha\beta} + \partial_\mu \varphi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}(\delta_{\mu\alpha} \partial_\nu \varphi_{\eta\nu, \eta\beta} - \delta_{\mu\beta} \partial_\nu \varphi_{\eta\nu, \eta\alpha} + \delta_{\mu\alpha} \partial_\eta \varphi_{\eta\beta} - \delta_{\mu\beta} \partial_\eta \varphi_{\eta\alpha} + \\ i\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} \partial_\eta \varphi_{\eta\rho}) + m\varphi_{\mu, \alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

плюс аналогичные уравнения, получающиеся из (2) путем замен $\varphi_\beta \rightarrow \psi_\beta$, $\varphi_{\lambda\beta} \rightarrow \psi_{\lambda\beta}$, $\varphi_{\lambda, \mu\nu} \rightarrow \psi_{\lambda, \mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu, \lambda\beta} \rightarrow \psi_{\mu\nu, \lambda\beta}$, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta} \rightarrow \varepsilon_{\mu\nu\lambda\beta}$ (обозначим их, не выписывая, (3)). Все фигурирующие в (2), (3) тензоры сопоставляются неприводимым представлениям группы Лоренца:

$$\begin{aligned} \varphi_\beta, \psi_\beta &\sim \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad \varphi_{\mu\nu, \lambda\beta}, \psi_{\mu\nu, \lambda\beta} \sim (1,1); \quad \varphi_{\lambda\beta} \sim (0,1), \psi_{\lambda\beta} \sim (1,0); \\ \varphi_{\lambda, \mu\nu} &\sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \psi_{\lambda, \mu\nu} \sim \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

С точки зрения классической теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) полевая система (2), (3) описывает спины 0, 1, 2 и характеризуется удвоением состояний по значению внутренней четности.

Тензорная система (2), (3) может быть записана в стандартной для РВУ матрично-дифференциальной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi = 0, \quad (4)$$

где волновая функция Ψ преобразуется по представлению (1), а матрицы Γ_μ размерности 48×48 удовлетворяют перестановочным соотношениям алгебры матриц Дирака.

При подходящем выборе базиса в пространстве представления волновой функции матрицы Γ_μ и матрица η инвариантной билинейной формы $\bar{\Psi}\Psi = \Psi^+\eta\Psi$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду

$$\Gamma_\mu = I_{12} \otimes \gamma_\mu, \quad \eta = \gamma_4 \otimes I_3 \otimes \gamma_4, \quad (5)$$

где γ_μ – обычные дираковские матрицы размерности 4×4 . Отсюда следует инвариантность свободного лагранжиана теории

$$L_0 = -\bar{\Psi}(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\Psi \quad (6)$$

относительно преобразований группы внутренней симметрии $SU(6,6)$.

Генераторы $J_{\mu\nu}$ представления группы Лоренца (1) допускают в базисе (5) разложение

$$J_{\mu\nu} = I_{12} \otimes J_{\mu\nu}^1 + J_{\mu\nu}^2 \otimes I_4, \quad (7)$$

где $J_{\mu\nu}^1$ и $J_{\mu\nu}^2$ – генераторы представлений $[(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 0)]$ и $[(\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2})]$ соответственно. Поскольку операторы $J_{\mu\nu}^2$ являются одновременно генераторами представления $SL(3, \mathbb{C})$ группы $SU(6,6)$ внутренней симметрии теории, то очевидно, что преобразования группы Лоренца образуют полупрямое произведение (не коммутируют) с преобразованиями группы внутренней симметрии.

Последнее обстоятельство является очень важным, поскольку предоставляет возможность двойного разложения алгебры A_R группы полной инвариантности теории:

$$A_R = \{J_{\mu\nu}\}[\sim](\{d_\mu\} \oplus \{U\}); \quad (8)$$

$$A_R = (\{\check{J}_{\mu\nu}\}[\sim]\{d_\mu\}) \oplus \{U\}. \quad (9)$$

Здесь $\check{J}_{\mu\nu} = I_{12} \otimes J_{\mu\nu}^1$; $\{J_{\mu\nu}\}, \{d_\mu\}, \{U\}$ – совокупность генераторов группы Лоренца, пространственно-временных трансляций и внутренней симметрии соответственно, символ $[\sim]$ означает полупрямую сумму.

С точки зрения разложения (8) лагранжиан (6) описывает тензорное поле со спинами 0, 1, 2 и внутренней симметрией, преобразования которой образуют полупрямое произведение с преобразованиями группы Лоренца, тогда как согласно (9) речь идет об описании дираковского поля с «обычной» внутренней симметрией. (Поясним, что под «обычной» здесь понимается внутренняя симметрия, которой соответствуют степени свободы негеометрического (нелоренцевского) происхождения и преобразования которой коммутируют с преобразованиями группы Лоренца).

Квантовая формулировка теории и интерпретация внутренних степеней свободы

Описание дираковских частиц посредством тензорной системы (2), (3) предполагает возможность корректного вторичного квантования по статистике Ферми – Дирака. Как показано в [7], такое квантование реализуется посредством перестановочных соотношений для операторов рождения и уничтожения

$$[a_{1s}(p), a_{1s}^+(p')]_+ = [b_{1s}(p), b_{1s}^+(p')]_+ = \delta_{ss'} \delta(p - p'), \quad (10)$$

$$[a_{2s}(p), a_{2s}^+(p')]_+ = [b_{2s}(p), b_{2s}^+(p')]_+ = \delta_{ss'} \delta(p - p'), \quad (11)$$

где индексы 1 и 2 соответствуют различным собственным значениям дополнительного оператора $\hat{\Pi}$ ($\hat{\Pi}_0$ в системе покоя), входящего наряду с другими стандартными операторами в полный набор и имеющего в каноническом базисе вид

$$\hat{\Pi}_0 = \sigma_3 \otimes I_{24}. \quad (12)$$

В работе [7] степень свободы, соответствующую оператору \hat{P}_0 , мы назвали П-четностью, при этом ее физический смысл не обсуждался. Исследования, проведенные в работе [8], позволяют, на наш взгляд, установить физический смысл данного оператора и связанного с ним сохраняющегося заряда g .

Квантовое описание рассматриваемой полевой системы на основе перестановочных соотношений (10), (11) приводит к необходимости использования пространства состояний с индефинитной метрикой $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где \mathcal{H}_+ и \mathcal{H}_- – подпространства с положительной и отрицательной нормами векторов состояний соответственно.

Для корректной вероятностной интерпретации теории необходимо, чтобы в ней отсутствовали переходы между состояниями из подпространств \mathcal{H}_+ и \mathcal{H}_- . Существование соответствующего правила запрета обусловлено в данном случае некомпактностью группы внутренней симметрии системы (2), (3), одним из генераторов которой является оператор \hat{P}_0 . Инвариантность лагранжиана $L = L_0 + L_{int}$ относительно преобразований

$$\Psi \rightarrow \Psi \exp(i\hat{P}_0\theta) \quad (13)$$

приводит к дополнительному сохраняющемуся “заряду”

$$G \sim \sum_S (a_{1s}^+ a_{1s} + a_{2s}^+ a_{2s} - b_{1s}^+ b_{1s} - b_{2s}^+ b_{2s}). \quad (14)$$

Одночастичные состояния из подпространств \mathcal{H}_+ и \mathcal{H}_- характеризуются такими сохраняющимися квантовыми числами, как (e, g) , $(-e, g)$ для \mathcal{H}_+ и $(e, -g)$, $(-e, -g)$ для \mathcal{H}_- , где обозначение e относится к электрическому заряду, g – к дополнительному «заряду» частицы. Совместное действие законов сохранения для электрического и дополнительного зарядов квантового поля запрещает физически неприемлемые переходы между состояниями из \mathcal{H}_+ и \mathcal{H}_- для всех взаимодействий, не нарушающих внутреннюю симметрию системы (2), (3).

Обсудим теперь физический смысл оператора П-четности и соответствующего ему сохраняющегося заряда g .

С помощью унитарного преобразования базиса в пространстве волновой функции систему (2), (3) можно привести к прямой сумме 24-компонентных подсистем, инвариантных по отношению к собственной группе Лоренца и сопряженных друг другу относительно операции пространственной инверсии

$$P = \sigma_1 \otimes I_{24}. \quad (15)$$

Явный вид указанного преобразования мы не даем из-за его громоздкости (размерность 48×48). Структура же (12) оператора \hat{P}_0 при этом не меняется.

Из сравнения (12), (15) следует, что внутренняя степень свободы, описываемая оператором \hat{P}_0 , связана с такой геометрической операцией как Р-инверсия, т. е., другими словами, может рассматриваться в качестве аналога понятия киральности в теории Дирака. Отличие от обычной дираковской киральности заключается в том, что последняя не является степенью свободы, в то время как П-киральность (заряд g) входит в полный набор величин, которые характеризуют одночастичные состояния геометрических фермионов, описываемых системой (2), (3).

При переопределении лоренцевских трансформационных свойств волновой функции в соответствии с разложением (9) степень свободы, сопоставляемая первоначально абсолютной величине спина, преобразуется в еще одну помимо киральности изоспиновую степень свободы, которой отвечает квантовое число, принимающее 6 значений. Эту степень свободы и связанную с ней внутреннюю симметрию можно интерпретировать как симметрию ароматов семейства фермионов (кварков, лептонов).

Заклучение

Таким образом, система (2), (3) по своим свойствам вполне подходит в качестве математической модели для геометризованного (пространственно-временного) обоснования существования шести типов фундаментальных частиц материи – кварков и лептонов. Присущий этой системе удвоенный (по сравнению с минимально необходимым) набор состояний не противоречит данному заключению, поскольку один из этих классов состояний является ненаблюдаемым в силу правил запрета, возникающих при квантовании тензорной системы (2), (3) по статистике Ферми – Дирака.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стражев, В. И. Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.
2. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dothtan, D. Horn // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117, nr 6. – P. 413–417.
3. Benn, I. M. A generalization model, based on Kahler fermions / I. M. Benn, R. W. Tucker // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 119, nr 4. – P. 348–350.
4. Плетюхов, В. А. О связи спина и статистики в теории поля / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Acta Phys. Pol. B. – 1988. – Vol. 19, № 9. – P. 751–762.
5. Сатиков, И. А. О квантовом описании поля Дирака – Кэлера / И. А. Сатиков, В. И. Стражев // Теор. и мат. физика. – 1987. – Т. 73, № 1. – С. 16–25.
6. Березин, А. В. Уравнение Дирака – Кэлера и квантовая теория дираковского поля с $SU(2,2)$ – внутренней симметрией / А. В. Березин, И. А. Сатиков, В. И. Стражев. – Минск : ИФ АН БССР, 1998. – 35 с.
7. Плетюхов, В. А. Тензорные уравнения и дираковские частицы с внутренними степенями свободы / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев // Ядер. физика. – 1989. – Т. 49. – С. 1505–1514.
8. Плетюхов, В. А. Матричная формулировка теории киральной частицы со спином 1 / В. А. Плетюхов // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 2. – С. 38–43.

REFERENCES

1. Strazhev, V. I. Uravnienije Diraka – Keliera. Klassichieskoje polie / V. I. Strazhev, I. A. Satikov, D. A. Cionienko. – Минск : БГУ, 2007. – 195 с.
2. Banks, T. Geometric fermions / T. Banks, Y. Dothtan, D. Horn // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 117, nr 6. – P. 413–417.
3. Benn, I. M. A generalization model, based on Kahler fermions / I. M. Benn, R. W. Tucker // Phys. Lett. B. – 1982. – Vol. 119, nr 4. – P. 348–350.
4. Plietiukhov, V. A. O sviazi spina i statistiki v tieorii polia / V. A. Plietiukhov, V. I. Strazhev // Acta Phys. Pol. B. – 1988. – Vol. 19, № 9. – P. 751–762.
5. Satikov, I. A. O kvantovom opisanii polia Diraka – Keliera / I. A. Satikov, V. I. Strazhev // Tieoriet. i mat. fizika. – 1987. – Т. 73, № 1. – S. 16–25.
6. Bieriezin, A. V. Uravnienije Diraka – Keliera i kvantovaja tieorija dirakovskogo polia s $SU(2,2)$ – vnutrienniej simmetrijej / A. V. Bieriezin, I. A. Satikov, V. I. Strazhev. – Minsk : IF AN BSSR, 1998. – 35 s.
7. Plietiukhov, V. A. Tenzornyje uravnienija i dirakovskije chasticy s vnutriennimi stiepieniami svobody / V. A. Plietiukhov, V. I. Strazhev // Yad. fizika. – 1989. – Т. 49. – S. 1505–1514.
8. Plietiukhov, V. A. Matrichnaja formulirovka tieorii kiral'noj chasticy so spinom 1 / V. A. Plietiukhov // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 2. – S. 38–43.

УДК 539.12:530.145

Владимир Анестиевич Плетюхов*д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Vladimir Pletyukhov***Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Professor of the Department of General and Theoretical Physics
at the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: pletyukhov@yandex.by***ОБЪЕДИНЕННОЕ ПОЛЕ МАКСВЕЛЛА – КАЛЬБА – РАМОНДА
В ТЕОРИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ**

Даны тензорная и матричная формулировки релятивистского волнового уравнения, обеспечивающего совместное описание электромагнитного поля и безмассового поля Кальба – Рамонда с нулевой спиральностью. Показана возможность применения этого уравнения в теории струн.

Ключевые слова: электромагнитное поле, поле Кальба – Рамонда, нотиф, релятивистские волновые уравнения, струны.

United Maxwell-Kalb-Ramond Field in the Theory of Relativistic Wave Equations

Tensor and matrix formulations of the relativistic wave equation providing a description both of an electromagnetic field and a massless Kalb – Remond field with zero helicity are given. It is shown possibility for application of this equation in the string theory.

Key words: electromagnetic field, Kalb – Ramond field, relativistic wave equations, strings.

Введение

Релятивистское квантовомеханическое описание свободных элементарных микроробъектов в большинстве случаев может быть сведено к системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. В случае микроробъектов с нулевой массой такая система представима в матрично-дифференциальной форме

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m) \Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где Ψ – многокомпонентная волновая функция, Γ_{μ} – квадратные матрицы, m – скалярный параметр, связанный с массой. Для описания безмассовых микроробъектов (полей) может служить уравнение

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + \Gamma_0) \Psi(x) = 0, \quad (2)$$

где Γ_0 – особенная матрица, которая может быть и нулевой.

Матрично-дифференциальные уравнения вида (1), (2), удовлетворяющие определенным требованиям, в частности требованию релятивистской инвариантности, получили название релятивистских волновых уравнений (РВУ). Требование релятивистской инвариантности приводит к тому, что компоненты волновой функции $\Psi(x)$ должны преобразовываться по некоторому приводимому представлению T группы Лоренца, состоящему из неприводимых зацепляющихся компонент. Наглядное графическое изображение зацепляющихся неприводимых представлений удобно осуществлять посредством так называемой схемы зацеплений, в которой зацепляющиеся компоненты соединяются чертой. Важнейшим положением теории РВУ является также строго определенная взаимосвязь между спином микроробъекта и набором неприводимых компонент, входящих

в представление T , причем в ортодоксальном варианте теории предполагается использование минимально необходимого для описания данного спина числа неприводимых компонент в представлении T .

Основы теории ВРУ были заложены в работах Дирака [1], Фирца и Паули [2; 3], Баба [4; 5], Харши – Чандра [6; 7].

В настоящей работе мы хотим показать, что использование расширенного по сравнению с минимально необходимым набора неприводимых представлений позволяет существенно расширить возможности теории ВРУ. Конкретно речь пойдет о совместном описании безмассовых полей со спиральностями 0 и 1. Рассмотрены также возможные приложения такого объединенного поля.

Основное содержание

Для начала проанализируем простейшую схему зацеплений

$$(0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1,0) \quad (3)$$

на предмет построения на ее основе различных безмассовых ВРУ. Схеме (3) соответствует следующий наиболее общий вид релятивистски-инвариантной тензорной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + a\psi_\mu = 0, \quad (4)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + b\psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (5)$$

где a, b – произвольные постоянные коэффициенты. Существуют четыре принципиально различные возможности в выборе этих коэффициентов.

Первая, когда $a = b = m$, приводит к системе Даффина – Кеммера для микрочастицы с ненулевой массой и спином $s = 1$. Этот случай нас сейчас не интересует. Вторая $a = b = 0$ приводит к не имеющим физического смысла независимым уравнениям

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad -\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \quad (6)$$

Выбирая в (4), (5) $a = 0, b = 1$, получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (7)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (8)$$

Если трактовать здесь компоненты вектора ψ_μ как потенциалы, а $\psi_{[\mu\nu]}$ – как напряженности, то уравнения (7), (8) представляют собой систему уравнений Максвелла (так называемая десятимерная формулировка), описывающую фотон – безмассовую частицу со спиральностью ± 1 . При этом первое из них является уравнением движения, а второе выступает как определение напряженности через потенциалы.

Наконец, возможен выбор $a = 1, b = 0$, который приводит к системе

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \quad (9)$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu = 0. \quad (10)$$

Если в данном случае по-прежнему трактовать ψ_μ как потенциалы, а $\psi_{[\mu\nu]}$ – как напряженности, то система (9), (10) становится неопределенной в том смысле,

что напряженности не могут быть выражены через потенциалы. Ситуация, однако, существенно изменяется, если придерживаться иной интерпретации входящих в эту систему величин, а именно: считать потенциалом тензор $\psi_{[\mu\nu]}$, а напряженностью – вектор ψ_μ . Тогда система (9), (10) становится вполне определенной: уравнение (9) выступает как определение напряженности через потенциал, уравнение (10) – как уравнение движения.

Физический смысл системы (9), (10) вытекает из следующих соображений.

Из уравнения (9) имеем

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0. \quad (11)$$

С учетом (11) из уравнения движения (10) легко получить уравнение второго порядка

$$\square \psi_\mu = 0, \quad (12)$$

которое указывает на отсутствие массы у микрообъекта, описываемого системой (9), (10).

Как известно, в теории безмассового векторного поля, базирующейся на уравнениях (7), (8), на потенциалах можно задать преобразования

$$\psi_\mu \rightarrow \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (13)$$

называемые градиентными, или калибровочными преобразованиями второго рода. Произвол в выборе калибровочной функции $\Lambda(x)$ позволяет исключить «лишние» состояния, оставляя лишь две (из четырех) поперечные составляющие. В свою очередь, уравнения (9) – (12) инвариантны относительно преобразований потенциалов

$$\psi_{[\mu\nu]} \rightarrow \psi'_{[\mu\nu]} = \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (14)$$

где калибровочные функции $\Lambda_\mu(x)$ ограничены условием

$$\square \Lambda_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \Lambda_\nu = 0. \quad (15)$$

В работе Огиевецкого и Полубаринова [8] показано, что калибровочная инвариантность такого рода оставляет у тензор-потенциала только одну независимую компоненту, соответствующую состоянию с нулевой спиральностью.

Остановимся подробнее на указанной работе. Для этого вернемся к схеме зацеплений (3), в которой представление $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ будем считать псевдовекторным. В этом случае можно построить, во-первых, теорию псевдовекторной частицы с нулевой массой:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} = 0, \quad (16)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \tilde{\psi}_\beta + \psi_{[\mu\nu]} = 0 \quad (17)$$

(т. н. электродинамика с псевдовекторным потенциалом). Вводя вместо псевдовектора $\tilde{\psi}_\mu$ сопряженный ему антисимметричный тензор третьего ранга $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$, вместо (16), (17) придем к системе

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} = 0, \quad (18)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \psi_{[\nu\alpha]} = 0, \quad (19)$$

в которой $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ выступает в роли потенциала.

Во-вторых, можно получить систему уравнений

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \quad (20)$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta = 0, \quad (21)$$

или эквивалентную ей систему

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (22)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (23)$$

Рассматривая здесь $\psi_{[\mu\nu]}$ как тензор-потенциал, а $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – как напряженность, мы приходим к теории Огиевецкого – Полубаринова для безмассовой частицы со спиральностью 0. Действительно, в работе [8] для тензор-потенциала $\psi_{[\mu\nu]}$ в качестве исходного постулируется уравнение второго порядка

$$\square \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \partial_\alpha \psi_{[\nu\alpha]} - \partial_\nu \partial_\alpha \psi_{[\mu\alpha]} = 0. \quad (24)$$

Нетрудно убедиться, что оно коррелирует с системой первого порядка (22), (23). Кроме того, уравнение (24) инвариантно относительно калибровочных преобразований (14), (15), что позволяет наложить на потенциалы $\psi_{[\mu\nu]}$ дополнительное условие

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (25)$$

равносильное условию

$$\partial_\mu \partial_\alpha \psi_{[\nu\alpha]} - \partial_\nu \partial_\alpha \psi_{[\mu\alpha]} = 0.$$

В результате уравнение (24) распадается на уравнения $\square \psi_{[\mu\nu]} = 0$ и (25). (26)

Что касается системы (9), (10), то уравнение (25) можно получить из нее непосредственно. Таким образом, в обоих вариантах теории безмассовой частицы со спиральностью 0 (имеются в виду системы (9), (10) и (22), (23)) получаются одинаковые уравнения второго порядка для потенциалов. Различие же этих двух теорий заключается в том, что в системе (9), (10) напряженность является истинным вектором, а в системе (22), (23) – антисимметричным тензором третьего ранга, или, иначе говоря, псевдовектором. Кроме того, если для системы (9), (10) уравнение второго порядка (25) выступает как основное, а уравнение (26) – как дополнительное условие, то по отношению к системе (22), (23), наоборот, (26) является основным уравнением, а (25) – дополнительным условием. Однако эти различия не сказываются на числе степеней свободы, соответствующим обоим теориям.

В [8] безмассовая частица, описываемая системой (22), (23), была названа нотофом. Это название отражает дополнительность свойств фотона и нотофа как в смысле спиральности, так и в отношении лоренцевских трансформационных свойств потенциалов и напряженностей. Нотоф, описываемый системой (9), (10), естественно назвать дуальным нотофом.

Обобщая проделанный выше анализ, можно сделать вывод, что теория РВУ первого порядка вида (2) позволяет описывать безмассовые частицы (поля) не только с максимальной для данного набора представлений группы Лоренца спиральностью $\pm s$, но и с промежуточными значениями спиральности, включая нулевую.

Первооткрыватели нотофа не смогли предложить для него каких-либо физических приложений. В 1974 г. Кальб и Рамонд [9], по существу, переоткрыли нотоф, рассматривая вопрос о феноменологическом описании взаимодействия струн. Впоследствии за полевой системой, сопоставляемой уравнениям (22), (23), в литературе утвердилось название поля Кальба – Рамонда [10; 11].

В [8] тензор $\psi_{[\mu\nu]}$ предлагается в качестве потенциала поля – переносчика взаимодействия замкнутых струн в пространстве размерности $d = 4$. Очевидно, что для описания взаимодействия открытых струн одного лишь поля Кальба – Рамонда (нотофа Огиевского – Полубаринова) недостаточно. Моделируя концы струны как точечные электрические заряды, необходимо ввести вектор-потенциал, соответствующий электромагнитному полю. И поскольку струна является единым физическим объектом, естественна постановка задачи о совместном описании фотона и нотофа на основе одной не распадающейся по группе Лоренца системы уравнений первого порядка.

С этой целью рассмотрим схему зацеплений

$$\begin{array}{ccc}
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 (0,1) & & (1,0), \\
 \searrow & & \swarrow \\
 & \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' &
 \end{array} \quad (27)$$

в которой представление $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ сопоставляется истинному вектору, а представление $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)'$ – псевдовектору, или антисимметричному тензору третьего ранга. Наиболее общая тензорная система уравнений первого порядка, соответствующая схеме (27) и удовлетворяющая стандартным физическим требованиям, имеет вид

$$\begin{aligned}
 \alpha \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + a \psi_\mu &= 0, \\
 \beta \partial_\nu \tilde{\psi}_{[\mu\nu]} + \beta \tilde{\psi}_\mu &= 0, \\
 \alpha^* \left(-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu \right) + \beta^* \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta + c \psi_{[\mu\nu]} &= 0,
 \end{aligned} \quad (28)$$

где a, β, α, b, c – произвольные параметры. Систему (28) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \alpha \partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + a \psi_\mu &= 0, \\
 \beta \left(\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} \right) + \beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} &= 0, \\
 \alpha^* \left(-\partial_\nu \psi_\alpha + \partial_\alpha \psi_\nu \right) + \beta^* \partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} + c \psi_{[\nu\alpha]} &= 0.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Положим в (29)

$$\alpha = \beta = 1, a = c = 0, b = 1. \quad (30)$$

Получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (31)$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (32)$$

$$-\partial_\nu \psi_\alpha + \partial_\alpha \psi_\nu + \partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \quad (33)$$

Примем следующую трактовку входящих в (31) – (33) величин: ψ_μ и $\psi_{[\mu\nu]}$ – потенциалы, $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – напряженность. Тогда уравнение (32) является по существу определением напряженности через потенциалы. Уравнение (31) играет роль дополнительного условия на потенциалы $\psi_{[\mu\nu]}$, которое изначально содержится в самой системе. Данное условие оставляет у потенциала только две независимые компоненты. Кроме того, система (31) – (33) инвариантна относительно калибровочных преобразований (14), (15). Имеющийся произвол в выборе калибровочной функции позволяет наложить условие, исключающее еще одну независимую степень свободы, связанную с тензор-потенциалом $\psi_{[\mu\nu]}$. При этом для $\psi_{[\mu\nu]}$ имеем уравнение второго порядка

$$\square \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu = 0, \quad (34)$$

которое описывает состояние некоторого безмассового поля со спиральностью 0.

