

Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

Рэдакцыйная калегія

галоўны рэдактар
А. М. Сендзер

намеснік галоўнага рэдактара
А. Я. Будзько

адказны рэдактар
М. М. Сендзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)
А. І. Басік (Беларусь)
В. М. Волкаў (Беларусь)
М. А. Громаў (Расія)
А. У. Дзямідчык (Беларусь)
М. І. Ляўчук (Беларусь)
І. П. Маргынаў (Беларусь)
А. І. Мелькер (Расія)
В. С. Манахаў (Беларусь)
У. А. Плецюхоў (Беларусь)
В. М. Радзькоў (Беларусь)
В. Р. Самойленка (Украіна)
А. А. Трафімук (Беларусь)
Уба Люба (Польшча)

Пасведчанне аб рэгістрацыі
ў Міністэрстве інфармацыі
Рэспублікі Беларусь
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:
224016, г. Брэст,
бульвар Касманаўтаў, 21
тэл.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага
ўніверсітэта» выдаецца
са снежня 1997 года

Серыя 4

ФІЗІКА

МАТЭМАТЫКА

НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС

Выходзіць два разы ў год

**Заснавальнік – Установа адукацыі
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»**

№ 2 / 2021

У адпаведнасці з Дадаткам да загада
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь
ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай
камісіі Рэспублікі Беларусь ад 16.02.2021 № 36
(са змяненнямі, унесенымі загадамі ВАК ад 16.03.2021 № 65,
09.04.2021 № 105, 28.04.2021 № 121, 27.05.2021 № 147,
06.07.2021 № 204, 24.09.2021 № 237, 21.10.2021 № 263)
часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны
ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

ЗМЕСТ

ФІЗІКА

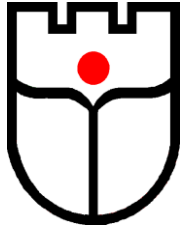
Бурый А. В., Ивашкевич А. В., Овсюк Е. М., Редьков В. М. Собственные состояния оператора спиральности для симметричного тензора, описывающего поле со спином 2.....	5
Кац П. Б., Удовенко С. М. Формула Бете – Вайцзеккера. Обзор и подбор коэффициентов	26
Кокоулина Е. С., Левчук М. И., Невмержицкий М. Н., Хвалей К. М., Шуляковский Р. Г. О компоненте тензорной асимметрии T_{20} в реакции когерентного фоторождения пиона на дейтроне в области Δ -резонанса	46
Секержицкий В. С., Серый А. И. О бета-равновесии электронно-нуклонного вещества при низких температурах	52

МАТЭМАТЫКА

Артеменко Н. В., Трофимук А. А. Конечные разрешимые группы порядка, свободного от четвертых степеней	62
Будько А. Е. О порядке следования команд в программах элементарных машин Тьюринга степени 2	69
Грицук Д. В. Оценки производной p -длины p -разрешимой группы в зависимости от порядка ее силовской p -подгруппы	79
Морозов В. В. Оценки граней непрерывных линейных операторов предбанаховых пространств	86
Юдов А. А., Кисилук Е. В. Дифференциальная геометрия однородных пространств со структурной группой – группой Ли движений пространства 1R_6	101

ПАМ'ЯЦІ ВУЧОНАГА

Владимир Станиславович Секержицкий	117
---	-----



Vesnik

of Brest University

Editorial Board

editor-in-chief
A. M. Sender

deputy editor-in-chief
A. Ya. Budzko

managing editor
M. M. Sender

A. B. Antanievich (Belarus)
A. I. Basik (Belarus)
V. M. Volkau (Belarus)
M. A. Gromau (Russia)
A. U. Dziamidchyk (Belarus)
M. I. Liauchuk (Belarus)
I. P. Martynau (Belarus)
A. I. Melkier (Russia)
V. S. Manakhau (Belarus)
U. A. Plietsiukhou (Belarus)
V. M. Razkou (Belarus)
V. R. Samoilenka (Ukraine)
A. A. Trafimuk (Belarus)
Uba Liuba (Poland)

Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment
«Brest State A. S. Pushkin University»

№ 2 / 2021

Registration Certificate
by Ministry of Information
of the Republic of Belarus
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:
224016, Brest,
21, Kosmonavtov Boulevard
tel.: +375-(162)-21-72-07
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 nr 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from February 16, 2021 nr 36 (with the amendments made by the orders of Supreme Certification Commission from March 16, 2021 nr 65, April 09, 2021 nr 105, April 28, 2021 nr 121, May 27, 2021 nr 147, July 06, 2021 nr 204, September 24, 2021 nr 237, October 21, 2021 nr 263) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» has been included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

CONTENTS

PHYSICS

Anton Buryy, Alina Ivashkevich, Elena Ovsyuk, Victor Red'kov Eigenvalue States of the Helicity Operator for Symmetric Tensor Describing the Spin 2 Field.....	5
Pyotr Kats, Sofiya Udovenko The Bethe – Weizsäcker Formula. Review and Selection of Coefficients.....	26
Elena Kokoulina, Michael Levchuk, Maxim Nevmerzhitsky, Kanstantsin Khvalei, Roman Shulyakovsky On the Component of the Tensor Asymmetry T_{20} in the Reaction of Coherent Pion Photoproduction on the Deuteron in the Δ -Resonance Region	46
Vladimir Sekerzhitsky, Alexey Sery On Beta-Equilibrium of Electron-Nucleon Matter at Low Temperatures	52

MATHEMATICS

Natalia Artemenko, Aleksandr Trofimuk Finite Soluble Groups of Fourth-Power Free Order.....	62
Aleksandr Budko On the Order of Following Commands in Programs of Elementary Turing Machines of Degree 2.....	69
Dmitry Gritsuk Estimates of the Derivative of the p-Length of the p-Solvable Group Depending on the Order of its Silov's p-Subgroup	79
Vladimir Morozov Estimates of the Faces of Continuous Linear Operators Before-Banach Spaces	86
Aleksandr Yudov, Elena Kisilyuk Differential Geometry of Homogeneous Spaces with a Structure Group – the Lie Group of Motions of the Space 1R_6	101

IN MEMORY OF THE SCIENTIST

Vladimir Sekerzhitsky	156
------------------------------------	-----

УДК 539.12

**Антон Васильевич Бурый¹, Алина Валентиновна Ивашкевич²,
Елена Михайловна Овсиук³, Виктор Михайлович Редьков⁴**

¹аспирант 1-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси

²аспирант 2-го года обучения центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси

³канд. физ.-мат. наук, зав. каф. теоретической физики и прикладной информатики
Мозырского государственного педагогического университета имени И. П. Шамякина

⁴д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник
центра фундаментальных взаимодействий и астрофизики
Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси

Oleg Buryy¹, Alina Ivashkevich², Elena Ovsyuk³, Victor Red'kov⁴

^{1,2}Graduate Student of B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus

³PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor,
Head of the Department of Theoretical Physics and Applied Informatics
of the Mозыр State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin

⁴PhD (Physics and Mathematics), Chief Researcher of the Center
Fundamental Interactions and Astrophysics of the B. I. Stepanov Institute of Physics
of the National Academy of Sciences of Belarus

e-mail: ¹anton.buryy.97@mail.ru; ²ivashkevich.alina@yandex.by;

³e.ovsyuk@mail.ru; ⁴v.redkov@ifanbel.bas-net.by

СОБСТВЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ОПЕРАТОРА СПИРАЛЬНОСТИ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПОЛЕ СО СПИНОМ 2

Для описания массивной и безмассовой частиц со спином 2 в подходе Паули – Фирца используется симметричный тензор Φ_{ab} второго ранга. В работе решена задача о нахождении всех собственных состояний оператора спиральности для симметричного тензора. Независимые компоненты симметричного тензора описываются 10-мерной функцией, соответственно, задача сводится к анализу уравнения на собственные значения в 10-мерном пространстве. Найден набор собственных значений: $\sigma = 0$ с кратностью 4, $\sigma = \pm i$ с кратностью 2, $\sigma = \pm 2i$ с кратностью 1; получены явные представления для 10 соответствующих собственных векторов. В случае массивной частицы 5 независимых решений исходной системы уравнений Паули – Фирца в виде плоских волн разложены в линейные комбинации по спиральным решениям. В случае безмассовой частицы два физических независимых решения, не содержащих калибровочных компонент, также разложены по спиральным состояниям.

Ключевые слова: гравитон, спин 2, симметричный тензор, плоские волны, собственные состояния оператора спиральности, спиральный базис, массивная и безмассовая частицы.

Eigenvalue States of the Helicity Operator for Symmetric Tensor Describing the Spin 2 Field

For describing the massive and massless spin 2 particles within the Pauli – Fierz approach a symmetric 2-rank tensor Φ_{ab} is applied. When classifying solutions of equation for particles with spin 2, a substantial role is played by the helicity operator. In the present paper, the task of finding all eigenvalues states of this operator for 2-rank symmetric tensor is solved. The eigenvalue problem reduces to analysis of the algebraic system for 10 independent components of the tensor Φ_{ab} . First, we find solution of this task in Cartesian basis; there arise the following eigenvalues: $\sigma = 0$ with degeneracy multiplicity 4, $\sigma = \pm i$ with degeneracy multiplicity 2, $\sigma = \pm 2i$ with degeneracy multiplicity 1. In explicit form, there are found corresponding eigenvectors. These results are transformed to the cyclic basis, when the third projection of the spin operator is diagonal. Solutions of the primary Pauli – Fierz equations in the form of plane waves are classified with the help of the helicity operator. In particular, the helicity structure of the gauge solutions in the massless case is established.

Key words: graviton, spin 2, symmetrical tensor, plane waves, eigenstates of the helicity operator, helicity basis, massive and massless particles.

Введение

Наиболее известным в теории поля со спином 2, массивного и безмассового [1–25], является подход Паули – Фирца [1; 2], он основан на системе уравнений 2-го порядка для симметричного спинора 2 ранга относительно группы Лоренца. Альтернативный и развитый значительно позже подход Федорова – Редже [7; 15] основан на общей теории релятивистских волновых уравнений 1-го порядка, он основан на сложном 30-компонентном представлении группы Лоренца, которое состоит из скаляра, 4-вектора, симметричного тензора второго ранга, тензора третьего ранга, антисимметричного по одной паре индексов. В его основе лежит лагранжев формализм, и все свойства симметрии тензоров вместе со всеми условиями связи на них содержатся в исходном лагранжиане [6; 14; 21; 22; 25].

Описания массивной и безмассовой частиц существенно различаются. В частности, в безмассовом случае существует специфическая калибровочная симметрия [1; 2], которая обобщает калибровочную симметрию в электродинамике Максвелла. Калибровочные степени свободы по самому своему определению не должны давать вклада в наблюдаемые величины типа тензора энергии-импульса поля, это приводит к необходимости выделять в безмассовом случае калибровочные решения, оставляя только физически наблюдаемые некалибровочные решения. В массивном случае возникают известные трудности полях [16–20] при рассмотрении частицы со спином 2 в присутствии внешних электромагнитных полей, они выражаются в том, что возникают аномальные решения, которые можно рассматривать как относящиеся к частицам, движущимся в пространстве со скоростями большими, чем скорость света. Новых трудностей в теории поля со спином 2 можно ожидать при учете внешних гравитационных полей, описываемых в рамках общей теории относительности на языке неевклидовой геометрии пространства-времени. Здесь особенно существенным является выбор исходного формализма в пространстве Минковского, который затем обобщается на общековариантный случай с учетом требований общей теории относительности. Это кажется как возникновение новых аномальных решений в массивном случае, так и проблем с калибровочными степенями свободы.

В настоящей работе решена задача о нахождении всех собственных состояний этого оператора. Независимые компоненты симметричного тензора описываются 10-мерной функцией, соответственно, задача сводится к анализу уравнения на собственные значения в 10-мерном пространстве. Сначала она решена в декартовом базисе, найдены следующие собственные значения: $\sigma = 0$ с кратностью 4, $\sigma = \pm i$ с кратностью 2, $\sigma = \pm 2i$ с кратностью 1; в явном виде найдены 10-мерные представления для соответствующих собственных векторов. Результаты преобразованы к циклическому базису, когда матрица третьей проекции спина для частицы со спином 2 диагональна. Решения исходной системы уравнений Паули – Фирца в виде плоских волн могут быть определенным образом классифицированы с использованием диагонализации оператора спиральности.

1. Генераторы для симметричного тензора 2-го ранга

Найдем явный вид оператора спина для симметричного тензора 2-го ранга. Известно, что для 4-вектора все 6 генераторов описываются формулой

$$(j^{mn})_a^b = \delta_a^m g^{nb} - \delta_a^n g^{mb}. \quad (1.1)$$

Будем использовать конечные преобразования Лоренца, которые порождают эти генераторы. Тензор второго ранга f_{ab} преобразуется по закону

$$f'_{ab} = L_a^k L_b^l f_{kl} \Rightarrow f' = Lf\tilde{L}, \quad (1.2)$$

транспонирование матриц обозначается символом \sim .

Рассматриваем преобразование в плоскости (1–2):

$$(L^{(12)})_a^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & +\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу преобразованного тензора представляем в виде (записываем его компоненты по столбцам)

$$f'_{ab} = \begin{pmatrix} f_{00} & \cos \gamma f_{01} - \sin \gamma f_{02} \\ \cos \gamma f_{10} - \sin \gamma f_{20} & \cos^2 \gamma f_{11} - \sin \gamma \cos \gamma (f_{12} + f_{21}) + \sin^2 \gamma f_{22} \\ \sin \gamma f_{10} + \cos \gamma f_{20} & \cos^2 \gamma f_{21} - \sin \gamma \cos \gamma (f_{11} - f_{22}) - \sin^2 \gamma f_{12} \\ f_{30} & \cos \gamma f_{31} - \sin \gamma f_{32} \\ \sin \gamma f_{01} + \cos \gamma f_{02} & f_{03} \\ \cos^2 \gamma f_{12} + \sin \gamma \cos \gamma (f_{11} - f_{22}) - \sin^2 \gamma f_{21} & \cos \gamma f_{13} - \sin \gamma f_{23} \\ \cos^2 \gamma f_{22} + \sin \gamma \cos \gamma (f_{12} + f_{21}) + \sin^2 \gamma f_{11} & \sin \gamma f_{13} + \cos \gamma f_{23} \\ \sin \gamma f_{31} + \cos \gamma f_{32} & f_{33} \end{pmatrix}.$$

Учитывая симметрию тензора, оставляем только 10 независимых величин, вводя для них специальные обозначения:

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{00}, & f_1 &= f_{11}, & f_2 &= f_{22}, & f_3 &= f_{33}, \\ d_1 &= f_{01}, & d_2 &= f_{02}, & d_3 &= f_{03}; & c_1 &= f_{23}, & c_2 &= f_{31}, & c_3 &= f_{12}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассматривая бесконечно малое преобразование $\gamma \rightarrow 0$, получаем

$$f'_{ab} = \begin{pmatrix} f_0 & d_1 - \gamma d_2 & \gamma d_1 + d_2 & d_3 \\ d_1 - \gamma d_2 & f_1 - 2\gamma c_3 & c_3 + \gamma(f_1 - f_2) & c_2 - \gamma c_1 \\ \gamma d_1 + d_2 & c_3 + \gamma(f_1 - f_2) & f_2 + 2\gamma c_3 & \gamma c_2 + c_1 \\ d_3 & c_2 - \gamma c_1 & +\gamma c_2 + c_1 & f_3 \end{pmatrix}.$$

В 10-мерном представлении имеем соотношение, которое определяет генератор $S_3 = J^{12}$:

$$\Phi' = I + \gamma J^{12}, \quad = I + \gamma \begin{pmatrix} f'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c'_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c'_3 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ d'_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f'_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічна, ісходзя з прэабразавання в плоскасці (2–3), знайдзем генератар $S_1 = J^{23}$:

$$(L^{(23)})_a^k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & 0 & +\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix},$$

$$\Phi' = I + \gamma J^{23}, \quad \begin{vmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ f'_0 \end{vmatrix} = I + \gamma \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{vmatrix}.$$

Наконец, находим генератор $S_2 = J^{31}$:

$$(L^{(31)})_a^k = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{vmatrix},$$

$$\Phi' = I + \gamma J^{31}, \quad \begin{vmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ f'_3 \\ c'_1 \\ c'_2 \\ c'_3 \\ d'_1 \\ d'_2 \\ d'_3 \\ f'_0 \end{vmatrix} = I + \gamma \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{vmatrix}.$$

Использованные преобразования Лоренца над 4-вектором порождают генераторы

$$L^{(12)} \Rightarrow j^{12} = s_3, \quad L^{(23)} \Rightarrow j^{23} = s_1, \quad L^{(31)} \Rightarrow j^{31} = s_2;$$

они подчиняются коммутационным соотношениям

$$s_1 s_2 - s_2 s_1 = +s_3, \quad s_2 s_3 - s_3 s_2 = +s_1, \quad s_3 s_1 - s_1 s_3 = +s_2. \quad (1.4)$$

Убеждаемся, что такие же коммутационные соотношения выполняются и для 10-мерных генераторов в пространстве симметричного тензора.