Обратимся к потенциалу ψ_μ . Система (31) – (33) инвариантна также относительно калибровочных преобразований

$$\psi_\mu \rightarrow \tilde{\psi}_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (35)$$

где Λ – произвольная скалярная функция. Из уравнения (33) вытекает уравнение второго порядка

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \partial_\nu \psi_\nu = 0, \quad (36)$$

которое совместно с калибровочной инвариантностью (35) означает, что вектор-потенциал ψ_μ характеризует поперечную составляющую (спиральность ± 1) обсуждаемого безмассового поля. Тогда тензор

$$\partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu \equiv F_{[\mu\nu]} \quad (37)$$

естественно рассматривать как напряженность, непосредственно связанную с этой поперечной составляющей. Уравнение же (33), переписанное с учетом обозначения (37) в виде

$$\partial_\mu \psi_{[\mu\nu\alpha]} - F_{[\nu\alpha]} = 0, \quad (38)$$

выступает, очевидно, в качестве уравнения движения в системе (31)–(33).

Таким образом, выбор (30) параметров в системе (29) приводит к не распадающейся по группе Лоренца теории, которая дает совместное описание безмассовых полей со спиральностями 0 и ± 1 , т. е. поля Кальба – Рамонда (нотифа) и электромагнитного поля. Уравнение движения (38) указывает на неразрывную связь этих полей подобно тому, как связаны электрическая и магнитная составляющие в теории Максвелла. Точнее даже говорить не о совместном описании указанных полей, а о едином безмассовом поле с тремя возможными значениями спиральности 0, ± 1 .

Заключение

Как известно, в теории струн рассматриваются два типа струн – открытые и замкнутые. Взаимодействие замкнутых струн может осуществляться посредством безмассового поля с тензор-потенциалом $\psi_{[\mu\nu]}$ [9]. Концы открытых струн являются точечными электрическими зарядами и взаимодействуют посредством электромагнитного поля с вектор-потенциалом ψ_μ . Следовательно, переносчиком

взаимодействия открытых струн в пространстве размерности $d = 4$ должно быть некоторое объединенное поле с потенциалами ψ_μ и $\psi_{[\mu\nu]}$.

Претендентом на роль такого поля может служить рассмотренное нами безмассовое поле Максвелла – Кальба – Рамонда, т. е. система (31) – (33), в которую надо ввести источники. При этом надо учитывать, что в данном случае существует два типа источников: тензорный ток $j_{[\mu\nu]}$, который создается телом струны (body string), и векторный ток j_μ , создаваемый концами струны. Последние при этом рассматриваются как точечные электрические заряды противоположных знаков. Между токами j_μ и $j_{[\mu\nu]}$ существует связь

$$j_\nu = \partial_\mu j_{[\mu\nu]}, \quad (39)$$

из которой следует, что j_μ сохраняется ($\partial_\mu j_\mu = 0$), а $j_{[\mu\nu]}$, вообще говоря, не сохраняется ($\partial_\mu j_{[\mu\nu]} \neq 0$). Вводя ток $j_{[\mu\nu]}$ в уравнение движения (33), получим систему

$$\partial_\nu \mathcal{W}_{[\mu\nu]} = 0, \quad (40)$$

$$\partial_\mu \mathcal{W}_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \mathcal{W}_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \mathcal{W}_{[\alpha\mu]} + \mathcal{W}_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (41)$$

$$-\partial_\nu \mathcal{W}_\alpha + \partial_\alpha \mathcal{W}_\nu + \partial_\mu \mathcal{W}_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\nu\alpha]}, \quad (42)$$

описывающую единое поле открытой струны в присутствии источников.

Описание замкнутой струны получится, если в системе (40) – (42) положить $\psi_\mu = 0$. Тогда приходим к системе

$$\partial_\nu \mathcal{W}_{[\mu\nu]} = 0, \quad (43)$$

$$\partial_\mu \mathcal{W}_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \mathcal{W}_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \mathcal{W}_{[\alpha\mu]} + \mathcal{W}_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \quad (44)$$

$$\partial_\mu \mathcal{W}_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\nu\alpha]}. \quad (45)$$

Уравнения, описывающие взаимодействие полюсов струн, вытекают из системы (40) – (42), если взять от уравнения (42) произвольную ∂_α и учесть определения (37), (39). В результате получим уравнение

$$\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = j_\mu. \quad (46)$$

Объединяя затем уравнения (46) с (37) и исключая из рассмотрения величины $\psi_{[\mu\nu]}$, $j_{[\mu\nu]}$, относящиеся к телу струны, придем к максвелловской системе уравнений для электромагнитного поля с источником.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1936. – Vol. 155. – P. 447–459.
2. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kraftfreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12, nr 1. – S. 3–37.
3. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
4. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, nr 2–3. – P. 200–216.

5. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, nr 3. – P. 451–462.
6. Harish-Chandra. On relativistic wave equations / Harish-Chandra // Phys. Rev. – 1947. – Vol. 71, nr 11. – P. 793–805.
7. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. A. – 1948. – Vol. 192. – P. 195–218.
8. Огиевецкий, В. И. Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. В. Полубаринов // Ядер. физика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
9. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.

REFERENCES

1. Dirac, P. A. M. Relativistic wave equations / P. A. M. Dirac // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1936. – Vol. 155. – P. 447–459.
2. Fierz, M. Über die relativistische theorie Kraftfreier Teilchen mit beliebigem Spin / M. Fierz // Helv. Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12, nr 1. – S. 3–37.
3. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
4. Bhabha, H. J. Relativistic wave equations for elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1945. – Vol. 17, nr 2–3. – P. 200–216.
5. Bhabha, H. J. On the postulational basis of the theory of elementary particles / H. J. Bhabha // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, nr 3. – P. 451–462.
6. Harish-Chandra. On relativistic wave equations / Harish-Chandra // Phys. Rev. – 1947. – Vol. 71, nr 11. – P. 793–805.
7. Harish-Chandra. Relativistic equations for elementary particles / Harish-Chandra // Proc. Roy. Soc. A. – 1948. – Vol. 192. – P. 195–218.
8. Огйевієчкіј, В. І. Нотоф і його можливі взаємодії / В. І. Огйевієчкіј, І. В. Полубарінов // Яд. фізика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
9. Kalb, M. Classical direct interesting action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 9, nr 8. – P. 2273–2284.

Рукапіс наступіу у рэдакцыю 05.04.2022

УДК 535.012

Николай Никитич Сендер

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Nikolai Sender

Candidate of Phys.-Math. Sciences, Assistant Professor, Head of Department
of Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications
of the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: sender@brsu.brest.by

**ЭЛЛИПСОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРЕЛОМЛЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОГЛОЩЕНИЯ
ОДНООСНЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛОВ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ СВЕТА
НА ГРАНИЦЕ ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА – КРИСТАЛЛ**

Получены выражения для компонент матрицы отражения для границы изотропная среда и кристалл произвольной анизотропии. Конкретизируя вид векторов $\vec{e}_{1,2}$, $\vec{h}_{1,2}$, из них можно получить соответствующие выражения для границы одноосных, низкосимметричных и гиротропных кристаллов. Рассмотрено определение показателей преломления и коэффициентов поглощения одноосных поглощающих кристаллов. Предложенный метод определения оптических постоянных поглощающих одноосных кристаллов, основанный на разложении функций в ряд по малым величинам, дает возможность получить приближенные соотношения, точность которых не превышает погрешностей эксперимента. Достоинством метода является его простота, т. к. оптические постоянные рассчитываются подстановкой измеряемых эллипсометрических параметров в аналитические выражения, а не вычисляются сложными численными методами

Ключевые слова: отражение и преломление света, показатели преломления и поглощения, изотропные и поглощающие кристаллы.

**Ellipsometric Determination of Refraction Indicators and Absorption Coefficients
of Uniaxial Absorbing Crystals by Using Reflections and Refractions of Light
at the Boundary Isotropic Medium Crystal**

Expressions are obtained for the components of the reflection matrix for the boundary of an isotropic medium and a crystal of arbitrary anisotropy. Concretizing the type of vectors $\vec{e}_{1,2}$, $\vec{h}_{1,2}$, it is possible to obtain from them appropriate expressions for the boundary of uniaxial, low-symmetric and gyrotropic crystals. The determination of refractive indices and absorption coefficients of uniaxial absorbing crystals is considered. The proposed method for determining the optical constants of absorbing uniaxial crystals, based on the decomposition of functions in a series of small quantities, makes it possible to obtain approximate ratios whose accuracy does not exceed the experimental errors. The merit of the method is its simplicity, since the optical constants are figured by substituting the measured ellipsometric parameters into analytical expressions, and are not calculated by complex numerical methods.

Key words: reflection and refraction of light, refraction and absorption indices, isotropic and absorbing crystals.

Введение

При решении большого класса задач, имеющих научное и практическое значение, широко используются такие константы, как показатели преломления n и коэффициенты поглощения δ кристаллов. Для прозрачных кристаллов методы определения n позволяют

найти их с высокой точностью. Эти методы основаны на прохождении света через кристалл и поэтому непригодны для кристаллов, обладающих сильным поглощением. Кроме того, они требуют приготовления из кристаллов призм, при этом возникают трудности, связанные с вырезанием их из кристалла и шлифовкой точно ориентированной призмы.

Эллипсометрический метод (будем иметь в виду эллипсометрический метод, основанный на отражении света) позволяет в принципе определять все оптические постоянные поглощающего кристалла.

Хорошо известно, что реальную физическую границу раздела двух сред можно считать плоскостью только в первом приближении. Этот факт подтверждается многими экспериментальными и теоретическими работами. Реальная граница раздела всегда представляет собой некоторый переходной слой, в котором оптические параметры граничащих сред изменяются непрерывно. Параметры переходного слоя зависят как от физических свойств самих сред, так и от метода подготовки поверхности раздела. Такой переходной слой может изменить условия отражения света и в конечном счете привести к ошибкам в определении оптических констант. Впервые его влияние на точность нахождения оптических постоянных рассмотрел Друде [1]. Было установлено, что переходной слой может существенно исказить найденные значения оптических постоянных и что не всяким способом можно это устранить. В настоящее время для уменьшения толщины нарушенного слоя, возникающего при механической обработке, используют химическую, химико-механическую и электрохимическую полировку.

Некоторый переходной слой на любой границе раздела существует даже тогда, когда на поверхности отсутствуют дефекты полировки, окисные пленки и загрязнения. Образование этого слоя связано с отличием условий взаимодействия для поверхностных атомов по сравнению с атомами, хранящимися в объеме [2].

Таким образом, при определении оптических параметров реальных кристаллов в отраженном свете всегда приходится иметь в виду, что полученные результаты искажены влиянием переходного слоя. В то же время наличие его является очевидным основанием для использования приближенных соотношений.

Следует подчеркнуть, что такой подход почему-то не получил развития, исключая случай тонкой изотропной пленки на подложке [3]. Отметим, что Федоров [4], развивая метод малых углов для определения показателей преломления n кристаллов, широко использовал приближенные соотношения. Теоретически им были предложены подходы для нахождения n как одноосных, так и низкосимметричных кристаллов в случае общей ориентации кристаллографических осей, основанные на использовании малости анизотропии и малых углов падения.

Однако при малой анизотропии отношение недиагональных элементов матрицы отражения r_{sp}/r_{ps} , измерение которого положено в основу развитого им подхода, дает очень низкую точность определения n . Поэтому предложенный им подход практически не может быть использован.

Наличие переходного слоя на поверхности кристалла приводит к погрешности определения оптических постоянных порядка 10^{-3} . Такова и величина погрешностей при обычной точности определения поляризационных углов $\pm 1'$. Оба этих факта положены в основу развиваемого в этой статье подхода, базирующегося на использовании приближенных формул. При таком подходе оптические постоянные вычисляются непосредственно по формулам подстановкой в них измеряемых эллипсометрических параметров. Этим устраняются многие трудности, связанные с решением обратной задачи, причем без потери точности.

Отражение и преломление света на границе изотропная среда – кристалл

Получим выражения для компонентов матрицы отражения R , которая в общем случае имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Пусть волна с вектором рефракции $\vec{m} = n\vec{n}$ (n – показатель преломления среды из которой падает волна, \vec{n} – волновая нормаль) падает из изотропной среды на кристалл. В результате получаем отраженную волну с вектором рефракции \vec{m}' и две преломленные с векторами рефракции \vec{m}_1 и \vec{m}_2 (рисунок 1).

Разложим векторы поля падающей волны \vec{E} и \vec{H} и отраженной \vec{E}' и \vec{H}' на составляющие [4]:

$$\vec{E} = A\vec{a} + B[\vec{n}\vec{a}], \vec{H} = A[\vec{m}\vec{a}] - B[\vec{n}\vec{a}], \quad (2)$$

$$\vec{E}' = A'\vec{a} + B'[\vec{n}'\vec{a}], \vec{H}' = A'[\vec{m}'\vec{a}] - B'[\vec{n}'\vec{a}],$$

где, \vec{q} – единичный вектор, перпендикулярный к плоскости границы, $\vec{a} = [\vec{m}\vec{q}]$ (перпендикулярен плоскости падения), $\vec{b} = [\vec{q}\vec{a}]$ (лежит в плоскости падения) (рисунок 1).

Векторы полей преломленных волн 1 и 2 имеют вид:

$$\vec{E}_1 = A_1\vec{e}_1, \vec{H}_1 = A_1\vec{h}_1, \quad (3)$$

$$\vec{E}_2 = A_2\vec{e}_2, \vec{H}_2 = A_2\vec{h}_2,$$

где \vec{e}_1, \vec{e}_2 – векторы (не обязательно единичные), определяющие поляризацию электрического поля преломленных волн в кристалле, \vec{h}_1, \vec{h}_2 – соответствующие векторы магнитного поля.

Не конкретизируя векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{h}_1$ и \vec{h}_2 , найдем величины A', B', A_1 и A_2 , определяющие амплитуды отраженной и преломленной волн, через амплитуды A и B (A и B считаются заданными) падающей волны. Для этого составим систему граничных условий, которая в проекции на векторы \vec{a} и \vec{b} имеет вид:

$$\begin{cases} A + A' = A_1a_1 + A_2a_2 \\ \eta(A - A') = A_1d_1 + A_2d_2 \\ \eta/n(B + B') = A_1b_1 + A_2b_2 \\ -n(B + B') = A_1c_1 + A_2c_2 \end{cases}, \quad (4)$$

где $a_{1,2} = \vec{e}_{1,2}\vec{a}$, $b_{1,2} = \vec{e}_{1,2}\vec{b}$, $c_{1,2} = \vec{h}_{1,2}\vec{a}$, $d_{1,2} = \vec{h}_{1,2}\vec{b}$, $\eta = n \cos \varphi$, φ – угол падения.

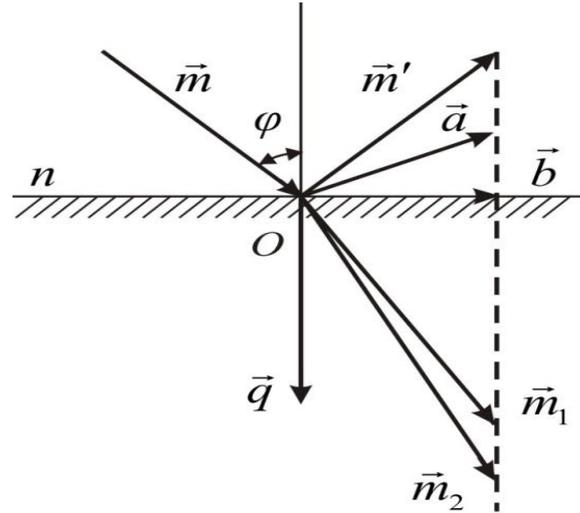


Рисунок 1. – Преломление и отражение света на границе изотропная среда – кристалл

Решая систему уравнений (4), получим

$$A_{1,2} = -(-1)^{1,2} \frac{2\eta(\beta_{2,1}A - n\alpha_{1,2}B)}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, \quad (5)$$

$$A' = \frac{[\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \eta(a_2\beta_1 - a_1\beta_2)]A - 2n(a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)B}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}, \quad (6)$$

$$B' = \frac{[\eta(c_1\alpha_2 - c_2\alpha_1) + \varepsilon(b_1\alpha_2 - b_2\alpha_1)]B - 2\frac{\eta}{n}(c_1\beta_2 - c_2\beta_1)A}{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)}, \quad (7)$$

где $\alpha_{1,2} = \eta a_{1,2} + \alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2} = \varepsilon b_{1,2} - \eta c_{1,2}$.

Решение граничной задачи удобнее представить в следующем виде. Введем обозначения

$$\alpha_{1,2}^{\pm} = \alpha_{1,2} \pm \eta a_{1,2}, \quad \beta_{1,2}^{\pm} = \varepsilon b_{1,2} \pm \eta c_{1,2}, \quad (8)$$

причем α^+ или β^+ получаются из α^- и β^- заменой $\eta \rightarrow -\eta$ и наоборот. Тогда

$$A_{1,2} = -(-1)^{1,2} \frac{2n\eta(\beta_{2,1}^- A - n\alpha_{1,2}^+ B)}{\alpha_1^+ \beta_2^- - \alpha_2^+ \beta_1^-}, \quad (9)$$

$$A' = \frac{(\alpha_2^- \beta_1^- - \alpha_1^- \beta_2^-)A + 2n\eta(\alpha_1 a_2 - \alpha_2 a_1)B}{\alpha_1^+ \beta_2^- - \alpha_2^+ \beta_1^-}, \quad (10)$$

$$B' = \frac{(\alpha_2^+ \beta_1^+ - \alpha_1^+ \beta_2^+)B + 2n\eta(b_1 c_2 - b_2 c_1)A}{\alpha_1^+ \beta_2^- - \alpha_2^+ \beta_1^-}. \quad (11)$$

Связь между амплитудами A и B падающей волны и амплитудами A' , B' отраженной волны запишем в виде

$$\begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Тогда, сравнивая (12) с (10) и (11), имеем

$$\begin{aligned} r_{11} &= (\alpha_2^- \beta_1^- - \alpha_1^- \beta_2^-) / 3, \\ r_{22} &= (\alpha_2^+ \beta_1^+ - \alpha_1^+ \beta_2^+) / 3, \\ r_{12} &= 2n\eta(a_2\alpha_1 - a_1\alpha_2) / 3, \\ r_{21} &= 2n\eta(b_1c_2 - b_2c_1) / 3, \\ 3 &= \alpha_1^+ \beta_2^- - \alpha_2^+ \beta_1^- \end{aligned} \quad (13)$$

Мы получили выражения для компонент матрицы отражения для границы изотропная среда и кристалл произвольной анизотропии. Конкретизируя вид векторов $\vec{e}_{1,2}$, $\vec{h}_{1,2}$, из них можно получить соответствующие выражения для границы одноосных, низкосимметричных и гиротропных кристаллов.

Определение показателей преломления и коэффициентов поглощения одноосных поглощающих кристаллов

Основное уравнение отражательной эллипсометрии для изотропной среды при азимуте падающей волны 45° имеет вид [3]:

$$\rho = r_p / r_s = \operatorname{tg} \psi e^{i\Delta}, \quad (14)$$

где $\operatorname{tg} \psi = |r_p| / |r_s|$, $\Delta = \arg \frac{r_p}{r_s} = \arg r_p - \arg r_s$, $\Delta = \delta_p - \delta_s$, ρ – относительный коэффициент отражения, ψ и Δ – измеряемые эллипсометрические параметры (поляризационные углы). Зная r_p и r_s для конкретной отражающей системы, с помощью (14) устанавливается связь поляризационных углов ψ и Δ с оптическими постоянными, а также с углом падения света на систему (φ) и длиной волны (λ).

Вычисление значений ψ и Δ для конкретного вида отражающей системы при всех известных ее параметрах составляет содержание прямой задачи эллипсометрии.

В математическом плане это относительно простая задача – вычисление по известным формулам. Обратная задача эллипсометрии – определение всех или некоторых параметров отражающей системы по измеренным значениям ψ и Δ .

Эта задача существенно сложнее математически, т. к. она не имеет аналитического решения за исключением некоторых частных случаев [5]. Поэтому для ее решения привлекаются разнообразные численные методы. Если же удастся получить аналитические выражения, то неизвестные параметры находятся простой подстановкой в них измеряемых параметров ψ и Δ .

Оптические свойства поглощающих одноосных кристаллов описываются двумя комплексными значениями ε_0 и ε_e тензора диэлектрической проницаемости \mathcal{E} , которые являются функциями длины волны λ .

В общем случае ориентации среза кристалла относительно кристаллографических осей может быть неизвестно и положение оптической оси кристалла \vec{c} . Зададим его двумя углами (рисунок 2): углом θ между нормалью к границе \vec{q} и \vec{c} и углом γ , который составляет плоскость падения Π с плоскостью, содержащей \vec{q} и \vec{c} . Полагаем $0 \leq \theta \leq \pi/2$, $-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$.

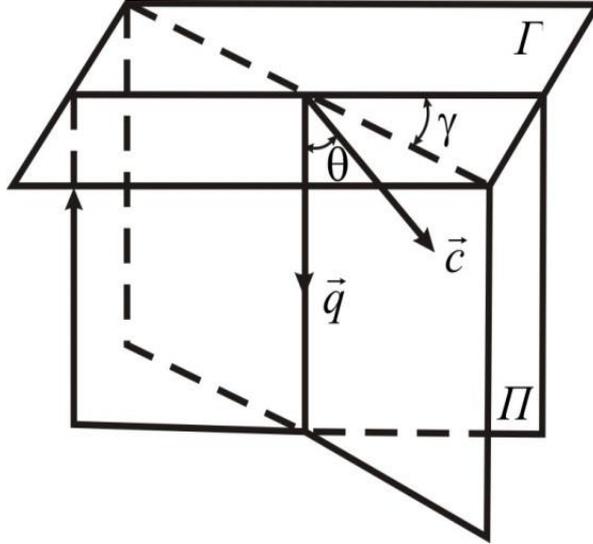


Рисунок 2. – Ориентация оптической оси \vec{c} относительно плоскости падения Π и нормали \vec{q} к границе кристалла

Выражения для матрицы отражения от произвольным образом ориентированного кристалла получены в [4; 6] в наших обозначениях их удобно представить в виде

$$r_{pp} = \left\{ \varepsilon_0 (\eta + \eta_e) (\varepsilon_0 \eta - \varepsilon \eta_0) l_1^2 + (\eta + \eta_0) \nu \left[(\varepsilon_0 \eta - \varepsilon \eta_e) \xi l_2 - (\varepsilon_0 \eta \eta_e - \varepsilon \eta_0^2) l_3 \right] \right\} 3^{-1},$$

$$r_{ps} = 2n\eta (\eta_e - \eta_0) (\xi l_2 + \eta_0 l_3) \varepsilon_0 l_1 3^{-1},$$

$$r_{sp} = 2n\eta (\eta_e - \eta_0) (\xi l_2 - \eta_0 l_3) \varepsilon_0 l_1 3^{-1},$$

$$r_{ss} = \left\{ \varepsilon_0 (\eta - \eta_e) (\varepsilon_0 \eta + \varepsilon \eta_0) l_1^2 + (\eta - \eta_0) \nu \left[(\varepsilon_0 \eta + \varepsilon \eta_e) \xi l_2 - (\varepsilon_0 \eta \eta_e + \varepsilon \eta_0^2) l_3 \right] \right\} 3^{-1}, \quad (15)$$

$$3 = \varepsilon_0 (\eta + \eta_e) (\varepsilon_0 \eta + \varepsilon \eta_0) l_1^2 + (\eta + \eta_0) \nu \left[(\varepsilon_0 \eta + \varepsilon \eta_e) \xi l_2 - (\varepsilon_0 \eta \eta_e + \varepsilon \eta_0^2) l_3 \right],$$

$$l_1 = \sin \theta \cdot \sin \gamma, \quad l_2 = \sin \theta \cdot \cos \gamma, \quad l_3 = \cos \theta,$$

$$\nu = \xi l_2 - \eta_0 l_3,$$

где $\xi = n \sin \varphi$, φ – угол падения, n – показатель преломления изотропной среды, из которой падает свет. Величины η_0 и η_e представляют собой нормальные составляющие векторов рефракции обыкновенной и необыкновенной волн ($\Delta \varepsilon = \varepsilon_e - \varepsilon_0$, $B = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon l_3^2$):

$$\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0 - \xi^2}, \quad \eta_e = \frac{-\xi \Delta \varepsilon l_2 l_3 + \sqrt{\varepsilon_0 \left[\varepsilon_e B - \xi^2 (\varepsilon_e - \Delta \varepsilon l_1^2) \right]}}{B}. \quad (16)$$

Как следует из (15), величины недиагональных элементов матрицы отражения различны, а после поворота кристалла на 180° вокруг нормали \vec{q} к его границе, при фиксированном ξ нельзя получить нового оборота измеряемых параметров. Выражения (15) значительно упрощаются в двух случаях: когда $\gamma = 0$ (главная плоскость) и $\gamma = \pi/2$.