2. Собственные состояния оператора спиральности

При классификации решений уравнения для частицы со спином 2, например, в виде плоских волн или при рассмотрении частицы во внешнем однородном магнитном поле существенную роль играет оператор спиральности для симметричного тензора второго ранга. Этот оператор определяется равенством

$$\Sigma = i \left(S_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + S_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + S_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right). \quad (2.1)$$

Исследуем задачу о построении собственных векторов для этого оператора. Будем иметь в виду решения в виде плоских волн $\Phi = e^{-ik_0 x^0 - ik_n x^n} f$. Тогда уравнение на собственные значения для оператора спиральности имеет вид

$$(k_1 S_1 + k_2 S_2 + k_3 S_3) \Phi = \sigma \Phi. \quad (2.2)$$

Последнее уравнение можно привести к безразмерной форме:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{-2}} \Rightarrow \sigma, \quad (n_1 S_1 + n_2 S_2 + n_3 S_3) \Phi = \sigma \Phi, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1. \quad (2.3)$$

С учетом выражений для компонент оператора спина S_1, S_2, S_3 это уравнение записываем в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2n_1 & 0 & +2n_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +2n_1 & -2n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +n_1 & -n_1 & 0 & +n_3 & -n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & 0 & +n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_3 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +n_3 & 0 & -n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & +n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ f_0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Замечаем, что уравнение, определяемое последней строкой, сводится к следующему:

$$0 = \sigma f_0 \Rightarrow \sigma = 0, \quad f_0 - \text{любое}; \quad \sigma \neq 0, \quad f_0 = 0. \quad (2.5)$$

Рассматриваем подсистему из 9 уравнений из (2.4), определитель матрицы 9×9 приравняем к нулю:

$$\det \begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 & -2n_1 & 0 & +2n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & +2n_1 & -2n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +n_1 & -n_1 & -\sigma & +n_3 & -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & -\sigma & +n_1 & 0 & 0 & 0 \\ +n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & -\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma & -n_3 & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +n_3 & -\sigma & -n_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_2 & +n_1 & -\sigma \end{vmatrix} = -\sigma^3(\sigma^2+1)^2(\sigma^2+4).$$

Следовательно, имеем собственные значения

$$\sigma = 0 \text{ (кратность 3); } \sigma = \pm i \text{ (кратность 2); } \sigma = \pm 2i \text{ (кратность 1)}. \quad (2.6)$$

Замечаем, что система из 9 уравнений распадается на две несвязанные подсистемы: $9 = 6 + 3$. Сначала рассматриваем подсистему из 6 уравнений:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 \\ 0 & -\sigma & 0 & -2n_1 & 0 & 2n_3 \\ 0 & 0 & -\sigma & 2n_1 & -2n_2 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_1 & -\sigma & n_3 & -n_2 \\ -n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & -\sigma & n_1 \\ n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & -\sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \det = \sigma^2(1+\sigma^2)(4+\sigma^2). \quad (2.7)$$

Исследуем случай $\sigma = 0$. При этом ранг матрицы равен 4, отбрасываем уравнения, отвечающие нижней и верхней строкам. Свободными параметрами выбираем f_1, c_3 . Получаем неоднородную систему с ненулевым определителем:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2n_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2n_1 & -2n_2 \\ n_1 & -n_1 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & -n_3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2n_3c_3 \\ 0 \\ n_2c_3 \\ n_2f_1 - n_1c_3 \end{vmatrix},$$

решение имеет вид

$$\sigma = 0, \quad \begin{vmatrix} f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = c_3 \begin{vmatrix} \frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2} \\ \frac{n_3^2 - n_1^2}{n_1 n_2} \\ \frac{n_3}{n_1} \\ \frac{n_3}{n_2} \end{vmatrix} + f_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Исследуем систему 6 уравнений (2.7) при $\sigma = +i$:

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 & 2n_2 & -2n_3 \\ 0 & -i & 0 & -2n_1 & 0 & 2n_3 \\ 0 & 0 & -i & 2n_1 & -2n_2 & 0 \\ 0 & n_1 & -n_1 & -i & n_3 & -n_2 \\ -n_2 & 0 & n_2 & -n_3 & -i & n_1 \\ n_3 & -n_3 & 0 & n_2 & -n_1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Ранг матрицы равен 5. Отбрасываем уравнение, отвечающее нижней строке. Пусть c_3 – свободный параметр, решение имеет вид

$$\sigma = +i, \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4(3n_2^2 - 1)n_1^2 - 4n_2^2 - n_3^2 + 1} \times \begin{pmatrix} -2c_3(-4n_2n_1^3 + 4in_3n_1^2 + n_2(2n_2^2 + 2n_3^2 + 1)n_1 + in_3(n_2^2 + n_3^2 - 1)) \\ -2c_3(2n_2n_1^3 - in_3n_1^2 + n_2(-4n_2^2 + 2n_3^2 + 1)n_1 - in_3(4n_2^2 + n_3^2 - 1)) \\ 2c_3(4n_1n_2n_3^2 + 3i(n_1^2 - n_2^2)n_3 - 2n_1n_2(n_1^2 + n_2^2 - 1)) \\ ic_3(2n_2n_3^2 + 3in_1(1 - 4n_2^2)n_3 + n_2(2n_1^2 - 4n_2^2 + 1)) \\ c_3(4in_1^3 + 12n_2n_3n_1^2 - i(2n_2^2 + 2n_3^2 + 1)n_1 - 3n_2n_3) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Знаменатель можно преобразовать так:

$$4(3n_2^2 - 1)n_1^2 - 4n_2^2 - n_3^2 + 1 = 3(4n_1^2n_2^2 - n_1^2 - n_2^2) = A.$$

Решение со спиральностью $\sigma = -i$ следует из найденного заменой $i \rightarrow -i$. Замечаем, что выражения для комбинаций

$$\Psi_+ = \psi_{\sigma=+i} + \psi_{\sigma=-i}, \quad \Psi_- = \psi_{\sigma=+i} - \psi_{\sigma=-i}$$

будут иметь более простой вид (вещественный и чисто мнимый):

$$\Psi_+ = \frac{c_3}{A} \begin{pmatrix} 4n_1n_2(4n_1^2 - 2n_2^2 - 2n_3^2 - 1) \\ -4n_1n_2(2n_1^2 - 4n_2^2 + 2n_3^2 + 1) \\ -8n_1n_2(n_1^2 + n_2^2 - 2n_3^2 - 1) \\ 6n_1n_3(4n_2^2 - 1) \\ 6n_2n_3(4n_1^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad \Psi_- = \frac{ic_3}{A} \begin{pmatrix} 4n_3(4n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 1) \\ -4n_3(4n_2^2 + n_1^2 + n_3^2 - 1) \\ 12n_3(n_1^2 - n_2^2) \\ 2n_2(2n_1^2 - 4n_2^2 + 2n_3^2 + 1) \\ 2n_1(4n_1^2 - 2n_2^2 - 2n_3^2 - 1) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

После упрощения получаем

$$\Psi_+ = \frac{c_3}{A} \begin{vmatrix} 12n_1n_2(2n_1^2 - 1) \\ -12n_1n_2(1 - n_2^2) \\ 24n_1n_2n_3^2 \\ 6n_1n_3(4n_2^2 - 1) \\ 6n_2n_3(4n_1^2 - 1) \end{vmatrix}, \quad \Psi_- = \frac{ic_3}{A} \begin{vmatrix} 12n_1^2n_3 \\ -12n_2^2n_3 \\ 12n_3(n_1^2 - n_2^2) \\ 6n_2(1 - 2n_2^2) \\ 6n_1(2n_1^2 - 1) \end{vmatrix}. \quad (2.11)$$

Аналогично исследуем систему 6 уравнений (2.7) при $\sigma = +2i$. Ранг матрицы равен 5. Отбрасываем уравнение, отвечающее нижней строке. Пусть c_3 – свободный параметр, решение имеет вид

$$\sigma = +2i, \quad \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{(3n_2^2 - 4)n_1^2 - 4n_2^2 - n_3^2 + 4} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} c_3(2n_2n_1^3 - 4in_3n_1^2 - n_2(n_2^2 + n_3^2 + 2)n_1 - in_3(n_2^2 + n_3^2 - 4)) \\ -c_3(n_2n_1^3 - in_3n_1^2 + n_2(-2n_2^2 + n_3^2 + 2)n_1 - in_3(4n_2^2 + n_3^2 - 4)) \\ -c_3(-2n_1n_2n_3^2 - 3i(n_1^2 - n_2^2)n_3 + n_1n_2(n_1^2 + n_2^2 - 4)) \\ ic_3(n_2n_3^2 - 3in_1(n_2^2 - 1)n_3 + n_2(n_1^2 - 2n_2^2 + 2)) \\ c_3(2in_1^3 + 3n_2n_3n_1^2 - i(n_2^2 + n_3^2 + 2)n_1 - 3n_2n_3) \end{vmatrix}. \quad (2.12)$$

Знаменатель можно преобразовать так:

$$(3n_2^2 - 4)n_1^2 - 4n_2^2 - n_3^2 + 4 = 3(n_1^2n_2^2 + n_3^2) = B.$$

Решение со спиральностью $\sigma = -2i$ следует из найденного заменой $i \rightarrow -i$. Выражения для комбинаций

$$\Phi_+ = \Psi_{\sigma=+2i} + \Psi_{\sigma=-2i}, \quad \Phi_- = \Psi_{\sigma=+2i} - \Psi_{\sigma=-2i}$$

будут иметь более простой вид:

$$\psi_+ = \frac{c_3}{B} \begin{vmatrix} 2n_1n_2(2n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 - 2) \\ -2n_1n_2(n_1^2 - 2n_2^2 + n_3^2 + 2) \\ -2n_1n_2(n_1^2 + n_2^2 - 2(n_3^2 + 2)) \\ 6n_1n_3(n_2^2 - 1) \\ 6n_2n_3(n_1^2 - 1) \end{vmatrix}, \quad \psi_- = \frac{ic_3}{B} \begin{vmatrix} 2n_3(4n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - 4) \\ -2n_3(n_1^2 + 4n_2^2 + n_3^2 - 4) \\ 6n_3(n_1^2 - n_2^2) \\ 2n_2(n_1^2 - 2n_2^2 + n_3^2 + 2) \\ 2n_1(2n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 - 2) \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

После упрощения получаем

$$\psi_+ = \frac{c_3}{B} \begin{vmatrix} 6n_1n_2(n_1^2 - 1) \\ -6n_1n_2(1 - n_2^2) \\ 6n_1n_2(n_3^2 + 1) \\ 6n_1n_3(n_2^2 - 1) \\ 6n_2n_3(n_1^2 - 1) \end{vmatrix}, \quad \psi_- = \frac{ic_3}{B} \begin{vmatrix} 6n_3(n_1^2 - 1) \\ -6n_3(n_2^2 - 1) \\ 6n_3(n_1^2 - n_2^2) \\ 6n_2(1 - n_2^2) \\ 6n_1(n_1^2 - 1) \end{vmatrix}. \quad (2.14)$$

Теперь рассмотрим подсистему из трех уравнений:

$$\begin{vmatrix} -\sigma & -n_3 & n_2 \\ n_3 & -\sigma & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & -\sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \det = -\sigma(1 + \sigma^2). \quad (2.15)$$

Сначала исследуем случай $\sigma = 0$:

$$\begin{vmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ранг матрицы равен 2. Отбрасываем уравнение, соответствующее нижней строке, свободной переменной выбираем d_3 . Решение имеет вид

$$\sigma = 0, \quad d_1 = \frac{n_1}{n_3} d_3, \quad d_2 = \frac{n_2}{n_3} d_3. \quad (2.16)$$

Теперь исследуем случай $\sigma = +i$:

$$\begin{vmatrix} -i & -n_3 & n_2 \\ n_3 & -i & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ранг равен 2, отбрасываем уравнение, соответствующее нижней строке, свободной переменной выбираем d_3 . Решение имеет вид

$$\sigma = +i, \quad \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \end{vmatrix} = \frac{d_3}{n_3^2 - 1} \begin{vmatrix} in_2 + n_1n_3 \\ n_2n_3 - in_1 \end{vmatrix}. \quad (2.17)$$

Решение со спиральностью $\sigma = -i$ следует из найденного заменой $i \rightarrow -i$. Более простые решения задаются равенствами

$$\Psi_+ = d_3 \begin{vmatrix} 2n_1n_3 \\ n_3^2 - 1 \\ 2n_2n_3 \\ n_3^2 - 1 \end{vmatrix}, \quad \Psi_- = \frac{id_3}{n_3^2 - 1} \begin{vmatrix} 2n_2 \\ -2n_1 \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Соберем результаты о структуре собственных состояний оператора спиральности вместе

$$\begin{array}{lll}
6: & \sigma = 0, & f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0, \vec{d} = 0, f_1 = 0, c_3 - \text{любое}; \\
6: & \sigma = 0, & f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0, \vec{d} = 0, f_1 - \text{любое}, c_3 = 0; \\
6: & \sigma = \pm i, & f_1, f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0, \vec{d} = 0, c_3 - \text{любое}; \\
6: & \sigma = \pm 2i, & f_1, f_2, f_3, c_1, c_2, & f_0 = 0, \vec{d} = 0, c_3 - \text{любое}; \\
3: & \sigma = 0, & d_1, d_2, & f_0 = 0, \vec{f} = 0, \vec{c} = 0, d_3 - \text{любое}; \\
3: & \sigma = \pm i, & d_1, d_2, & f_0 = 0, \vec{f} = 0, \vec{c} = 0, d_3 - \text{любое}; \\
1: & \sigma = 0, & f_0, & \vec{f} = 0, \vec{c} = 0, \vec{d} = 0, f_0 - \text{любое}.
\end{array} \quad (2.19)$$

3. Классификация решений и оператор спиральности

Будем следить за известными пятью независимыми решениями уравнений Паули – Фирца для массивной частицы [26] (выбираем нормировочные множители из соображений простоты; используем обозначение $n_j = k_j/k$, $k_0/k = E$, $E > 0$):

$$\begin{array}{l}
\Phi_1 = \begin{vmatrix} 2En_1n_2 \\ 0 \\ E(E^2 - n_1n_2) \\ n_2(E^2 + n_1^2) \\ n_1(E^2 - n_1^2) \end{vmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{vmatrix} 2En_1n_2 \\ 0 \\ E(E^2 - n_2^2) \\ n_2(E^2 - n_2^2) \\ n_1(E^2 + n_2^2) \end{vmatrix}, \quad \Phi_3 = \begin{vmatrix} 2En_1n_2 \\ -2En_2n_3 \\ E(E^2 + n_3^2) \\ n_2(E^2 - n_3^2) \\ n_1(E^2 + n_3^2) \end{vmatrix}, \\
\Phi_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ -2En_2^2 \\ 0 \\ -2n_2^2n_3 \\ 2n_1n_2n_3 \end{vmatrix}, \quad \Phi_5 = \begin{vmatrix} 0 \\ 2E^2n_2 \\ -2E^2n_3 \\ 0 \\ -2En_1n_3 \end{vmatrix}.
\end{array} \quad (3.1)$$

К аналогичной форме приводим выражения и для спиральных решений:

$$\sigma = 0, \quad \Psi_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ n_2^2 - n_1^2 \\ n_3^2 - n_1^2 \\ n_2n_3 \\ n_1n_3 \\ n_1n_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_4 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad (3.2)$$

$$\sigma = \pm i,$$

$$\Psi_5 = \begin{vmatrix} 12n_1n_2(2n_1^2-1) \\ -12n_1n_2(1-n_2^2) \\ 24n_1n_2n_3^2 \\ 6n_1n_3(4n_2^2-1) \\ 6n_2n_3(4n_1^2-1) \\ 3(4n_1^2n_2^2-n_1^2-n_2^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_6 = \begin{vmatrix} i12n_1^2n_3 \\ -i12n_2^2n_3 \\ i12n_3(n_1^2-n_2^2) \\ i6n_2(1-2n_2^2) \\ i6n_1(2n_1^2-1) \\ 3(4n_1^2n_2^2-n_1^2-n_2^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_7 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2n_1n_3 \\ 2n_2n_3 \\ n_3^2-1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_8 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2n_2i \\ -2n_1i \\ n_3^2-1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (3.3)$$

$$\sigma = \pm 2i, \quad \Psi_9 = \begin{vmatrix} 6n_1n_2(n_1^2-1) \\ -6n_1n_2(1-n_2^2) \\ 6n_1n_2(n_3^2+1) \\ 6n_1n_3(n_2^2-1) \\ 6n_2n_3(n_1^2-1) \\ 3(n_1^2n_2^2+n_3^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \Psi_{10} = \begin{vmatrix} i6n_3(n_1^2-1) \\ -i6n_3(n_2^2-1) \\ i6n_3(n_1^2-n_2^2) \\ i6n_2(1-n_2^2) \\ i6n_1(n_1^2-1) \\ 3(n_1^2n_2^2+n_3^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

Должны существовать линейные разложения пяти известных решений по спиральным:

$$\begin{aligned} x_1\Psi_1 + x_2\Psi_2 + x_3\Psi_3 + x_4\Psi_4 + x_5\Psi_5 + x_6\Psi_6 + x_7\Psi_7 + x_8\Psi_8 + x_9\Psi_9 + x_{10}\Psi_{10} &= \Phi_1, \\ x_1\Psi_1 + x_2\Psi_2 + x_3\Psi_3 + x_4\Psi_4 + x_5\Psi_5 + x_6\Psi_6 + x_7\Psi_7 + x_8\Psi_8 + x_9\Psi_9 + x_{10}\Psi_{10} &= \Phi_2, \\ x_1\Psi_1 + x_2\Psi_2 + x_3\Psi_3 + x_4\Psi_4 + x_5\Psi_5 + x_6\Psi_6 + x_7\Psi_7 + x_8\Psi_8 + x_9\Psi_9 + x_{10}\Psi_{10} &= \Phi_3, \\ x_1\Psi_1 + x_2\Psi_2 + x_3\Psi_3 + x_4\Psi_4 + x_5\Psi_5 + x_6\Psi_6 + x_7\Psi_7 + x_8\Psi_8 + x_9\Psi_9 + x_{10}\Psi_{10} &= \Phi_4, \\ x_1\Psi_1 + x_2\Psi_2 + x_3\Psi_3 + x_4\Psi_4 + x_5\Psi_5 + x_6\Psi_6 + x_7\Psi_7 + x_8\Psi_8 + x_9\Psi_9 + x_{10}\Psi_{10} &= \Phi_5. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Каждое из этих пяти разложений дает десятимерную линейную неоднородную систему уравнений (используем матричную запись):

$$AX = \Phi_s, \quad s = 1, 2, 3, 4, 5; \quad X = \{x_i\}, \quad i = 1, \dots, 10; \quad (3.6)$$

столбцы матрицы A совпадают со спиральными решениями Ψ_j . В общем случае матрица A оказывается очень громоздкой, поэтому исследуем более простые случаи.

Пусть $n_1 = 0$, при этом разложение для Φ_1 определяется соотношениями

$$X_{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{iE^2 n_3 (n_3^2 - 1)}{n_3^2 + 1} \\ -\frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \frac{iE^2 (n_3^2 - 1)}{2(n_3^2 + 1)} \\ -\frac{iE^2}{2} \\ \frac{E^3}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1 = x_4 \Psi_4 + x_5 \Psi_5 + x_7 \Psi_7 + x_8 \Psi_8 + x_9 \Psi_9. \quad (3.7)$$

Аналогично находим остальные четыре решения:

$$X_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{in_3 (n_3^2 - 1)(E^2 + n_3^2 - 1)}{n_3^2 + 1} \\ -\frac{1}{3}E(E^2 + n_3^2 - 1) \\ 0 \\ \frac{i(n_3^2 - 1)(E^2 + n_3^2 - 1)}{2(n_3^2 + 1)} \\ -\frac{1}{2}i(E^2 + n_3^2 - 1) \\ \frac{1}{3}E(E^2 + n_3^2 - 1) \\ 0 \end{pmatrix}, X_{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{in_3 (E^2 - n_3^2)(n_3^2 - 1)}{n_3^2 + 1} \\ -\frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \frac{i(n_3^2 - 1)(n_3^2 - E^2)}{2(n_3^2 + 1)} \\ -\frac{1}{2}i(E^2 - n_3^2) \\ \frac{1}{3}(E^3 + E) \\ 0 \end{pmatrix}, X_{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{in_3^2 (n_3^2 - 1)}{n_3^2 + 1} \\ \frac{En_3}{6} \\ 0 \\ \frac{in_3 (n_3^2 - 1)}{2(n_3^2 + 1)} \\ \frac{in_3}{2} \\ \frac{E(n_3^2 - 1)}{6n_3} \\ 0 \end{pmatrix}, X_{(5)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{En_3}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E(n_3^2 + 1)}{6n_3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай $n_2 = 0$, здесь имеем следующие пять решений:

$$\begin{aligned}
 X_{(1)} = & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \frac{in_3(n_3^2-1)(E^2+n_3^2-1)}{n_3^2+1} \\ \hline -\frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \hline \frac{i(n_3^2-1)(E^2+n_3^2-1)}{2(n_3^2+1)} \\ \hline \frac{1}{2}i(E^2+n_3^2-1) \\ \hline \frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \hline \end{array}, & X_{(2)} = & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \frac{iE^2n_3(n_3^2-1)}{n_3^2+1} \\ \hline -\frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \hline \frac{iE^2(n_3^2-1)}{2(n_3^2+1)} \\ \hline \frac{iE^2}{2} \\ \hline \frac{E^3}{3} \\ 0 \\ \hline \end{array}, & X_{(3)} = & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \frac{in_3(n_3^2-1)(E^2+n_3^2)}{n_3^2+1} \\ \hline -\frac{1}{3}E(E^2+n_3^2) \\ 0 \\ \hline \frac{i(n_3^2-1)(E^2+n_3^2)}{2(n_3^2+1)} \\ \hline \frac{1}{2}i(E^2+n_3^2) \\ \hline \frac{1}{3}E(E^2+n_3^2) \\ 0 \\ \hline \end{array}, \\
 X_{(4)} = & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \frac{in_3^2(n_3^2-1)}{n_3^2+1} \\ \hline -\frac{En_3}{6} \\ 0 \\ \hline \frac{in_3(n_3^2-1)}{2(n_3^2+1)} \\ \hline \frac{in_3}{2} \\ \hline \frac{E(n_3^2-1)}{6n_3} \\ 0 \\ \hline \end{array}, & X_{(5)} = & \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \frac{in_3^2(n_3^2-1)}{n_3^2+1} \\ \hline \frac{En_3}{3} \\ 0 \\ \hline \frac{in_3(n_3^2-1)}{2(n_3^2+1)} \\ \hline -\frac{in_3}{2} \\ \hline -\frac{En_3}{3} \\ 0 \\ \hline \end{array}. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Пусть теперь $n_3 = 0$, в этом случае имеем решения:

$$X_{(1)} = \frac{2En_2\sqrt{1-n_2^2} \left(\frac{(n_2^6 - 7n_2^4 + 7n_2^2 - 2)(E^3 - En_2\sqrt{1-n_2^2})}{n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1} + E \left(\frac{2n_2^6 + n_2^4 + 4n_2^2 - 4}{2(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} - 1 \right) \right) + En_2\sqrt{1-n_2^2} \left(-6E^2 + n_2 \left(n_2 \left(10E^2 + 2n_2 \left(n_2 \left(-E^2 + n_2 \left(n_2 + \sqrt{1-n_2^2} \right) - 4 \right) - 5\sqrt{1-n_2^2} \right) + 7 \right) + 6\sqrt{1-n_2^2} \right) - 2 \right)}{n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1} - \frac{2E^2n_2\sqrt{1-n_2^2} \left(E \left(n_2 \left(n_2 \left(n_2^4 - 5n_2^2 - 4\sqrt{1-n_2^2}n_2 + 4E^2 + 4 \right) + 2\sqrt{1-n_2^2} \right) - 2E^2 \right) \right)}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} - \frac{1}{2}i \left(E^2 + (1 - 2E^2)n_2^2 - 1 \right) + \frac{1}{2}i \left(E^2 + (1 - 2E^2)n_2^2 - 1 \right) + \frac{E \left(n_2 \left(n_2 \left(2E^2 - 2n_2 \left(n_2 \left(-E^2 + n_2\sqrt{1-n_2^2} + 2 \right) + \sqrt{1-n_2^2} \right) + 3 \right) + 2\sqrt{1-n_2^2} \right) - 2E^2 \right)}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} - 2E^2}{0}$$

$$X_{(2)} = \frac{2En_2\sqrt{1-n_2^2} \left(\frac{En_2\sqrt{1-n_2^2} \left(-2n_2^8 + 2(E^2 + 2)n_2^6 + (1 - 14E^2)n_2^4 + (14E^2 - 1)n_2^2 - 4E^2 \right)}{n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1} + \frac{En_2\sqrt{1-n_2^2} \left(2n_2^6 - 2(E^2 + 2)n_2^4 + (10E^2 + 1)n_2^2 - 6E^2 + 1 \right)}{n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1} \right) + \frac{2E^2n_2\sqrt{1-n_2^2} \left(E \left(-n_2^6 + 2n_2^4 + (1 - 4E^2)n_2^2 + 2E^2 \right) \right)}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} - \frac{1}{2}i \left(E^2 + (1 - 2E^2)n_2^2 \right) + \frac{1}{2}i \left(E^2 + (1 - 2E^2)n_2^2 \right) + \frac{E \left(-2E^2 + n_2 \left(2E^2 + 2n_2 \left(E^2 + n_2^2 - 3 \right) + 1 \right) + 1 \right)}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} - 2E^2}{0}$$

$$X_{(3)} = \frac{2En_2\sqrt{1-n_2^2}}{En_2\sqrt{1-n_2^2}\left(n_2^2\left(14E^2+2n_2^2\left(2n_2^4+(E^2-4)n_2^2-7E^2+4\right)-3\right)-4E^2\right)} \cdot \frac{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}{En_2\sqrt{1-n_2^2}\left(-6E^2+2n_2^2\left(5E^2-n_2^2\left(E^2+n_2^2-1\right)-1\right)+1\right)} \cdot \frac{2E^2n_2\sqrt{1-n_2^2}}{E\left(2n_2^2-1\right)\left(-n_2^4+n_2^2+2E^2\right)} \cdot \frac{0}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}iE^2\left(2n_2^2-1\right)}{\frac{1}{2}iE^2\left(1-2n_2^2\right)} \cdot \frac{E\left(-2E^2+2n_2^2\left(-2n_2^4+(E^2+4)n_2^2+E^2-1\right)-1\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \cdot 0$$

$$X_{(4)} = \frac{0}{iEn_2^2\left(n_2^8-8n_2^6+14n_2^4-9n_2^2+2\right)} \cdot \frac{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}{iEn_2^2\left(n_2^6-6n_2^4+8n_2^2-3\right)} \cdot \frac{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}{0} \cdot \frac{iEn_2\left(1-2n_2^2\right)\sqrt{1-n_2^2}}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \cdot \frac{0}{0} \cdot \frac{0}{0} \cdot \frac{iEn_2\sqrt{1-n_2^2}\left(n_2^4+n_2^2-1\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \cdot \frac{E}{6n_2\sqrt{1-n_2^2}}$$

$$X_{(5)} = \frac{0}{iEn_2^2\left(n_2^2-1\right)^2\left(n_2^6-7n_2^4+7n_2^2-2\right)} \cdot \frac{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}{iEn_2^2\left(n_2^2-1\right)^2\left(n_2^4-5n_2^2+3\right)} \cdot \frac{n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1}{0} \cdot \frac{iE\sqrt{1-n_2^2}\left(2n_2^5-3n_2^3+n_2\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \cdot \frac{En_2\sqrt{1-n_2^2}}{6-12n_2^2} \cdot \frac{-n_2\sqrt{1-n_2^2}}{0} \cdot \frac{iEn_2\sqrt{1-n_2^2}\left(n_2^6-2n_2^2+1\right)}{6\left(n_2^8-4n_2^6+6n_2^4-n_2^2-1\right)} \cdot \frac{En_2}{6\sqrt{1-n_2^2}}$$

Теперь обращаемся к случаю безмассовой частицы. Здесь физическими решениями, не содержащими калибровочных компонент, являются только два [25]:

$$\Phi_1^{phys} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_1 \\ -n_2 \\ 0 \\ -n_2 n_3 \\ n_1 n_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2^{phys} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ n_2 \\ -n_3 \\ 0 \\ -n_1 n_3 \\ n_1 n_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Эти решения должны раскладываться по спиральным, как и в массивном случае. Также рассматриваем три простых случая.

При $n_1 = 0$ находим следующие решения:

$$\Phi_1^{phys}, X_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{in_3^2(n_3^2-1)}{n_3^2+1} \\ \frac{n_3}{6} \\ 0 \\ \frac{in_3(n_3^2-1)}{2(n_3^2+1)} \\ \frac{in_3}{2} \\ -\frac{n_3^2-1}{6n_3} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Phi_2^{phys}, X_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{n_3}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{n_3^2+1}{6n_3} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

При $n_2 = 0$ имеем разложения

$$\Phi_1^{phys}, X_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_3 - \frac{1}{n_3} \\ \frac{n_3^2 - 1}{n_3^3} \\ n_3 \left(1 - \frac{2}{n_3^2 + 1} \right) \\ \frac{i(n_3^2 - 1)^2}{6n_3^2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{n_3^2 + 1} - 1 \\ 0 \\ \frac{i(n_3^2 - 1)^2}{6n_3^2} \\ \frac{1}{6} \left(-2 + \frac{3}{n_3^2} - \frac{1}{n_3^4} \right) \end{pmatrix}, \quad \Phi_2^{phys}, X_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{n_3} - n_3 \\ \frac{1}{n_3^3} - \frac{1}{n_3} \\ 0 \\ \frac{n_3}{3} - \frac{i(n_3^2 - 1)^2}{6n_3^2} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{i(n_3^2 - 1)^2}{6n_3^2} - \frac{n_3}{3} \\ \frac{1}{6} \left(2 - \frac{3}{n_3^2} + \frac{1}{n_3^4} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

При $n_3 = 0$ имеем разложения

$$X_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{in_2(n_2^2 - 1)^2(n_2^6 - 7n_2^4 + 7n_2^2 - 2)\sqrt{1 - n_2^2}}{n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1} \\ -\frac{in_2(n_2^2 - 1)^2(n_2^4 - 5n_2^2 + 3)\sqrt{1 - n_3^2}}{n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1} \\ -\frac{\sqrt{1 - n_2^2}n_3\sqrt{1 - n_3^2}}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} \\ \frac{i(1 - n_2^2)^{3/2}(2n_2^2 - 1)\sqrt{1 - n_3^2}}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} \\ \frac{\sqrt{1 - n_2^2}\sqrt{1 - n_3^2}}{12n_2^2 - 6} \\ -\frac{1}{2}in_2n_3\sqrt{1 - n_3^2} \\ \frac{1}{2}in_2n_3\sqrt{1 - n_3^2} \\ \frac{i(1 - n_2^2)^{3/2}(n_2^4 + n_2^2 - 1)\sqrt{1 - n_3^2}}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} \\ \frac{\sqrt{1 - n_3^2}}{6\sqrt{1 - n_2^2}} \end{pmatrix}$$

$$X_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{in_2(n_2^6 - 7n_2^4 + 7n_2^2 - 2)(n_2^2 - 1)^2 \sqrt{1 - n_3^2} - 2i\sqrt{1 - n_2^2}n_3}{n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1} \\ \frac{in_2(n_2^6 - 6n_2^4 + 8n_2^2 - 3)(2in_3 - (1 - n_2^2)^{3/2} \sqrt{1 - n_3^2})}{\sqrt{1 - n_2^2}(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} \\ 0 \\ \frac{(2n_2^2 - 1)(i\sqrt{1 - n_3^2}(1 - n_2^2)^{3/2} + 2n_3)}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} \\ \frac{\sqrt{1 - n_2^2} \sqrt{1 - n_3^2}}{6 - 12n_2^2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{i(n_2^4 + n_2^2 - 1)(2in_3 - (1 - n_2^2)^{3/2} \sqrt{1 - n_3^2})}{6(n_2^8 - 4n_2^6 + 6n_2^4 - n_2^2 - 1)} \\ -\frac{\sqrt{1 - n_3^2}}{6\sqrt{1 - n_2^2}} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Заклучение

Решена задача о нахождении всех собственных состояний оператора спиральности для симметричного тензора 2-го ранга, описывающего поле со спином 2. Независимые компоненты симметричного тензора описываются 10-мерной функцией, соответственно, задача сводится к анализу уравнения на собственные значения в 10-мерном пространстве. Найден набор собственных значений: $\sigma = 0$ с кратностью 4, $\sigma = \pm i$ с кратностью 2, $\sigma = \pm 2i$ с кратностью 1; получены явные представления для 10 соответствующих собственных векторов. В случае массивной частицы 5 независимых решений исходной системы уравнений Паули – Фирца в виде плоских волн разложены в линейные комбинации по спиральным решениям. В случае безмассовой частицы два физических независимых решения, не содержащих калибровочных компонент, также разложены по спиральным состояниям.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.
2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.
3. De Broglie, L. Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1941. – Vol. 212. – P. 657–659.

4. Pauli, W. Relativistic field theories of elementary particles / W. Pauli // *Rev. Mod. Phys.* – 1941. – Vol. 13. – P. 203–232.
5. Гельфанд, И. М. Общие релятивистски инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // *Журн. эксперимент. и теорет. физики.* – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
6. Фрадкин, Э. Е. К теории частиц с высшими спинами / Э. Е. Фрадкин // *Журн. эксперимент. и теорет. физики.* – 1950. – Т. 20, вып. 1. – С. 27–38.
7. Федоров, Ф. И. К теории частицы со спином 2 / Ф. И. Федоров // *Учен. зап. БГУ. Сер. физ.-мат.* – 1951. – Вып. 12. – С. 156–173.
8. Крылов, Б. В. Уравнения первого порядка для гравитона / Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // *Докл. АН БССР.* – 1967. – Т. 11. – С. 681–684.
9. Богуш, А. А. О матрицах уравнений для частиц со спином 2 / А. А. Богуш, Б. В. Крылов, Ф. И. Федоров // *Вес. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1968. – № 1. – С. 74–81.
10. Федоров, Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля / Ф. И. Федоров // *Докл. АН СССР.* – 1968. – Т. 179, № 4. – С. 802–805.
11. Крылов, Б. В. О системах уравнений первого порядка для гравитона / Б. В. Крылов // *Вес. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1972. – № 6. – С. 82–89.
12. Федоров, Ф. И. Уравнения первого порядка для гравитационного поля в вакууме / Ф. И. Федоров, А. А. Кирилов // *Acta Physica Polonica. В.* – 1976. – Vol. 7, № 3.
13. Кисель, В. В. О релятивистских волновых уравнениях для массивной частицы со спином 2 / В. В. Кисель // *Вес. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* – 1986. – № 5. – С. 94–99.
14. Файнберг, В. Я. К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитным и мезонным полями / В. Я. Файнберг // *Тр. Физ. ин-та им. П. Н. Лебедева АН СССР.* – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.
15. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // *Nuovo Cimento.* – 1957. – Vol. 5, nr 2. – P. 325–326.
16. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field / H. A. Buchdahl // *Nuovo Cim.* – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.
17. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces / H. A. Buchdahl // *Nuovo Cim.* – 1962. – Vol. 25. – P. 486–496.
18. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // *Ann. Phys. (N. Y.).* – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 121–145.
19. Jonson, K. The impossibility of a consistent theory of a charged higher spin Fermi fields / K. Jonson, E. C. G. Sudarshan // *Ann. Phys.* – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 126–145.
20. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 188, nr 5. – P. 2218–2222.
21. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // *J. Phys. A.* – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.
22. Loide, R. K. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations / R. K. Loide // *J. Phys. A.* – 1986. – Vol. 19, nr 5. – P. 827–829.
23. Vasiliev, M. A. More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions / M. A. Vasiliev // *Phys. Lett. B.* – 1992. – Vol. 285. – P. 225–234.
24. Buchbinder, I. L. On consistent equations for massive spine-2 field coupled to gravity in string theory / I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, V. D. Pershin // *Phys. Lett. B.* – 1999. – Vol. 466. – P. 216–226.

25. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларус. навука, 2015. – 328 с.

26. Структура плоских волн для поля со спином 2, массивный и безмассовый случаи / А. В. Бурый [и др.] // Проблемы физики, математики и техники. – 2021. – № 2 (47). – С. 1–11.

REFERENCES

1. Pauli, W. Über relativistische Feldgleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetischen Feld / W. Pauli, M. Fierz // *Helv. Phys. Acta.* – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300.

2. Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

3. De Broglie, L. Sur l'interprétation de certaines équations dans la théorie des particules de spin 2 / L. De Broglie // *C. R. Acad. Sci. Paris.* – 1941. – Vol. 212. – P. 657–659.

4. Pauli, W. Relativistic field theories of elementary particles / W. Pauli // *Rev. Mod. Phys.* – 1941. – Vol. 13. – P. 203–232.

5. Giel'fand, I. M. Obshchije rielativistski invariantnyje uravnienija i bieskoniechnomiernyje predstavlienija grupy Lorentza / I. M. Giel'fand, A. M. Yaglom // *Zhurn. eksperiment. i teoriet. fiziki.* – 1948. – T. 18, vyp. 8. – S. 703–733.

6. Fradkin, E. S. K teorii chastic s vysshimi spinami / E. S. Fradkin // *Zhurn. eksperiment. i teoriet. fiziki.* – 1950. – T. 20, vyp. 1. – S. 27–38.

7. Fiodorov, F. I. K teorii chasticy so spinom 2 / F. I. Fiodorov // *Uchion. zap. BGU. Sier. fiz.-mat.* – 1951. – Vyp. 12. – S. 156–173.

8. Krylov, B. V. Uravnienija piervogo poriadka dlja gravitona / B. V. Krylov, F. I. Fiodorov // *Dokl. AN BSSR.* – 1967. – T. 11. – S. 681–684.

9. Bogush, A. A. O matricakh uravnenij dlja chastic so spinom 2 / A. A. Bogush, B. V. Krylov, F. I. Fiodorov // *Vies. AN BSSR. Sier. fiz.-mat. navuk.* – 1968. – № 1. – S. 74–81.

10. Fiodorov, F. I. Uravnienija piervogo poriadka dlja gravitacionnogo polia / F. I. Fiodorov // *Dokl. AN SSSR.* – 1968. – T. 179, № 4. – S. 802–805.

11. Krylov, B. V. O sistiemakh uravnenij piervogo poriadka dlja gravitona / B. V. Krylov // *Vies. AN BSSR. Sier. fiz.-mat. navuk.* – 1972. – № 6. – S. 82–89.

12. Fiodorov, F. I. Uravnienija piervogo poriadka dlja gravitacionnogo polia v vakuumie / F. I. Fiodorov, A. A. Kirilov // *Acta Physica Polonica. B.* – 1976. – Vol. 7, № 3.

13. Kisiel', V. V. O rielativistskikh volnovykh uravnenijakh dlja massivnoj chasticy so spinom 2 / V. V. Kisiel' // *Vies. AN BSSR. Sier. fiz.-mat. navuk.* – 1986. – № 5. – S. 94–99.

14. Fajnberg, V. Ya. K teorii vzaimodiejstvija chastic s vysshimi spinami s elektromagnitnym i mizonnym poliami / V. Ya. Fajnberg // *Tr. Fiz. in-ta im. P. N. Liebieieva Akad. nauk SSSR.* – 1955. – T. 6. – S. 269–332.

15. Regge, T. On properties of the particle with spin 2 / T. Regge // *Nuovo Cimento.* – 1957. – Vol. 5, nr 2. – P. 325–326.

16. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations for particles of higher spin in the presence of a gravitational field / H. A. Buchdahl // *Nuovo Cim.* – 1958. – Vol. 10. – P. 96–103.

17. Buchdahl, H. A. On the compatibility of relativistic wave equations in Riemann spaces / H. A. Buchdahl // *Nuovo Cim.* – 1962. – Vol. 25. – P. 486–496.

18. Johnson, K. Inconsistency of the local field theory of charged spin 3/2 particles / K. Johnson, E. C. G. Sudarshan // *Ann. Phys. (N. Y.).* – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 121–145.

-
19. Jonson, K. The impossibility of a consistent theory of a charged higher spin Fermi fields / K. Jonson, E. C. G. Sudarshan // *Ann. Phys.* – 1961. – Vol. 13, nr 1. – P. 126–145.
20. Velo, G. Noncausality and other defects of interaction Lagrangians for particles with spin one and higher / G. Velo, D. Zwanziger // *Phys. Rev.* – 1969. – Vol. 188, nr 5. – P. 2218–2222.
21. Cox, W. First-order formulation of massive spin-2 field theories / W. Cox // *J. Phys. A.* – 1982. – Vol. 15. – P. 253–268.
22. Loide, R. K. On conformally covariant spin-3/2 and spin-2 equations / R. K. Loide // *J. Phys. A.* – 1986. – Vol. 19, nr 5. – P. 827–829.
23. Vasiliev, M. A. More on equations of motion for interacting massless fields of all spins in (3+1)-dimensions / M. A. Vasiliev // *Phys. Lett. B.* – 1992. – Vol. 285. – P. 225–234.
24. Buchbinder, I. L. On consistent equations for massive spine-2 field coupled to gravity in string theory / I. L. Buchbinder, V. A. Krykhtin, V. D. Pershin // *Phys. Lett. B.* – 1999. – Vol. 466. – P. 216–226.
25. Plietiukhov, V. A. Rielativistskije volnovyje uravnenija i vnutriennije stiepieni svobody / V. A. Plietiukhov, V. M. Ried'kov, V. I. Strazhev. – Minsk : Bielarus. navuka, 2015. – 328 s.
26. Structura ploskikh voln dlia polia so spinom 2, massivnyj i biezmassovyj sluchai / A. V. Buryj [i dr.] // *Problemy fiziki, informatiki i tiekhniki.* – 2021. – № 2 (47). – S. 1–11.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 16.02.2021

УДК 539.143.3, 372.853

Петр Борисович Кац¹, София Михайловна Удовенко²¹канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина²студент 4-го курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Pyotr Kats¹, Sofiya Udovenko²¹Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University²4th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics
of Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: katspyotr@yandex.ru

ФОРМУЛА БЕТЕ – ВАЙЦЕККЕРА. ОБЗОР И ПОДБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ

Выполнен обзор различных наборов коэффициентов в формуле Бете – Вайцеккера как в традиционной форме (с пятью слагаемыми), так и расширенных вариантов. Определены коэффициенты, обеспечивающие самую высокую точность в традиционном и расширенных вариантах формулы. Произведены расчеты коэффициентов традиционной формулы с различными вариантами кулоновской поправки и поправки спаривания как с помощью метода наименьших квадратов, так и с помощью методов наименьших квадратов удельной энергии связи, наименьших квадратов относительных отклонений и комбинированным методом. Наибольшую точность по выбранному в работе критерию обеспечивают метод наименьших квадратов удельной энергии связи и метод наименьших квадратов относительных отклонений.