Таким образом в общем случае ориентации одноосного поглощающего кристалла имеется шесть неизвестных параметров: два комплексных значения $\varepsilon_0 = \varepsilon' - i\varepsilon''$ и $\varepsilon_e = \varepsilon'_e - i\varepsilon''_e$ и два угла θ и γ . Во многих случаях ориентация оптической оси относительно нормали к границе кристалла известна заранее. В таких случаях остается только сориентировать кристалл в эллипсомере, т. е. определить положение главной плоскости падения относительно плоскости падения, образованной осями плеч эллипсометра.

Если угол θ неизвестен, то он определяется при решении обратной задачи вместе с ε_0 и ε_e . Следовательно в общем случае она сводится к системе пяти нелинейных уравнений с пятью неизвестными: θ , ε_0 , ε_e . Обычно удобно использовать более чем пять измерений для упрощения обратной задачи или повышения точности рассчитываемых величин. Для определения θ можно получить простое уравнение, если, следуя Федорову [6], измерить поляризационное отношение (14) при трех азимутах χ падающего света и $\gamma \neq 0$; например, $\chi_1 = 0^\circ$ ($\rho = \rho_1$), $\chi_2 = 90^\circ$ ($\rho = \rho_2$), $\chi_3 = 45^\circ$ ($\rho = \rho_3$). Тогда дополнительное уравнение для определения угла θ получается в виде [7]

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\alpha n \sin \varphi}{\cos \gamma \sqrt{\varepsilon_0 - n^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (17)$$

где $\alpha = \frac{1+\beta}{1-\beta}$, $\beta = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_1} \rho_1$. Это уравнение должно решаться вместе с уравнением

для определения ε_0 . Однако в тех случаях, когда для исследования доступны две грани кристалла, углы γ и θ могут быть определены вне зависимости от нахождения величин ε_0 и ε_e . Для этого необходимо определить главные плоскости падения на двух гранях, а линия пересечения этих плоскостей и даст положение оптической оси. Угол θ можно найти непосредственно из измерений следующим образом [4].

Вначале ориентируют кристалл так, чтобы оптическая ось лежала в плоскости падения, а затем отыскивают углы падения φ_1 , φ_2 , при которых наступает затемнение для двух азимутов падения, например, $\varphi_1 = 30^\circ$, $\varphi_2 = 45^\circ$, тогда

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\sin^2 \varphi_2 \cos^2 \gamma_1 - \sin^2 \varphi_1 \cos^2 \gamma^2}{\cos^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_2 (\sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2)}. \quad (18)$$

Методика определения главных значений ε_0 , ε_e тензора ε или главных показателей преломления $N_0 = N'_0 - iN''_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ и $N_e = N'_e - iN''_e = \sqrt{\varepsilon_e}$

Рассмотрим методику определения главных значений $\varepsilon_0, \varepsilon_e$ тензора ε или главных показателей преломления $N_0 = N'_0 - iN''_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$ и $N_e = N'_e - iN''_e = \sqrt{\varepsilon_e}$. Малость анизотропии в видимом и ближнем ИК диапазонах частот позволяет воспользоваться приближенными соотношениями для коэффициентов отражения с целью упрощения решения обратной задачи. Такие попытки предпринимались в [4] и для определения оптических постоянных ромбических кристаллов [8], эллипсометрическое исследование которых имеют свои особенности. Что касается одноосных кристаллов, то для них значения N_0 и N_e довольно просто могут быть рассчитаны из приближенных соотношений и эллипсометрических измерений на одном срезе кристалла в широком интервале значений угла θ (угол между нормалью \vec{q} к границе раздела и направлением оптической оси \vec{c}). Эффективность использования приближенных соотношений обусловлена не только малостью анизотропии кристаллов, а также наличием переходного слоя на любой поверхности кристалла.

Получим исходные расчетные выражения. Для определения двух комплексных величин N_0 и $\Delta N = N_e - N_0$ воспользуемся измерением поляризационных углов ψ и Δ в главной плоскости падения ($\rho_{\parallel} = \operatorname{tg} \psi_{\parallel} e^{i\Delta_{\parallel}}$) и в плоскости, ортогональной к ней ($\rho_{\perp} = \operatorname{tg} \psi_{\perp} e^{i\Delta_{\perp}}$). Направление оптической оси \vec{c} считаем произвольным. Ее положение можно найти, например, с помощью эллипсометрических измерений при двух азимутах падения.

Поскольку для изотропной среды $\rho_{\parallel} = \rho_{\perp}$, то величина $\rho_{\parallel} - \rho_{\perp}$ или

$$A = 1 - \frac{\rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}} \quad (19)$$

является мерой анизотропии кристалла: $A = C \Delta N$, где C зависит от ориентации оптической оси, N_0 и угла падения. Систему уравнений, из которой находят C и N_0 , получим, раскладывая в ряд по степеням ΔN , выражения для коэффициентов отражения $r_p^{\parallel, \perp}$ и $r_s^{\parallel, \perp}$ (индексы « p » и « s » соответствуют случаям, когда вектор электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения или перпендикулярен ей). Получающиеся при этом выражения приведем с точностью до членов, пропорциональных ΔN^2 включительно.

На основании общих соотношений [4, 6], имеем:

а) для главной плоскости падения

$$\rho_{\parallel} = \frac{r_p^{\parallel}}{r_s^{\parallel}} = \frac{r_p}{r_s} \left\{ 1 + \Delta N \left[B - (a + Bp) \Delta N \right] \right\},$$

$$a = \frac{BN_0 \cos^2 \theta}{2\eta_0^2}, \quad p = \frac{(\eta_0 \eta + n^2 \cos^2 \theta) N_0}{(N_0^2 \eta + n^2 \eta_0) \eta_0}, \quad (20)$$

$$B = \frac{2n^2 N_0 \eta (N_0^2 \sin^2 \theta - \xi^2)}{(N_0^4 \eta^2 - n^4 \eta_0^2) \eta_0},$$

где $\eta_0 = \sqrt{\varepsilon_0 - \xi^2}$, $\xi = n \sin \varphi$, $\eta = n \cos \varphi$, φ – угол падения, n – показатель преломления среды, из которой падает волна, r_p и r_s – коэффициенты отражения для « p » и « s » составляющих волны от изотропной среды с показателем преломления N_0 :

$$\frac{r_p}{r_s} = \frac{\xi^2 - \eta \eta_0}{\xi^2 + \eta \eta_0} = \rho_0; \quad (21)$$

б) для плоскости падения, перпендикулярной главной плоскости падения (здесь для компактности оставлены члены пропорциональные ΔN^3 и ΔN^4),

$$\frac{1}{\rho_{\perp}} = \frac{r_s^{\perp}}{r_p^{\perp}} = \frac{r_s}{r_p} \left[1 + D \delta (1 + b \delta) \right]. \quad (22)$$

В этом выражении двулучепреломлению пропорциональна величина

$$\delta = \eta_e - \eta_0 = \frac{\eta_0}{N_0} (E + N_0 F \Delta N) \Delta N, \quad (23)$$

$$F = -\frac{2\eta_0^2 \cos^2 \theta + \xi^2}{2\eta_0^4} + \frac{3 \cos^4 \theta - \cos^2 \theta}{2N_0^2}, \quad E = -\cos^2 \theta + \frac{N_0^2}{\eta_0^2}.$$

В (22) коэффициенты D и b имеют вид:

$$D = \frac{2\eta N_0^2 \left[(\eta \xi \cos \theta - \eta \eta_0 \sin \theta)^2 - \xi^4 \sin^2 \theta \right]}{(N_0^4 \eta^2 - n^4 \eta_0^2) (N_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2 \cos^2 \theta)}, \quad (24)$$

$$b = \frac{N_0^2 (N_0^2 \eta - n^2 \eta_0) \sin \theta - n^2 (\eta + \eta_0) \xi^2 \cos^2 \theta + n \eta \xi N_0^2 \sin 2\theta}{(N_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2 \cos^2 \theta) (\eta + \eta_0) (N_0^2 \eta - n^2 \eta_0)}.$$

Для многих кристаллов достаточным является учет членов, пропорциональных ΔN . Разберем процедуру расчета величин N_0 и ΔN в этом приближении, когда выра-

жения (20) и (22) значительно упрощаются. Подразумевая далее под N_0 и ΔN относительные параметры $\frac{N_0}{n}$ и $\frac{\Delta N}{n}$ из (20) и (22), получаем систему двух уравнений, которая является основной для определения N_0 и ΔN :

$$\rho_{\parallel} = \rho_0(1 + B\Delta N), \quad \Delta N = \frac{A}{C}, \quad (25)$$

где $C = -B - ED \frac{\eta_0}{N_0}$.

Очевидно, что для нахождения ΔN в принятом приближении при вычислении коэффициента C достаточно ограничиться нулевым приближением для комплексного показателя преломления N_0 ; обозначим его $N_0^{(0)}$. Полагая в первом уравнении (25) $\Delta N = 0$, получаем

$$N_0^{(0)} = R \sin \varphi, \quad (26)$$

где $R = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \left(\frac{1 - \rho}{1 + \rho} \right)^2}$, $\rho = \rho_{\parallel}$.

Затем, подставив во второе уравнение (25) вычисленное значение $C = f(N_0^{(0)})$ и найденную из измерений величину A , определим ΔN . Зная ΔN , из первого уравнения (25) и уравнения (26) находим значение N_0 в первом приближении (обозначим его $N_0^{(1)}$) с учетом членов $\sim \Delta N$. При этом ρ вычисляется через ΔN и B следующим образом:

$$\rho = \rho_{\parallel}(1 - B\Delta N), \quad B = B(N_0^{(0)}). \quad (27)$$

Следовательно, по измеренным эллипсометрическим параметрам на основании приближенных соотношений (25), (26) могут быть просто вычислены главные комплексные показатели преломления кристалла N_0 и $N_e = N_0 + \Delta N$. Существенно, что при этом снимаются трудности, связанные с решением обратной эллипсометрической задачи. Необходимые для расчета $N_0^{(1)}$ и ΔN величины C и B вычисляются через известные или измеряемые параметры по формулам $\left(\eta_0 = \sin \varphi \sqrt{R^2 - 1} \right)$

$$C = B + \frac{2R \cos \varphi \left[\sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \theta - \left(\cos \theta - \sqrt{R^2 - 1} \cos \varphi \cdot \sin^2 \theta \right) \right]^2}{\sqrt{R^2 - 1} (R^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi - R^2 + 1)}, \quad (28)$$

$$B = \frac{2R(1 - R^2 \sin^2 \theta) \cos \varphi}{\sqrt{R^2 - 1} (R^4 \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi - R^2 + 1)}. \quad (29)$$

Заметим, что поскольку в соотношении $\Delta N = \frac{A}{C}$ слева стоит константа кристалла, не зависящая от φ и θ , то отношение величин A и C не может обращаться в нуль

ни при каких значениях φ и θ , т. е. изменяют знак при изменении φ и θ . В частности, для прозрачных кристаллов при $\theta = \frac{\pi}{2}$ имеем $C > 0$. Откуда следует, что знак ΔN (положительность и отрицательность кристалла) совпадает со знаком введенной величины A (19): при $|\rho_{\parallel}| < |\rho_{\perp}|$ – кристалл оптически отрицателен, при $|\rho_{\parallel}| > |\rho_{\perp}|$ – оптически положительный.

Это весьма простой способ эллипсометрического определения характера (оптически положительных или оптически отрицательных) прозрачных и слабопоглощающих кристаллов. Он дает возможность определять отрицательность или положительность кристалла непосредственно на эллипсометре при проведении измерений, не привлекая других средств в отличие, например, от [9].

Исходя из общих выражений (20), (22), можно получить значения N_0 и N_e с точностью до членов, пропорциональных ΔN^2 включительно. Процедура расчета здесь точно такая же, как и при учете членов, пропорциональных ΔN . Отличие заключается в том, что коэффициенты C и B должны быть найдены через измеряемые величины в следующем (с точностью до ΔN) приближении. Обозначим значение ΔN , вычисленное согласно (25), через $\Delta N^{(0)}$. Составляя с помощью (20), (22) разность $1 - \frac{\rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}}$, вычисляем в нужном приближении коэффициент C . Его удобно представить в виде

$$C = C_1 + C_2 \Delta N^{(0)}. \quad (30)$$

Здесь через C_1 обозначен коэффициент C , который находится по формуле (28). Теперь он должен быть вычислен не в нулевом приближении, как ранее, а в первом, что осуществляется очень просто. Для этого в (28) следует подставить значение R (26), рассчитанное для ρ (27). Коэффициент C_2 имеет вид

$$C_2 = \frac{\eta_0}{N_0} \left(bE^2 \frac{\eta_0}{N_0} - BE - N_0 F \right) D + a + Bp. \quad (31)$$

Поскольку C_2 умножается на $\Delta N^{(0)}$, то входящие в (31) величины должны вычисляться в нулевом приближении, величины a и B находятся согласно (20), для остальных на основании (23), (24), (26) получаем

$$E = -\cos^2 \theta + \frac{R^2}{R^2 - 1}, \quad F = \frac{2(1 - R^2) - 1}{2 \sin^2 \varphi (R^2 - 1)^2} + \frac{3 \cos^4 \theta - \cos^2 \theta}{2R^2 \sin^2 \varphi},$$

$$b = \frac{R^2 (R^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - \eta_0) \sin^2 \theta - (\cos \varphi + \eta_0) \cos^2 \theta + 0.5R^2 \sin 2\theta \cdot \sin 2\varphi}{(R^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) (\cos \varphi + \eta_0) (R^2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - \eta_0)}, \quad (32)$$

$$D = \frac{2 \cos \varphi \cdot R^2 \left[(\sin \varphi \cdot \cos \theta - \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \eta_0)^2 - \sin^4 \varphi \cdot \sin^2 \theta \right]}{(1 - R^2 \sin^2 \varphi) (1 - R^2 \cos^2 \varphi) (R^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}.$$

Далее, аналогично тому, как это делалось при учете членов $\sim \Delta N$, вычисляем N_0 по формуле (26), но при

$$\rho = \rho_{\parallel} \left[1 - B\Delta N + \Delta N^2 (a + B\rho + B^2) \right]. \quad (33)$$

Заклучение

Предложенный метод определения оптических постоянных поглощающих одноосных кристаллов, основанный на разложении функций в ряд по малым величинам, дает возможность получить приближенные соотношения, точность которых не превышает погрешностей эксперимента. Достоинством метода является его простота, т. к. оптические постоянные рассчитываются подстановкой измеряемых эллипсометрических параметров в аналитические выражения, а не вычисляются сложными численными методами. Предложенный метод применялся в [10–13].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drude, P. Über oberflächenschichten I und II / P. Drude // *Annalen der Physik.* – 1989. – Bd. B36, N. 2 (NF). – S. 532–560, 865–897.
2. Кизель, В. А. Отражение света / В. А. Кизель. – М. : Наука, 1973. – 352 с.
3. Ржанов, А. В. Основы эллипсометрии / А. В. Ржанов, К. К. Свитащев, А. И. Семенов. – Новосибирск : Наука, 1979. – 424 с.
4. Федоров, Ф. И. Оптика анизотропных сред / Ф. И. Федоров. – Минск : Изд-во АН БССР, 1958. – 380 с.
5. Аззам, Р. М. Эллипсометрия и поляризованный свет / Р. М. Аззам, Н. М. Башара. – М. : Мир, 1981. – 638 с.
6. Федоров, Ф. И. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами / Ф. И. Федоров, В. В. Филиппов. – Минск : Наука и техника, 1976. – 222 с.
7. Определение оптических постоянных одноосных поглощающих кристаллов методом эллипсометрии / А. Г. Пахомов [и др.] // *Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика : сб. науч. тр.* – Минск : Изд-во АН БССР, 1981. – С. 147–155.
8. Aspnes, D. E. Approximate solution of ellipsometric equations for optically biaxial crystals / D. E. Aspnes // *J. Opt. Soc. Am.* – 1980. – Vol. 70, № 10. – P. 1275–1277.
9. Elshazlu-Zaghloul, M. Specieal-angle-ofincidem-ce ellipsometry for uniaxial crystals. Part 1. Negative crystals / M. Elshazlu-Zaghloul // *Opt. Comm.* – 1985. – Vol. 54, № 4. – P. 195–200.
10. Сендер, Н. Н. Иммерсионный метод определения оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов / Н. Н. Сендер // *Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка.* – 2015. – № 2. – С. 40–48.
11. Сендер, Н. Н. Определение оптических постоянных анизотропных поглощающих кристаллов на основе разложения в ряд коэффициентов отражения / Н. Н. Сендер // *Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка.* – 2016. – № 1. – С. 38–45.
12. Сендер, Н. Н. Экспериментальное определение оптических постоянных поглощающих кристаллов на основе приближенных соотношений / Н. Н. Сендер // *Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка.* – 2018. – № 1. – С. 48–58.
13. Сендер, Н. Н. Экспериментальное определение оптических постоянных поглощающих кристаллов на основе метода иммерсионной эллипсометрии / Н. Н. Сендер // *Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка.* – 2020. – № 1. – С. 53–58.

REFERENCES

1. Drude, P. Über oberflächenschichten I und II / P. Drude // *Annalen der Physik.* – 1989. – Bd. B36, H. 2 (NF). – S. 532–560, 865–897.
2. Kiziel', V. A. Otrazhenije svieta / V. A. Kiziel'. – M. : Nauka, 1973. – 352 s.
3. Rzhhanov, A. V. Osnovy ellipsometrii / A. V. Rzhhanov, K. K. Svitasev, A. I. Siemienko. – Novosibirsk : Nauka, 1979. – 424 s.
4. Fiodorov, F. I. Optika anisotropnykh sried / F. I. Fiodorov. – Minsk : Izd-vj AN BSSR, 1958. – 380 s.
5. Azzam, R. M. Ellipsometrija i poliarizovannyj sviet / R. M. Azzam, N. M. Bashara. – M. : Mir, 1981. – 638 s.
6. Fiodorov, F. I. Otrazhenije i prielomlienije svieta i prozrachnymi kristallami / F. I. Fiodorov, V. V. Filippov. – Minsk : Nauka b tiekhnika, 1976. – 222 s.
7. Pakhomov, A. G. Opriedielienije optichieskikh postojannykh odnoosnykh pogloshchajushchikh kristallov metodom ellipsometrii / A. G. Pakhomov [et al.] // *Kovariantnyje metody v teoretichieskoj fizike. Optika i akustika : sb. nauch. tr.* – Minsk : Izd-vo AN BSSR, 1981. – S. 147–155.
8. Aspnes, D. E. Approximate solution of ellipsometric equations for optically biaxial crystals / D. E. Aspnes // *J. Opt. Soc. Am.* – 1980. – Vol. 70, № 10. – P. 1275–1277.
9. Elshazlu-Zaghloul, M. Specieal-angle-ofincidem-ce ellipsometry for uniaxial crystals. Part 1. Negative crystals / M. Elshazlu-Zaghloul // *Opt. Comm.* – 1985. – Vol. 54, № 4. – P. 195–200.
10. Siendier, N. N. Immiersionnyj metod opriedielienija optichieskikh postojannykh anizotropnykh pogloshchajushchikh krystallov / N. N. Siendier // *Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka.* – 2015. – № 2. – S. 40–48.
11. Siendier, N. N. Opriedielienije optichieskikh postojannykh anizotropnykh pogloshchajushchikh krystallov na osnovie razlozhenija v riad koefficijentjv otrazhenija / N. N. Siendier // *Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka.* – 2016. – № 1. – S. 38–45.
12. Siendier, N. N. Ekspierierimiental'noje opriedielienije optichieskikh postojannykh anizotropnykh pogloshchajushchikh krystallov na osnovie priblizhonnykh sootnoshenij / N. N. Siendier // *Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka.* – 2018. – № 1. – S. 48–58.
13. Siendier, N. N. Ekspierierimiental'noje opriedielienije optichieskikh postojannykh anizotropnykh pogloshchajushchikh krystallov na osnovie metoda immersionnoj ellipsometrii / N. N. Siendier // *Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka.* – 2020. – № 1. – S. 53–58.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.04.2022

УДК 535.3+537.6

Алексей Игоревич Серый*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Alexey Sery***¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: alexey_sery@mail.ru*

ОБ УСЛОВИИ БЕТА-РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОННО-НУКЛОННОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ ВБЛИЗИ ПОРОГА НЕЙТРОНИЗАЦИИ

Исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-нуклонного вещества на значения концентраций электронов, протонов и нейтронов, соответствующих бета-равновесию вблизи порога нейтронизации. Исследование выполнено в приближении идеальности электронного и нуклонных газов, а также в приближении температур, которые являются низкими для протонов и электронов (поскольку отличная от нуля тепловая энергия намного меньше энергии Ферми) и высокими – для нейтронов (поскольку отличная от нуля тепловая энергия намного больше энергии Ферми, которая мала при низких концентрациях вблизи порога нейтронизации). Для взаимосвязи между температурой, концентрациями и химическими потенциалами всех компонентов использованы известные соотношения. Показано, что при одном и том же значении концентрации электронов и протонов с ростом температуры значение концентрации нейтронов, соответствующее бета-равновесию, увеличивается.

Ключевые слова: электронно-нуклонное вещество, бета-равновесие, порог нейтронизации, низкие температуры.

On the Condition of Beta Equilibrium of the Electron-Nucleon Substances at Low Temperatures Near the Neutronization Threshold

The effect of the temperature of an electron-neutral electron-nucleon substance on the concentrations of electrons, protons and neutrons corresponding to beta equilibrium near the neutronization threshold is investigated. The study was carried out in the approximation of the ideality of electron and nucleon gases, as well as in the approximation of temperatures that are low for protons and electrons (since the nonzero thermal energy is much less than the Fermi energy) and high for neutrons (since the nonzero thermal energy is much greater than the Fermi energy, which is small at low concentrations near the neutronization threshold). Known relations are used for the relationships between temperature, concentrations and chemical potentials of all components. It is shown that at the same value of the concentration of electrons and protons with increasing temperature, the value of the neutron concentration corresponding to beta equilibrium increases.

Key words: electron-nucleon matter, beta equilibrium, neutronization threshold, low temperatures.

Введение

Расчет условий бета-равновесия электронно-нуклонного вещества представляет интерес для различных астрофизических приложений. Ранее подобные задачи рассматривались в приближении абсолютного нуля температуры и в пределе высоких температур, в т. ч. при наличии интенсивного магнитного поля [1, с. 88–92, 167–168], а также с учетом и без учета энергии взаимодействия между частицами и спиновой поляризации нуклонов [2, с. 549–555; 3, с. 30–37; 4, с. 30–43].

Для низких, отличных от нуля температур в [5, с. 52–61] (одна из последних статей, написанных с участием В. С. Секержицкого), были решены задачи о нахождении условий порога нейтронизации электронно-протонного вещества и бета-равновесия электронно-нуклонного вещества. Было дано объяснение причин, по которым ранее такие задачи не рассматривались, проанализированы недостатки методов приближенных

вычислений, разработанных для нерелятивистских идеальных газов при низких отличных от нуля температур [6, с. 201–202; 7, с. 596–597], а также аналогичными методами получена формула для химического потенциала релятивистского электронного газа. При этом в обеих задачах электронный и нуклонные газы считались идеальными, а в задаче о бета-равновесии рассматривались концентрации нейтронов n_n , заметно далекие от порога нейтронизации. Малые концентрации нейтронов (вблизи порога нейтронизации) не рассматривались по той причине, что процедура получения приближенных формул для вычисления термодинамических характеристик нерелятивистских ферми-газов при низких, отличных от нуля температур напрямую учитывает факт малости тепловой энергии kT (k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура) по сравнению с химическим потенциалом μ , отсчитываемым от энергии покоя соответствующих частиц mc^2 (m – масса частицы, c – скорость света в вакууме). В связи с этим для нерелятивистского ферми-газа малой концентрации (когда то же самое значение тепловой энергии kT не мало по сравнению с химическим потенциалом μ) применение таких соотношений некорректно. Таким образом, одна и та же температура, будучи низкой для электронов и протонов, будет высокой для нейтронов вблизи порога нейтронизации, т. е. должны одновременно выполняться соотношения (с учетом того, что для релятивистских электронов химический потенциал μ_e включает энергию покоя $m_e c^2$, где m_e – масса электрона [5, с. 55, 56])

$$\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} \gg kT, \mu_p \gg kT, \mu_{0n} \ll kT \quad (1)$$

При этом в (1) μ_p – химический потенциал протонного газа при отличной от нуля температуре, а μ_{0n} – химический потенциал нейтронного газа при температуре абсолютного нуля. В силу малости рассматриваемых значений температуры величины μ_e и μ_p в (1) могут быть заменены, соответственно, на μ_{0e} и μ_{0p} (химические потенциалы, соответственно, электронного и протонного газов при абсолютном нуле температуры). В результате вместо (1) можно записать

$$\sqrt{\mu_{0e}^2 - m_e^2 c^4} \gg kT, \mu_{0p} \gg kT, \mu_{0n} \ll kT \quad (2)$$

Выражения для химических потенциалов электронов и нуклонов

Будем учитывать соотношения [1, с. 25, 45]

$$\mu_{0e} = \sqrt{m_e^2 c^4 + (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 c^2 n_e^{2/3}}, \quad (3)$$

$$\mu_{0p} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p}, \quad (4)$$

$$\mu_{0n} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n}, \quad (5)$$

где \hbar – постоянная Планка, m_p – масса протона, m_n – масса нейтрона, n_n – концентрация нейтронов, n_e – концентрация электронов, которая в случае электронейтрального вещества (рассматриваемого в данной работе) равна концентрации протонов n_p , т. е.

$$n_e = n_p. \quad (6)$$

В связи с изложенным выше для химического потенциала нейтронов μ_n при различных от нуля температурах следует применять другие известные соотношения, поэтому данный случай требует отдельного рассмотрения.