Ключевые слова: энергия связи, формула Бете – Вайцеккера, коэффициенты, метод наименьших квадратов.

The Bethe – Weizsäcker Formula. Review and Selection of Coefficients

Various sets of coefficients in the Bethe – Weizsäcker formula are reviewed, both in the traditional form (with five terms) and in extended variants. The coefficients that provide the highest accuracy in the traditional and extended versions of the formula are highlighted. The coefficients of the traditional formula with various variants of the Coulomb correction and the pairing correction are calculated using the least squares method, as well as the least squares of the specific binding energy, least squares of relative deviations, and the combined method. The method of least squares of the specific binding energy and the method of least squares of relative deviations provide the highest accuracy according to the criterion chosen in the work.

Key words: binding energy, Bethe – Weizsäcker formula, coefficients, least squares method.

Введение

Полуэмпирическая формула Бете – Вайцеккера позволяет вычислять с небольшой погрешностью энергию связи и массу атомного ядра в основном состоянии по массовому и зарядовому числу. Эта формула основывается на капельной модели ядра [1]. Впервые она была предложена Вайцеккером [2] и модифицирована Бете [3] и другими физиками. Формула опирается частично на теорию, частично – на эмпирические измерения, поэтому ее называют полуэмпирической. В своей традиционной форме формула Бете – Вайцеккера содержит пять слагаемых: объемную, поверхностную, кулоновскую энергию, энергию асимметрии и энергию спаривания. Выражение для трех из этих энергий в традиционной формуле:

$$E_V = a_V A, E_S = -a_S A^{2/3}, E_{sym} = -a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A}. \quad (1)$$

Для кулоновской энергии обычно используют одно из двух выражений:

$$E_C = -a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \text{ или } E_C = -a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}, \quad (2)$$

первый случай соответствует непрерывному распределению заряда, второй – распределению заряда в форме точечных протонов.

Для энергии спаривания обычно используется одно из двух выражений с разными показателями степени A :

$$E_p = a_p \delta \cdot A^{-1/2} \text{ или } E_p = a_p \delta \cdot A^{-3/4}, \quad (3)$$

где

$$\delta = \{1, N - \text{четное}, Z - \text{четное}; 0, A - \text{нечетное}; -1, N - \text{нечетное}, Z - \text{нечетное}\}. \quad (4)$$

В соответствии с этим будем выделять 4 варианта традиционной формулы Бете – Вайцеккера:

$$E_{bBW} = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-1/2}, \quad (5)$$

$$E_{bBW} = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-1/2}, \quad (6)$$

$$E_{bBW} = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-3/4}, \quad (7)$$

$$E_{bBW} = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-3/4}. \quad (8)$$

Позже разные авторы предлагали расширенные варианты формулы Бете – Вайцеккера, дополненные дополнительными членами либо с измененной зависимостью различных слагаемых от A и Z для повышения точности.

Целями представленной работы являются проверка точности предсказаний традиционной формулы Бете – Вайцеккера и расширенной формулы Бете – Вайцеккера для различных наборов коэффициентов, предлагаемых в литературе, а также расчет коэффициентов для четырех вариантов традиционной формулы различными способами и определение самого точного набора коэффициентов и варианта традиционной формулы Бете – Вайцеккера для данного массива нуклидов.

Анализ существующих наборов коэффициентов в традиционной формуле Бете – Вайцеккера

Для проверки точности предсказаний формулы Бете – Вайцеккера вычислялась относительная погрешность энергии связи, рассчитанной по формуле Бете – Вайцеккера в сравнении со значением, вычисленным из экспериментальных значений массы атома для 79 нуклидов с не слишком малым значением массового числа, что является условием применимости капельной модели, на которой основана формула: от Ne^{20} до Sm^{242} . Затем находилось среднее арифметическое по всем нуклидам

$$\langle \delta E_b \rangle = \frac{1}{79} \sum_{i=1}^{79} \frac{|E_{bBW_i} - E_{bi}|}{E_{bi}} \cdot 100\%. \quad (9)$$

Энергия связи по массе атома вычислялась по формуле:

$$E_b = 931,4940038(ZM_{H^1} + (A-Z)M_n - M_a) \text{ МэВ}. \quad (10)$$

Данные по массам атомов брались из [4]. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

Источник	a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	$a_{\text{сум}}$, МэВ	a_p , МэВ	Степень А	Z^2 (а) или $Z(Z-1)$ (б)	$\langle \delta E_b \rangle$, %
[5]	15,5933955	17,344797	0,6935199	23,601209	33,5	-3/4	а	0,350
[6]	15,76	17,81	0,711	23,702	34	-3/4	а	0,381
[7]	15,75	17,8	0,71	23,7	12	-1/2	а	0,391
[8]	15,75	17,8	0,71	23,7	34	-3/4	а	0,394
[9, Rohlf]	15,75	17,8	0,711	23,07	11,181	-1/2	а	0,406
[9, Least squares, fit 1]	15,8	18,3	0,714	23,2	12	-1/2	б	0,414
[10]	15,56	17,23	0,7	23,285	11	-1/2	а	0,420
[11], ф. 2	15,835	18,33	0,714	23,2	11,2	-1/2	б	0,423
[12], ф. 1	15,4093	16,8726	0,69476	22,4352	11,1547	-1/2	б	0,510
[13]	15,78	18,34	0,71	23,21	12	-1/2	б	0,521
[12], ф. 2	15,7773	18,3407	0,710021	23,2107	11,9957	-1/2	б	0,538
[14]	15,36	16,42	0,691	22,53			а	0,540
[15]	15,6	17,2	0,7	22,5	34	-3/4	а	0,596
[16]	15,75	17,8	0,71	22	34	-3/4	а	0,632
[17]	15,4	17	0,69	24	34	-3/4	б	0,711
[18]	14,03	13,03	0,5837	19,3175	33,52	-3/4	а	0,8326
[19], набор 1	14,9297	15,058	0,6615	21,6091	10,1744	-1/2	а	0,8328
[20]	14,03	13,03	0,5835	19,31	34,57	-3/4	а	0,834
[21]	14	13	0,584	19	33,5	-3/4	а	0,843
[22]	15,6	17,2	0,72	23,6	34	-3/4	б	0,850
[11], ф. 1	15,835	18,33	0,714	23,2	11,2	-1/2	а	0,868
[23]	14	13	0,583	19,3	33,5	-3/4	а	0,874
[24]	14	13	0,584	19,3	33,5	-3/4	а	0,907
[25]	14	13	0,574	18,1	33,5	-3/4	а	0,928
[9, Wapstra]	14,1	13	0,595	19	33,5	-3/4	а	0,939
[26]	15,56	17,23	0,71	23,7	12	-3/4	а	1,045
[27]	14,1	13,1	0,585	18,1	132	-1	а	1,139
[19], набор 2	16,6433	14,0788	0,6442	21,068	11,5398	-1/2	а	1,16

Более точной считалась та формула, которая дает меньшее значение величины (9).

Самую высокую точность из рассмотренных наборов обеспечивает набор [5]. Заметим, что в [5] коэффициенты находятся не с помощью часто используемого метода наименьших квадратов, а другим способом, который будет описан ниже.

В [7] исправлена опечатка в степени А в энергии спаривания.

Отметим, что в [11, с. 24] написано, что для малых Z лучше заменить в кулоновской энергии Z^2 на $Z(Z-1)$, но авторы не будут применять эту небольшую поправку. Наша проверка показывает, что использование в формуле при данных коэффициентах $Z(Z-1)$ вместо Z^2 значительно улучшает точность.

Анализ точности предсказаний модифицированных вариантов формулы Бете – Вайцзеккера

В монографии [28, с. 108] приводится модифицированная формула Вайцзеккера, в которую добавлено слагаемое, определяющее, согласно [28], поправку к энергии

асимметрии ядра и позволяющее применять формулу к ядрам с сильным избытком нейтронов. Итоговая формула:

$$E_{bBW} = 15,75A - 17,8A^{2/3} - 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23,7A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 - 0,88A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^4 + 34 \frac{\delta}{A^{3/4}}. \quad (11)$$

В [29] модифицированы объемная, поверхностная и кулоновская энергии связи, а также добавлена оболочечная поправка. В формуле при этом отсутствует поправка асимметрии. В связи с невозможностью рассчитать оболочечную поправку из-за недостатка данных по деформации ядер в данной работе будет проверяться точность формулы без оболочечной поправки и учета влияния деформации ядра на остальные слагаемые [29, (9)].

$$E_{bBW} = 15,677 \left[1 - k \left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right] A - 18,56 \left[1 - k \left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right] A^{2/3} - 0,717 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + 1,21129 \frac{Z^2}{A} + 11\delta A^{-1/2}, \quad (12)$$

где $k = 1,79$.

Отметим, что учет данных по деформации конкретного ядра лишает формулу Бете – Вайцеккера статуса общности, позволяющего, исходя только из массового и зарядового чисел ядра, определять его энергию связи. Формула Майерса – Святецкого приводится без учета деформации ядер и оболочечной поправки в некоторых источниках [30].

Также в [29] приведен вариант формулы с экспоненциальной поправкой Вигнера:

$$E_{bBW} = 15,7546 \left[1 - k \left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right] A - 19,1015 \left[1 - k \left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right] A^{2/3} - 0,717 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + 1,21129 \frac{Z^2}{A} + 11\delta A^{-1/2} + 7 \exp(-6 \left|\frac{A-2Z}{A}\right|), \quad (13)$$

где $k = 1,78$.

В [14] подробно рассматривается ряд дополнительных членов в формуле Бете – Вайцеккера. В частности, рассматривается вариант формулы, содержащей объемную энергию, поверхностную, кулоновскую для непрерывного распределения заряда и поправку симметрии, а также один дополнительный член.

Рассматриваются следующие добавки: энергия спаривания, кулоновская обменная энергия $E_{x\bar{N}} = a_{xc} Z^{4/3} A^{-1/3}$, поправка Вигнера $E_W = a_W |A - 2Z| / A$, поправка асимметрии для поверхностной энергии $E_{symS} = a_{st} (A - 2Z)^2 A^{-4/3}$, поправка кривизны $E_R = a_R A^{1/3}$, оболочечный эффект $E_m = \alpha_m P + \beta_m P^2$, $P = \nu_N \nu_P / (\nu_N + \nu_P)$, ν – число валентных нуклонов – модуль разности между числом нуклонов и ближайшим магическим числом [31, ф. (6.79)]. Магические числа равны: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Коэффициенты формул с различными дополнительными членами приведены в таблице 2.

Также приведены значения коэффициентов для случая, когда в формулу включены все поправки:

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + a_{xc} \frac{Z^4}{A^3} + a_W \frac{|A-2Z|}{A} + a_{st} \frac{(A-2Z)^2}{A^3} + a_p \delta \cdot A^{-1/2} + a_R A^{1/3} + \alpha_m P + \beta_m P^2 \quad (14)$$

Таблица 2.

a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ	Дополнительный член, МэВ	Показатель степени A	Z^2 или Z (Z-1)
15,15	17,06	0,702	21,19	$a_{xc} = 1,12$		Z^2
15,67	17,62	0,705	23,71	$a_W = 27,98$		Z^2
15,62	17,50	0,698	27,33	$a_{st} = 23,92$		Z^2
15,38	16,47	0,692	22,55	$a_p = 11,24$	-1/2	Z^2
14,84	13,34	0,669	21,75	$a_R = -5,26$		Z^2
15,38	16,30	0,693	22,48	$\alpha_m = -1,52$ $\beta_m = 0,077$		Z^2

Значения поправок для (14) приведены в таблице (3).

Таблица 3.

a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ	a_{xc} , МэВ	a_W , МэВ	a_{st} , МэВ	a_p , МэВ	a_R , МэВ	α_m, β_m , МэВ
16,58	26,95	0,774	31,51	2,22	-43,4	55,62	9,87	14,77	-1,90, 0,140

В [14] также рассматриваются варианты формулы со всеми поправками и экспоненциальной поправкой Вигнера:

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{sym} A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + a_{xc} \frac{Z^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} + a'_W \exp\left(-2,55 \left|\frac{A-2Z}{A}\right|\right) + a_{st} \frac{(A-2Z)^2}{A^{\frac{4}{3}}} + a_p \delta \cdot A^{-\frac{1}{2}} + a_R A^{\frac{1}{3}} + \alpha_m P + \beta_m P^2 \quad (15)$$

Значения коэффициентов при использовании этой поправки приведены в таблице 4:

Таблица 4.

a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ	a_{xc} , МэВ	a'_W , МэВ	a_{st} , МэВ	a_p , МэВ	a_R , МэВ	α_m , β_m , МэВ
15,81	19,2	0,745	29,5	1,58	21,64	44,73	10,37	-6,94	-1,86, 0,134

Кирсон [14] рассматривает также вариант, когда поправка спаривания отличается по модулю для четно-четных ядер и нечетно-нечетных (индексы (e) и (o) относятся к четно-четным ядрам и нечетно-нечетным соответственно):

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{sym} A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + a_{xc} \frac{Z^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} + a_W \frac{|A-2Z|}{A} + a_{st} \frac{(A-2Z)^2}{A^{\frac{4}{3}}} + \frac{\delta}{2A^{\frac{1}{2}}} \left\{ a_p^{(e)} (1 + \delta) + a_p^{(o)} (1 - \delta) \right\} + a_R A^{\frac{1}{3}} + \alpha_m P + \beta_m P^2 \quad (16)$$

Значения коэффициентов при этом такие же, как в таблице 3, кроме a_p . Вместо него берутся коэффициенты $a_p^{(e)} = 11,60$ МэВ, $a_p^{(o)} = 8,17$ МэВ.

Самую высокую точность по нашему критерию обеспечивают формулы Майерса – Святецкого (13) и Кирсона (15) с экспоненциальным вигнеровским членом, а также формула Кирсона с различным значением модуля поправки спаривания для нечетных и четных ядер (16).

Так как (13) содержит меньше подгоночных коэффициентов, то можно признать ее оптимальность для данного критерия точности формулы и для рассмотренных элементов.

Часто в качестве критерия оптимальности используется минимальность среднеквадратичного отклонения

$$rmsd = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}}, \chi^2 = \sum_{i=1}^N (E_{bi} - E_{bBWi})^2. \quad (17)$$

В таблице (5) также приведены значения среднеквадратичного отклонения. По этому критерию лучшие результаты дает расширенная формула Бете – Вайцеккера по Кирсону с экспоненциальной поправкой Вигнера.

Таблица 5. – Среднее значение относительной погрешности

формула	(13)	(15)	(16)	(14)	(11)	(12)	E_{symS}	E_p	E_R	E_m	E_w	E_{xc}
$\langle \delta E_b \rangle, \%$	0,346	0,354	0,376	0,388	0,392	0,46	0,48	0,51	0,52	0,52	0,54	0,55
$rmsd, МэВ$	3,61	2,30	2,45	2,49	4,26	3,80	4,17	4,35	4,47	3,48	4,42	3,82

Использование метода наименьших квадратов для нахождения оптимальных значений коэффициентов в различных вариантах формулы Бете – Вайцеккера

В работе [19] авторы вычислили оптимальные значения коэффициентов в формуле Бете – Вайцеккера вида (5), используя метод наименьших квадратов. В этом методе из условия минимума величины χ^2 (17) находится значение пяти коэффициентов в формуле (5). Экспериментальные данные брались из [4].

Необходимое условие минимума χ^2 – равенство нулю частных производных от χ^2 по всем коэффициентам формулы (5). Отсюда получается система линейных уравнений (18) для определения искомых коэффициентов.

В [19] найден набор оптимальных коэффициентов по данным для 2 497 нуклидов из [4], а также набор оптимальных коэффициентов для $A \geq 50$ по данным для 2 166 нуклидов.

Как было показано в [32], для выборки из 79 нуклидов с $A \geq 20$ оба набора коэффициентов обеспечивают невысокую точность. Для оценки точности использовалась средняя относительная погрешность (9).

Мы провели вычисление оптимальных коэффициентов для формул (5–8). Использованы метод наименьших квадратов и данные для 79 нуклидов. При этом для вариантов формулы (5–8) получаются системы уравнений соответственно (18–21) для вычисления коэффициентов.

В результате решения соответствующих систем уравнений получаются следующие наборы значений коэффициентов, представленные в таблице 6.

Таблица 6. – Значения коэффициентов в формуле Вайцеккера

Вариант	$a_v, МэВ$	$a_s, МэВ$	$a_c, МэВ$	$a_{sym}, МэВ$	$a_p, МэВ$
(5)	15,97265	18,33468	0,718723	25,495462	11,43212
(5) округленно	15,97	18,33	0,719	25,495	11,43
(6)	16,05498	18,9097	0,725242	25,44119	11,47805
(7)	15,97676	18,35062	0,718607	25,5286	29,41414
(8)	16,05915	18,92575	0,72513	25,4744	29,56754
(8) округленно	16,059	18,93	0,725	25,47	29,57

Для каждого набора коэффициентов рассчитана средняя относительная погрешность и среднеквадратичное отклонение. Результаты представлены в таблице 7.

Таблица 7. – Средняя относительная погрешность и среднеквадратичное отклонение

Вариант	(5)	(5) округленно	(6)	(7)	(8)	(8) округленно
$\langle \delta E_b \rangle, \%$	0,3624	0,3551	0,3567	0,3566	0,3504	0,3501
$rmsd, \text{МэВ}$	3,620	3,654	3,566	3,603	3,5490	3,5492

Интересно, что при округленных значениях коэффициентов для первого варианта традиционной формулы получается меньшее значение средней относительной ошибки. Это объясняется тем, что при расчете коэффициентов минимизировалась сумма квадратов отклонений, а не средняя относительная погрешность.

Среднеквадратичное отклонение при округлении коэффициентов возросло. Данный пример показывает, что по разным критериям могут оказываться оптимальными различные значения коэффициентов.

Из таблицы 7 видно, что наиболее точные результаты по критерию минимальности средней относительной погрешности обеспечивает вариант (8) с округленными значениями коэффициентов, а по критерию среднеквадратичного отклонения – вариант (8).

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{i=1}^N A_i^2 a_v - \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_s - \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{2/3} a_c - \sum_{i=1}^N (A_i - 2Z_i)^2 a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot A_i^{1/2} a_p = \sum_{i=1}^N A_i E_{bi}; \\
 \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_v - \sum_{i=1}^N A_i^{4/3} a_s - \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{1/3} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot A_i^{1/6} a_p = \sum_{i=1}^N A_i^{2/3} E_{bi}; \\
 \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{2/3} a_v - \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{1/3} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^4}{A_i^{2/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{5/6}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{1/3}} E_{bi}; \\
 \sum_{i=1}^N (A_i - 2Z_i)^2 a_v - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} + \\
 + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i} E_{bi}; \\
 \sum_{i=1}^N \delta_i A_i^{1/2} a_v - \sum_{i=1}^N \delta_i A_i^{1/6} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{5/6}} a_c - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{1/2}}.
 \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N A_i^2 a_V - \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_S - \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3} a_C - \sum_{i=1}^N (A_i-2Z_i)^2 a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot A_i^{1/2} a_p = \sum_{i=1}^N A_i E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_V - \sum_{i=1}^N A_i^{4/3} a_S - \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot A_i^{1/6} a_p = \sum_{i=1}^N A_i^{2/3} E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3} a_V - \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3}} E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N (A_i-2Z_i)^2 a_V - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i} E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \delta_i A_i^{1/2} a_V - \sum_{i=1}^N \delta_i A_i^{1/6} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6}} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{1/2}}.
\end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N A_i^2 a_V - \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_S - \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{2/3} a_C - \sum_{i=1}^N (A_i-2Z_i)^2 a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot A_i^{1/4} a_p = \sum_{i=1}^N A_i E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_V - \sum_{i=1}^N A_i^{4/3} a_S - \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{1/3} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} a_p = \sum_{i=1}^N A_i^{2/3} E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{2/3} a_V - \sum_{i=1}^N Z_i^2 A_i^{1/3} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^4}{A_i^{2/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{13/12}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{1/3}} E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N (A_i-2Z_i)^2 a_V - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i} E_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \delta_i A_i^{1/4} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{13/12}} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{3/4}}.
\end{aligned} \right. \quad (20)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N A_i^2 a_v - \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_s - \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1) A_i^{2/3} a_c - \sum_{i=1}^N (A_i - 2Z_i)^2 a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot A_i^{1/4} a_p = \sum_{i=1}^N A_i E_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N A_i^{5/3} a_v - \sum_{i=1}^N A_i^{4/3} a_s - \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1) A_i^{1/3} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} a_p = \sum_{i=1}^N A_i^{2/3} E_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1) A_i^{2/3} a_v - \sum_{i=1}^N Z_i(Z_i-1) A_i^{1/3} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3}} E_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N (A_i - 2Z_i)^2 a_v - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A - 2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i} E_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N \delta_i A_i^{1/4} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12}} a_c - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{3/4}}.
 \end{aligned} \right. \quad (21)$$

Подбор оптимальных значений коэффициентов путем минимизации суммы квадратов отклонений удельных энергий связи

В [14, р. 53] рассматривается вариант нахождения оптимальных коэффициентов в формуле Бете – Вайцзеккера, записанной для удельной энергии связи. При этом должна минимизироваться сумма квадратов отклонений удельных энергий связи:

$$\sum_{i=1}^N (\varepsilon_{bi} - \varepsilon_{bBWi})^2, \varepsilon_{bi} = \frac{E_{bi}}{A_i} \quad (22)$$

Как показано в [14], это приводит к существенному изменению значений оптимальных коэффициентов. Можно ожидать, что минимизация суммы квадратов отклонений удельных энергий связи позволит уменьшить и среднюю относительную погрешность по сравнению с результатом, получаемым методом наименьших квадратов отклонений энергий связи.

Из условия минимума величины (22) для каждого варианта формулы (5–8) получается соответствующая система уравнений для определения пяти коэффициентов. Соответствующие системы уравнений (23–26) приведены ниже.

Оптимальные коэффициенты для вариантов (5–8) приведены в таблице 8. В таблице 9 приводятся значения средней относительной погрешности.

Из таблицы видно, что точность данного метода выше точности, обеспечиваемой методом наименьших квадратов. Наилучшую точность для рассмотренного массива изотопов обеспечил вариант формулы (6).

Также в таблице 9 приведены значения наибольшего относительного отклонения по 79 нуклидам.

Таблица 8. – Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

Вариант	a_v , МэВ	a_s , МэВ	a_c , МэВ	a_{sym} , МэВ	a_p , МэВ
(5)	15,33442	16,78971	0,6547780	24,949377	12,22525
(6)	15,43804	17,35893	0,6660444	24,718404	12,36547
(7)	15,34304	16,81980	0,6546074	25,034389	27,82304
(8)	15,44663	17,38897	0,6658594	24,804420	28,13404

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N a_V - \sum_{i=1}^N \frac{a_S}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{a_V}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{a_S}{A_i^{2/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{5/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{11/6}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{5/3}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^4}{A_i^{8/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{17/6}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} \varepsilon_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^4} a_{sym} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} \varepsilon_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/2}} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{11/6}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{17/6}} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^3} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \varepsilon_{bi}}{A_i^{3/2}}.
 \end{aligned} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N a_V - \sum_{i=1}^N \frac{a_S}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{4/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{a_V}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{a_S}{A_i^{2/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{5/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{11/6}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{4/3}} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{5/3}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(Z_i - 1)^2}{A_i^{8/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_{sym} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{17/6}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{4/3}} \varepsilon_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^4} a_{sym} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} \varepsilon_{bi}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/2}} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{11/6}} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{17/6}} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^3} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \varepsilon_{bi}}{A_i^{3/2}}.
 \end{aligned} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N a_v - \sum_{i=1}^N \frac{a_s}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{7/4}} a_p = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{a_v}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{a_s}{A_i^{2/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{5/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{25/12}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{5/3}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^4}{A_i^{8/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{37/12}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} \varepsilon_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^4} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{15/4}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} \varepsilon_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{7/4}} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{25/12}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{37/12}} a_c - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{15/4}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{7/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \varepsilon_{bi}}{A_i^{7/4}}.
\end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N a_v - \sum_{i=1}^N \frac{a_s}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{4/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{7/4}} a_p = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{a_v}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{a_s}{A_i^{2/3}} - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{5/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{25/12}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{4/3}} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{5/3}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(Z_i - 1)^2}{A_i^{8/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{37/12}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{4/3}} \varepsilon_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i - 1)(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^4} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{15/4}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^2} \varepsilon_{bi}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{7/4}} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{25/12}} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i(Z_i - 1)}{A_i^{37/12}} a_c - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{15/4}} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{7/2}} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \varepsilon_{bi}}{A_i^{7/4}}.
\end{aligned} \right. \quad (26)$$

Таблица 9. – Средняя относительная погрешность

Вариант	(5)	(6)	(7)	(8)
$\langle \delta E_b \rangle, \%$	0,2983	0,2912	0,3003	0,2931
$\delta E_{b\max}, \%$	0,938	0,932	0,954	0,914

Минимизация суммы квадратов относительных отклонений энергии связи

Величина, наиболее близкая по смыслу к (9), – среднее значение квадрата относительного отклонения:

$$\langle \delta E_b^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(E_{bBW_i} - E_{bi})^2}{E_{bi}^2}. \quad (27)$$

Эту величину можно минимизировать стандартным способом. Из условия минимума величины (27) для вариантов формулы (5–8) получаются соответственно системы уравнений (28–31).

Оптимальные коэффициенты для вариантов (5–8) приведены в таблице 10.

Таблица 10. – Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

Вариант	a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ	a_p , МэВ
(5)	15,32882	16,77270	0,6544663	24,942423	12,08643
(6)	15,43895	17,35816	0,6663589	24,717869	12,25706
(7)	15,33812	16,80413	0,6544081	25,023227	27,46921
(8)	15,44828	17,38975	0,6662895	24,799788	27,84855

В таблице 11 приводится значение средней относительной погрешности. Из таблицы видно, что точность данного метода выше точности, обеспечиваемой методом наименьших квадратов и сравнима с точностью, обеспечиваемой методом наименьших квадратов удельных энергий связи.

Наилучшую точность для рассмотренного массива нуклидов обеспечил вариант (6). Он же обеспечил самую высокую точность из всех ранее рассмотренных методов.

Также в таблице 11 приведены значения наибольшего относительного отклонения по 79 нуклидам.

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{E_{bi}}; \\ & \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}}; \\ & \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^4}{A_i^{2/3} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_p = \\ & = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{1/3} E_{bi}}; \\ & \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^4}{A_i^2 E_{bi}^2} a_{sym} + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i E_{bi}}; \\ & \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/2} E_{bi}}. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3} E_{bi}^2} a_c - \\
& - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3} E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2 E_{bi}^2} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i E_{bi}^2} a_p = \\
& = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/2} E_{bi}}.
\end{aligned} \right. \quad (29)$$

Таблица 11. – Средняя относительная погрешность

Вариант	(5)	(6)	(7)	(8)
$\langle \delta E_b \rangle, \%$	0,2982	0,2907	0,3002	0,2927
$\delta E_{b_{\max}}, \%$	0,929	0,918	0,946	0,900

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^4}{A_i^{2/3} E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_p = \\
& = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2}{A_i^{1/3} E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2 (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2 E_{bi}^2} a_{sym} + \\
& + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i E_{bi}}; \\
& \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_v - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_s - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_c - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_p = \\
& = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/4} E_{bi}}.
\end{aligned} \right. \quad (30)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \frac{A_i^2}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{E_{bi}}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_{sym} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3} E_{bi}}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3} E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^4}{A_i^2 E_{bi}^2} a_{sym} + \\
 & + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i E_{bi}}; \\
 & \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_p = \\
 & = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/4} E_{bi}}.
 \end{aligned} \right. \quad (31)$$

Комбинация метода Вегги и других и метода наименьших квадратов относительных отклонений

В [5] авторы предложили новый метод нахождения четырех из пяти коэффициентов в традиционной формуле Бете – Вайцзеккера.

Рассматривается вариант формулы (7). Поправка спаривания обращается в 0 для ядер с нечетным массовым числом. При этом в формуле остается четыре неизвестных коэффициента.

Для их нахождения авторы предлагают решить систему из 4 уравнений вида

$$E_{bBWi} - E_{bi} = 0, i = 1-4. \quad (32)$$

Лучшие результаты в [5] получились при использовании изотопов O¹⁷, Mn⁵⁵, I¹²⁷ и Pt¹⁹⁵. Авторы получили значения четырех коэффициентов, приведенные в таблице 12.

Таблица 12.

a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ
15,5933955	17,344797	0,6935199	23,601209

Мы решили систему уравнений (32) с уточненными данными по массам изотопов [4]. При этом получились значения коэффициентов:

Таблица 13.

a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ
15,5935624	17,344915	0,6936067	23,602387

Средняя относительная погрешность для коэффициентов из таблиц 12 и 13 приведена в таблице 14.

Таблица 14.

Вариант	[5]	[5] с учетом [4]
$\langle \delta E_b \rangle, \%$	0,3495	0,3492

Так как коэффициент в поправке спаривания в данной методике не вычисляется, то мы попробуем для улучшения результатов вычислить этот коэффициент с помощью метода наименьших квадратов относительных отклонений. Для этого надо решить уравнение (33):

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial a_p} \frac{(E_{bBWi} - E_{bi})^2}{E_{bi}^2} = 0. \quad (33)$$

Для вариантов (6) и (8) решение системы уравнений (32) для четырех изотопов приводит к значениям коэффициентов, приведенных в таблице 15.

Таблица 15.

$a_V, \text{МэВ}$	$a_S, \text{МэВ}$	$a_C, \text{МэВ}$	$a_{sym}, \text{МэВ}$
15,640404	17,7712225	0,7010998	23,1366934

Для варианта (5) получается та же четверка коэффициентов, что для варианта (7) по уточненным энергиям связи (таблица 13).

Уравнение (33) для вариантов (5), (6), (7) и (8) принимает соответственно вид (34) – (37). Для уравнений (34) и (36) следует брать значения коэффициентов из таблицы 13, а для уравнений (35) и (37) – из таблицы 15.

Из уравнений (34) – (37) получаются следующие значения поправки спаривания:

(5)	(6)	(7)	(8)
12,484761	12,423669	28,196150	27,987903

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/4} E_{bi}}. \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i (Z_i - 1)}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{3/4} E_{bi}}. \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/2} E_{bi}}. \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i Z_i (Z_i - 1)}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^N \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i^2}{A_i E_{bi}^2} a_p = \sum_{i=1}^N \frac{\delta_i}{A_i^{1/2} E_{bi}}. \quad (37)$$

С учетом найденных для каждого варианта коэффициентов вычисляем $\langle \delta E_b \rangle$ для всех вариантов формулы:

Вариант	(5)	(6)	(7)	(8)
$\langle \delta E_b \rangle, \%$	0,3436	0,3395	0,3479	0,3448

Как видим, объединение метода Веги и метода наименьших квадратов относительных отклонений немного улучшает результат. Оптимальным по выбранному критерию оказывается вариант (2).

Заключение

В данной работе были проанализированы различные известные из литературы и Интернета наборы коэффициентов для традиционной и расширенной формулы Бете – Вайцзеккера. Критерием оптимальности считалась минимальная средняя относительная погрешность энергии связи, рассчитанная для 79 нуклидов. По этому критерию набор коэффициентов, обеспечивающих наиболее точный результат для традиционной формулы Бете – Вайцзеккера приводится в [5]:

a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ	a_p , МэВ	Степень A	Z^2 или $Z(Z-1)$
15,5933955	17,344797	0,6935199	23,601209	33,5	-3/4	Z^2

Для расширенной формулы наиболее точные результаты дает вариант из работы [29, (13)].

Также вычислены коэффициенты для четырех вариантов традиционной формулы различными способами – методом наименьших квадратов, методом наименьших квадратов отклонений удельных энергий связи, методом наименьших квадратов относительных отклонений, комбинированным методом.

В результате удалось для рассматриваемых 79 нуклидов добиться среднего относительного отклонения менее 0,31 %, в то время как самый точный найденный в литературе метод дает результат около 0,35 %.

Наибольшее относительное отклонение по рассмотренным нуклидам оказывается менее 1 %.

Самую высокую точность обеспечил вариант формулы

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-1/2}$$

с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов относительных отклонений:

a_V , МэВ	a_S , МэВ	a_C , МэВ	a_{sym} , МэВ	a_p , МэВ
15,43895	17,35816	0,6663589	24,717869	12,25706

Анализ результатов показывает, что большую точность по выбранному критерию оценки для данного набора нуклидов обеспечивают использование в выражении для кулоновской энергии не Z^2 , а $Z(Z-1)$, а также методы наименьших квадратов относительных отклонений и наименьших квадратов отклонений удельных энергий связи.

Полученные результаты используются при изложении курса «Физика ядра» для студентов специальности «Компьютерная физика».

Использование более широкой базы нуклидов может позволить уточнить значения коэффициентов, а также прояснить вопрос общности выводов об оптимальности используемых методов и выражений для кулоновской поправки и поправки спаривания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gamov, G. Mass Defect Curve and Nuclear Constitution / G. Gamov // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. – 1930. – Vol. 51. – P. 632–644.
2. Weizseker, C. F. von. Zur Theorie der Kernmassen / C. F. von Weizseker // Z. Physik. – 1935. – Vol. 96. – P. 431–458.
3. Bethe, H. A. Nuclear Physics A. Stationary States of Nuclei / H. A. Bethe, R. F. Bacher // Rev. Mod. Phys. – 1936. – Vol. 8. – P. 82–229.
4. The AME2016 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references / Meng Wang [et al.] // Chinese Physics C. – 2017. – Vol. 41, nr 3. – P. 030002–030002-49.
5. Semi-empirical Nuclear Mass Formula: Simultaneous Determination of 4 Coefficients / J. P. Vega [et al.] // Asian Journal of Physical Sciences. – 2016. – Vol. 1. – P. 1–10.
6. Alonco, M. University physics. V III. Quantum and statistical physics / M. Alonco, E. J. Finn. – Addison-Wesley publishing company, 1969. – 611 p.
7. Широков, Ю. М. Ядерная физика / Ю. М. Широков, Н. П. Юдин. – М. : Наука, 1980. – 728 с.
8. Мухин, К. Н. Введение в ядерную физику / К. Н. Мухин. – М. : АТОМИЗДАТ, 1965. – 720 с.
9. Semi-empirical mass formula [Electronic resource] // Wikipedia, the free encyclopedia. – Mode of access: https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-empirical_mass_formula#cite_note-Rohlf-8. – Date of access: 28.05.2020.
10. Nuclear Masses and Binding Energy [Electronic resource]. – Mode of access: <http://oregonstate.edu/instruct/ch374/ch418518/lecture3-1.pdf>. – Date of access: 28.05.2020.
11. Flügge, S. External Properties of Atomic Nuclei / S. Flügge. – Springer-Verlag, 2013. – 472 p.
12. Basu, D. N. Evaluations of energy coefficients of Bethe – Weizsäcker mass formula [Electronic resource] / D. N. Basu, P. R. Chowdhury. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/nucl-th/0408013v1>. – Date of access: 25.09.2020.
13. Chowdhury, P. R. Modified Bethe – Weizsäcker mass formula with isotonic shift and new driplines / P. R. Chowdhury, C. Samanta, D. N. Basu // Modern Physics Letters A. – 2005. – Vol. 20, nr 21. – P. 1605–1618.
14. Kirson, M. W. Mutual influence of terms in a semi-empirical mass formula / M. W. Kirson // Nuclear Physics A. – 2008. – Vol. 798. – P. 29–60.
15. Михайлов, В. М. Ядерная физика / В. М. Михайлов, О. Е. Крафт. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 328 с.
16. Ракобольская, И. В. Ядерная физика / И. В. Ракобольская. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 295 с.
17. Мухин, К. Н. Экспериментальная ядерная физика : в 3 т. / К. Н. Мухин. – М. : Энергоатомиздат, 1993. – Кн. 1, ч. 2. – 320 с.
18. Tati, T. Separation Energies and Nuclear Structures in Light Nuclei / T. Tati // Prog. Theor. Phys. – 1955. – Vol. 14, nr 2. – P. 107–125.
19. Bethe – Weizsäcker semiempirical mass formula coefficients 2019 update based on AME2016 [Electronic resource] / D. Benzaid [et al.] // Nuclear Science and Techniques. – 2020. – Vol. 31, nr 9. – Mode of access: <https://sci-hub.st/https://doi.org/10.1007/s41365-019-0718-8>. – Date of access: 28.05.2020.
20. Белонучкин, В. Е. Основы физики. Курс общей физики : учебник : в 2 т. / В. Е. Белонучкин, Д. А. Заикин, Ю. М. Ципенюк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 2 : Квантовая и статистическая физика. – 504 с.

21. Корнюшкин, Ю. Д. Основы современной физики (квантовая механика, физика атомов и молекул, физика твердого тела, ядерная физика) : учеб. пособие / Ю. Д. Корнюшкин. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2005. – 326 с.
22. Ишханов, Б. С. Частицы и атомные ядра / Б. С. Ишханов, И. М. Капитонов, Н. П. Юдин. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 584 с.
23. Fermi, E. Nuclear Physics / E. Fermi. – The university of Chicago press, 1950. – 248 p.
24. Иродов, И. Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике / И. Е. Иродов. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.
25. Путилов, К. А. Курс физики : в 3 т. / К. А. Путилов, В. А. Фабрикант. – М. : Физматгиз, 1963. – Т. 3 : Оптика. Атомная физика. Ядерная физика. – 636 с.
26. Капельная модель ядра [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Капельная_модель_ядра. – Дата доступа: 18.04.2020.
27. Friedlander, G. Introduction to Radio-chemistry / G. Friedlander, J. W. Kennedy. – New York : John Wiley & Sons, 1949. – 428 p.
28. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
29. Myers, W. D. Nuclear masses and deformations / W. D. Myers, W. J. Swiatecki // Nuclear Physics – 1966. – Vol. 81, nr 1. – P. 1–60.
30. Nuclear Masses and Binding Energy. Lesson 3 [Electronic resource]. – Mode of access: <https://web.archive.org/web/20150930014054/http://oregonstate.edu/instruct/ch374/ch418518/lecture3-1.pdf>. – Date of access: 10.10.2020.
31. Casten, R. F. Nuclear Structure From A Simple Perspective / R. F. Casten. – New York : Oxford university press, 1990. – 376 p.
32. Удовенко, С. М. Проверка точности предсказаний формулы Вайцзеккера со значениями коэффициентов, представленных в [1] / С. М. Удовенко // Теоретическая физика, астрофизика и физика конденсированных сред : сб. материалов студенч. науч. конф., Брест, 4–5 июня 2020 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. В. С. Секержицкого. – Брест : БрГУ, 2020. – С. 22–23.