Величина μ_p , в силу того что температура T для протонного газа считается низкой, выражается по формуле [7, с. 281]

$$\mu_p \approx \mu_{0p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_{0p}} \right)^2 \right). \quad (7)$$

Величина μ_e находится из уравнения [5, с. 56]

$$n_e \approx \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} \left(\frac{1}{3} (\mu_e^2 - m_e^2 c^4)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{2\mu_e^2 - m_e^2 c^4}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}} \right). \quad (8)$$

Химический потенциал нейтронного газа в случае (2) находится по формуле [1, с. 52]

$$\mu_n \approx -kT \ln \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{kT}{\mu_{0n}} \right)^{3/2} \right) = -kT \ln \left(\frac{1}{4n_n} \left(\frac{2m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right). \quad (9)$$

Уравнение бета-равновесия электронно-нуклонного вещества вблизи порога нейтронизации

Уравнение бета-равновесия в общем случае выглядит следующим образом [1, с. 88]:

$$\mu_e + \mu_p + m_p c^2 = \mu_n + m_n c^2. \quad (10)$$

Для удобства дальнейших исследований введем вспомогательные функции

$$N_n(n_n, T) = m_n c^2 - kT \ln \left(\frac{1}{4n_n} \left(\frac{2m_n kT}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right), \quad (11)$$

$$N_p(n_p, T) = m_p c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right). \quad (12)$$

Переходя к условию (2), выражаем μ_e из (10) с учетом (4), (7), (9), (11), (12), и, подставляя в (8), можно после некоторых преобразований получить (учитывая также (6)) уравнение бета-равновесия в виде

$$3n_p \pi^2 (\hbar c)^3 \sqrt{(N_n(n_n, T) - N_p(n_p, T))^2 - m_e^2 c^4} - ((N_n(n_n, T) - N_p(n_p, T))^2 - m_e^2 c^4)^2 - \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 (2(N_n(n_n, T) - N_p(n_p, T))^2 - m_e^2 c^4) \approx 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно решать численно относительно n_n при заданных значениях T (в соответствии с ограничениями (2)) при значениях n_p выше порога нейтронизации [5, с. 57].

Численные результаты исследования уравнения (13) представлены в таблицах 1 и 2, а также на рисунках 1–5, где для удобства введены вспомогательные величины $n_{01} = 1 \text{ см}^{-3}$ и $n_{02} = 10^{30} \text{ см}^{-3}$.

Таблица 1. – Значения концентраций протонов, соответствующих бета-равновесию при различных фиксированных значениях концентраций нейтронов для двух значений температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$, а также разность таких значений концентраций протонов

$T, 10^5 \text{ К}$	1,00		9,00		$\Delta n_p = n_{p(9)} - n_{p(1)}, 10^{28} \text{ см}^{-3}$	
	$n_n, \text{ см}^{-3}$	$n_{p(1)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	kT/μ_{0p}	$n_{p(9)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$		kT/μ_{0p}
1,00		7,34461	0,01148	7,24997	0,1042	9,464
$1,00 \cdot 10^9$		7,34821	0,01148	7,28220	0,1039	6,601
$1,00 \cdot 10^{16}$		7,35102	0,01148	7,30733	0,1037	4,369
$1,00 \cdot 10^{21}$		7,35302	0,01147	7,32532	0,1035	2,771
$1,00 \cdot 10^{25}$		7,35463	0,01147	7,33972	0,1034	1,490
$2,00 \cdot 10^{25}$		7,35475	0,01147	7,34081	0,1034	1,394
$3,00 \cdot 10^{25}$		7,35482	0,01147	7,34144	0,1034	1,338
$4,00 \cdot 10^{25}$		7,35487	0,01147	7,34189	0,1034	1,298
$5,00 \cdot 10^{25}$		7,35491	0,01147	7,34224	0,1034	1,266
$6,00 \cdot 10^{25}$		7,35494	0,01147	7,34253	0,1034	1,241
$7,00 \cdot 10^{25}$		7,35497	0,01147	7,34277	0,1034	1,220
$8,00 \cdot 10^{25}$		7,35499	0,01147	7,34298	0,1034	1,201
$9,00 \cdot 10^{25}$		7,35501	0,01147	7,34316	0,1034	1,185
$1,00 \cdot 10^{26}$		7,35503	0,01147	7,34333	0,1034	1,170
$1,10 \cdot 10^{26}$		7,35504	0,01147	7,34348	0,1034	1,157
$1,20 \cdot 10^{26}$		7,35506	0,01147	7,34361	0,1034	1,145

Разность Δn_p значений концентраций протонов $n_{p(1)}$ и $n_{p(9)}$, соответствующих бета-равновесию при заданных (в логарифмическом масштабе) значениях концентраций нейтронов для температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$, отображена на рисунке 1.

Отношение значений (в логарифмическом масштабе) концентраций протонов $n_{p(1)}$ и $n_{p(9)}$ при тех же условиях отображена на рисунке 2.

По отдельности значения концентраций (в логарифмическом масштабе) протонов $n_{p(1)}$ и $n_{p(9)}$, соответствующих бета-равновесию при заданных (в логарифмическом масштабе) значениях концентраций нейтронов для температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$, отображена на рисунке 3.

Разность значений бета-равновесных концентраций протонов, соответствующих фиксированным значениям концентрации нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ при различных температурах, представлена на рисунке 4.

Зависимость тех же концентраций протонов n_p от температуры тех же значениях концентрации нейтронов представлена на рисунке 5.

Данные таблицы 3 иллюстрируют выполнение условий (1) и (3) для нейтронов.

Таблица 2. – Значения концентраций протонов, соответствующих бета-равновесию при двух фиксированных значениях концентраций нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ для различных значений температур, а также разность таких значений концентраций протонов

$T, 10^5 \text{ К}$	$n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$	$n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$	$\Delta n_p = n_p^{(26)} - n_p^{(25)}, 10^{25} \text{ см}^{-3}$
	$n_p^{(25)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	$n_p^{(26)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	
1,00	7,354627	7,355027	4,01
2,00	7,353034	7,353836	8,02
3,00	7,351309	7,352512	12,02
4,00	7,349499	7,351102	16,03
5,00	7,347626	7,349630	20,045
6,00	7,345705	7,348108	24,04
7,00	7,343743	7,346547	28,04
8,00	7,341747	7,344952	32,04
9,00	7,339723	7,343327	36,04

Таблица 3. – Отношение тепловой энергии к химическому потенциалу нейтронов, вычисленному для абсолютного нуля температуры, для различных заданных значениях концентраций нейтронов при двух фиксированных значениях температур $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ К}$

$T, 10^5 \text{ К}$	1,00	9,00
$n_n, \text{ см}^{-3}$	kT/μ_{0n}	kT/μ_{0n}
1,00	$4,345 \cdot 10^{18}$	$3,910 \cdot 10^{19}$
$1,00 \cdot 10^9$	$4,345 \cdot 10^{12}$	$3,910 \cdot 10^{13}$
$1,00 \cdot 10^{16}$	$9,361 \cdot 10^7$	$8,425 \cdot 10^8$
$1,00 \cdot 10^{21}$	$4,345 \cdot 10^4$	$3,910 \cdot 10^5$
$1,00 \cdot 10^{25}$	93,61	842,5
$2,00 \cdot 10^{25}$	58,97	530,7
$3,00 \cdot 10^{25}$	45,00	405,0
$4,00 \cdot 10^{25}$	37,15	334,3
$5,00 \cdot 10^{25}$	32,01	288,1
$6,00 \cdot 10^{25}$	28,35	255,2
$7,00 \cdot 10^{25}$	25,58	230,2
$8,00 \cdot 10^{25}$	23,40	210,6
$9,00 \cdot 10^{25}$	21,64	194,7
$1,00 \cdot 10^{26}$	20,17	181,5
$1,10 \cdot 10^{26}$	18,93	170,3

Отметим, что приведенные в таблицах 1 и 2 значения концентрации протонов уступают значению $n_{0p} = 7,35586 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$, которое соответствует порогу нейтронизации при $T = 0 \text{ К}$ [5, с. 57], причем, в отличие от выводов, сделанных в [5, с. 58], чем выше температура и ниже концентрация нейтронов, тем ниже соответствующая бета-равновесная концентрация протонов (которая, однако, понижается гораздо медленнее по сравнению с понижением концентрации нейтронов). Это объясняется тем, что при отличной от нуля температуре появляются свободные состояния с энергией ниже уровня Ферми, а с понижением концентрации влияние принципа Паули ослабевает.

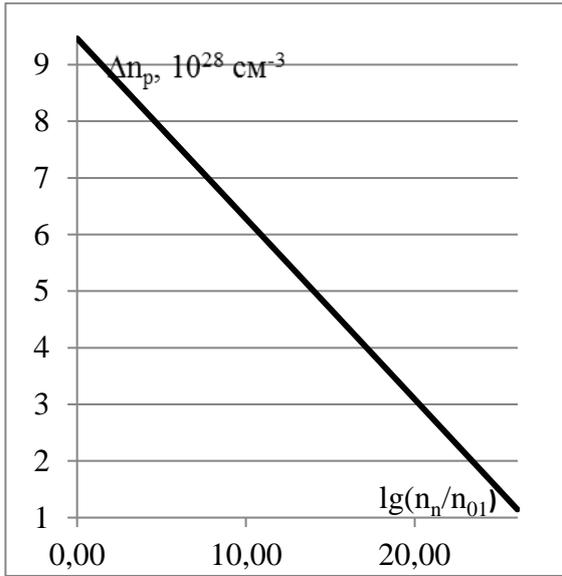


Рисунок 1. – Зависимость разности значений n_p , соответствующих бета-равновесию при $T = 1,00 \cdot 10^5$ К и $T = 9,00 \cdot 10^5$ К, согласно уравнению (13), от значения n_n в логарифмическом масштабе

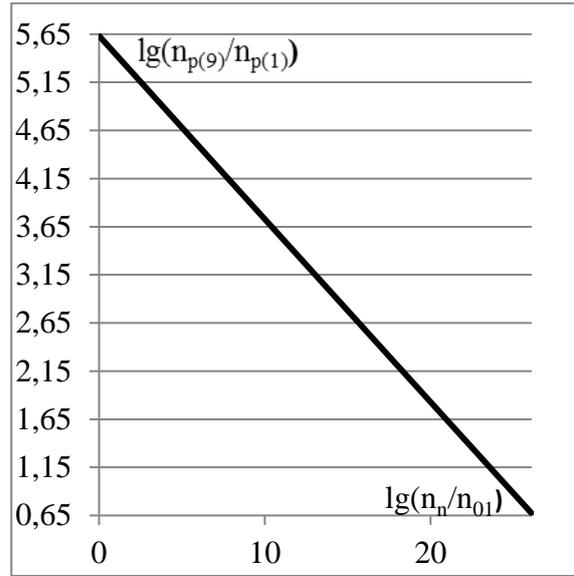


Рисунок 2. – Зависимость отношения бета-равновесных значений n_p (в логарифмическом масштабе) при $T = 1,00 \cdot 10^5$ К и $T = 9,00 \cdot 10^5$ К, согласно уравнению (13), от значения n_n в логарифмическом масштабе

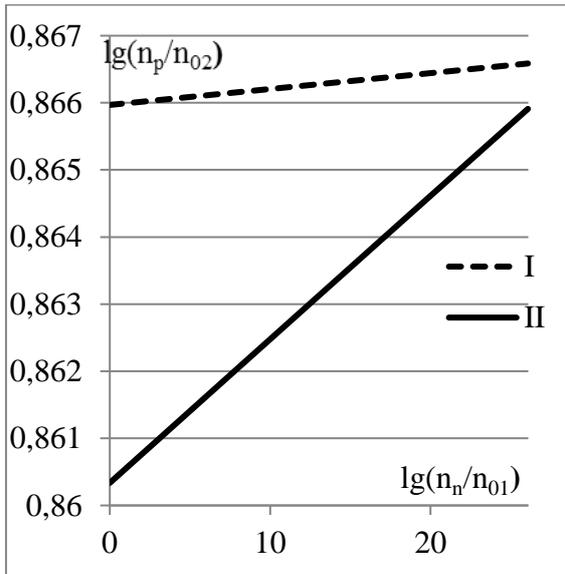


Рисунок 3. – Зависимость (в логарифмическом масштабе) значений n_p , соответствующих бета-равновесию при $T = 1,00 \cdot 10^5$ К (I) и $T = 9,00 \cdot 10^5$ К (II), согласно уравнению (13), от значения n_n в логарифмическом масштабе

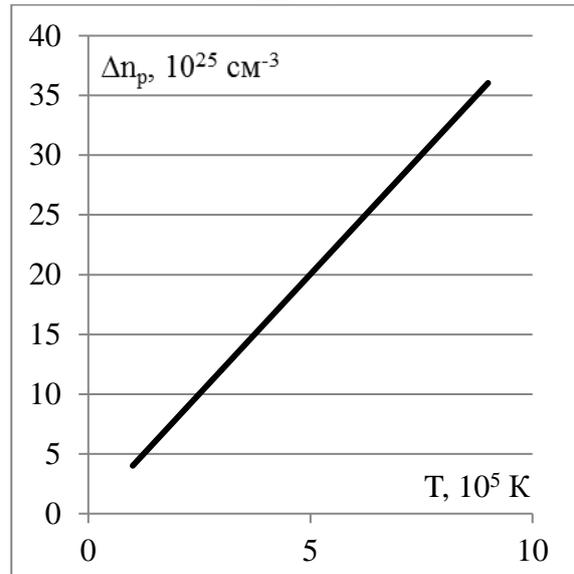


Рисунок 4. – Разность значений бета-равновесных концентраций протонов n_p , соответствующих фиксированным значениям концентрации нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ при различных температурах

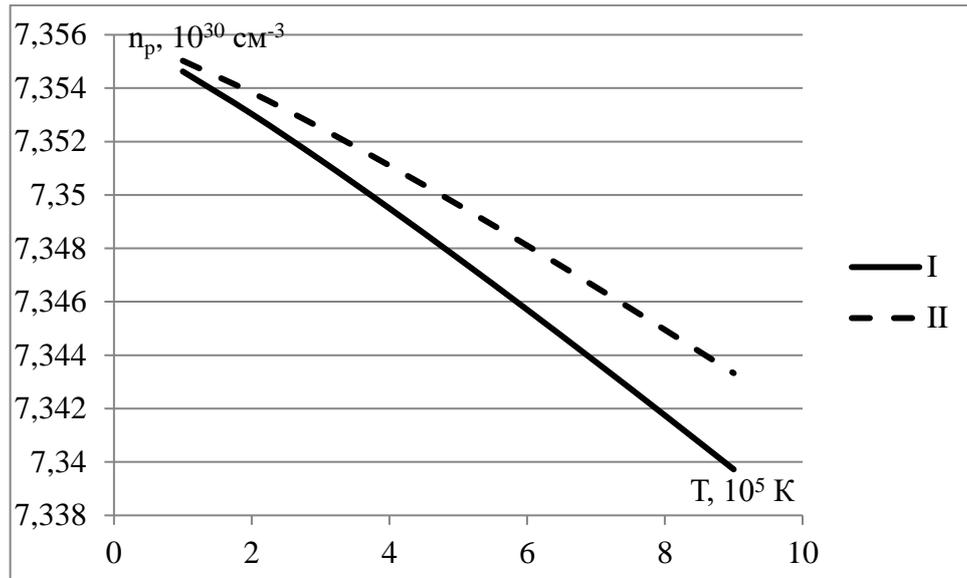


Рисунок 5. – Зависимость бета-равновесных концентраций протонов n_p от температуры при фиксированных значениях концентрации нейтронов $n_n^{(1)} = 1,00 \cdot 10^{25} \text{ см}^{-3}$ (I) и $n_n^{(2)} = 1,00 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-3}$ (II)

Графики на рисунках 1–4 внешне напоминают отрезки прямых, но более детальный анализ полученных численных данных (в т. ч. отображенных в таблицах 1 и 2) показывает, что это не совсем так, поскольку при одинаковой разности между значениями соседних ячеек в крайних левых столбцах таблицы 1 (значения $n_n \sim 10^{25} \text{ см}^{-3}$) и таблицы 2 (значения температуры) разность между значениями соответствующих соседних ячеек других столбцов этих таблиц (имеющими отношение к $n_e = n_p$), строго говоря, не одна и та же.

Кроме того, полученные результаты позволяют сделать следующие выводы (везде подразумевается выполнение условий (2) при бета-равновесии).

1. При заданном значении температуры большему значению n_n соответствует большее значение $n_e = n_p$; при этом относительный рост n_n происходит гораздо быстрее (на много порядков) относительного роста $n_e = n_p$, поскольку по абсолютной величине $n_e = n_p$ в исследуемом диапазоне значений значительно превосходит n_n (что закономерно вблизи порога нейтронизации). 2. При заданном значении n_n большему значению температуры соответствует меньшее значение $n_e = n_p$; наоборот, при заданном значении $n_e = n_p$ большему значению температуры соответствует большее значение n_n . 3. Рост значения $n_e = n_p$ с ростом n_n при заданном значении температуры происходит тем быстрее, чем выше температура; наоборот, рост значения n_n с ростом $n_e = n_p$ при заданном значении температуры происходит тем быстрее, чем ниже температура. 4. Для двух фиксированных значений температуры (в нашем случае это $T = 1,00 \cdot 10^5 \text{ K}$ и $T = 9,00 \cdot 10^5 \text{ K}$) большему значению n_n соответствует меньшая разность между значениями концентрации $n_e = n_p$, соответствующими бета-равновесию при указанных температурах; из этого следует и уменьшение отношения указанных двух значений концентрации $n_e = n_p$, а также логарифма этого отношения.

Заклучение. Основные результаты

В приближении низких, отличных от нуля температур и идеальности ферми-газов исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-протонного вещества на значения концентраций нуклонов и электронов, соответствующих бета-равновесию вблизи порога нейтронизации. При этом электронный и протонный газы считались вырожденными, нейтронный – невырожденным. Показано, что при заданном значении температуры большему значению концентрации протонов и электронов соответствует большее значение концентрации нейтронов, причем относительный рост концентрации нейтронов происходит гораздо быстрее (на много порядков) относительного роста концентрации протонов и электронов, поскольку по абсолютной величине концентрация протонов и электронов в исследуемом диапазоне значений значительно превосходит концентрацию нейтронов. Также показано, что при заданном значении концентрации протонов и электронов большему значению температуры соответствует большее значение концентрации нейтронов.

Результаты могут представлять интерес для теоретического исследования сверхплотных астрофизических объектов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Серый, А. И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А. И. Серый // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
4. Серый, А. И. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.
5. Секержицкий, В. С. О бета-равновесии электронно-нуклонного вещества при низких температурах / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2021. – № 2. – С. 52–61.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 5 : Статистическая физика : в 2 ч. – Ч. I. – 616 с.
7. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.

REFERENCES

1. Siekierzickij, V. S. Ravnoviesnyje sistiemy fiernionov i bozonov v magnitnykh poliakh : monografija / V. S. Siekierzickij ; Briest. gos. un-t. im. A. S. Pushkina. – Briest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Sieryj, A. I. O ferromagnietizmie vyrozhdiennoj nejtronno-protonnoj sistiemy / A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2012. – № 1. – S. 30–37.

-
4. Sieryj, A. I. O niekotorykh poliarizacionnykh effiektakh v astrofizichieskoj plazmie / A. I. Sieryj // Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2014. – № 1. – S. 30–43.
 5. Siekierzickij, V. S. O beta-ravnoviesii eliektronno-nuklonnogo vieshchiestva pri nizkikh tiempieraturakh / V. S. Siekierzickij, A. I. Sieryj // Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2021. – № 2. – S. 52–61.
 6. Landau, L. D. Tieorietichieskaja fizika : uchieb. posobije dlia vuzov : v 10 t. / L. D. Landau, Ye. M. Lifshic. – 5-je izd., stier. –M. : FIZMATLIT, 2001. – T. V : Statistichieskaja fizika : v 2 ch. – Ch. I. – 616 s.
 7. Rumer, Yu. B. Tiermodinamika, statistichieskaja fizika i kinetika : uchieb. posobije. / Yu. B. Rumer, M. Sh. Ryvkin. – 2-je izd., ispr. i dop. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 03.01.2022

МАТЭМАТЫКА

УДК 510.522

Александр Евгеньевич Будько

канд. физ.-мат. наук, доц.,

доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Aleksandr Budko

PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor,

Associate Professor of Department of Algebra, Geometry, and Mathematical Modelling
at the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: budzko@brsu.brest.by

О ВРЕМЕНИ ОТЫСКАНИЯ КОМАНД В ПРОГРАММАХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА

Рассматривается одноленточная машина Тьюринга с внешним алфавитом, состоящим из двух символов. Программа машины задается как списком команд, так и ориентированным графом. Определяется, каким образом машина отыскивает очередную команду в своей программе, заданной списком, которую она должна выполнять. Исходя из структуры программы машины, заданной графом, определяются элементарные машины Тьюринга. Для элементарных машин указан порядок следования команд, при котором время их отыскания будет наибольшим, а также определено наибольшее время их отыскания.

Ключевые слова: элементарная машина Тьюринга, команда, программа, порядок следования команд, время отыскания команд.

On the Time of Finding Commands in the Programs of Elementary Turing Machines

A single-tape Turing machine with an external alphabet consisting of two characters is considered. The program of the machine is set both by a list of commands and by an oriented graph. It is determined how the machine finds the next command in its program, specified by the list, which it must execute. Based on the program structure of the machine set by the graph, elementary Turing machines are determined. For elementary machines, the order of following commands is indicated, at which the retrieval time will be the greatest. Also, the longest retrieval time is estimated.

Key words: elementary Turing machine, command, program, order of following commands, command retrieval time.

Введение

Машина Тьюринга является одной из классических моделей алгоритма, позволяющей исследовать свойства самого алгоритма. Самая значительная часть исследований по машинам Тьюринга посвящена рассмотрению сложности тьюринговых вычислений. Обзоры исследований по этому направлению даны в [1–3]. Исследуется также сложность самого алгоритма и, в частности, сложность универсальных машин Тьюринга [4; 5]. Разрабатывается программное обеспечение анимации работы машины [6; 7]. Данная работа посвящена исследованию времени отыскания команд в программах машин Тьюринга и продолжает ранее начатые исследования [8–13].

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и внешним алфавитом из двух символов. Программу машины Тьюринга можно задавать как списком команд, так и ориентированным графом. При задании списком программа определяется перечнем команд вида $q_i a_i \rightarrow a_k Dq_j$, где q_i, q_j – внутренние состояния машины, $a_i, a_k \in \{0,1\}$, $D \in \{L, P, C\}$. Состояние q_0 называется конечным и

команда, в правой части которой записано это состояние, – тоже конечной. В [8] определено, каким образом машина отыскивает в списке команду, которую она должна выполнять в данный момент:

1. Пусть в начальный момент головка обозревает символ a_r . Тогда машина, начиная с первой команды списка, сравнивает $q_1 a_r$ с левыми частями команд до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_1 a_r$, которую она и будет выполнять.

2. Пусть в момент после выполнения команды $q_i a_i \rightarrow a_k Dq_j$ ($q_j \neq q_0$) головка обозревает символ a_c . Тогда, начиная с команды, следующей за выполненной, машина сравнивает $q_j a_c$ с левыми частями команд списка до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_j a_c$, которую она и будет выполнять.

3. Сравнение производится в том порядке, в котором команды следуют в списке. При этом, если после сравнения с левой частью последней команды списка нужная команда не найдена, сравнение продолжается, начиная с первой команды списка.

4. Сравнение любого $q_j a_k$ с левой частью любой команды списка проводится за одинаковое время: за одну единицу времени.

В [8] определяется оптимальный порядок следования команд в программе как порядок, при котором время их отыскания будет наименьшим. Под наименьшим понимается наименьшее среднее время как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций.

В [9] введена классификация L_0, L_1, L_2, \dots машин Тьюринга в зависимости от структуры ориентированного графа, задающего программу машины. Классу L_0 принадлежат машины, программы которых удовлетворяют требованиям:

- 1) граф является связным и не содержит циклов;
- 2) в каждую неконечную вершину, отличную от начальной, входит ровно одна дуга. В начальную вершину не входит ни одна дуга.

Машина Тьюринга класса L_0 с n внутренними состояниями называется элементарной [10], если в ее программе, заданной графом, из каждой вершины i ($1 \leq i \leq n-1$) одна дуга уходит в вершину $i+1$, а другая – в конечную вершину. Из вершины n обе дуги уходят в конечную вершину.

Будем рассматривать только те начальные конфигурации, у которых головка машины за время выполнения программы просматривает все символы начальной конфигурации.

Теорема 1 [10]. Для элементарной машины Тьюринга, имеющей n внутренних состояний, выполняются следующие утверждения:

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n$;

2) оптимальным является тот порядок, при котором вначале следуют команды дуг, исходящих из вершины 1, затем – команды дуг, исходящих из вершины 2, и т. д. При этом в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины i ($1 \leq i \leq n-1$), первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину.