REFERENCES

1. Gamov, G. Mass Defect Curve and Nuclear Constitution / G. Gamov // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. – 1930. – Vol. 51. – P. 632–644.
2. Weizseker, C. F. von. Zur Theorie der Kernmassen / C. F. von Weizseker // Z. Physik. – 1935. – Vol. 96. – P. 431–458.
3. Bethe, H. A. Nuclear Physics A. Stationary States of Nuclei / H. A. Bethe, R. F. Bacher // Rev. Mod. Phys. – 1936. – Vol. 8. – P. 82–229.
4. The AME2016 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references / Meng Wang [et al.] // Chinese Physics C. – 2017. – Vol. 41, nr 3. – P. 030002–030002-49.
5. Semi-empirical Nuclear Mass Formula: Simultaneous Determination of 4 Coefficients / J. P. Vega [et al.] // Asian Journal of Physical Sciences. – 2016. – Vol. 1. – P. 1–10.
6. Alonco, M. University physics. V III. Quantum and statistical physics / M. Alonco, E. J. Finn. – Addison-Wesley publishing company, 1969. – 611 p.
7. Shirokov, Yu. M. Jadrnaja fizika / Yu. M. Shirokov, N. P. Yudin. – М. : Nauka, 1980. – 728 s.
8. Mukhin, K. N. Vviedienije v jadrnuju fiziku / K. N. Mukhin. – М. : АТОМ-ИЗДАТ, 1965. – 720 s.

9. Semi-empirical mass formula [Electronic resource] // Wikipedia, the free encyclopedia. – Mode of access: https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-empirical_mass_formula#cite_note-Rohlf-8. – Date of access: 28.05.2020.
10. Nuclear Masses and Binding Energy [Electronic resource]. – Mode of access: <http://oregonstate.edu/instruct/ch374/ch418518/lecture3-1.pdf>. – Date of access: 28.05.2020.
11. Flügge, S. External Properties of Atomic Nuclei / S. Flügge. – Springer-Verlag, 2013. – 472 p.
12. Basu, D. N. Evaluations of energy coefficients of Bethe – Weizsacker mass formula [Electronic resource] / D. N. Basu, P. R. Chowdhury. – Mode of access: <https://arxiv.org/abs/nucl-th/0408013v1>. – Date of access: 25.09.2020.
13. Chowdhury, P. R. Modified Bethe – Weizsäcker mass formula with isotonic shift and new driplines / P. R. Chowdhury, C. Samanta, D. N. Basu // Modern Physics Letters A. – 2005. – Vol. 20, nr 21. – P. 1605–1618.
14. Kirson, M. W. Mutual influence of terms in a semi-empirical mass formula / M. W. Kirson // Nuclear Physics A. – 2008. – Vol. 798. – P. 29–60.
15. Mikhajlov, V. M. Jadiernaja fizika / V. M. Mikhajlov, O. Ye. Kraft. – L. : Izd-vo Leningr. un-ta, 1988. – 328 s.
16. Rakobol'skaja, I. V. Jadiernaja fizika / I. V. Rakobol'skaja. – M. : Izd-vo Mosk. un-ta, 1971. – 295 s.
17. Mukhin, K. N. Ekspierimiental'naja jadiernaja fizika : v 3 t. / K. N. Mukhin. – M. : Energoatomizdat, 1993. – Kn. 1, ch. 2. – 320 s.
18. Tati, T. Separation Energies and Nuclear Structures in Light Nuclei / T. Tati // Prog. Theor. Phys. – 1955. – Vol. 14, nr 2. – P. 107–125.
19. Bethe – Weizsäcker semiempirical mass formula coefficients 2019 update based on AME2016 [Electronic resource] / D. Benzaid [et al.] // Nuclear Science and Techniques. – 2020. – Vol. 31, nr 9. – Mode of access: <https://sci-hub.st/https://doi.org/10.1007/s41365-019-0718-8>. – Date of access: 28.05.2020.
20. Bieronuchkin, V. Ye. Osnovy fiziki. Kurs obshhiej fiziki : uchiebnik : v 2 t. / V. Ye. Bieronuchkin, D. A. Zaikin, Yu. M. Cypeniuk. – M. : FIZMATLIT, 2001. – T. 2 : Kvantovaja i statistichieskaja fizika. – 504 s.
21. Korniuškin, Yu. D. Osnovy sovriemnoj fiziki (kvantovaja miekhanika, fizika atomov i moliekul, fizika tvjordogo tiela, jadiernaja fizika) : uchieb. posobije / Yu. D. Korniuškin. – SPb. : SPbGU ITMO, 2005. – 326 s.
22. Ishkhanov, B. S. Chasticy i atomnyje jadra / B. S. Ishkhanov, I. M. Kapitonov, N. P. Yudin. – M. – Izd-vo LKI, 2007. – 584 s.
23. Fermi, E. Nuclear Physics / E. Fermi. – The university of Chicago press, 1950. – 248 p.
24. Irodov, I. Ye. Sbornik zadach po atomnoj i jadruernej fizike / I. Hy. Irodov. – M. : Energoatomizdat, 1984. – 216 s.
25. Putilov, K. A. Kurs fiziki : v 3 t. / K. A. Putilov, V. A. Fabrikant. – M. : Fizmatgiz, 1963. – T. 3 : Optika. Atomnaja fizika. Jadiernaja fizika. – 636 s.
26. Kapiel'naja model' jadra [Elektronnyj riesurs] // Vikipiedija. Svobodnaja enciklopedija. – Riezhim dostupa: https://ru.wikipedia.org/wiki/Kapel'naja_model'_jadra. – Data dostupa: 18.04.2020.
27. Friedlander, G. Introduction to Radio-chemistry/ G. Friedlander, J. W. Kennedy. – New York : John Wiley & Sons, 1949. – 428 p.
28. Siekierzhyckij, V. S. Ravnoviesnye sistiemy fermionov i bozonov v magnitnykh poliah : monografija / V. S. Siekierzhyckij ; Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Briest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.
29. Myers, W. D. Nuclear masses and deformations / W. D. Myers, W. J. Swiatecki // Nuclear Physics – 1966. – Vol. 81, nr 1. – P. 1–60.

30. Nuclear Masses and Binding Energy. Lesson 3 [Electronic resource]. – Mode of access: <https://web.archive.org/web/20150930014054/http://oregonstate.edu/instruct/ch374/-ch418518/lecture3-1.pdf>. – Date of access: 10.10.2020.

31. Casten, R. F. Nuclear Structure From A Simple Perspective / R. F. Casten. – New York : Oxford university press, 1990. – 376 p.

32. Udovienko, S. M. Provierka tochnosti priedskazanij formuly Vajczekkiera so znachienijami koefficientov, priedstavliennykh v [1] / S. M. Udovienko // Tieorieticheskaja fizika, astrofizika i fizika kondensirovannykh sried : sb. materialov studiench. nauch. konf., Briest, 4-5 ijunia 2020 g. / Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. V. S. Siekierzhyckogo. – Briest : BrGU, 2020. – S. 22–23.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 02.03.2021

УДК 539.12...17; 539.128.2

**Елена Сергеевна Кокоулина¹, Михаил Иванович Левчук²,
Максим Николаевич Невмержицкий³, Константин Михайлович Хвалеи⁴,
Роман Георгиевич Шуляковский⁵**

¹д-р физ.-мат. наук, доц., нач. сектора

Объединенного института ядерных исследований (Россия)

²д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник

Института физики имени Б. И. Степанова НАН Беларуси

³науч. сотрудник Института прикладной физики НАН Беларуси

⁴студент 3 курса факультета прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета

⁵канд. физ.-мат. наук, доц., ведущий науч. сотрудник Института ядерных проблем
Белорусского государственного университета,

ведущий науч. сотрудник Института прикладной физики НАН Беларуси

**Elena Kokoulina¹, Michael Levchuk², Maxim Nevmerzhitsky³,
Kanstantsin Khvalei⁴, Roman Shulyakovsky⁵**

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor,
Head of Sector at Joint Institute for Nuclear Research

²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher
of B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

³Researcher of Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus

⁴3rd Year Student of the Faculty of Applied Mathematics and Computer Science
at Belarusian State University

⁵Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Assistant Professor, Lead Researcher
of Institute for Nuclear Problems of Belarusian State University,
Lead Researcher of Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences of Belarus,
e-mail: nevmerzhmn@gmail.com

О КОМПОНЕНТЕ ТЕНЗОРНОЙ АСИММЕТРИИ T_{20} В РЕАКЦИИ КОГЕРЕНТНОГО ФОТОРОЖДЕНИЯ ПИОНА НА ДЕЙТРОНЕ В ОБЛАСТИ Δ -РЕЗОНАНСА

В рамках плосковолнового импульсного приближения рассчитана компонента тензорной асимметрии T_{20} в реакции когерентного фоторождения π^0 -мезона на дейтроне. Оператор фоторождения пиона на нуклоне построен в CGLN-параметризации с использованием модели MAID07. Исследована чувствительность результата к выбору параметризации дейтронной волновой функции. Сходство полученных результатов объясняется тем, что в работе использованы параметризации, основанные на высокоточных потенциалах нуклон-нуклонного взаимодействия. Проведено сравнение полученных значений с предсказаниями других моделей и с экспериментальными данными. Заметное расхождение теории и эксперимента наблюдается при энергии фотона $E_\gamma = 400$ МэВ.

Ключевые слова: фоторождение пиона, дейтрон, поляризационные наблюдаемые.

On the Component of the Tensor Asymmetry T_{20} in the Reaction of Coherent Pion Photoproduction on the Deuteron in the Δ -Resonance Region

Within the framework of the plane-wave impulse approximation, the tensor asymmetry component T_{20} in the reaction of coherent photoproduction of the π^0 meson on the deuteron is calculated. The operator of pion photoproduction on nucleon is constructed in CGLN-parameterization using the MAID07 model. The sensitivity of the result to the choice of the parameterization of the deuteron wave function is explored. The similarity of the results obtained is explained by the fact that we used parameterizations based on high-precision potentials of the nucleon-nucleon interaction. The obtained values are compared with the predictions of other models and with experimental data. A noticeable discrepancy between theory and experiment is observed at the photon energy $E_\gamma = 400$ MeV.

Key words: pion photoproduction, deuteron, polarization observables.

Введение

Эксперименты по рождению пионов на нуклонах и ядрах предоставляют уникальную возможность для изучения внутренней структуры нуклона и других сильно-взаимодействующих систем. Исследования в этой области долгое время являются одним из основополагающих направлений физики частиц и ядер. Дейтрон является простейшим ядром, содержащим нейтрон. Его малая энергия связи и хорошая изученность в сравнении с более тяжелыми ядрами предоставляют хорошую возможность для изучения нейтрона, недоступного для изучения в свободном виде. В этом контексте дейтронные исследования представляют особый интерес.

Стоит отметить, что существует как минимум еще одно важное приложение дейтронных исследований – изучение нуклон-нуклонных и пион-нуклонных взаимодействий, что особенно касается фоторождения нейтральных пионов из-за короткого времени жизни π^0 -мезона.

Истории теоретического изучения когерентной реакции на дейтроне положено начало работами [1; 2], в которых было проведено приближенное рассмотрение модели ядерного ферми-газа. Позднее проведено множество теоретических исследований, использовавших более деликатные подходы. Среди них приближение факторизации для рассмотрения движения Ферми в плосковолновом импульсном приближении [3], различные подходы к перерассеянию в конечном состоянии [4–9], динамические модели взаимодействия нуклонов с нуклонными резонансами [10] и др.

В 2020 г. опубликованы результаты уникальных измерений компоненты тензорной асимметрии T_{20} в реакции когерентного фоторождения пиона на дейтроне [11]. Эксперимент проведен на установке VEPP-3 в Институте ядерной физики имени Г. И. Будкера СО РАН.

Настоящая работа посвящена проверке успешности различных моделей в воспроизведении экспериментальных данных [11]. Тесты на поляризационных наблюдаемых налагают еще более строгие требования на точность по сравнению с тестами на данных по неполяризованной реакции. В работе мы строим свой подход для нахождения компоненты тензорной асимметрии T_{20} в реакции $\gamma d \rightarrow \pi^0 d'$. Используется реалистичный оператор фоторождения пионов, основанный на унитарной изобарной модели MAID07 [12] и параметризации волновой функции, полученной из высокоточных потенциалов нуклон-нуклонного взаимодействия.

1. Кинематика

Все расчеты проводятся в системе отсчета центра масс. Введем обозначения $k = (\omega, \vec{k})$, $p = (E, -\vec{k})$, $q = (\varepsilon_\pi, \vec{q})$ и $p' = (E', -\vec{q})$ для 4-импульсов начального фотона, начального дейтрона, конечного пиона и конечного дейтрона соответственно. $W = \sqrt{M^2 + 2ME_\gamma}$ – полная энергия системы, E_γ – энергия фотона в лабораторной системе отсчета.

Для массы пиона $\mu = 134,98$ МэВ пороговая энергия реакции составляет

$$E_\gamma^{\text{th}} = \mu + \frac{\mu^2}{2M} = 139,8 \text{ МэВ.} \quad (1)$$

Записав импульс пиона как

$$q = \frac{1}{2W} \sqrt{[W^2 - (M + \mu)^2][W^2 - (M - \mu)^2]}, \quad (2)$$

можем обнаружить, что кинематика полностью определена.

В расчетах мы используем только 9 из 18 поляризованных амплитуд – те, для которых спиральность фотона равна $\lambda = 1$. Вследствие сохранения четности для амплитуд выполняется равенство

$$\langle -m'_d | T | -\lambda - m_d \rangle = (-1)^{1+m_d+m'_d+\lambda} \langle m'_d | T | \lambda m_d \rangle. \quad (3)$$

В случае реальных фотонов ($\lambda = \pm 1$) это соотношение может быть записано в более простой форме

$$\langle -m'_d | T | -\lambda - m_d \rangle = (-1)^{m_d+m'_d} \langle m'_d | T | \lambda m_d \rangle. \quad (4)$$

Таким образом, искомая компонента тензорной асимметрии T_{20} запишется как

$$T_{20} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sum_{m_d} (|\langle m_d | T | +1+1 \rangle|^2 + |\langle m_d | T | +1-1 \rangle|^2 - 2|\langle m_d | T | +10 \rangle|^2)}{\sum_{m'_d m_d} |\langle m'_d | T | +1 m_d \rangle|^2}. \quad (5)$$

2. Модель реакции

Описание реакции проводится с помощью диаграммного подхода в рамках плосковолнового импульсного приближения (ПВИА). Соответствующая диаграмма приведена на рисунке 1.

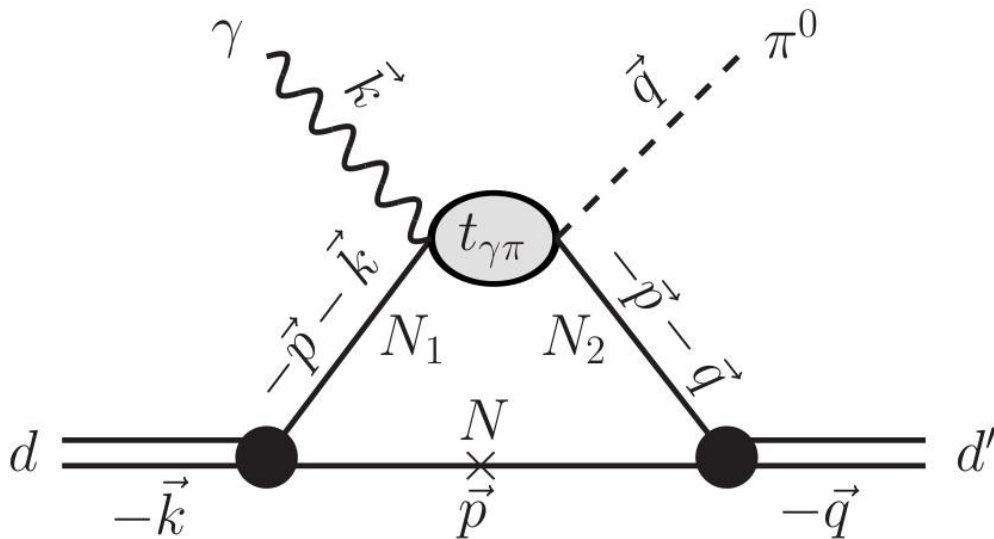


Рисунок 1. – Диаграмма ПВИА для реакции $\gamma d \rightarrow \pi^0 d'$

Амплитуда реакции в ПВИА имеет следующий вид:

$$\langle m'_d | \mathcal{M}(\vec{q}, \vec{k}) | 1 m_d \rangle = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_{m_2 m_1 \tilde{m}} \Psi_{m_2 \tilde{m}}^{m'_d \dagger} \left(\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2} \right) \langle m_2 | t_{\gamma\pi} | 1 m_1 \rangle \Psi_{m_1 \tilde{m}}^{m_d} \left(\vec{p} + \frac{\vec{k}}{2} \right),$$

где $t_{\gamma\pi}$ – амплитуда фоторождения нейтрального пиона на нуклоне, Ψ^{m_d} – волновая функция дейтрона. Связь матрицы рассеяния и \mathcal{M} - и T -матрицы можно записать как

$$\mathcal{M}_{m'_d 1 m_d}(\theta, \varphi) = e^{i(1+m_d)\varphi} T_{m'_d 1 m_d}(\theta), \quad (6)$$

что уже использовано в (5).

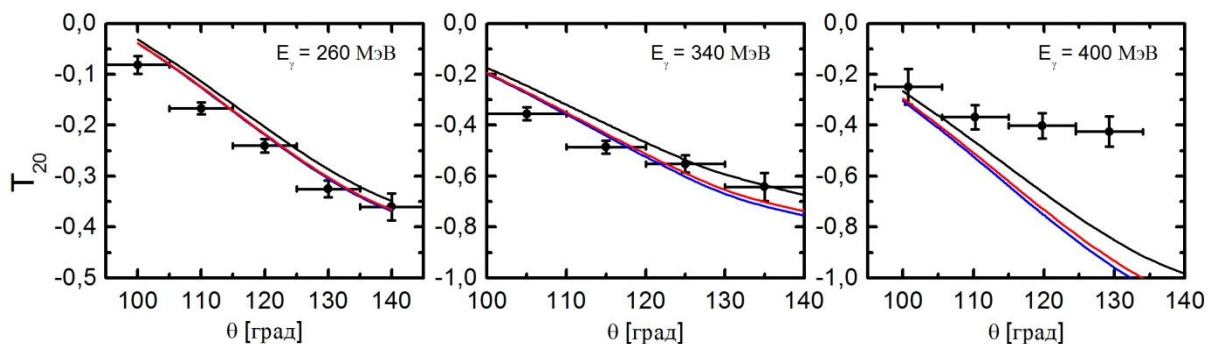
Вид оператора фоторождения пиона на нуклоне в системе фотон-нуклонного центра масс хорошо известен [13]:

$$\langle m_2 | t_{\gamma\pi} | \lambda m_1 \rangle = \frac{4\pi W_{\gamma N_1}}{m} \langle m_2 | i\vec{\sigma} \cdot \epsilon_\lambda F_1 + \vec{\sigma} \cdot \hat{q} \vec{\sigma} \cdot (\hat{k} \times \epsilon_\lambda) F_2 + \\ + i\vec{\sigma} \cdot \hat{k} \hat{q} \cdot \epsilon_\lambda F_3 + i\vec{\sigma} \cdot \hat{q} \hat{q} \cdot \vec{\epsilon}_\lambda F_4 | m_1 \rangle. \quad (7)$$

Амплитуды $F_i (i=1-4)$ взяты из унитарной изобарной модели MAID07 для фоторождения пиона на нуклоне [12].

3. Результаты

На рисунке 2 приведено сравнение расчетов, использующих различные параметризации волновых функций дейтрона. Можно видеть, что разница между предсказаниями мала. Это объясняется тем, что все использованные в расчетах нуклон-нуклонные потенциалы являются реалистичными. Тем не менее мы рассматриваем потенциал CD-Bonn в качестве основного в настоящей работе.