Следствие 1 [10]. Для элементарной машины Тьюринга минимальное среднее время отыскания команд по всем начальным конфигурациям равно

$$\frac{n^2 + 2n}{n+1} = n + \frac{n}{n+1}.$$

В [10–13] рассматривалась задача нахождения такого порядка следования команд в программах машин Тьюринга, при котором время их отыскания было бы наименьшим. Здесь рассматривается задача отыскания такого порядка следования команд, при котором время их отыскания является наибольшим.

Основная часть

Лемма 1 [12]. При наибольшем времени отыскания команд команды любого пути из начальной вершины в конечную следуют в следующем порядке: первой следует последняя команда пути, второй – предпоследняя команда и т. д. Последней следует первая команда пути.

Лемма 2. Пусть дана элементарная машина M с n внутренними состояниями и пусть команды машины в списке команд следуют в следующем порядке:

– вначале следует пара команд дуг, исходящих из вершины n , затем – пара команд дуг, исходящих из вершины $n - 1$, и т. д.;

– в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины i ($1 \leq i \leq n - 1$), первой следует команда дуги, уходящей в вершину $i + 1$.

Тогда время отыскания команд при работе над:

– конфигурацией P_i , которой соответствует путь H_i длины i ($1 \leq i \leq n - 1$) из начальной вершины в конечную, равно $2(ni - i + 1)$;

– конфигурациями P_n и P_{n+1} , которым соответствуют пути H_n и H_{n+1} длины n из начальной вершины в конечную, равно соответственно $2n(n - 1) + 1$ и $2n(n - 1) + 2$.

Доказательство. Пусть условия леммы выполняются. Рассмотрим произвольный путь H_i длины i ($1 \leq i \leq n - 1$) из начальной вершины в конечную. Дуги этого пути в порядке их следования в пути обозначим через $d_1, d_2, d_3, \dots, d_i$. Команды этих дуг при указанном выше порядке их следования находятся на местах $2n - 1, 2n - 3, 2n - 5, \dots, 2n - 2i + 1$ соответственно. Тогда из правила отыскания команд следует, что при работе над конфигурацией P_i ($1 \leq i \leq n - 1$) время отыскания команды дуги:

– d_1 будет равно $2n - 1$ и затем одно сравнение после выполнения команды дуги d_1 , т. е. в сумме $2n$;

– d_2 будет равно $2n - 3$ и затем три сравнения после выполнения команды дуги d_2 , т. е. в сумме $2n$;

– d_3 будет равно $2n - 5$ и затем пять сравнений после выполнения команды дуги d_3 , т. е. в сумме $2n$;

...

– d_{i-1} будет равно $2n - (2i - 1)$ и затем $(2i - 1)$ сравнений после выполнения команды дуги d_{i-1} , т. е. в сумме $2n$;

– d_i будет равно $2n - (2i - 1) + 1 = 2(n - i + 1)$.

Следовательно, время отыскания команд при работе над конфигурацией P_i будет равно $2n(i - 1) + 2(n - i + 1) = 2(ni - i + 1)$.

Аналогично определяется время отыскания команд при работе над конфигурациями P_n и P_{n+1} . Лемма 2 доказана.

Следствие 2. При отыскании команд во время работы над конфигурацией P_i , которой соответствует путь H_i длины i ($i \geq 1$) из начальной вершины в конечную, при порядке их следования, указанном в лемме 2, весь список команд пути полностью просматривается $(i - 1)$ раз и затем просматривается только первая команда списка.

Теорема 2. Для элементарной машины Тьюринга, имеющей n внутренних конечных состояний, выполняются следующие утверждения:

1) наибольшая сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^3 + 2n^2 - n + 1$;

2) наибольшее время отыскания команд достигается при следующем порядке: вначале следует пара команд дуг, исходящих из вершины n , затем – пара команд дуг, исходящих из вершины $n - 1$, и т. д. При этом в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины i ($1 \leq i \leq n - 1$), первой следует команда дуги, уходящей в вершину $i + 1$;

3) других порядков, при которых достигается наибольшее время отыскания команд, кроме указанных в п. 2), нет.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем по принципу математической индукции относительно n .

1. $n = 1$. В этом случае программа машины состоит из двух команд и различных порядков следования этих команд будет два. Различных начальных конфигураций будет тоже две: $q_1 0$ и $q_1 1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для каждого порядка следования команд сумма времени отыскания команд будет равна 3.

2. Пусть для $n = k$ доказываемое утверждение выполняется. Рассмотрим машину M с $n = k + 1$ внутренними состояниями, отличными от состояния q_0 . Этим состояниям соответствуют вершины $1, 2, 3, \dots, k, k + 1$ графа, задающего программу машины M . Машину M можно рассматривать как последовательное соединение двух машин M_1 и M_2 . Машина M_2 состоит из двух команд, которые соответствуют дугам, исходящим из вершины $k + 1$, машина M_1 состоит из оставшихся команд. Другими словами, машина M_1 определяется подграфом с начальной вершиной 1 и имеет k внутренних состояний.

Для машины M различных начальных конфигураций имеется, очевидно, $k + 2$. Эти конфигурации определяются $k + 2$ путями $H_1, H_2, H_3, \dots, H_k, H_{k+1}, H_{k+2}$ из начальной вершины в конечную, длины которых соответственно равны $1, 2, 3, \dots, k, k + 1, k + 1$. Обозначим эти конфигурации соответственно через $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k, P_{k+1}, P_{k+2}$. При этом, конфигурации P_{k+1}, P_{k+2} соответствуют машине M_2 , конфигурации $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ – машине M_1 .

По индуктивному предположению наибольшее время отыскания команд при работе машины M_1 (без учета команд машины M_2) равно $k^3 + 2k^2 - k + 1$. Это значение справедливо для того случая, когда для машины M_1 имеется $k + 1$ начальных конфигураций. Вместе с тем у машины M_1 одна из дуг, выходящих из вершины k , уходит не в конечную вершину, а в вершину $k + 1$. Поэтому для машины M_1 будет не $k + 1$ начальных конфигураций, а k . Соответственно в силу леммы 2 время отыскания команд при работе машины M_1 уменьшится на $(2k(k - 1) + 1)$:

$$k^3 + 2k^2 - k + 1 - (2k(k - 1) + 1) = k^3 + 2k^2 - k + 1 - (2k^2 - 2k + 1) = k^3 + k.$$

При этом по индуктивному предположению наибольшее указанное время отыскания команд $k^3 + k$ будет достигаться только в том случае, если команды машины M_1 (без учета команд машины M_2) будут следовать в порядке, указанном в п. 2) доказываемой теоремы. Поэтому при любом порядке следования команд машины M для достижения наибольшего времени отыскания команд команды машины M_1 должны следовать в порядке, определяемом п. 2) доказываемой теоремы.

Возможны следующие случаи следования команд в программе машины M .

Случай 1. Одна из двух команд машины M_2 в списке команд машины M следует первой. Пусть эта команда соответствует, например, конфигурации P_{k+1} .

Случай 1.1. Вторая команда машины M_2 в списке команд машины M следует второй. Эта команда будет соответствовать конфигурации P_{k+2} .

Определим время отыскания команд машины M_1 с учетом просмотра команд машины M_2 . Машине M_1 соответствует k начальных конфигураций $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$. Эти конфигурации определяются соответственно k путям $H_1, H_2, H_3, \dots, H_k$ из началь-

ной вершины в конечную, длины которых соответственно равны $1, 2, 3, \dots, k$. При работе над каждой из конфигураций $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$ машина M_1 просматривает две команды машины M_2 , находящиеся на первом и втором месте в списке команд машины M . Из следствия 2 следует, что каждая из двух команд машины M_2 при работе над конфигурацией:

- P_1 просматривается по одному разу;
- P_2 просматривается по два раза;
- P_3 просматривается по три раза;
-
- P_k просматривается по k раз.

Поэтому отыскание двух команд машины M_2 дает дополнительно следующее количество сравнений

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot k = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + k) = 2 \frac{1}{2} (k + 1) k = k^2 + k.$$

Тогда время отыскания команд машины M_1 с учетом просмотра команд машины M_2 будет равно $k^3 + k + k^2 + k = k^3 + k^2 + 2k$.

Определим теперь время отыскания команд машины M_2 . Машине M_2 соответствуют две начальные конфигурации P_{k+1}, P_{k+2} . Соответствующие им пути имеют длину $k + 1$. Поэтому в силу леммы 2 время отыскания команд при работе над конфигурациями P_{k+1} и P_{k+2} будет соответственно равно

$$2(k + 1)k + 1 \text{ и } 2(k + 1)k + 2$$

Тогда время отыскания команд машины M_2 будет равно

$$2(k + 1)k + 1 + 2(k + 1)k + 2 = 4k^2 + 4k + 3.$$

Таким образом, время отыскания команд машины M будет равно сумме времени отыскания машин M_1 и M_2 :

$$(k^3 + k^2 + 2k) + (4k^2 + 4k + 3) = k^3 + 5k^2 + 6k + 3.$$

Так как $n = k + 1$, то $k^3 + 5k^2 + 6k + 3 = n^3 + 2n^2 - n + 1$ и порядок следования команд в случае 1.1 соответствует п. 2) доказываемой теоремы.

Случай 1.2. Вторая команда машины M_2 в списке команд машины M находится на j -ом месте ($j \geq 3$).

Определим время отыскания команд машины M_1 с учетом просмотра двух команд машины M_2 . Машине M_1 соответствует k начальных конфигураций $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$. При работе над этими конфигурациями машина M_1 просматривает две команды машины M_2 , находящиеся на первом и j -ом местах ($j \geq 3$) в списке команд машины M . По аналогии со случаем 1.1 можно показать, что отыскание первой команды машины M_2 дает дополнительно следующее количество сравнений: $\frac{1}{2}(k^2 + k)$.

Вместе с тем, в отличие от первой команды машины M_2 , вторая ее команда следует уже не до всех команд машины M_1 . До второй команды машины M_2 следует команд ($j - 2$) машины M_1 , после $-(2k + 2 - j)$ команд. Среди первых ($j - 2$) команд машины M_1 количество конечных команд равно $\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor$, и им соответствуют начальные конфигурации $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor}$. Оставшимся $(2k + 2 - j)$ командам машины M_1 соответствуют начальные конфигурации $P_{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor + 1}, P_{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor + 2}, \dots, P_k$, при работе над которыми количество сравнений со второй командой будет таким же, как и количество сравнений с первой.

При работе над каждой из $\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor$ начальных конфигураций $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor}$ количество сравнений со второй командой машины M_2 будет на единицу меньше, чем количество сравнений с первой командой. Действительно, вторая команда следует после $\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor$ конечных команд, и поэтому в отличие от первой команды машины M_2 вторая перед выполнением конечной команды машины M_1 не просматривается. Поэтому по сравнению с первой командой машины M_2 у второй количество сравнений будет на $\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor$ меньше: $\frac{1}{2}(k^2 + k) - \lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor$.

Таким образом, отыскание двух команд машины M_2 дает дополнительно следующее количество сравнений:

$$\frac{1}{2}(k^2 + k) + \frac{1}{2}(k^2 + k) - \lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor = (k^2 + k) - \lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor.$$

Тогда время отыскания команд машины M_1 с учетом просмотра команд машины M_2 будет равно

$$k^3 + k + k^2 + k - \lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor = k^3 + k^2 + 2k - \lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor,$$

т. е. по сравнению со случаем 1.1 на $\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor$ сравнений меньше.

Определим теперь время отыскания команд машины M_2 . Машине M_2 соответствуют две начальные конфигурации P_{k+1}, P_{k+2} . Соответствующие им пути H_{k+1}, H_{k+2} из начальной вершины в конечную имеют длину $k + 1$. В случае 1.1 время отыскания команд при работе над конфигурациями P_{k+1} и P_{k+2} было соответственно равно

$$2(k + 1)k + 1 \text{ и } 2(k + 1)k + 2.$$

В случае 1.2 время отыскания команд при работе над конфигурацией P_{k+1} будет таким же, как и в случае 1.1, поскольку первая команда в случае 1.2 находится на том же месте, что и в случае 1.1: $2(k + 1)k + 1$.

В случае 1.2 время отыскания команд при работе над конфигурацией P_{k+2} будет на $2(k + 1) + 2 - j = 2k + 4 - j$ меньше, чем в случае 1.1. Действительно, в случае 1.1 вторая команда машины M_2 находилась на втором месте в списке команд, т. е. до всех команд машины M_1 . Поэтому при работе над конфигурацией P_{k+2} время отыскания команд было равно $2(k + 1)k + 2$, т. е. при отыскании каждой из k неконечных команд пути H_{k+2} совершалось $2k$ сравнений и при отыскании конечной команды пути $H_{k+2} - 2$ сравнения. В случае 1.2 вторая команда машины M_2 в списке команд машины M находится на j -ом месте, т. е. после $(j - 2)$ команд машины M_1 . Поэтому в случае 1.2 при работе над конфигурацией P_{k+2} время отыскания команд будет равно $2(k + 1)(k - 1) + j$, т. к. при отыскании каждой из $k - 1$ неконечных команд пути H_{k+1} совершалось $2k$ сравнений, а при отыскании k -ой неконечной и конечной команд пути $H_{k+2} - j$ сравнений. Следовательно, в случае 1.2 время отыскания команд при работе над конфигурацией P_{k+2} будет на

$$(2(k + 1)k + 2) - (2(k + 1)(k - 1) + j) = 2(k + 1) + 2 - j = 2k + 4 - j$$

меньше, чем в случае 1.1.

Таким образом, в случае 1.2 и при работе машины M_1 , и при работе машины M_2 время отыскания команд будет меньше, чем в случае 1.1.

Случай 2. Одна из двух команд машины M_2 в списке команд машины M следует второй. Если вторая команда машины M_2 в списке команд машины M следует первой, то этот случай совпадает со случаем 1.1.

Пусть вторая команда машины M_2 в списке команд машины находится на j -ом месте ($j \geq 3$). Тогда на первом месте будет находиться одна из команд машины M_1 .

Случай 2.1. Команда машины M_1 , находящаяся на первом месте в списке команд машины M , является неконечной. Другими словами, это будет команда дуги, следующей из вершины i ($1 \leq i \leq k$) в вершину $i + 1$. Эта дуга принадлежит пути H_{k+1} из начальной вершины в конечную, где последняя дуга определяет первую команду машины M_2 . В силу леммы 1 при наибольшем времени отыскания первая команда машины M_2 должна находиться до команды дуги, следующей из вершины i ($1 \leq i \leq k$) в вершину $i + 1$. В случае 2.1 это требование не выполняется. Поэтому в случае 2.1 наибольшее время отыскания команд достигаться не будет.

Случай 2.2. Команда машины M_1 , следующая первой в списке команд машины M , является конечной. Другими словами, это будет команда дуги, следующей из вершины i ($1 \leq i \leq k$) в конечную вершину. Обозначим эту дугу через d . По индуктивному предположению при наибольшем времени отыскания команд дугой d должна быть дуга, исходящая из вершины $i = k$.

Дуга d является последней в пути H_k из начальной вершины в конечную. Длина пути H_k равна k , и этот путь соответствует начальной конфигурации P_k .

Сравним время отыскания команд в случаях 1.1 и 2.2. Для этого определим время отыскания команд машины M_1 с учетом просмотра команд машины M_2 . Машине M_1 соответствует k начальных конфигураций $P_1, P_2, P_3, \dots, P_k$. При работе над этими k конфигурациями машина M_1 просматривает две команды машины M_2 , находящиеся на первом и j -ом местах ($j \geq 3$) в списке команд машины M . По аналогии со случаем 1.1 можно показать, что отыскание первой команды машины M_2 дает дополнительно такое же количество сравнений, как и в случае 1.1: $\frac{1}{2}(k^2 + k)$.

В случае 1.1 команда дуги d в списке команд машины M находилась на четвертом месте. Поэтому в случае 1.1 время отыскания команд при работе над конфигурацией P_k было равно $2(k+1)(k-1) + 4$. В случае 2.2 время отыскания команд при работе над конфигурацией P_k будет равно $2(k+1)(k-1) + 1$, поскольку команда дуги d в списке команд находится на первом месте. Таким образом, при работе над конфигурацией P_k время отыскания команд в случае 2.2 уменьшается на 3 единицы по сравнению со случаем 1.1.

При работе над конфигурациями P_1, P_2, \dots, P_{k-1} время отыскания команд в случае 2.2 будет, очевидно, таким же, как и в случае 1.1. Следовательно, в случае 2.2 по сравнению со случаем 1.1 при работе машины M_1 время отыскания команд будет меньше на 3 единицы.

Определим теперь время отыскания команд машины M_2 . Машине M_2 соответствуют две начальные конфигурации P_{k+1}, P_{k+2} . Соответствующие им пути имеют длину $k + 1$. В случае 1.1 время отыскания команд при работе над конфигурациями P_{k+1} и P_{k+2} было соответственно равно

$$2(k+1)k + 1 \text{ и } 2(k+1)k + 2.$$

В случае 2.2 время отыскания команд при работе над конфигурацией P_{k+2} будет таким же, как и в случае 1.1, поскольку первая команда машины M_2 в случае 2.2 находится на том же втором месте, что и в случае 1.1: $2(k+1)k + 2$.

В случае 2.2 время отыскания команд при работе над конфигурацией P_{k+1} будет равно:

а) $2(k+1)k+3$, если $j=3$. Действительно, в отличие от случая 1.1 вторая команда машины M_2 находится не на первом месте, а на третьем. А так как в случае 1.1 время отыскания команд было равно $2(k+1)k+1$, то в случае 2.2 время отыскания при работе машины M_2 будет на 2 единицы больше, чем в случае 1.1.

Итак, в случае 2.2 по сравнению со случаем 1.1 время отыскания команд при работе машины M_1 уменьшилось на 3 единицы, а при работе машины M_2 увеличилось на 2. Разность этих величин равна 1, т. е. общее время работы машины M в случае 2.2 уменьшилось на 1 единицу по сравнению со случаем 1.1.

б) $2(k+1)(k-1)+j$, если $j>3$. Это значит, в случае 2.2 при работе машины M_2 время отыскания команд будет на

$$(2(k+1)k+1) - (2(k+1)(k-1)+j) = 2(k+1) + 1 - j = 2k + 3 - j$$

меньше, чем в случае 1.1.

Итак, в случае 2.2 по сравнению со случаем 1.1 время отыскания команд и при работе машины M_1 , и при работе машины M_2 уменьшилось.

Случай 3. Одна из двух команд машины M_2 в списке команд машины M находится на j -ом месте ($j \geq 3$). Если вторая команда машины M_2 в списке команд машины M следует первой или второй, то этот случай совпадает соответственно со случаем 1.2 и случаем 2.

Пусть вторая команда машины M_2 в списке команд машины M находится на s -ом месте ($s \geq 3$). Пусть для определенности $s > j$. Тогда $s > 3$.

Из условия рассматриваемого случая следует, что в списке команд машины M на первом и втором местах находятся команды машины M_1 . По индуктивному предположению это будут команды дуг, выходящих из вершины k .

Случай 3.1. На первом и втором местах находятся команды дуг, исходящих из вершины k и входящих соответственно в вершину $k+1$ и конечную вершину.

По аналогии со случаем 1.2 можно показать, что в случае 3.1 время отыскания команд при работе:

– машины M_1 будет на $\lfloor \frac{j-2}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-2}{2} \rfloor$ меньше, чем в случае 1.1;

– машины M_2 будет на $(2k+2-j) + (2k+2-s)$ меньше, чем в случае 1.1.

Таким образом, в случае 3.1 и при работе машины M_1 , и при работе машины M_2 время отыскания команд будет меньше, чем в случае 1.1.

Случай 3.2. На первом и втором местах находятся команды дуг, исходящих из вершины k и входящих соответственно в конечную вершину и в вершину $k+1$. Аналогично предыдущему случаю показывается, что в случае 3.2 и при работе машины M_1 , и при работе машины M_2 время отыскания команд будет меньше, чем в случае 1.1.

Теорема 2 доказана.

Следствие 3. Для элементарной машины Тьюринга наибольшее среднее время отыскания команд по всем начальным конфигурациям равно

$$\frac{n^3 + 2n^2 - n + 1}{n+1} = n^2 + n - \frac{2n-1}{n+1}.$$

Следствие 4. Для элементарной машины Тьюринга время отыскания команд по всем начальным конфигурациям T удовлетворяет условию

$$n^2 + 2n \leq T \leq n^3 + 2n^2 - n + 1.$$

Следствие 5. Для элементарной машины Тьюринга среднее время отыскания команд по всем начальным конфигурациям удовлетворяет условию

$$n + \frac{n}{n+1} \leq T_{\text{ср.}} \leq n^2 + n - \frac{2n-1}{n+1}.$$

Заклучение

Таким образом, для элементарных машин Тьюринга определен порядок следования команд, при котором время их отыскания будет наибольшим. Кроме того, для элементарных машин указана наибольшая сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям. С учетом результатов, полученных в [10], указаны верхняя и нижняя границы времени отыскания команд для элементарных машин Тьюринга по всем начальным конфигурациям, а также такие же границы для среднего времени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченков, С. С. Сложность алгоритмов и вычислений / С. С. Марченков, В. Л. Матросов // Итоги науки и техники. Сер.: Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. – 1979. – Т. 16. – С. 103–149.
2. Слисенко, О. А. Сложностные задачи теории вычислений / О. А. Слисенко // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 6 (222). – С. 21–103.
3. Крупский, В. Н. Введение в сложность вычислений / В. Н. Крупский. – М. : Факториал Пресс, 2006. – 217 с.
4. Минский, М. Вычисления и автоматы / М. Минский. – М. : Мир, 1971. – 281 с.
5. Рогожин, Ю. В. Семь универсальных машин Тьюринга / Ю. В. Рогожин // Мат. исслед. – 1982. – № 6. – С. 76–90.
6. Ясюкович, Э. И. Разработка алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга / Э. И. Ясюкович // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 13–22.
7. Мозговой, М. В. Классика программирования: алгоритмы, языки, автоматы, компиляторы. Практический подход / М. В. Мозговой. – СПб. : Наука и техника, 2006. – 320 с.
8. Будько, А. Е. О некоторых свойствах оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Нанопроектирование, технология, компьютерное моделирование (НПТКМ-2019) : материалы 18-го Междунар. симпозиума по новым приложениям высоких технологий, посвящ. памяти В. А. Пальмова, Брест, 24–27 сент. 2019 г. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 19–20.
9. Будько, А. Е. О двух классах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Докл. АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792–793.
10. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах элементарных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Вучон. зап. Брєсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна. – 2020. – Вып. 16, ч. 2. – С. 7–12.
11. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах полных древо-видных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. – 2021. – № 1. – С. 19–26.
12. Будько, А. Е. Об одном свойстве следования команд в программах машин Тьюринга / А. Е. Будько, А. В. Богдан // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов Респ. науч.-практ. конф., Брест, 22 окт. 2021 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. Д. В. Грицука. – Брест : БрГУ, 2021. – С. 81–82.
13. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах одноцикловых машин Тьюринга / А. Е. Будько // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. Сер. В. – 2022. – № 1. – С. 14–22.

REFERENCES

1. Marchienkov, S. S. Slozhnost' algoritmov i vychislenij / S. S. Marchenkov, V. L. Matrosov // Itogi nauki i tiekhniki. Sier.: Tieorija vierojatnostiej. Mat. stat. Tieoriet. kibernetika. – 1979. – T. 16. – S. 103–149.
2. Slisienko, O. A. Slozhnostnyje zadachi tieorii vychislenij / O. A. Slisenko // Uspekhi mat. nauk. – 1981. – T. 36, vyp. 6 (222). – S. 21–103.
3. Krupskij, V. N. Vviedeniye v slozhnost' vychislenij / V. N. Krupskij. – M. : Factorial Press, 2006. – 217 s.
4. Minskij, M. Vychisleniya i avtomaty / M. Minskij. – M. : Mir, 1971. – 281 s.
5. Rogozhin, Yu. V. Siem' univiersal'nykh mashin T'juringa / Yu. V. Rogozhin // Mat. isslied. – 1982. – № 6. – S. 76–90.
6. Yasiukovich, E. I. Razrabotka algoritma i programmnoho obiespiecheniya determinirovannoj mashiny T'juringa / E. I. Yasiukovich // Viesn. MDU imia A. A. Kuliashova. – 2017. – № 2. – S. 13–22.
7. Mozgovoj, M. V. Klassika programmirovaniya: algoritmy, jazyki, avtomaty, kompilyatory. Prakticheskij podhod / M. V. Mozgovoj. – SPb. : Nauka i Tekhnika, 2006. – 320 s.
8. Bud'ko, A. Ye. O niekotorykh svojstvakh optimal'nogo poriadka sledovaniya komand v programmakh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Nanoprojektirovaniye, tiekhnologiya, komp'juternoje modelirovaniye (NPTKM – 2019) : materialy 18-go miezhdunar. simpoziuma po novym prilozhenijam vysokikh tiekhnologij, posviashch. pamiaty V. A. Pal'mova, Briest, sientiabr' 2019. – Briest : BrGU, 2019. – S. 16–18.
9. Bud'ko, A. Ye. O dvukh klassakh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Dokl. AN BSSR. – 1985. – № 9. – S. 792–793.
10. Bud'ko, A. Ye. O poriadkie sledovaniya komand v programmakh eliemientarnykh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Vuchon. zap. Bresc. dziarzh. un-ta imia A. S. Pushkina. – 2020. – Vyp. 16, ch. 2. – S. 7–12.
11. Bud'ko, A. Ye. O poriadkie sledovaniya komand v programmakh polnykh drievo-vidnykh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Viesn. MDU imia A. A. Kuliashova. Sier. B. – 2021. – № 1. – S. 19–26.
12. Bud'ko, A. Ye. Ob odnom svojstvye sledovaniya komand v programmakh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko, A. V. Bogdan // Vychislitel'nyje mietody, modeli i obrazovatel'nyje tiekhnologii : sb. materialov Riesp. nauch.-pract. konf., Briest, 22 okt. 2021 g. / Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. D. V. Gricuka. – Briest: BrGU, 2021. – S. 80–81.
13. Bud'ko, A. Ye. O poriadkie sledovaniya komand v programmakh odnociklovykh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Viesn. MDU imia A. A. Kuliashova. Sier. B. – 2022. – № 1. – S. 14–22.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 20.04.2022

УДК 512.542

Дмитрий Владимирович Грицук*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Dmitry Gritsuk***PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A.S. Pushkin University**e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com***ПРОИЗВОДНАЯ π -ДЛИНА π -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ**

Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$, факторы G_{i+1}/G_i которого являются либо π' -группами, либо абелевыми π -группами. Наименьшее число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов π -разрешимой группы G называется производной π -длиной π -разрешимой группы. В статье приводится обзор основных результатов, связанных с оценками производной π -длины π -разрешимой группы.