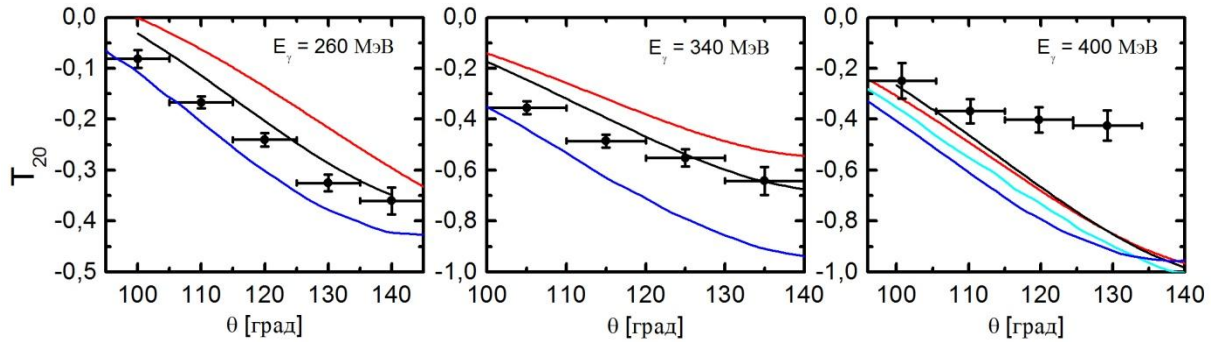


Оператор фоторождения пиона на нуклоне построен в параметризации (7) [13] с использованием [12]. Точки – экспериментальные данные из работы [11]. Черные кривые – результаты, полученные с использованием волновой функции, соответствующей потенциалу CD-Bonn [14], синие – потенциалу V18 [15], красные – потенциалу Nijm93 [16]. Результаты, полученные для потенциала NijmII [16], совпадают с таковыми для V18 и на рисунке не представлены.

Рисунок 2. – Зависимость результатов от выбора потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия

На рисунке 3 представлены предсказания, выполненные в рамках различных моделей. Можно видеть, что наша модель успешно описывает экспериментальные данные при энергиях фотона 260 и 340 МэВ. Однако при 400 МэВ наблюдается сильное расхождение. Более того, как следует из рисунков 2 и 3, ни одна из рассмотренных моделей не описывает экспериментальные данные при 400 МэВ.

Стоит отметить, что расхождение наших предсказаний с предсказаниями [17] является отдельным важным вопросом, поскольку использованные в расчетах модели практически идентичны.



Черные кривые – то же, что и на рисунке 3, получены в рамках описанной в разделе 2 модели. Синие кривые – полный расчет из работы [4]. Красные кривые получены из модели, аналогичной нашей [17]. Голубые линии – предсказания из работы [9].

Рисунок 3. – Сравнение с предсказаниями других моделей

Заклучение

В рамках плосковолнового импульсного приближения с использованием унитарной изобарной модели MAID07 и различных параметризаций волновой функции дейтрона, основанных на реалистичных нуклон-нуклонных потенциалах, получена компонента тензорной асимметрии T_{20} в реакции $\gamma d \rightarrow \pi^0 d'$. Получена потенциальная зависимость результата.

Сравнение предсказаний нашей модели с экспериментальными данными показывает, что наша модель адекватно описывает данные для энергий фотонов, равных 260 МэВ и 340 МэВ, но не работает в случае энергии, равной 400 МэВ. Следует отметить, что все представленные в литературе модели имеют близкие к нашим предсказания при 400 МэВ и, соответственно, те же проблемы. У нас пока нет объяснения для этого несоответствия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Osland, P. Coherent pion photoproduction from deuterium at intermediate energies / P. Osland, A. K. Rej // *Nuov. Cim. A.* – 1976. – Vol. 32, nr 4. – P. 469–483.
2. Lazard, C. Theoretical study of coherent pion photoproduction on the deuteron / C. Lazard, R. J. Lombard, Z. Maric // *Nucl. Phys. A.* – 1976. – Vol. 271, iss. 2. – P. 317–341.
3. Rekalov, M. E. Neutral pion photoproduction on deuterons in the resonance energy region / M. E. Rekalov, I. V. Stoletnii // *J. Phys. G.* – 1991. – Vol. 17, iss. 11. – P. 1643–1656.
4. Kamalov, S. S. Coherent π^0 and η photoproduction on the deuteron / S. S. Kamalov, L. Tiator, C. Bennhold // *Phys. Rev. C.* – 1997. – Vol. 55, nr 1. – P. 98–110.
5. Bosted, P. Electromagnetic properties of the πNN system: (II). The $\gamma D \rightarrow \pi^0 D$ reaction / P. Bosted, J. M. Laget // *Nucl. Phys. A.* – 1978. – Vol. 296, iss. 3. – P. 413–430.
6. Koch, J. H. Near threshold photoproduction of neutral pions from the deuteron / J. H. Koch, R. M. Woloshyn // *Phys. Rev. C.* – 1977. – Vol. 16, iss. 5. – P. 1968–1975.
7. Blaazer, E. Coherent pion production on the deuteron spin observables / E. Blaazer, B. L. G. Bakker, H. J. Boersma // *Nucl. Phys. A.* – 1994. – Vol. 568, nr 4. – P. 681–702.
8. Garcilazo, H. Pion photoproduction of the deuteron: The reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d'$ / H. Garcilazo, E. M. Guerra // *Phys. Rev. C.* – 1995. – Vol. 52, iss. 1. – P. 49–60.
9. Wilhelm, P. Coherent pion photoproduction on the deuteron in the Δ resonance region / P. Wilhelm, H. Arenhövel // *Nucl. Phys. A.* – 1995. – Vol. 593, nr 4. – P. 435–462.

10. Effect of the $N\Delta$ interaction on observables of the πNN and γNN systems / M. T. Peña [et al.] // Phys. Rev. C. – 1992. – Vol. 45, iss. 4. – P. 1487–1511.
11. Measurement of the tensor analyzing power T_{20} for the reaction $\gamma d \rightarrow \pi^0 d$ / V. V. Gauzshtein [et al.] // Eur. Phys. J. A. – 2020. – Vol. 56, nr 6. – P. 169 (7).
12. Drechsel, D. Unitary isobar model – MAID2007 / D. Drechsel, S. S. Kamalov, L. Tiator // Eur. Phys. J. – 2007. – Vol. A 34. – P. 69–97.
13. Relativistic Dispersion Relation Approach to Photomeson Production / G. F. Chew [et al.] // Phys. Rev. – 1957. – Vol. 106, nr 6. – P. 1345–1355.
14. Machleidt, R. High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential / R. Machleidt // Phys. Rev. C. – 2001. – Vol. 63, nr 2. – P. 024001 (32).
15. Wiringa, R. B. Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking / R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks, R. Schiavilla // Phys. Rev. C. – 1995. – Vol. 38, iss. 1. – P. 38–51.
16. Construction of high-quality NN potential models / V. G. J. Stoks [et al.] // Phys. Rev. C. – 1994. – Vol. 49, iss. 6. – P. 2950–2963.
17. Darwish, E. M. Chastnoje soobshchijenije (2021).

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 27.09.2021

УДК 535.3+537.6

Владимир Станиславович Секержицкий¹, Алексей Игоревич Серый²^{1,2}канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Vladimir Sekerzhitsky¹, Alexey Sery²**^{1,2}Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor
of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: ²alexey_sery@mail.ru

О БЕТА-РАВНОВЕСИИ ЭЛЕКТРОННО-НУКЛОННОГО ВЕЩЕСТВА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-протонного вещества на значение концентрации протонов и электронов, соответствующее порогу нейтронизации, а также влияние температуры электронейтрального электронно-нуклонного вещества на значения концентраций электронов, протонов и нейтронов, соответствующих бета-равновесию. Исследование выполнено в приближении идеальности электронного и нуклонных газов, а также в приближении низких температур, при которых отличная от нуля тепловая энергия намного меньше энергии Ферми. При этом для взаимосвязи между температурой, концентрациями и химическими потенциалами нуклонных газов использована известная нерелятивистская формула, для релятивистского электронного газа соответствующая формула получена в данной работе. Показано, что с ростом температуры значение концентрации электронов и протонов, соответствующее порогу нейтронизации, повышается. Также показано, что при одном и том же значении концентрации электронов и протонов с ростом температуры значение концентрации нейтронов, соответствующее бета-равновесию, уменьшается.

Ключевые слова: электронно-нуклонное вещество, бета-равновесие, порог нейтронизации, низкие температуры.

On Beta-Equilibrium of Electron-Nucleon Matter at Low Temperatures

The influence of the temperature of an electrically neutral electron-proton matter on the value of the concentration of protons and electrons corresponding to neutronization threshold and the influence of the temperature of an electrically neutral electron-nucleon matter on the value of the concentration of electrons, protons and neutrons corresponding to beta-equilibrium have been investigated. The research has been carried out in the approximation of ideality of electron and nucleon gases and in the approximation of low temperatures at which nonzero thermal energy is much less than Fermi energy. In this case, the well-known nonrelativistic formula has been applied for the relationship between the temperature, concentrations, and chemical potentials of nucleon gases, the corresponding formula for relativistic electron gas has been obtained in this work. It has been shown that as temperature increases, the value of the concentration of electrons and protons corresponding to the neutronization threshold increases. It has been shown also that as temperature increases at the same value of the concentration of electrons and protons, the value of the concentration of neutrons corresponding to the beta-equilibrium decreases.

Key words: electron-nucleon matter, beta equilibrium, neutronization threshold, low temperatures.

Введение

Расчет порога нейтронизации водорода и условий бета-равновесия электронно-нуклонного вещества имеет значение для различных задач астрофизики. Ранее подобные задачи рассматривались в приближении абсолютного нуля температуры и в пределах высоких температур, в т. ч. в присутствии квантующего магнитного поля [1, с. 88–92, 167–168], а также с учетом и без учета энергии взаимодействия между частицами и спиновой поляризации нуклонов [2, с. 549–555; 3, с. 30–37; 4, с. 30–43]. Для низких отличных от нуля температур задачи такого типа ранее не рассматривались, что можно объяснить следующими причинами.

Алгоритм расчета основных характеристик ферми-газа (в т. ч. химического потенциала) при низких, отличных от нуля температурах хорошо разработан для нерелятивистского приближения [5, с. 596–597; 6, с. 201–202], применение которого не всегда

корректно. В частности, нерелятивистское приближение нельзя считать корректным для вычисления химического потенциала электронного газа при нахождении порога нейтронизации и условий бета-равновесия, поскольку разница между массами нейтрона m_n и протона m_p превышает $2,5m_e$ (m_e – масса электрона). В связи с этим необходимо вывести некоторые основные формулы заново, что и предполагается сделать в данной работе. Кроме того, заслуживает обсуждения вопрос о возможности уточнения алгоритма для нерелятивистского газа (и выполнения аналогичного уточнения для релятивистского газа) при переходе от низких к не очень низким температурам.

Замечания о формулах, используемых для вычислений характеристик нерелятивистских ферми-газов

Следует отметить, что упомянутый выше алгоритм основан на приближенном вычислении интегралов следующего вида:

$$M = \int_0^{+\infty} \varphi(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon, \quad f(\varepsilon) = \left(\exp\left(\frac{\varepsilon - \lambda}{kT}\right) + 1 \right)^{-1}. \quad (1)$$

При этом выполняется замена переменной

$$\frac{\varepsilon - \lambda}{kT} = z, \quad (2)$$

после чего интеграл (1) можно преобразовать либо к виду [5, с. 596–597]

$$M = - \int_{-\lambda/(kT)}^{+\infty} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz, \quad \tilde{f}(z) = (e^z + 1)^{-1}, \quad F(\chi) = \int_0^\chi \varphi(\xi) d\xi, \quad (3)$$

либо к виду [6, с. 201]

$$M = \int_0^\lambda \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + kT \left(\int_0^{+\infty} \varphi(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz - \int_0^{\lambda/(kT)} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz \right). \quad (4)$$

В обоих случаях дальнейшие рассуждения основаны на том, что при низких температурах, когда $\lambda > 0$ (эта величина имеет смысл химического потенциала) и $\lambda/(kT) \gg 1$, можно заменить нижний предел первого интеграла в (3) с $-\lambda/(kT)$ на $-\infty$, а верхний предел последнего интеграла в (4) – с $\lambda/(kT)$ на $+\infty$. Несмотря на замечания, перечисленные далее, получающаяся конечная формула

$$M = \int_0^\lambda \varphi(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{1}{6} (\pi kT)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=\lambda} + \frac{7}{360} (\pi kT)^4 \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \varepsilon^3} \right)_{\varepsilon=\lambda} + \dots \quad (5)$$

находит широкое применение в теоретической физике, а результаты вычислений с ее применением хорошо согласуются с экспериментом (прежде всего, в физике твердого тела). При этом условия, налагаемые на функцию φ , перечисленные, например, в [5, с. 596], как мы увидим в дальнейшем, в нашем случае выполняются, а все трудности физического и математического характера, присутствующие в промежуточных преобразованиях и отмеченные далее, в (5) отсутствуют.

Необходимо сделать следующие замечания:

1. При достаточно низких, но отличных от нуля температурах для достижения требуемой точности вычислений (при соответствующей точности исходных данных)

в правой части (5) достаточно ограничиться первым и вторым слагаемыми. С ростом же температуры для повышения точности, на первый взгляд, требуется учет последующих слагаемых в (5), но ценность таких усилий для достижения большей точности снижается из-за того, что замена $\lambda/(kT)$ на $+\infty$ с ростом температуры становится все более грубой.

2. Поскольку величина ε для нерелятивистского ферми-газа имеет смысл энергии отдельного фермиона, отсчитываемой от энергии покоя, в случае идеального газа эта энергия равна просто кинетической энергии, которая по физическому смыслу не может быть отрицательной. Но тогда из (2) следует, что нижнее предельно допустимое значение для переменной z равно $-\lambda/(kT)$, поэтому замена этого значения на $-\infty$ в первом интеграле в (3) неправомерна с физической точки зрения. Кроме того, поскольку функция φ , как будет показано ниже, по смыслу зависит от ε , то область ее определения – положительная полупрямая. Из этого следует, что:

а) в третьем интеграле в (4) при любом Z аргумент функции φ должен быть только положительным (что не выполняется при $\lambda/(kT) < z < +\infty$ в случае замены верхнего предела с $\lambda/(kT)$ на $+\infty$);

б) верхний предел второго интеграла в (3) также может быть только положительным, поэтому область определения функции F является положительной полупрямой, как и в случае функции φ (что не выполняется при $-\infty < z < -\lambda/(kT)$ в случае замены нижнего предела первого интеграла в (3) с $-\lambda/(kT)$ на $-\infty$).

3. При обобщении формулы (5) на релятивистский случай функции, стоящие на месте φ , будут зависеть от аргумента, который, как будет обосновано ниже, по смыслу может быть только положительным (что не выполняется при $\lambda/(kT) < z < +\infty$ в случае замены верхнего предела с $\lambda/(kT)$ на $+\infty$ в (4)). Кроме того, в релятивистском случае функции φ будут содержать, как будет показано ниже, множители, представляющие собой полуцелые степени аргумента, поэтому аргумент не может быть отрицательным и с чисто математической точки зрения.

4. При попытке повышения точности (о чем уже было упомянуто в замечании 1) путем представления упомянутых выше интегралов в виде

$$\int_{-\lambda/(kT)}^{+\infty} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz - \int_{-\infty}^{-\lambda/(kT)} F(\lambda + kTz) \tilde{f}(z) dz, \quad (6)$$

$$\int_0^{\lambda/(kT)} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz = \int_0^{+\infty} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz - \int_{\lambda/(kT)}^{+\infty} \varphi(\lambda - kTz) \tilde{f}(z) dz \quad (7)$$

вычисление вторых интегралов в правых частях (6) и (7) даже численными методами наталкивается на трудности, перечисленные в замечаниях 2 и 3.

В силу сказанного выше, в дальнейшем будем руководствоваться замечанием 1 и при выводе аналогичных соотношений для релятивистского электронного газа.

Вывод соотношения для химического потенциала релятивистского электронного газа

В соответствии с [5, с. 190–192; 6, с. 194] запишем выражение для концентрации n_e электронного газа при произвольной температуре T в отсутствие внешнего магнитного поля и спиновой поляризации:

$$n_e = 2 \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{+\infty} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_e}{kT}\right) + 1}, \quad (8)$$

где \hbar – постоянная Планка, p – импульс отдельного электрона, ε – его энергия, k – постоянная Больцмана, μ_e – химический потенциал. Для протонного и нейтронного газов соотношение между температурой, концентрацией и химическим потенциалом выглядит совершенно аналогично (8); различия (с точки зрения электронного и нуклонных газов) начинаются при переходе к интегрированию по ε , поскольку это происходит различным образом в случае нерелятивистских нуклонных газов и релятивистского электронного газа.

В нерелятивистском случае энергия отдельного нуклона и химический потенциал соответствующего газа (μ_p – для протонов, μ_n – для нейтронов) не содержат энергии покоя отдельного нуклона $m_i c^2$ (m_i – масса нуклона ($i = p, n$), c – скорость света в вакууме), поэтому взаимосвязь между ε и p такова, что при переходе к интегрированию по ε в (8) нижний предел интеграла остается равным нулю. Это и позволяет применять формулы приближенного вычисления (8) при $kT/\mu_i \ll 1$, приведенные в [5, с. 597; 6, с. 201]. Несмотря на широкие возможности современных систем компьютерной математики, непосредственное нахождение μ_i при известных n_i и T по (8) (с учетом перехода к интегрированию по ε) при низких температурах неудобно [7, с. 10–12], поэтому все равно необходимо выполнять предварительные преобразования, а при низких температурах еще удобнее перейти к упомянутым выше приближенным соотношениям, в которых отсутствуют интегралы.

В релятивистском же случае взаимосвязь между ε и p выражается формулой

$$\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}, \quad (9)$$

а μ_e так же, как и ε , содержит $m_e c^2 \equiv A$. Тогда (8) переписется в виде

$$n_e = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_A^{+\infty} \frac{\varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - m_e^2 c^4} d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_e}{kT}\right) + 1}. \quad (10)$$

Нижний предел интеграла в (10) не равен нулю, поэтому применение упомянутого выше алгоритма к (10) недопустимо. Для решения данной проблемы произведем замену

$$\varepsilon = x + m_e c^2, \quad \mu_e = \nu + m_e c^2. \quad (11)$$

Из (11) следует, что переменная x может быть только положительной, а для величины ν это требование выполняется при достаточно низких температурах (которые и учитываются в данной работе). Подставляя (11) в (10), после несложных преобразований можно получить:

$$n_e = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} (I_{3/2} + m_e c^2 I_{1/2}), \quad (12)$$

$$I_j = \int_0^{+\infty} \frac{x^j \sqrt{x + 2m_e c^2} dx}{\exp\left(\frac{x - \nu}{kT}\right) + 1}. \quad (13)$$

Для возможности применения к интегралам (13) рассуждений, приведенных в [5, с. 596–597; 6, с. 201–202], но не при $kT/\mu_e \ll 1$, а при $kT/\nu \ll 1$, требуется, чтобы функции

$$\varphi_j(x) = x^j \sqrt{x + 2mc^2} \quad (14)$$

при $x \rightarrow \infty$ возрастали не быстрее, чем $e^{\frac{x}{kT}}$, а при $x \rightarrow 0$ не возрастали быстрее, чем x^{-1} . Легко видеть, что данные условия выполняются. Поэтому в соответствии с [5, с. 597; 6, с. 202] можно в общем виде приближенно записать:

$$I_j \approx \int_0^\nu \varphi_j(x) dx + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right)_{x=\nu}. \quad (15)$$

Подставляя (14) в (15) и возвращаясь от ν к μ_e в соответствии с (11), получаем:

$$I_{1/2} \approx \frac{\mu_e}{2} \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} - \frac{m_e^2 c^4}{2} \ln \left| \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}}{m_e c^2} \right| + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{\mu_e}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}}, \quad (16)$$

$$I_{3/2} \approx \frac{1}{3} (\mu_e^2 - m_e^2 c^4)^{3/2} - \frac{m_e c^2}{2} \left(\mu_e \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} - m_e^2 c^4 \ln \left| \frac{\mu_e + \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}}{m_e c^2} \right| \right) + \frac{\pi^2}{12} (kT)^2 \left(3\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} + \frac{(\mu_e - m_e c^2)^2}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}} \right). \quad (17)$$

Подставляя (16) и (17) в (12), получаем:

$$n_e \approx \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} \left(\frac{1}{3} (\mu_e^2 - m_e^2 c^4)^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{2\mu_e^2 - m_e^2 c^4}{\sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4}} \right). \quad (18)$$

Из (18) легко убедиться, что при $T = 0$ К получается значение химического потенциала вырожденного релятивистского электронного газа [1, с. 45]:

$$\mu_e = \mu_{0e} = \sqrt{m_e^2 c^4 + (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 c^2 n_e^{2/3}}. \quad (19)$$

Путем замены

$$y = \sqrt{\mu_e^2 - m_e^2 c^4} \quad (20)$$

можно преобразовать (18) к уравнению четвертой степени относительно y :

$$y^4 + (\pi kT)^2 y^2 - 3n_e \pi^2 (\hbar c)^3 y + \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 m_e^2 c^4 = 0. \quad (21)$$

Это уравнение можно решить аналитически при заданных n_e и T , а затем выразить μ_e на основе (20). Поскольку такой метод решения выглядит слишком громоздким, проще решать (18) численно относительно μ_e при заданных n_e и T .