Ключевые слова: π -разрешимая группа, силовская p -подгруппа, π -холлова подгруппа, производная π -длина.

The Derived π -Length Of The π -Solvable Group

Let G is a π -solvable group. Then it has a subnormal series $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$ whose factors G_{i+1}/G_i are either π' -groups or abelian π -groups. The smallest number of Abelian π -factors among all such subnormal series of a π -solvable group G is called the derived π -length of the π -solvable group. This paper reviews the main results related to bounds for the derivative π -length of a π -solvable group.

Key words: π -solvable group, Sylow p -subgroup, π -Hall subgroup, derived π -length.

Введение

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используются обозначения, принятые в книгах [1; 2].

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π' . Группа называется π -группой, если все простые делители порядка группы принадлежат множеству π , и π' -группой – в противном случае.

Ряд подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

называется субнормальным, если для любого i подгруппа G_i нормальна в G_{i+1} . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами этого ряда. Если в (1) нет совпадающих подгрупп, то число n называется длиной ряда.

Производная длина группы G определяется как длина самого короткого нормального ряда (1) с абелевыми факторами. Эта длина обозначается через $d(G)$.

В 2006 г. В. С. Монахов [3] предложил аналог производной длины для π -разрешимой группы – понятие производной π -длины π -разрешимой группы. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), каждый фактор которого является либо абелевым π -фактором, либо π' -фактором. Наименьшее число абелевых π -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется абелевой π -длиной π -разрешимой группы G и обозначается через $l_\pi^a(G)$. Ясно, что в случае, когда $\pi = \pi(G)$, значение $l_\pi^a(G)$ совпадает со значением нильпотентной длины группы G . Оценкам производной π -длины π -разрешимой группы посвящены работы [4–9].

В данной работе приводится обзор основных результатов, связанных с производной π -длиной π -разрешимой группы.

1. Начальные свойства производной π -длины π -разрешимой группы

Начальные свойства производной π -длины π -разрешимой группы получены В. С. Монаховым, Д. В. Грицуком и О. А. Шпырко в работах [4–8].

Теорема 1 [4]. Если G – π -разрешимая группа, то $l_\pi(G) \leq l_\pi^n(G) \leq l_\pi^a(G)$.

Теорема 2 [4]. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда:

- 1) если H – подгруппа группы G , то $l_\pi^a(H) \leq l_\pi^a(G)$;
- 2) если N – нормальная подгруппа группы G , то $l_\pi^a(G/N) \leq l_\pi^a(G)$ и $l_\pi^a(G) \leq l_\pi^a(G/N) + l_\pi^a(N)$;
- 3) если N – нормальная π' -подгруппа группы G , то $l_\pi^a(G/N) = l_\pi^a(G)$;
- 4) если G и V – π -разрешимые группы, то $l_\pi^a(G \times V) = \max\{l_\pi^a(G), l_\pi^a(V)\}$;
- 5) если N_1 и N_2 – нормальные подгруппы в G , то $l_\pi^a(G/(N_1 \cap N_2)) \leq \max\{l_\pi^a(G/N_1), l_\pi^a(G/N_2)\}$.

Теорема 3 [8]. Если G – π -разрешимая группа и $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$, то $l_\pi^a(G) \leq l_{\pi_1}^a(G) + l_{\pi_2}^a(G)$.

2. Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, связанные со строением π -холловой подгруппы

Первые исследования производной π -длины в зависимости от строения π -холловой подгруппы проведены в работе [4]. Как обычно, X' и $Z(X)$ – коммутант и центр группы X соответственно.

Теорема 4 [4]. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – ее π -холлова подгруппа.

1. Если G_π абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 1$.
2. Если $(G_\pi)' \subseteq Z(G_\pi)$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта перечислены, например, в [2, III.5]. Группа называется дедекиндовой, если все ее подгруппы нормальны.

Следствие 1.1. Если в π -разрешимой группе G_π -холлова подгруппа дедекиндова, то $l_\pi(G) \leq 1$ и $l_\pi^a(G) \leq 2$.

Следствие 1.2. Если в π -разрешимой группе G π -холлова подгруппа является группой Шмидта, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Напомним, что метабелевой называют группу, у которой коммутант абелев.

Теорема 5 [4]. Пусть G – π -разрешимая группа с метабелевой π -холловой подгруппой. Если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

В работе [6] исследована производная π -длина конечной π -разрешимой группы со сверхразрешимой π -холловой подгруппой.

Теорема 6 [6]. Если G – π -разрешимая группа, у которой коммутант π -холловой подгруппы нильпотентен, то $l_\pi^a(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r^a(G)$.

Дополнением к подгруппе H в группе G называется такая подгруппа K , что $G = HK$ и $H \cap K = 1$. Ю. М. Горчаков [10] показал, что дополняемость всех подгрупп равносильна дополняемости подгрупп простых порядков.

Группа, у которой все подгруппы дополняемы, называется вполне факторизуемой. В 1937 г. Ф. Холл [11] установил, что конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, исчерпываются сверхразрешимыми группами с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.

Следствие 6.1. Если G – π -разрешимая группа, π -холлова подгруппа которой вполне факторизуема, то $l_\pi^a(G) \leq 2$.

Следствие 6.2. Если G – π -разрешимая группа со сверхразрешимой π -холловой подгруппой, то $l_\pi^a(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r^a(G)$.

Следствие 6.3. Если G – π -разрешимая группа, у которой π -холлова подгруппа является группой Миллера-Морена, то $l_\pi^a(G) \leq 2$.

В 2014 г. получены оценки производной π -длины группы G в зависимости от строения подгруппы G_π или M , где M – максимальная подгруппа из G_π [7].

Теорема 7 [7]. Пусть G – π -разрешимая группа и G_π – π -холлова подгруппа в G . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если G_π является группой Миллера – Морено, то $l_\pi^a(G) \leq 2$;

2) если G_π является группой Шмидта, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

Теорема 8 [7]. Пусть G – π -разрешимая группа в G , G_π – π -холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа в G_π . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если подгруппа M абелева, то $l_\pi^a(G) \leq 3$;

2) если подгруппа M абелева и холлова, то $l_\pi^a(G) \leq 2$;

3) если подгруппа M нильпотентна, то

$$l_\pi^a(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r \in \pi} l_r(G));$$

4) если подгруппа M нильпотентна и холлова, то

$$l_\pi^a(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi(M)} l_r(G) \cdot \max_{r \in \pi} d(G_r).$$

Теорема 9 [7]. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – π -холлова подгруппа и M – максимальная подгруппа из G_π . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если M – группа Миллера – Морено, то $l_\pi^a(G) \leq 4$; в частности, если M холлова, то $l_\pi^a(G) \leq 3$;

2) если M – группа Шмидта, то $l_\pi^a(G) \leq 5$; в частности, если M холлова, то $l_\pi^a(G) \leq 4$.

В работе [12] исследовано влияние 2-максимальной подгруппы π -холловой подгруппы π -разрешимой группы на оценки производной π -длины.

Теорема 10 [12]. Пусть G – π -разрешимая группа, G_π – π -холлова подгруппа и M – 2-максимальная подгруппа в G_π . Справедливы следующие утверждения:

1) если подгруппа M абелева, то

$$l_\pi^m(G) \leq 3 \text{ и } l_\pi^a(G) \leq 4;$$

2) если подгруппа M нильпотентна, то

$$l_\pi^m(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r) (1 + \max_{r \in \pi} l_r(G)).$$

Число n свободно от m -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов. В работе [9] исследовались оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой порядок π -холловой подгруппы свободен от n -ых степеней.

Теорема 11 [9]. Пусть G – π -разрешимая группа.

1) Если порядок π -холловой подгруппы свободен от кубов, то справедливы следующие утверждения:

a) если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 2$;

b) если $2 \in \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.

2) Если порядок π -холловой подгруппы свободен от квадратов, то G разрешима и $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$.

t -группой называют группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Строение разрешимых t -групп описал В. Гашюц [13]. В частности, разрешимая t -группа сверхразрешима. \mathfrak{N} – класс всех нильпотентных групп, $G^{\mathfrak{N}}$ – \mathfrak{N} -корадикал группы G , т. е. пересечение всех нормальных подгрупп группы G , факторгруппы по которым принадлежат \mathfrak{N} . Известно, что если G является t -группой, то $G^{\mathfrak{N}}$ – абелева холлова подгруппа нечетного порядка, все подгруппы из $G^{\mathfrak{N}}$ – нормальны в G , $G^{\mathfrak{N}}$ – дедекиндова. Справедлива следующая теорема.

Теорема 12. Если π -холлова подгруппа π -разрешимой группы является t -группой, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 3$.

Обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G , такая, что G/N является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Очевидно, что обобщенный коммутант совпадает с \mathfrak{A} -корадикалом группы G , где \mathfrak{A} – класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами. Справедлива следующая теорема

Теорема 13. Пусть G – π -разрешимая группа, у которой обобщенный коммутант π -холловой подгруппы нильпотентен. Тогда

$$l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq |\pi(G_{\pi})| - 1 + \max_{p \in \pi} l_p^{\alpha}(G).$$

4. Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, связанные со строением силовских p -подгрупп

Теорема 14. Если в π -разрешимой группе G силовские p -подгруппы циклические для всех $p \in \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$.

2. Если в π -разрешимой группе G силовские p -подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) = d(G_p) \leq |\pi(G_{\pi})|$.

Следствие. Если в π -разрешимой группе G π -холлова подгруппа сверхразрешима и силовские p -подгруппы абелевы для всех $p \in \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$.

Теорема 15. Пусть G – π -разрешимая группа, у которой для каждого $r \in \pi$ силовская r -подгруппа абелева или экстраспециальна. Тогда $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2 \cdot |\pi(G_{\pi})|$.

Теорема 16. Пусть G – π -разрешимая группа, силовские p -подгруппы которой либо циклические, либо имеют порядок p^2 для всех $p \in \pi$. Тогда $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 3$. В частности, если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 2$.

Теорема 17. Пусть G – π -разрешимая группа с бициклическими силовскими p -подгруппами для всех $p \in \pi$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 3$;

2) если $2 \in \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 6$.

Теорема 18 [5]. Пусть G – π -разрешимая группа, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 для всех $p \in \pi$. Тогда:

1) если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 4$.

2) если $2 \in \pi$, то $l_{\pi}^{\alpha}(G) \leq 7$.

Напомним, что число n свободно от n -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов. В случае, если порядок π -холловой подгруппы свободен от кубов, то все силовские p -подгруппы, $p \in \pi$, являются абелевыми. В работе [5, теорема 1] показано, что производная π -длина таких π -разрешимых групп не превышает $|\pi(G_{\pi})|$, где G_{π} – π -холлова подгруппа.

Теорема 19 [9]. Пусть G – π -разрешимая группа.

1) Если порядок π -холловой подгруппы свободен от кубов, то справедливы следующие утверждения:

- a) если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 2$;
- b) если $2 \in \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 3$.

2) Если порядок π -холловой подгруппы свободен от квадратов, то $l_{\pi}^a(G) \leq 2$.

Теорема 20 [9]. Пусть G – π -разрешимая группа. Если небициклические силовские p -подгруппы π -холловой подгруппы группы G , $p \in \pi$ имеют порядки $2^3, 3^3, 2^4, 2^5$, то справедливы следующие утверждения:

- 1) если $2 \notin \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 3$;
- 2) если $2 \in \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq 6$.

Теорема 21 [9]. Пусть G – π -разрешимая группа, такая, что порядок любой силовской p -подгруппы P , $p \in \pi$ свободен от n -ых степеней. Тогда:

- 1) если $\{2,3\} \notin \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq |\pi(G_{\pi})|^{\frac{n+1}{2}}$;
- 2) если $\{2,3\} \in \pi$, то $l_{\pi}^a(G) \leq |\pi(G_{\pi})|^{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$.

5 Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой силовские подгруппы из факторов имеют заданные ограничения

Нахождение инвариантов разрешимых групп с заданными свойствами силовских подгрупп нашло развитие в исследовании строения групп по свойствам силовских подгрупп в факторах их нормальных рядов. Если у группы G имеется нормальный ряд с циклическими силовскими подгруппами в факторах, то несложно проверить, что G сверхразрешима. Поэтому группа G дисперсивна по Оре, ее коммутант нильпотентен, и нильпотентная длина группы G не выше 2. Поскольку любая p -группа имеет нормальный ряд с факторами простых порядков, то производную длину таких групп ограничить сверху нельзя. Однако, производная длина фактор-группы $G/\Phi(G)$ будет не выше 2.

Исследование разрешимых групп, обладающих нормальным рядом, факторы которого имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в 2009 г. в работе [16]. В частности, получены оценки производной длины таких разрешимых групп. В 2013 г. получено развитие теоремы Бэра о сверхразрешимости группы, у которой на участке нормального ряда разрешимой группы между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга факторы имеют простые порядки [17]. В частности, получены оценки производной длины разрешимой группы, у которой на участке нормального ряда между подгруппой Фраттини и подгруппой Фиттинга силовские подгруппы факторов являются бициклическими.

Теорема 22. Пусть G – π -разрешимая группа. Если группа G обладает нормальным рядом, силовские подгруппы π -факторов которого являются:

- 1) циклическими, то $l_{\pi}^a(G) \leq 2$;
- 2) метациклическими, то $l_{\pi}^a(G) \leq 10$, если $2 \in \pi$;
- 3) бициклическими, то $l_{\pi}^a(G) \leq 10$, если $2 \in \pi$;
- 4) либо бициклическими, либо свободными от четвертых степеней, то $l_{\pi}^a(G) \leq 18$, если $2 \in \pi$.

Хорошо известно, что свойство нормальности подгруппы в группе не является транзитивным. В 1957 г. Гашюц [18] установил строение разрешимых групп, у которых нормальность обладает транзитивным свойством (t -группы). Такие группы можно представить в виде полупрямого произведения нормальной абелевой холловой подгруппы нечетного порядка и дедекиндовой подгруппы. Группы, близкие к t -группам,

можно определять при помощи дефекта субнормальной подгруппы H , т. е. длины наименьшего субнормального ряда от подгруппы H до группы G . Очевидно, что каждая собственная нормальная подгруппа имеет дефект 1, поэтому в t -группах все субнормальные подгруппы имеют дефект 1. Группы с субнормальными подгруппами дефекта 2 исследовались в [19].

В теории групп всякую подгруппу H группы G можно окружить двумя нормальными в G подгруппами – нормальным замыканием H^G и ядром H_G , где H^G является наименьшей нормальной в G подгруппой, содержащей H , а H_G – наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H . Понятно, что в t -группах $|H^G:H| = |H:H_G| = 1$ для каждой субнормальной подгруппы H . Если G не является t -группой, то $|H^G:H| > 1$, $|H:H_G| > 1$ для каждой субнормальной ненормальной подгруппы H .

Теорема 23. Пусть G – π -разрешимая группа. Тогда $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 2$, если $2 \notin \pi$, и $l_\pi^a(G/\Phi(G)) \leq 4$, если $2 \in \pi$ в каждом из следующих случаев:

1) порядок кофактора H/H_G свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G ;

2) индекс $|H^G:H|$ свободен от квадратов, где H – произвольная субнормальная подгруппа G .

Заключение

Получение новых оценок производной π -длины конечной π -разрешимой группы имеет важное значение не только для теории конечных групп и их классов, а и в современной криптографии. В частности, полученные оценки будут полезны при получении новых шифров и новых криптосистем с высокой эффективностью и криптостойкостью. Оценки производной π -длины конечной π -разрешимой группы могут стать основой для создания новых методов современной теории защиты информации и теории кодирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 312 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.
3. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов. // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
4. Грицук, Д. В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
5. Грицук, Д. В. Производная π -длина π -разрешимой группы, силовские p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
6. Monakhov, V. S. On derived π -length of a finite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
7. Монахов, В. С. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы с заданной π -холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.
8. Грицук, Д. В. Конечные π -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.

9. Грицук, Д. В. Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой π -холловы подгруппы свободны от n -х степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артющеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
10. Горчаков, Ю. М. Примитивно факторизуемые группы / Ю. М. Горчаков // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – № 17. – С. 15–31.
11. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall / J. London Math. Soc. – 1937. – V. 12. – P. 201–204.
12. Грицук, Д. В. Конечные π -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.
13. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
14. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
15. Грицук, Д. В. О конечных π -разрешимых группах с бициклическими силовскими подгруппами / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (15). – С. 61–66.
16. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, nr 9. – P. 3178–3186.
17. Трофимук, А. А. Конечные группы с бициклическими силовскими подгруппами в фиттинговых факторах / А. А. Трофимук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 3. – С. 304–307.
18. Gaschutz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
19. McCaughan, D. J. Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two / D. J. McCaughan, S. E. Stonehewer // Arth. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 56–60.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedienije v teoriju koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vyssh. shk., 2006. – 312 s.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York, 1967. – 792 s.
3. Monakhov, V. S. Koniechnyje grouppy s polunormal'noj khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov // Mat. zamietki. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
4. Gricuk, D. V. O proizvodnoj π -dlinie π -razrieshimoj grouppy / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Viesn. BGU. Sier. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
5. Gricuk, D. V. Proizvodnaja π -dlina π -razrieshimoj grouppy, silovskije p -podgrouppy kotoroj libo biciklichieskije, libo imiejut poriadok p^3 / D. V. Gricuk // Problemy fiziki, matematiki i tiehniky. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
6. Monakhov, V. S. On derived π -length of a finite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
7. Monakhov, V. S. O proizvodnoj π -dlinie koniechnoj π -razrieshimoj grouppy s zadannoj π -khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov, D. V. Gricuk // Tr. In-ta matematiki i miekhaniki UrO RAN. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.

8. Gricuk, D. V. Koniechnyje π -razrieshimyje grupy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh π -podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Brest. gos. tiekhn. un-ta. Fizika, matematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.
9. Gricuk, D. V. Ocenki proizvodnoj π -dliny π -razrieshimoy grupy, u kotoroj π -kholovy podgruppy svobodny ot n -ykh stepeniej / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. A. Artiushenia // Viestn. Vitieb. gos. un-ta im. P. M. Masherova. – 2018. – № 1 (98). – S.11–15.
10. Gorchakov, Yu. M. Primitivno faktorizujemyje grupy / Yu. M. Gorchakov // Uchion. zap. Pierm. un-ta. – 1960. – № 17. – S. 15–31.
11. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall / J. London Math. Soc. – 1937. – V. 12. – P. 201–204.
12. Gricuk, D. V. Koniechnyje π -razrieshimyje grupy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh π -podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Brest. gos. tiekhn. un-ta. Fizika, matematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.
13. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
14. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 1123–1137.
15. Gricuk, D. V. O koniechnykh π -razrieshimykh gruppakh s biciklichieskimi silovskimi podgruppami / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Problemy fiziki, matematiki i tiekhniki. – 2013. – № 1 (15). – S. 61–66.
16. Monakhov, V. S. On a Finite Group Having a Normal Series Whose Factors Have Bicyclic Sylow Subgroups / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Communications in Algebra. – 2011. – Vol. 39, nr 9. – P. 3178–3186.
17. Trofimuk A. A. Koniechnyje grupy s biciklichieskimi silovskimi podgruppami v fittingovykh faktorakh / A. A. Trofimuk // Tr. In-ta matematiki i mekhaniki UrO RAN. – 2013. – T. 19, nr 3. – S. 304–307.
18. Gaschutz, W. Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.
19. McCaughan, D. J. Finite soluble groups whose subnormal subgroups have defect at most two / D. J. McCaughan, S. E. Stonehewer // Arth. Math. – 1980. – Vol. 35. – P. 56–60.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 19.04.2022

УДК 519.6 + 517.983.54

Олег Викторович Матысик*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Oleg Matysik***PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: matysikoleg@mail.ru***СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ
НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ
НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ
ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

Доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства в случае самосопряженного оператора, в предположении, что погрешности имеются в правой части уравнения. Получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении линейных операторных уравнений, а также при решении прикладных некорректных задач.

Ключевые слова: некорректная задача, неявный итерационный метод, гильбертово пространство, самосопряженный оператор, правило останова по невязке.

***The Convergence in the Hilbert Space of an Implicit Iteration Procedure
for Solving Ill-posed Equations with Aposteriori Choice
of Regularization Parameter***

We prove the convergence of the method with aposteriori choice of the number of iterations in the original norm of the Hilbert space in the case of a self-adjoint operator, under the assumption that the errors are in the right-hand side of the equation. Obtained error estimate and the estimate for the aposteriori moment stop. The results obtained can be used in theoretical studies of the solution of linear operator equations, and solving ill-posed problems applied.

Key words: ill-posed problem, implicit iteration method, Hilbert space, self-adjoint operator, residual stop rule.

Введение

В статье предлагается итерационный метод неявного типа решения некорректно поставленных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода в гильбертовом пространстве.

Сравнение предлагаемого неявного метода с хорошо известным явным методом итераций $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ [1–8] показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод из [1–8] предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным достоинством. В явном методе из [1–8] на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходи-

мости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на итерационный параметр $b > 0$ нет, в связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

1. Постановка задачи

В работе решается уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с действующим в гильбертовом пространстве H неограниченным линейным самосопряженным оператором A , в предположении, что нуль принадлежит спектру этого оператора, однако, вообще говоря, не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания предлагается новый неявный итерационный метод

$$(A^4 + B)x_{n+1} = Bx_n + A^3y, x_0 = 0, \tag{2}$$

где E – единичный оператор, а B – ограниченный вспомогательный самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве B возьмем оператор $B = bE, b > 0$. Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью δ , т. е. известен y_δ , для которого $\|y - y_\delta\| \leq \delta$. Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближение

$$(A^4 + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^3y_\delta, x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколько угодно близко подходят к точному решению операторного уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточных малых δ . Иными словами, метод итераций (3) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$.

Для метода (3) при условии $b > 0$ доказана сходимость при точной и приближенной правой части уравнения (1), и в предположении, что точное решение уравнения истокообразно представимо, т. е. что $x = A^{2s}z, s > 0$, получена априорная оценка погрешности $\|x - x_{n,\delta}\| \leq \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \leq \left(\frac{bs}{4n}\right)^{\frac{s}{2}} \|z\| + 4\left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{4}} \delta, n \geq 1$ [9]. Полученная априорная оценка погрешности была оптимизирована:

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \leq (1 + 2s) \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{-3s}{2(1+2s)}} 2^{-\frac{s}{2(2s+1)}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} \delta^{\frac{2s}{2s+1}} \text{ и найден априорный мо-}$$

мент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{2(s+2)}{2s+1}} b \|z\|^{\frac{4}{2s+1}} \delta^{-\frac{4}{2s+1}}$. Очевидно, что оптимальная

оценка не зависит от итерационного параметра b , но от b зависит $n_{\text{опт}}$. Поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать b , удовлетворяющим условию $b > 0$, и так, чтобы $n_{\text{опт}} = 1$. Для этого достаточно выбрать

$$b_{\text{опт}} = 2^{\frac{2s}{2s+1}} \left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{2(s+2)}{2s+1}} \|z\|^{\frac{4}{2s+1}} \delta^{\frac{4}{2s+1}}.$$

В статье [10] доказано, что при условии $b > 0$ итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$, если число итераций n выбирать из условия $\sqrt[8]{n} \delta \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$. В энергетической норме без знания истокообразной представимости точного решения найден априорный момент останова $n_{\text{опт}} = 2^{-6} b \|x\|_A^4 \delta^{-4}$ и получены условия, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства H . Также в [10] в случае неединственного решения уравнения (1) доказано, что процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

2. Правило останова по малости невязки

В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, метод итераций (3) становится неэффективным, т. к. тогда невозможно получить оценку погрешности и найти априорный момент останова в исходной норме гильбертова пространства. Тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по малости невязки [3–4; 12–15]. Здесь и ниже будем считать, что A – ограниченный линейный самосопряженный оператор.

Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = b_1 \delta$, $b_1 > 1$ и момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, а именно больше уровня останова, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Ниже метод (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0$. Покажем возможность применения правила (4) к методу (3). Рассмотрим семейство функций

$$g_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left[1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right] \geq 0. \text{ Используя результаты [9], нетрудно показать, что при } b > 0$$

для $g_n(\lambda)$ выполняются следующие условия:

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq 4 \left(\frac{n}{b} \right)^{1/(4)}, \quad n > 0, \quad (5)$$

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq 1, \quad n > 0, \quad (6)$$

$$1 - \lambda g_n(\lambda) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall \lambda \in [-M, M], \quad (7)$$

$$\sup_{-M \leq \lambda \leq M} \left| \lambda^{2s} (1 - \lambda g_n(\lambda)) \right| \leq \left(\frac{bs}{4n} \right)^{s/2}, \quad 2n > s, \quad 0 \leq s < \infty. \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$. Тогда для любого $\omega \in H$ $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Используя интегральное представление самосопряженного оператора $A = \int_{-M}^M \lambda dE_\lambda$, где $M = \|A\|$ и E_λ – спектральная функция оператора A , получим

$$(E - Ag_n(A))\omega = \int_{-M}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{-M}^0 (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega = I_1 + I_2.$$

Первый из полученных интегралов разобьем на два интеграла

$$I_1 = \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega + \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega.$$

Так как $1 - \lambda g_n(\lambda) = \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \leq q^n(\varepsilon_0) < 1$ для всех $\lambda \in [\varepsilon_0, M]$, то получим

$$\left\| \int_{\varepsilon_0}^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^M dE_\lambda \omega \right\| \leq q^n(\varepsilon_0) \|\omega\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \text{ Из условия (6) имеем}$$

$$\left\| \int_0^{\varepsilon_0} (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_\lambda \omega \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda \omega \right\| = \|E_{\varepsilon_0} \omega\| \rightarrow 0, \varepsilon_0 \rightarrow 0 \text{ в силу свойств спектральной функ-$$

ции [11]. Аналогично, $I_2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Следовательно, $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$. Тогда для любого $\vartheta \in \overline{R(A)}$ имеет место соотношение $n^{s/2} \|A^{2s} (E - Ag_n(A)) \vartheta\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$.

Доказательство. Так как верно (8), то

$$n^{s/2} \|A^{2s} (E - Ag_n(A))\| \leq n^{s/2} \sup_{-M \leq \lambda \leq M} |\lambda^{2s} (1 - \lambda g_n(\lambda))| \leq n^{s/2} \gamma_s n^{-s/2} = \gamma_s,$$

где $\gamma_s = \left(\frac{bs}{4}\right)^{s/2}$. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [11, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $u \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда эта сходимость имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|, n = 1, 2, \dots$, ограничены не зависящей от n постоянной.

Возьмем в качестве плотного в $\overline{R(A)} = H$ множество $R(A)$. Положим $s_1 = s + \frac{1}{2}$. Тогда для каждого $\vartheta = A\omega \in R(A)$ имеем

$$\begin{aligned} n^{s/2} \|A^{2s} (E - Ag_n(A)) \vartheta\| &= n^{s/2} \|A^{2s+1} (E - Ag_n(A)) \omega\| = \\ &= n^{s/2} \|A^{2s_1} (E - Ag_n(A)) \omega\| \leq \gamma_{s_1} n^{\frac{-(s_1-s)}{2}} \|\omega\| = \gamma_{s_1} \|\omega\| n^{-1/4} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т. к. $s_1 < \infty$. Лемма 2 доказана.

Справедлива

Лемма 3. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $\vartheta_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))\vartheta_0 \rightarrow 0$, то $\vartheta_p = (E - Ag_{n_p}(A))\vartheta_0 \rightarrow 0$.

Доказательство. В силу (6) последовательность ϑ_p ограничена $\|\vartheta_p\| \leq 1$, $p \in N$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $\vartheta_{p'} \rightarrow \vartheta$, ($p' \in N' \subseteq N$), тогда $A\vartheta_{p'} \rightarrow A\vartheta$, ($p' \in N'$).

Но по условию $\omega_p = A\vartheta_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, следовательно, $A\vartheta = 0$. Поскольку нуль не является собственным значением оператора A , то $\vartheta = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\vartheta_p\|^2 &= (\vartheta_p, (E - Ag_{n_p}(A))\vartheta_0) = (\vartheta_p, \vartheta_0) - (\vartheta_p, Ag_{n_p}(A)\vartheta_0) = \\ &= (\vartheta_p, \vartheta_0) - (A\vartheta_p, g_{n_p}(A)\vartheta_0) = (\vartheta_p, \vartheta_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A)\vartheta_0) \rightarrow (\vartheta, \vartheta_0) = 0, \quad (p \in N'), \end{aligned}$$

т. к. $\vartheta = 0$, $\omega_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$ и по условию (5) $\|g_{n_p}(A)\| \leq 4\left(\frac{n_p}{b}\right)^{1/4} \leq 4\left(\frac{\bar{n}}{b}\right)^{1/4}$. Итак, всякая слабо сходящаяся подпоследовательность указанной выше ограниченной последовательности ϑ_p стремится к нулю по норме. Следовательно, и вся последовательность $\vartheta_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$. Лемма 3 доказана.

Если A – ограниченный несамосопряженный оператор, то справедлива аналогичная лемма 3

Лемма 4. Пусть A – ограниченный несамосопряженный оператор. Если для некоторой последовательности $n_p < \bar{n} = \text{const}$ и $\vartheta_0 \in \overline{R(A)}$ при $p \rightarrow \infty$ имеем $\omega_p = A^*A(E - A^*Ag_{n_p}(A^*A))\vartheta_0 \rightarrow 0$, то $\vartheta_p = (E - A^*Ag_{n_p}(A^*A))\vartheta_0 \rightarrow 0$.

Для доказательства леммы 4 следует перейти к оператору $A = A^*A$ и использовать лемму 3.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть A – ограниченный оператор, $A = A^*$ и пусть момент останова $m = m(\delta)$ в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда $x_{m(\delta), \delta} \rightarrow x$ при $\delta \rightarrow 0$.

Доказательство. В [9] показано, что $x_{n, \delta} = A^{-1}[E - (CB)^n]y_\delta$, где $C = (A^4 + B)^{-1}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} x_{n, \delta} - x &= A^{-1}[E - (CB)^n]y_\delta - x = A^{-1}[E - (CB)^n](y_\delta - y) + A^{-1}[E - (CB)^n]y - A^{-1}y = \\ &= A^{-1}[E - (CB)^n](y_\delta - y) - (CB)^n x = g_n(A)(y_\delta - y) - (E - Ag_n(A))x, \quad (9) \end{aligned}$$

следовательно, $Ax_{n, \delta} - y = Ax_{n, \delta} - Ax = -A(E - Ag_n(A))x + Ag_n(A)(y_\delta - y)$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} Ax_{n,\delta} - y_\delta &= -A(E - Ag_n(A))x + (y - y_\delta) + Ag_n(y_\delta - y) = \\ &= -A(E - Ag_n(A))x - (E - Ag_n(A))(y_\delta - y). \end{aligned} \quad (10)$$

В силу лемм 1 и 2 имеем

$$\|(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

$$\sigma_n = n^{1/4} \|A(E - Ag_n(A))x\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Кроме того, из (5) и (6) следует, что

$$\|g_n(A)(y_\delta - y)\| \leq 4\left(\frac{n}{b}\right)^{1/4} \delta, \quad (13)$$

$$\|E - Ag_n(A)\| \leq 1. \quad (14)$$

Применим правило останова (4). Тогда $\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq b_1\delta$, $b_1 > 1$, и из (10) и (14) получим

$$\|A(E - Ag_m(A))x\| \leq \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| + \|(E - Ag_m(A))(y_\delta - y)\| \leq (b_1 + 1)\delta. \quad (15)$$

Для любого $n < m$ $\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому $\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| - \|(E - Ag_n(A))(y - y_\delta)\| \geq (b_1 - 1)\delta$. Итак, для $\forall n < m$

$$\|A(E - Ag_n(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta. \quad (16)$$

Из (12) и (16) при $n = m - 1$ получим $\frac{\sigma_{m-1}}{(m-1)^{1/4}} = \|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| \geq (b_1 - 1)\delta$

или $(m-1)^{1/4} \delta \leq \frac{\sigma_{m-1}}{b-1} \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 0$ (т. к. из (12) $\sigma_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$). Если при этом $m \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$, то, используя (9), получим

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq \|(E - Ag_m(A))x\| + 4\left(\frac{m}{b}\right)^{1/4} \delta \rightarrow 0.$$

При $m \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, т. к. из (11) $\|(E - Ag_m(A))x\| \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$.

Если же для некоторых $\delta_n \rightarrow 0$ последовательность $m(\delta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n),\delta_n} \rightarrow x$, $\delta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15) имеем $\|A(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| \leq (b_1 + 1)\delta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Отсюда по лемме 3 получаем, что $(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$. Поэтому

$$\|x_{m(\delta_n),\delta_n} - x\| \leq \|(E - Ag_{m(\delta_n)}(A))x\| + 4\left(\frac{m(\delta_n)}{b}\right)^{1/4} \delta_n \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

3. Оценка погрешности

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, оператор A – положителен и пусть $x = A^{2s}z$, $s > 0$. Тогда справедливы оценки

$$m \leq 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + \frac{4}{b^{1/4}} \left\{ 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}} \right\}^{\frac{1}{4}} \delta. \quad (17)$$

Доказательство. Так как $x = A^{2s}z$, то

$$\|A(E - Ag_{m-1}(A))x\| = \|A^{2s+1}(E - Ag_{m-1}(A))z\| = \left\| \int_0^M \frac{\lambda^{2s+1}b^{m-1}}{(\lambda^4+b)^{m-1}} dE\lambda z \right\| \leq \left[\frac{(2s+1)b}{8(m-1)} \right]^{\frac{2s+1}{4}} \|z\|.$$

Воспользовавшись (16), получим $(b_1-1)\delta \leq \left[\frac{(2s+1)b}{8(m-1)} \right]^{\frac{2s+1}{4}} \|z\|$. Отсюда имеем

$$m \leq 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}}.$$

При помощи неравенства моментов оценим

$$\begin{aligned} \|(E - Ag_m(A))x\| &= \|A^{2s}(E - Ag_m(A))z\| \leq \|A^{2s+1}(E - Ag_m(A))z\|^{\frac{2s}{2s+1}} \|(E - Ag_m(A))z\|^{\frac{1}{2s+1}} \leq \\ &\leq \|A(E - Ag_m(A))x\|^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} \leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m,\delta} - x\| &\leq \|(E - Ag_m(A))x\| + \|g_m(A)(y_\delta - y)\| \leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + 4\left(\frac{m}{b}\right)^{\frac{1}{4}} \delta \leq \\ &\leq [(b_1+1)\delta]^{\frac{2s}{2s+1}} \|z\|^{\frac{1}{2s+1}} + \frac{4}{b^{1/4}} \left\{ 1 + \frac{(2s+1)b}{8} \left[\frac{\|z\|}{(b_1-1)\delta} \right]^{\frac{4}{2s+1}} \right\}^{\frac{1}{4}} \delta. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O\left(\delta^{\frac{2s}{2s+1}}\right)$, и, как следует из [3], он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

Замечание 2. Знание порядка $2s > 0$ истокорпредставимости точного решения, используемое в теореме 2, не потребуется на практике, т. к. оно не содержится в правиле останова по малости невязки. В теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано число итераций m , обеспечивающее оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода.

Заключение

В работе изучены некоторые свойства предложенного неявного итерационного метода решения некорректных задач: доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций в исходной норме гильбертова пространства, получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Бакушинский, А. Б. Один общий прием построения регуляризирующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве / А. Б. Бакушинский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – Т. 7, № 3. – С. 672–677.
3. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
4. Емелин, И. В. К теории некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 244, № 4. – С. 805–808.
5. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
6. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
7. Лаврентьев, М. М. Теория операторов и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.
8. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
9. Матысик, О. В. Метод итераций неявного типа для решения линейных уравнений с неограниченным оператором / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 77–83.
10. Матысик, О. В. Метод итераций приближенного решения линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2021. – № 1. – С. 81–87.
11. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.
12. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.
13. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
14. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.

15. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr 467. – P. 271279.

REFERENCES

1. Lavrient'jev, M. M. O niekotorykh niekorriektnykh zadachakh matematichieskoj fiziki / M. M. Lavrient'jev. – Novosibirsk : Izd-vo SO AN SSSR, 1962. – 92 s.
2. Bakushinskij, A. V. Odin obshchij prijom postrojenija riegularizujushchikh algoritmov dlja linejnogo niekorriektnogo uravnenija v gilbiertovom prostranstvie / A. V. Bakushinskij // Zhurn. vychisl. matematiki i mat. fiziki. – 1967. – T. 7, № 3. – S. 672–677.
3. Vajnikko, G. M. Iteracionnyje procedury v niekorriektnykh zadachakh / G. M. Vajnikko, A. Yu. Vierietiennikov. – M. : Nauka, 1986. – 178 s.
4. Yemielin, I. V. K teorii niekorriektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Dokl. AN SSSR. – 1979. – T. 244, № 4. – S. 805–808.
5. Yemielin, I. V. Pravilo ostanova v iteracionnykh procedurakh rieshenija niekorriektnykh zadach / I. V. Yemielin, M. A. Krasnosiel'skij // Avtomatika i tieliemiekhanika. – 1978. – № 12. – S. 59–63.
6. Dienisov, A. M. Vviedienije v teoriju obratnykh zadach / A. M. Denisov. – M. : Izd-vo MGU, 1994. – 207 s.
7. Lavrient'jev, M. M. Teorija operat'orov i niekorriektnyje zadachi / M. M. Lavrient'jev, L. Ya. Saviel'jev. – Novosibirsk : Izd-vo In-ta matematiki, 1999. – 702 s.
8. Samarskij, A. A. Chisliennyje mietody rieshenija obratnykh zadach matematichieskoj fiziki / A. A. Samarskij, P. N. Vabishchievich. – M. : Editorial URSS, 2004. – 480 s.
9. Matysik, O. V. Mietod iteracij niejavnogo tipa dlja rieshenija linejnykh uravnenij s nieogranichenym operatorom / O. V. Matysik // Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 77–83.
10. Matysik, O. V. Mietod iteracij priblizhennogo rieshenija linejnykh uravnenij s nieogranichenym operatorom v gilbiertovom prostranstvie / O. V. Matysik // Viesn. Besc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2021. – № 1. – S. 81–87.
11. Liustiernik, L. A. Eliemienty funkcional'nogo analiza / L. A. Liustiernik, V. I. Soboliev. – M. : Nauka, 1965. – 520 s.
12. Matysik, O. V. Javnyje i niejavnyje iteracionnyje procedury rieshenija niekorriektno postavliennykh zadach / O. V. Matysik. – Briest : Briest. gos. un-t, 2014. – 213 s.
13. Matysik, O. V. Iteracionnaja riegularizacija niekorriektnykh zadach / O. V. Matysik. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 s.
14. Matysik, O. V. Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space / O. V. Matysik, Marc M. Van Hulle // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2016. – Nr 300. – P. 290–299.
15. Matysik, O. V. Solving ill-posed linear operator equations with an explicit iterative method in energetic norm / O. V. Matysik // J. Comp. & Appl. Math. (Elsevier). – 2021. – Nr 467. – P. 271279.

УДК 519.6+519.81

Владимир Васильевич Морозов*ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Vladimir Morozov***Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
of the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: morozoffw@mail.ru*

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА НЬЮТОНА В ПОЛИНОМИАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ БАНАХОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Исходя из аксиоматики функционального анализа А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина, Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова, аппроксимацию корней функциональных уравнений надлежит осуществлять с помощью элементов всюду плотного в сепарабельном пространстве решений множества многочленов. Однако по-прежнему наиболее распространенным и универсальным численным методом решения дифференциальных уравнений считается метод конечных разностей. Основное содержание метода заключается в следующем. Область непрерывного изменения аргумента (например, отрезок) заменяется дискретным множеством точек, называемых узлами. Эти узлы составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. Исходное дифференциальное уравнение заменяется разностным уравнением относительно сеточной функции. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные соотношения. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией). Решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки. Обоснованность замены дифференциального уравнения разностным, точность получаемых решений, устойчивость метода – важнейшие вопросы, которые требуют тщательного изучения. Данная проблема возникает из-за невозможности сравнения корня уравнения и его дискретного приближения по норме пространства решений, являющейся главным противоречием основной идеи разностных методов постулатам функционального анализа.

Ключевые слова: *сходимость последовательности, аппроксимация, оценка нормы оператора.*

Modifications of Newton's Method in the Polynomial Analysis of Banach Equations

Based on the axiomatics of functional analysis by A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, the approximation of the roots of functional equations should be carried out using elements everywhere dense in a separable space of solutions of multiple polynomials. However, the method of finite differences is still considered to be the most common and universal numerical method for solving differential equations. The main content of the method is as follows. The area of continuous change of the argument (for example, a segment) is replaced by a discrete set of points called nodes. These nodes make up a different grid. The desired function of a continuous argument is approximately replaced by a function of a specific argument on a given grid. This function is called a grid function. The original differential equation is replaced by a difference equation with respect to the grid function. At the same time, the corresponding finite-difference relations are used for the derivatives included in the equation. Such a replacement of a differential equation with a difference equation is called its approximation on a grid (or difference approximation). The solution of the differential equation is reduced to finding the values of the grid function in the grid nodes. The validity of replacing a differential equation with a difference equation, the accuracy of the solutions obtained, and the stability of the method are the most important issues that require careful study. This problem arises due to the impossibility of comparing the root of the equation and its discrete approximation by the norm of the solution space, which is the main contradiction of the basic idea of difference methods to the postulates of functional analysis.

Key words: *sequence convergence, approximation, operator norm estimation.*

Введение

Отсутствие в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса вынуждает исследователей, изучающих нелинейные функциональные уравнения

с дифференциальными и/или интегральными операторами, разрабатывать все новые и новые грандиозные сеточные схемы. Во избежание теоретических изъянов дискретного представления элементов непрерывных функциональных пространств (например, при доказательстве сходимости дискретного приближения к непрерывной функции по норме) для аппроксимации элементов непрерывных банаховых пространств необходим полиномиальный базис. В качестве такового в работе используется базис, являющийся одновременно базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, позволяющий при доказательстве сходимости полиномиального приближения к корню сколь угодно увеличивать параметр дискретизации пространства решений и этим сколь угодно уменьшать погрешность приближения корня.

Для полиномиальной аппроксимации функциональных операторов в качестве проектора $\prod^n : U \rightarrow P^n$ элементов пространства абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций на множество многочленов используем интерполяционный процесс Лагранжа с чебышевской сеткой.

Благодаря уникальному свойству лагранжева базиса множества P^n , где коэффициенты разложения полинома являются его значениями в точках сетки, полиномиальные методы решения интегро-дифференциальных уравнений и других задач прикладного анализа становятся итерационными.

Метод Ньютона и его модификации при решении банаховых уравнений

Пусть $A : U \rightarrow V$ – ограниченный линейный банаховый оператор. Выражения $\lfloor A \rfloor = \inf_{\|u\|=1} \|Au\|$ и $\lceil A \rceil = \sup_{\|u\|=1} \|Au\|$ будем называть *i-гранью* и *s-гранью* оператора A .

Идея метода Ньютона решения банахова уравнения

$$F(u) = 0, F : U \rightarrow V, U \text{ и } V - B\text{-пространства} \quad (1)$$

заключается в аппроксимации приращения $F(u) - F(u_0)$ его главной линейной частью $F'(u_0)(u - u_0)$ и решении уравнения для нуля-приближения корня $F'(u_0)(u - u_0) = -F(u_0)$.

Теорема 1. Пусть в шаре $Q[u_0, r]$ банахово отображение $F : U \rightarrow V$ дважды непрерывно дифференцируемо и $\sup_{u \in Q} \lceil F''(u) \rceil \leq K$, а для u_0 выполнены условия

1. $\lfloor F'(u_0) \rfloor^{-1}$ существует и $\lfloor F'(u_0) \rfloor^{-1} \leq C (\lfloor F'(u_0) \rfloor \geq C^{-1})$;
2. $\eta \geq \|\lfloor F'(u_0) \rfloor^{-1} F(u_0)\|$;
3. $k = CK\eta \leq 1/2$;
4. $r \geq \frac{1 - \sqrt{1 - 2k}}{k} \eta$.

Тогда последовательность

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \Delta u_n = -\lfloor F'(u_n) \rfloor^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \dots$$

сходится в шаре $Q[u_0, r]$ к решению u^* уравнения со скоростью

$$\|u^* - u_n\| \leq t^* - t_n,$$

где t_n – последовательность приближений меньшего корня t^* уравнения

$$P(t) \equiv \frac{KC}{2} t^2 - t + \eta = 0,$$

построенная по правилу

$$t_{n+1} = t_n - \lfloor P'(t_n) \rfloor^{-1} P(t_n), t_0 = 0.$$

Моделирование реальных технологических процессов с помощью интегро-дифференциальных операторов основано на топологических свойствах пространства решений, которому принадлежит искомый корень, и описания отображения этого пространства в пространство образов, в которое отображается пространство решений. Сепарабельность этих пространств при описании реальных процессов функциональными уравнениями с интегральными и/или дифференциальными операторами достаточно хорошо изучена в монографиях [1; 2; 4; 5].

Важнейшим достижением этих исследований стало установление счетных всюду плотных множеств в функциональных банаховых пространствах. Это свойство сепарабельных пространств позволяет организовать вычислительный процесс, максимально соответствующий качественной теории функционального анализа. Вслед за определением достоверных оценок норм приближений элементов процесса появляется возможность генерировать слабые производные дифференцируемых отображений, а также оценивать их нормы.

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в работе используются полиномиальные методы с приближением корня многочленами всюду плотного множества пространства решений. Причем применяемый для аппроксимации элементов полиномиальный базис одновременно является базисом всюду плотного множества и итеративным базисом вычислительного процесса, т. е. итерационный многочлен приближения корня степени n из \mathcal{P}_n , в случае необходимости может быть представлен в виде многочлена в реорганизованном базисе \mathcal{P}_{n+1} . Отметим, что здесь вместо традиционного базиса множества многочленов используется лагранжевый базис, который и обеспечивает итеративность вычислительного процесса при увеличении параметра дискретизации. Логическим завершением вычислительного процесса является локализация корня функционального уравнения с заданной точностью приближения.

Из «формулы конечных приращений» [6, с. 134] следует, что для достаточно гладкого в области Q_r отображения

$$\|F(u) - F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0)\| \leq \frac{1}{2} \sup_{u \in Q_r} [F''(u)] \|u - u_0\|^2.$$

Значит, норма невязки $\|F(u)\|$ на найденном приближении u , для которого

$$-F(u_0) - F'(u_0)(u - u_0) = 0,$$

соизмерима с квадратом нормы приращения аргумента, что позволяет при достаточно малых приращениях организовать вблизи корня уравнения сходящийся итерационный процесс

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \text{ где } \Delta u_n = -[F'(u_n)]^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

Однако в бесконечномерном случае установление обратного оператора $[F'(u_n)]^{-1}$ на каждом шаге итерационного процесса может стать задачей достаточно трудоемкой. Поэтому иногда целесообразно использовать так называемый модифицированный метод Ньютона. Модификация состоит в том, что вместо последовательности (2) рассматривается последовательность, определяемая формулой

$$u_{n+1} = u_n - [F'(u_0)]^{-1} F(u_n), n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Идея модифицированного метода заключается в использовании на каждом шаге обратного оператора $[F'(u)]^{-1}$, вычисленного при одном и том же значении $u = u_0$.

Теорема 2. Пусть в некотором шаре Q_r банахово отображение $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ сильно дифференцируемо и производная $F'(u)$ удовлетворяет в нем условию Липшица с константой L , т. е.

$$\|F'(u) - F'(v)\| \leq L \|u - v\|.$$

При этом нулевое приближение u_0 выбрано так, что справедливы оценки

- 1) $[F'(u_0)]^{-1}$ существует и $\|[F'(u_0)]^{-1}\| \leq C$;
- 2) $\eta \geq \|[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)\|$;
- 3) $k = CL\eta \leq 1/4$.

Тогда в шаре Q_r , где r – меньший корень уравнения

$$CLr^2 - r + \eta = 0,$$

уравнение (1) имеет единственное решение u^* и последовательность приближений

$$\{u_n, n = 0, 1, \dots\},$$

определяемая рекуррентным соотношением (3), сходится к этому корню.

Для доказательства утверждения рассмотрим в пространстве \mathcal{U} отображение

$$A(u) = u - [F'(u_0)]^{-1} F(u).$$

Его сильная производная в точке u_0 равна 0. Докажем, что отображение A переводит шар Q_r в себя. Действительно,

$$\begin{aligned} \|A(u) - u_0\| &\leq \|u - u_0 - [F'(u_0)]^{-1} F(u)\| \leq \\ &\leq \|[F'(u_0)]^{-1}\| \|F'(u_0)(u - u_0) - F(u) + F(u_0)\| + \|[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)\| \leq \\ &\leq C \|F'(u_0)(u - u_0) - F(u) + F(u_0)\| + \eta \leq CLr^2 + \eta = r, \end{aligned}$$

а это значит, что отображение A переводит шар Q_r в себя.

A – сжимающее отображение. Следовательно, оператор A имеет в шаре Q_r одну и только одну неподвижную точку u^* , для которой

$$u^* = u^* - [F'(u_0)]^{-1} F(u^*).$$

Из оценки s -границ оператора A сразу следует оценка скорости сходимости модифицированного метода Ньютона к корню уравнения (1)

$$\|u_n - u^*\| \leq \frac{q^n \eta}{1 - q}.$$

Таким образом, погрешность приближения данного метода убывает не медленнее, чем геометрическая прогрессия с шагом q .

Решение нелинейных операторных уравнений вида (1) с банаховым дважды непрерывно дифференцируемым в шаре $Q[u_0, r]$ нелинейным оператором F , удовлетворяющим условию $\sup_{u \in Q} \|F''(u)\| \leq K$, обычно сводится к методу Ньютона или его

модификациям. Выделим три ключевых момента при генерации ньютоновского параметрического процесса

$$u_{k+1} = u_k + \beta_k \Delta u_k, \Delta u_k = -[F'(u_k)]^{-1} F(u_k), k = 0, 1, \dots \quad (4)$$

1. Выбор β_0 для глобальной сходимости процесса (4) к решению уравнения (1) в области $Q[u_0, R]$ (существование корня в Q_R , $0 < R \leq \infty$ предполагается).

2. Поиск приближенного решения u_p , по которому можно найти радиус $r < \infty$ области $Q[u_p, r]$ существования точного решения (1) и сам корень u^* , определяемый с этого приближения процессом (4).

3. Локализация изолированного корня u^* уравнения (1) в заданной δ -окрестности $Q[u_n, \delta]$ приближения u_n (локализирующего u^*), т. е. поиск такого приближенного решения u_n , для которого $\|u^* - u_n\| \leq \delta$.

Ключевые моменты ньютоновского параметрического процесса соответствуют основным этапам численного (полиномиального) метода решения (1):

- 1) вход в вычислительный процесс, выбор начального приближения;
- 2) генерация последовательности приближенных решений (1);
- 3) выход из процесса по заданному критерию Останов.

Каждый из перечисленных этапов является самостоятельной задачей и требует специального изучения [6]. Разберем более детально основные стадии параметрического процесса (4).

Теорема 3. Пусть в шаре Q_R существует решение операторного уравнения (1). Тогда если для всех $k = 0, 1, \dots$ элемент u_k последовательности (4) принадлежит Q_R , а также $\| [F'(u_k)]^{-1} \| < B_k$ и

$$\beta_k = \min\{1, 2(KB_k^2 \|F(u_k)\|)^{-1}\}, \tag{5}$$

то процесс (4) сходится к решению уравнения (1).

По условию теоремы

$$u_{k+1} = u_k - \beta_k [F'(u_k)]^{-1} F(u_k), k = 0, 1, \dots$$

Доказательство теоремы индуктивно следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|F(u_{k+1})\| &= \|F(u_{k+1}) - F(u_k) + F'(u_k)\beta_k[F'(u_k)]^{-1}F(u_k) + F(u_k) - \beta_k F(u_k)\| < \\ &< (\frac{K}{2} B_k^2 \|F(u_k)\| \beta_k^2 - \beta_k + 1) \|F(u_k)\| \leq \|F(u_k)\|. \end{aligned}$$

Сходимость последовательности (4) к решению уравнения (1) на первом этапе процесса следует из достаточно жестких предпосылок:

- 1) хотя бы один корень уравнения (1) находится в области Q_R ;
- 2) элементы $u_k, k = 0, 1, \dots$ последовательности (4) принадлежат Q_R ;
- 3) для всех k существует ограниченный оператор $[F'(u_k)]^{-1}$.

Теорема 4. Пусть в шаре $Q_r, r = 2B\|F(u_0)\|$ справедлива оценка $\sup_{u \in Q} |F''(u)| \leq K$

и условие $\| [F'(u_n)]^{-1} \| \leq B_n \leq B$ верно для всех членов (4) с

$$\beta_k = \min\{1, (KB_k^2 \|F(u_k)\|)^{-1}\}, k = 0, 1, \dots, \tag{6}$$

тогда в Q_r существует u^* – корень (1), к которому сходится процесс (4).

Индуктивное доказательство теоремы следует из минимизации β -функции $\frac{K}{2} B_k^2 \|F(u_n)\| \beta_k^2 - \beta_k + 1$ на интервале $(0; 1]$ и соотношения

$$\beta_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \beta_k \prod_{i=0}^{k-1} \sqrt{1 - \beta_i} < 2, \beta_k \in (0; 1].$$

Приближенное решение u_0 из теоремы 4 назовем приближением, решающим уравнение (1) в области существования Q_r , и обозначим u_p . Лишь увеличив скорость

стремления последовательности $\{\|F(u_k)\|, k = 0, 1, \dots\}$ к 0, удалось определить радиус шара Q_r , содержащего точное решение.

Отметим, что при $c_k \equiv KB_k^2 \|F(u_k)\| > 2$ в параметрическом процессе (4) следует применять демпфирующий множитель β_k из теоремы 3, а при $c_k \leq 2$ и до локализации корня уравнения (1) – из теоремы 4.

Заключительный этап параметрического процесса (4) – критерий Останова. Знание оценок глобальных констант в шаре Q_r необходимо и при описании границ области локализации корня u^* , т. к. наличие ограниченных оценок K и B для отображений, действующих на всем бесконечномерном \mathcal{B} -пространстве \mathcal{U} , – явление крайне редкое.

Однако требовать существование ограниченного оператора $[F'(u)]^{-1}$ не только в шаре Q_r , но даже для всех элементов последовательности (4) не всегда обязательно (этот факт может вытекать из условий теоремы).

Теорема 5. Пусть в шаре $Q[u_0, r]$ банахово отображение $F: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ дважды непрерывно дифференцируемо и $\sup_{u \in Q} |F''(u)| \leq K$.

Тогда если для нуля-приближения выполнены условия

- 1) $[F'(u_0)]^{-1}$ существует с $\| [F'(u_0)]^{-1} \| \leq B$;
- 2) $q = KB^2 \|F(u_0)\| \leq 1/2$,

то в $Q[u_0, \delta]$, где $\delta = \frac{2B \|F(u_0)\|}{1 + \sqrt{1 - 2q}} \leq r$, уравнение (1) имеет единственное решение u^*

и последовательность приближений (4) сходится к этому решению с $\beta_k = 1, k = 0, 1, \dots$ (метод Ньютона).

Приближенное решение u_0 из теоремы 5 назовем приближением, локализуящим единственный в шаре Q_δ корень (1), и обозначим u_r .

Заключение

Локализация методами полиномиального анализа изолированного корня функционального уравнения (1) в определенной окрестности $Q_r = \|u - u_0\| \leq r$ приближения из всюду плотного множества пространства решений позволяет исследователям (при достаточно малом r) использовать его в качестве искомого корня, не нарушая методологию функционального анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.
2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.
3. Крайнов, А. Ю. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / А. Ю. Крайнов, К. М. Моисеева. – Томск : STT, 2016. – 44 с.
4. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнко, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
5. Антонец, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антонец, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.
6. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.

REFERENCES

1. Kolmogorov, A. N. Elementy teorii funkciy i funkcional'nogo analiza / A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. – M. : Nauka, 1989. – 624 s.
2. Kantorovich, L. V. Funkcional'nyj analiz / L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. – M. : Nauka, 1977. – 742 c.
3. Krajnov, A. Yu. Chisliennyje metody rieshenija krajevykh zadach dlia obyknoviennykh diffierencial'nykh uravnenij : uchieb. posobije / A. Yu. Krajnov, K. M. Moisiejeva. – Tomsk : STT, 2016. – 44 s.
4. Krasnosiel'skij, M. A. Priblizhennoje rieshenije opieratornykh uravnenij / M. A. Krasnosiel'skij, G. M. Vajniko, P. P. Zabriejko. – M. : Nauka, 1969. – 456 s.
5. Antonievich, A. B. Funkcional'nyj analiz i integral'nyje uravnenija / A. B. Antonievich, Ya. V. Radyno. – Minsk : BGU, 2006. – 430 s.
6. Morozov, V. V. Prikladnoj analiz i programmirovanije : posobije / V. V. Morozov. – Brest : BrGU, 2012. – 246 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 14.04.2022

УДК 513.82

Александр Андреевич Юдов¹, Елена Вячеславовна Кисилюк²¹канд. физ.-мат. наук, доц.,доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²преподаватель каф. прикладной математики и информатики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Aleksandr Yudov¹, Yelena Kisilyuk²¹PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
at the Brest State A. S. Pushkin University²Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Informatics

at the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: modelmath@brsu.brest.by**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ
СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ
ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО**

В ходе исследования классифицированы однородные редуктивные пространства с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства Минковского и все их редуктивные дополнения.

Ключевые слова: группа, подгруппа, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, коммутатор, редуктивное однородное пространство, редуктивное дополнение.

***Differential Geometry of Homogeneous Spaces with a Structure Group – Lie Group
of Motions of Minkowski Space***

The study classified homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the Minkowski space and all their reductive complements.

Key words: group, subgroup, homogeneous space, Lie group, Lie algebra, commutator, reductive homogeneous space, reductive complement.

Введение

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картап, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства Минковского.

Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства Минковского

Определение 1. Однородное пространство H / G_i называется редуктивным, если алгебра Ли \overline{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G}_i$, где $ad\overline{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли \overline{G}_i .

Рассмотрим однородное пространство H/G_5 , где G_5 – подгруппа Ли группы Ли H вращений шестимерного Лоренцового пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{G}_5 = \{i_6, i_9\}$, где:

$$i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению пятнадцати случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p & q \end{pmatrix}.$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов $X_1 \dots X_4$, определяющих инвариантные подпространства m , причем базис в алгебре \overline{H} выберем следующим образом: $i_5, i_7, i_8, i_{10}, i_6, i_9$.

Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, \dots, X_4\}$ задаются векторами:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9, X_2 = i_7 + \nu i_6 + \sigma i_9, X_3 = i_8 + s i_6 + t i_9, X_4 = i_{10} + p i_6 + q i_9. \quad (2)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_6] + \mu[a, i_9] = -i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_6] + \sigma[a, i_9] = i_{10}, \\ [a, X_3] &= [a, i_8] + s[a, i_6] + t[a, i_9] = -i_5, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + p[a, i_6] + q[a, i_9] = i_7. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9) + \beta_1(i_7 + \nu i_6 + \sigma i_9) + \gamma_1(i_8 + s i_6 + t i_9) + \delta_1(i_{10} + p i_6 + q i_9) = \alpha_1 i_5 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1 + p \delta_1) i_6 + \beta_1 i_7 + \gamma_1 i_8 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1) i_9 + \delta_1 i_{10}. \quad (4)$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\gamma_1 = -1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \delta_1 = 0, \lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1 + p \delta_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0, t = 0$.

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3), получим:

$$\delta_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 + s \gamma_2 + p \delta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 + q \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $p = 0, q = 0$.

Аналогично, сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\alpha_3 = -1, \lambda = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с четвертой формулой (3), получим:

$$\beta_4 = 1, \nu = 0, \sigma = 0.$$

Таким образом, в случае 1^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы) $\{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$. Аналогично рассматриваются случаи $2^0 - 15^0$.

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \nu & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9, X_2 = i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_9, X_3 = i_8 + s i_{10} + t i_9, X_4 = i_6 + q i_9. \quad (5)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_{10}] + \mu[a, i_9] = -i_8 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_{10}] + \sigma[a, i_9] = i_{10} + \nu i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_8] + s[a, i_{10}] + t[a, i_9] = -i_5 + s i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_6] + q[a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9) + \beta_1(i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_9) + \gamma_1(i_8 + s i_{10} + t i_9) + \delta_1(i_6 + q i_9) = \\ = \alpha_1 i_5 + \delta_1 i_6 + \beta_1 i_7 + \gamma_1 i_8 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1) i_9 + i_{10}(\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + \gamma_1) + s \gamma_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\gamma_1 = -1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = \lambda, \delta_1 = 0, \lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma \lambda - t = 0, \nu \lambda - s = 0$.

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\beta_2 = \nu, \alpha_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 + q \delta_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 + s \gamma_2 = 1.$$

Отсюда следует: $\nu^2 = 1, \nu \sigma = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$\alpha_3 = -1, \beta_3 = s, \sigma s - \mu = 0, \nu s - \lambda = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 2^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma \lambda - t = 0, \\ \nu \lambda - s = 0, \\ \nu^2 = 1, \\ \nu \sigma = 0, \\ \sigma s - \mu = 0, \\ \nu s - \lambda = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$. Тогда $s = \lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.
В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\nu = -1$. Тогда $s = -\lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.
В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}.$$

$$3^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \nu & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 3^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_6, X_2 = i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_6, X_3 = i_8 + s i_{10} + t i_6, X_4 = i_9. \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_{10}] + \mu[a, i_6] = -i_8 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_{10}] + \sigma[a, i_6] = i_{10} + \nu i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_8] + s[a, i_{10}] + t[a, i_6] = -i_5 + s i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_6) + \beta_1(i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_6) + \gamma_1(i_8 + s i_{10} + t i_6) + \delta_1 i_9 = \\ = \alpha_1 i_5 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1) i_6 + \beta_1 i_7 + \gamma_1 i_8 + \delta_1 i_9 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1) i_{10}. \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9), получим:

$$\gamma_1 = -1, \beta_1 = \lambda, \alpha_1 = 0, \delta_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 = 0, \lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 + s \gamma_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma \lambda - t = 0, \nu \lambda - s = 0$.

Сравнивая формулу (10) со второй формулой (9), получим:

$$\beta_2 = \nu, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 + s \gamma_2 = 1, \alpha_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 = 0.$$

Отсюда следует: $\nu^2 = 1, \nu \sigma = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (10) с третьей формулой (9), получим:

$$\alpha_3 = -1, \beta_3 = s, \sigma s - \mu = 0, \nu s - \lambda = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям. Таким образом, в случае 3^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sigma \lambda - t = 0, \\ \nu \lambda - s = 0, \\ \nu^2 = 1, \\ \nu \sigma = 0, \\ \sigma s - \mu = 0, \\ \nu s - \lambda = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$. Тогда $s = \lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\nu = -1$. Тогда $s = -\lambda, \sigma = 0, \mu = 0, t = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_9\}.$$

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & \nu & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 4^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_8 + \mu i_9, X_2 = i_7 + \nu i_8 + \sigma i_9, X_3 = i_{10} + t i_9, X_4 = i_6 + q i_9. \quad (11)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda [a, i_8] + \mu [a, i_9] = -i_8 + \lambda i_5, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu [a, i_8] + \sigma [a, i_9] = i_{10} + \nu i_5, \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + t [a, i_9] = i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_6] + q [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_8 + \mu i_9) + \beta_1(i_7 + \nu i_8 + \sigma i_9) + \gamma_1(i_{10} + t i_9) + \delta_1(i_6 + q i_9) = \alpha_1 i_5 + \delta_1 i_6 + \beta_1 i_7 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1) i_8 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1) i_9 + \gamma_1 i_{10}. \quad (13)$$

Сравнивая формулу (13) с первой формулой (12), получим:

$$\alpha_1 = -\lambda, \lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 = -1, \delta_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 + q \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\lambda^2 = 1, -\lambda \mu = 0$.

Сравнивая формулу (13) со второй формулой (12), получим:

$$\gamma_2 = 1, \alpha_2 = -\nu, \beta_2 = 0, \delta_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 = 0, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 + q \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $-\nu \lambda = 0, t - \mu \nu = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (13) с третьей формулой (12), получим:

$$\beta_3 = 1, \nu = 0, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 4^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ -\lambda \mu = 0, \\ -\nu \lambda = 0, \\ t - \mu \nu = 0, \\ \nu = 0, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, \nu = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_6 + qi_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = -1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, v = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_6 + qi_9\}.$$

$$5^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 1 & \nu & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 5^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_8 + \mu i_6, X_2 = i_7 + \nu i_8 + \sigma i_6, X_3 = i_{10} + t i_6, X_4 = i_9. \quad (14)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_8] + \mu[a, i_6] = -i_8 - \lambda i_5, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_8] + \sigma[a, i_6] = i_{10} - \nu i_5, \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + t[a, i_6] = i_7, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_8 + \mu i_6) + \beta_1(i_7 + \nu i_8 + \sigma i_6) + \gamma_1(i_{10} + t i_6) + \delta_1 i_9 = \alpha_1 i_5 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1) i_6 + \beta_1 i_7 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1) i_8 + \delta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10}. \quad (16)$$

Сравнивая формулу (16) с первой формулой (15), получим:

$$\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 = -1, \alpha_1 = -\lambda, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 + t \gamma_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\lambda^2 = 1, -\lambda \mu = 0$.

Сравнивая формулу (16) со второй формулой (15), получим:

$$\gamma_2 = 1, \alpha_2 = -\nu, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 + t \gamma_2 = 0, \beta_2 = 0, \lambda \alpha_2 + \nu \beta_2 = 0, \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $t - \mu \nu = 0, -\nu \lambda = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (16) с третьей формулой (15), получим:

$$\beta_3 = 1, \sigma = 0, \nu = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 5^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 = 1, \\ -\lambda \mu = 0, \\ -\nu \lambda = 0, \\ t - \mu \nu = 0, \\ \nu = 0, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = 1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, \nu = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_9\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\lambda = -1$. Тогда $\sigma = 0, \mu = 0, t = 0, v = 0$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_9\}.$$

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \nu & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 6^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10}, X_2 = i_7 + \nu i_8 + \sigma i_{10}, X_3 = i_6, X_4 = i_9. \quad (17)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_8] + \mu[a, i_{10}] = -i_8 - \lambda i_5 + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_7] + \nu[a, i_8] + \sigma[a, i_{10}] = i_{10} - \nu i_5 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_6] = 0, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10}) + \beta_1(i_7 + \nu i_8 + \sigma i_{10}) + \gamma_1 i_6 + \delta_1 i_9 = \alpha_1 i_5 + \gamma_1 i_6 + \beta_1 i_7 + (\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1) i_8 + \delta_1 i_9 + (\mu \alpha_1 + \sigma \beta_1) i_{10}. \quad (19)$$

Сравнивая формулу (19) с первой формулой (18), получим:

$$\lambda \alpha_1 + \nu \beta_1 = -1, \alpha_1 = -\lambda, \beta_1 = \mu, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \mu \alpha_1 + \sigma \beta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $-\lambda^2 + \mu \nu = -1, -\mu \lambda + \sigma \mu = 0$.

Сравнивая формулу (19) со второй формулой (18), получим:

$$\alpha_2 = -\nu, \beta_2 = \sigma, \mu \alpha_2 + \sigma \beta_2 = 1, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0.$$

Отсюда следует: $-\lambda \nu + \nu \sigma = 0, -\mu \nu + \sigma^2 = 1$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 6^0 получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -\lambda^2 + \mu \nu = -1, \\ -\mu \lambda + \sigma \mu = 0, \\ -\lambda \nu + \nu \sigma = 0, \\ -\mu \nu + \sigma^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(\sigma - \lambda) = 0, \\ \nu(\sigma - \lambda) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a) \lambda = \sigma, \\ b) \mu = 0, \nu = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случай a: $-\lambda^2 + \mu \nu = -1 \Rightarrow \lambda^2 = 1 + \mu \nu, \lambda = \pm \sqrt{1 + \mu \nu}, \sigma = \pm \sqrt{1 + \mu \nu}$.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 \pm \sqrt{1 + \mu \nu} i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_8 \pm \sqrt{1 + \mu \nu} i_{10}, i_6, i_9\}.$$

Рассмотрим случай, $b: \lambda^2 = 1, \sigma^2 = 1. \Rightarrow \lambda = 1, \sigma = 1; \lambda = -1, \sigma = 1; \lambda = 1, \sigma = -1; \lambda = -1, \sigma = -1.$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\begin{aligned} &\{i_5 + i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}. \end{aligned}$$

В случаях $7^0, 8^0$ системы инвариантности противоречивы.

$$9^0 \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 9^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_5 + \lambda i_7 + \mu i_{10}, X_2 = i_8 + \sigma i_{10}, X_3 = i_6, X_4 = i_9. \quad (23)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_5] + \lambda[a, i_7] + \mu[a, i_{10}] = -i_8 + \lambda i_{10} + \mu i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + \sigma[a, i_{10}] = -i_5 + \sigma i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_6] = 0, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_5 + \lambda i_7 + \mu i_{10}) + \beta_1(i_8 + \sigma i_{10}) + \gamma_1 i_6 + \delta_1 i_9 = \alpha_1 i_5 + \gamma_1 i_6 + i_7 \alpha_1 \lambda + i_8 \beta_1 + i_9 \delta_1 + i_{10}(\alpha_1 \mu + \beta_1 \sigma). \quad (25)$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:

$$\beta_1 = -1, \alpha_1 \mu + \beta_1 \sigma = \lambda, \alpha_1 \lambda = \mu, \alpha_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = -\lambda, \mu = 0$.

Сравнивая формулу (25) со второй формулой (24), получим:

$$\alpha_2 = -1, \alpha_2 \lambda = \sigma, \gamma_2 = 0, \beta_2 = 0, \delta_2 = 0, \alpha_2 \mu + \beta_2 \sigma = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma = -\lambda, \mu = 0$.

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_5 + \lambda i_7, i_8 - \lambda i_{10}, i_6, i_9\}.$$

В случаях $10^0 - 13^0$ системы инвариантности противоречивы.

$$14^0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай 14^0 .

В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$X_1 = i_7 + \mu i_8, X_2 = i_{10}, X_3 = i_6, X_4 = i_9. \quad (26)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \mu[a, i_8] = i_{10} - \mu i_5, \\ [a, X_2] &= [a, i_{10}] = i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_6] = 0, \\ [a, X_4] &= [a, i_9] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_4\}$:

$$\alpha_1(i_7 + \mu i_8) + \beta_1 i_{10} + \gamma_1 i_6 + \delta_1 i_9 = \gamma_1 i_6 + \alpha_1 i_7 + \alpha_1 \mu i_8 + \delta_1 i_9 + \beta_1 i_{10}. \quad (28)$$

Сравнивая формулу (28) с первой формулой (27), получим:

$$\mu = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_4\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_7, i_{10}, i_6, i_9\}.$$

В случае 15^0 система инвариантности противоречива.

Теорема 1. Относительно оператора i_6 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли \bar{H} :

$$\begin{aligned} &\{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + \lambda i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 - \lambda i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_6 + q i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7, i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7, i_{10}, i_9\}, \\ &\{i_5 \pm \sqrt{1 + \mu\nu} i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \nu i_8 \pm \sqrt{1 + \mu\nu} i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 - i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_5 + \lambda i_7, i_8 - \lambda i_{10}, i_6, i_9\}, \\ &\{i_7, i_{10}, i_6, i_9\}. \end{aligned}$$

Теорема 2. Относительно операторов i_6, i_9 инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли \bar{H} :

$$\begin{aligned} m_1 &= \{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}, \\ m_2 &= \{i_5 - i_8, i_7 + i_{10}, i_6, i_9\}, \\ m_3 &= \{i_5 + i_8, i_7 - i_{10}, i_6, i_9\}. \end{aligned}$$

Проверяя для этих четырехмерных подпространств условие прямой суммы, убеждаемся, что условие прямой суммы выполняются только для подпространства $m_1 = \{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$, т. е. $\bar{H} = \bar{G}_5 + m_1$.

Таким образом, получена:

Теорема 3. Однородное пространство H/G_5 редуکتивно. Редуکتивным дополнением является только следующее подпространство: $\{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$.

Заклучение

В работе получено редуکتивное однородное пространство.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

REFERENCES

1. Kobajasi, Sh. Osnovy diffierencial'noj gieometrii : v 2 t. / Sh. Kobajasi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981. – T. 2. – 413 s.
2. Kopp, V. G. O podgruppakh vrashchienij piatimiernykh i shestimiernykh jevklidovykh i lorencevykh prostranstv / V. G. Kopp // Uchion. zap. Kazan. un-ta. – 1966. – № 1 (126). – S. 13–22.
3. Rashevskij, P. K. Rimanova gieometrija i tenzornyj analiz / P. K. Rashevskij. – M. : Nauka, 1967. – 664 s.
4. Khelgason, S. Diffierencial'naja gieometrija i simmetrichieskije prostranstva / S. Khelgason. – M. : Mir, 1964. – 538 s.
5. Yudov, A. A. Klassifikacija odnomiernykh podmnogoobrazij prostranstva Minkovskogo, imiejushchikh kasatiel'nuju mnimojevklidova i jevklidova tipa / A. A. Yudov, N. S. Kovalik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 106–115.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 25.03.2022

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша (не меней за 14 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc, *.docx ці *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 08.09.2016 № 206). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. боб.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносак.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш, чым 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуравецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаноўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.
- References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выліска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: highmath@brsu.brest.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друку 09.06.2022. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 12,56. Ул.-выд. арк. 7,19. Тыраж 100 экз. Заказ № 170.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.