С другой стороны, как будет показано ниже, для нахождения концентрации электронов (и протонов), соответствующей порогу нейтронизации, предварительно вычислять μ_e не обязательно.

Нахождение порога нейтронизации электронно-протонного вещества

Уравнение порога нейтронизации выглядит следующим образом [1, с. 88]:

$$\mu_e + \mu_p + m_p c^2 = m_n c^2, \tag{22}$$

где μ_e связано с заданными значениями n_e и T через (18), а μ_p при тех же значениях T и $n_e = n_p$ выражается по формуле [5, с. 281]

$$\mu_p \approx \mu_{0p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_{0p}} \right)^2 \right), \mu_{0p} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p}. \tag{23}$$

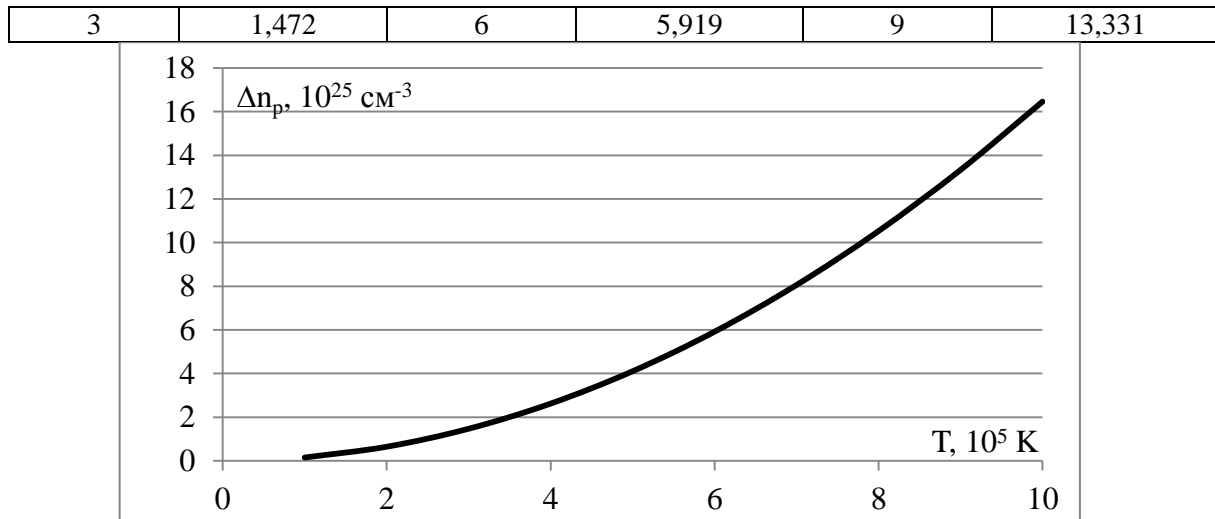
Тогда, выражая μ_e из (22) с учетом (23) и подставляя в (18), можно (с учетом $n_e = n_p$ для электронейтральной среды) после некоторых преобразований получить уравнение порога нейтронизации в виде

$$\begin{aligned} & 3n_e \pi^2 (\hbar c)^3 \sqrt{\left(m_n c^2 - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2} - m_e^2 c^4 - \\ & - \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 \left\{ 2 \left(m_n c^2 - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right\} - \\ & - \left(\left(m_n c^2 - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right)^2 \approx 0. \tag{24} \end{aligned}$$

Результаты численных расчетов удобно представить в следующем виде. Для начала выберем значение концентрации протонов и электронов, соответствующее порогу нейтронизации при $T = 0$ К: $n_{0p} = 7,35586 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$. Затем для различных значений температуры будем указывать поправку Δn_p к значению n_{0p} . Численные результаты представлены в таблице 1 и на рисунке 1.

Таблица 1. – Значения порога нейтронизации при различных температурах

$T, 10^5 \text{ К}$	$\Delta n_p, 10^{25} \text{ см}^{-3}$	$T, 10^5 \text{ К}$	$\Delta n_p, 10^{25} \text{ см}^{-3}$	$T, 10^5 \text{ К}$	$\Delta n_p, 10^{25} \text{ см}^{-3}$
1	0,154	4	2,625	7	8,060
2	0,648	5	4,107	8	10,531



Рисунек 1. – Значение Δn_p , соответствующее порогу нейтронизации при различных температурах, согласно уравнению (24)

Таким образом, можно сделать вывод, что с ростом температуры значение $n_e = n_p$, соответствующее порогу нейтронизации, повышается. Более высокие значения температуры по сравнению с представленными в таблице 1 и на рисунке 1 приводят к нарушению условия применимости соотношений (18) и (23). Это замечание относится также к рисункам 2, 3 и таблице 2.

Уравнение бета-равновесия электронно-нуклонного вещества

Уравнение бета-равновесия в общем случае выглядит следующим образом [1, с. 88]:

$$\mu_e + \mu_p + m_p c^2 = \mu_n + m_n c^2, \quad (25)$$

где, как и в задаче о нахождении порога нейтронизации, μ_e связано с заданными значениями n_e и T через (18), μ_p при тех же значениях T и $n_e = n_p$ находится по формуле (23), а формула для μ_n (которая применяется при том же значении T) совершенно аналогична (23):

$$\mu_n \approx \mu_{0n} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu_{0n}} \right)^2 \right), \quad \mu_{0n} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n}. \quad (26)$$

Для удобства введем вспомогательную функцию

$$N(n_n, T) = m_n c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}}{2m_n} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_n kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_n^{2/3}} \right)^2 \right). \quad (27)$$

Тогда, выражая μ_e из (25) с учетом (23), (26), (27) и подставляя в (18), можно (с учетом $n_e = n_p$ для электронейтральной среды) после некоторых преобразований получить (по аналогии с (24)) уравнение бета-равновесия в виде

$$\begin{aligned}
 & 3n_e\pi^2(\hbar c)^3 \sqrt{\left(N(n_n, T) - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 -} \\
 & - \frac{\pi^2}{2} (kT)^2 \left(2 \left(N(n_n, T) - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right) - \\
 & - \left(\left(N(n_n, T) - m_p c^2 - \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}}{2m_p} \left(1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{2m_p kT}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_p^{2/3}} \right)^2 \right) \right)^2 - m_e^2 c^4 \right)^2 \approx 0. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Уравнение (28) можно решать численно относительно n_n при заданных значениях T (в соответствии с замечанием после рисунка 1) и $n_p > n_{0p}$. Численные результаты решения уравнения (28) представлены в таблице 2 и на рисунках 2 и 3. В силу того, что графики уравнения бета-равновесия при $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К практически сливаются, на рисунке 2 в логарифмическом масштабе отображен график зависимости n_n от n_p для температуры $T = 1,00 \cdot 10^9$ К. При этом различие между графиками удобнее представить в виде разности значений концентрации нейтронов, соответствующих бета-равновесию при температурах $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К, в зависимости от значения n_p . Соответствующая зависимость отображена на рисунке 3. При этом на рисунках 2 и 3 для удобства введены вспомогательные величины $n_{01} = 10^{30} \text{ см}^{-3}$ и $n_{02} = 10^{33} \text{ см}^{-3}$.

Таблица 2. – Значения концентрации нейтронов, соответствующих бета-равновесию при температурах $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К, а также разность этих значений

$T, 10^9 \text{ К}$	1,00	9,00	$\Delta n_n = n_n^{(2)} - n_n^{(1)}, 10^{30} \text{ см}^{-3}$
$n_p, 10^{30} \text{ см}^{-3}$	$n_n^{(1)}, \text{ см}^{-3}$	$n_n^{(2)}, \text{ см}^{-3}$	
0,75	$2,1377 \cdot 10^{32}$	$2,1351 \cdot 10^{32}$	0,26
0,8	$1,95956 \cdot 10^{33}$	$1,95899 \cdot 10^{33}$	0,57
0,85	$4,50730 \cdot 10^{33}$	$4,50657 \cdot 10^{33}$	0,73
0,9	$7,55357 \cdot 10^{33}$	$7,55273 \cdot 10^{33}$	0,84
0,95	$1,095618 \cdot 10^{34}$	$1,095526 \cdot 10^{34}$	0,92
1	$1,462811 \cdot 10^{34}$	$1,462714 \cdot 10^{34}$	0,98
1,5	$5,81918 \cdot 10^{34}$	$5,81906 \cdot 10^{34}$	1,18
2	$1,052996 \cdot 10^{35}$	$1,052984 \cdot 10^{35}$	1,19
2,5	$1,521123 \cdot 10^{35}$	$1,521112 \cdot 10^{35}$	1,16
3	$1,977335 \cdot 10^{35}$	$1,977323 \cdot 10^{35}$	1,12
3,5	$2,4195405 \cdot 10^{35}$	$2,4195296 \cdot 10^{35}$	1,09

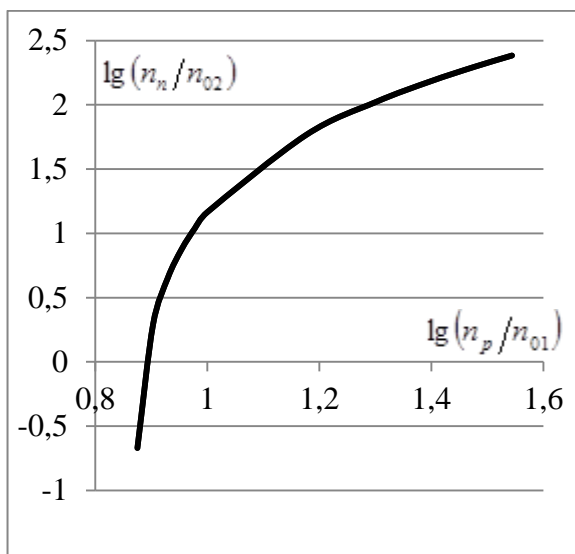


Рисунок 2. – Зависимость значения $\lg(n_n/n_{02})$, соответствующего бета-равновесию, от значения $\lg(n_p/n_{01})$ при $T = 1,00 \cdot 10^9$ К, согласно уравнению (28)

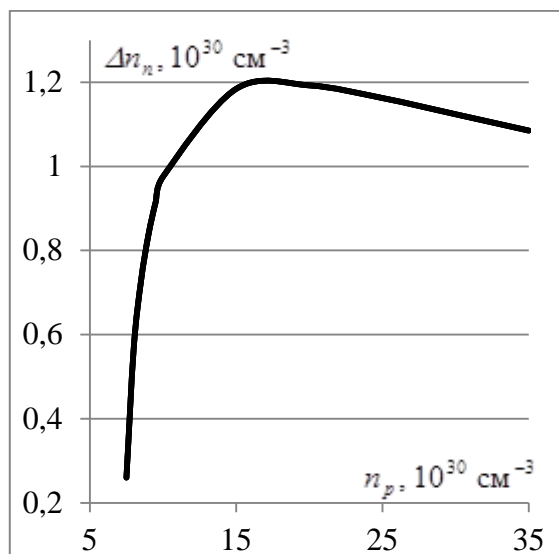


Рисунок 3. – Зависимость разности значений n_n , соответствующих бета-равновесию при $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К, согласно уравнению (28), от значения n_p

Таким образом, с ростом температуры при одном и том же значении $n_e = n_p$ значение n_n , соответствующее бета-равновесию, уменьшается. При этом для двух заданных значений температуры (в нашем случае это $T = 1,00 \cdot 10^9$ К и $T = 9,00 \cdot 10^9$ К) с ростом концентрации $n_e = n_p$ соответствующая разность между значениями концентрации нейтронов сначала возрастает, а затем, начиная приблизительно с $n_p \approx 2 \cdot 10^{31} \text{ см}^{-3}$, уменьшается.

Поиск значений n_n при $n_p < 7,5 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ требует отдельных исследований, поскольку бета-равновесные значения n_n получаются настолько малыми, что формула (26) становится все более грубым приближением для нахождения химического потенциала, а вблизи порога нейтронизации она и вовсе неприменима, поскольку при очень малой концентрации нейтронный газ становится невырожденным даже при таких температурах, при которых электронный и протонный газы еще вполне можно считать вырожденными и применять к ним соотношения (18) и (23).

Заключение. Основные результаты

В приближении низких, отличных от нуля температур и идеальности ферми-газов исследовано влияние температуры электронейтрального электронно-протонного вещества на значение концентрации протонов и электронов, соответствующее порогу нейтронизации, а также влияние температуры электронейтрального электронно-нуклонного вещества на значения концентраций электронов и нуклонов, соответствующих бета-равновесию. При этом для взаимосвязи между температурой, концентрациями и химическими потенциалами нуклонных газов использовано известное нерелятивистское соотношение, для релятивистского электронного газа соответствующее соотношение выведено по аналогичному алгоритму. Показано, что с ростом температуры значение концентрации электронов и протонов, соответствующее порогу нейтронизации

ции, повышается. Также показано, что при одном и том же значении концентрации электронов и протонов с ростом температуры значение концентрации нейтронов, соответствующее бета-равновесию, уменьшается. Результаты могут представлять интерес для теоретического исследования сверхплотных астрофизических объектов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Серый, А. И. О ферромагнетизме вырожденной нейтронно-протонной системы / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2012. – № 1. – С. 30–37.
4. Серый, А. И. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.
5. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика : учеб. пособие / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.
6. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. V : Статистическая физика. Ч. 1. – 616 с.
7. Секержицкий, В. С. Об использовании программы MathCAD для вычисления химического потенциала газа нерелятивистских фермионов / В. С. Секержицкий, А. И. Серый // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : материалы респ. науч.-практ. конф., 24–25 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т ; под общ. ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2018. – С. 12–14.

REFERENCES

1. Siekierzhyckij, V. S. Ravnoviesnyje sistiemy fiernionov i bozonov v magnitnykh poliakh : monografija / V. S. Siekierzhyckij ; Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Briest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.
2. Sery, A. I. Spin Polarization of Nucleons: Limits of Low and High Temperatures / A. I. Sery // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics. – 2015. – Vol. 79, nr 4. – P. 506–512.
3. Sieryj, A. I. O fierromagnietizmie vyrozhdiennoj nijtronno-protonnoj sistiemy / A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2012. – № 1. – S. 30–37.
4. Sieryj, A. I. O niekotorykh poliarizacionnykh effiektakh v astrofizichieskoj plazmie / A. I. Sieryj // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2014. – № 1. – S. 30–43.
5. Rumer, Yu. B. Tiermodinamika, statistichieskaja fizika i kinetika : uchieb. posobije / Yu. B. Rumer, M. Sh. Ryvkin. – Novosibirsk : Izd-vo Novosib. un-ta, 2000. – 608 s.
6. Landau, L. D. Tieorietichieskaja fizika : ucheb. posobije dlia vuzov: v 10 t. / L. D. Landau, Ye. M. Lifshic. – 5-je izd., stier. – M. : FIZMATLIT, 2001. – T. V : Statistichieskaja fizika. Ch. 1. – 616 s.
7. Siekierzhyckij, V. S. Ob ispol'zovanii programmy MathCAD dlia vychislienija khimichieskogo potentsiala gaza nierielativistskikh fiernionov / V. S. Siekierzhyckij, A. I. Sieryj // Matiematichieskoje modelirovanije i novyje obrazovatel'nyje tekhnologii v matiematike : materialy riesp. nauch.-prakt. konf., 24–25 apr. 2018 g. / Briest, gos. un-t ; pod obshch. ried. A. I. Basika. – Briest : BrGU, 2018. – S. 12–14.

УДК 512.542

Наталья Витальевна Артеменко¹, Александр Александрович Трофимук²

¹студент 4 курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

²канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

Natalia Artemenko¹, Aleksandr Trofimuk²

¹4th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics

at the Brest State A. S. Pushkin University

²PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,

Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling

at the Brest State A. S. Pushkin University

email: ¹artemenkonatasha@outlook.com; ²alexander.trofimuk@gmail.com

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ ПОРЯДКА, СВОБОДНОГО ОТ ЧЕТВЕРТЫХ СТЕПЕНЕЙ

Натуральное число n называется свободным от четвертых степеней, если p^4 не делит n для всех простых p . Группа называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных зна-копеременной группе A_4 . Изучено строение конечных разрешимых групп порядка, свободного от четвер-тых степеней. В частности, получены точные оценки производной, нильпотентной и p -длины для таких групп. Данные оценки уточнены для A_4 -свободных групп и групп нечетного порядка.

Ключевые слова: разрешимая группа, порядок, свободный от четвертых степеней, A_4 -свобод-ная группа, производная длина, нильпотентная длина, p -длина.

Finite Soluble Groups of Fourth-Power Free Order

The natural number n is called fourth-power free if p^4 does not divide n for all prime p . The group is called A_4 -free if it does not contain the section isomorphic to the alternating group A_4 . We consider the struc-ture of finite soluble groups of fourth-power free order. Exact estimations of the derived length, nilpotent length and p -length of such groups are obtained. These estimations have been refined for groups of odd order and A_4 -free groups.

Key words: soluble group, fourth-power free order, A_4 -free group, derived length, nilpotent length, p -length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и опреде-ления соответствуют [1]. Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m -х степеней, если p^m не делит n для всех простых p . При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов, а при $m = 4$ – от четвертых степеней.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i . Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются *факторами* нормального ряда (1).

Если порядок группы G свободен от квадратов, то в группе G существует циклическая холлова подгруппа N , такая, что G/N циклическая [2, теорема IV.2.11]. В частности, производная длина G не превосходит 2.

В работе [3] на основе системы компьютерной алгебры GAP разработан алгоритм для определения числа неизоморфных групп фиксированного порядка, свободного от кубов. При составлении алгоритма использовались свойства фраттиниевых расширений групп, автоморфизмов и того факта, что простая неабелева группы порядка, свободного от квадратов, изоморфна $PSL(2, p)$, $p > 3$ – простое число, такое, что числа $p-1$ и $p+1$ свободны от кубов.

В работе [4] были исследованы разрешимые группы порядка, свободного от кубов. В частности, группа G обладает силовской башней и производная длина группы G не превышает 3.

В настоящей работе продолжено изучение разрешимых групп с ограничениями на порядок. В следующей теореме получено описание строения разрешимых групп порядка, свободного от четвертых степеней.

Теорема. Пусть G – разрешимая группа порядка, свободного от четвертых степеней. Тогда нильпотентная длина G не превышает 4, производная длина G не превышает 6, $l_2(G) \leq 2$, $l_3(G) \leq 2$ и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$.

Следствие 1. Пусть G – A_4 -свободная разрешимая группа порядка, свободного от четвертых степеней. Тогда производная длина фактор-группы G не превышает 5 и $l_p(G) \leq 1$ для всех простых p .

Следствие 2. Пусть G – группа нечетного порядка, свободного от четвертых степеней. Тогда производная длина фактор-группы G не превышает 3.

Вспомогательные результаты

Напомним некоторые понятия, существенные в данной работе.

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1]. Пусть F – некоторая формация групп и G – группа. Тогда G^F – F -корадикал группы G , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G , для которых $G/N \in F$. Произведение $FN = \{G \in \mathbf{G} \mid G^H \in F\}$ формаций F и H состоит из всех групп G , для которых H -корадикал принадлежит формации F . Как обычно, $F^2 = FF$. Формация F называется *насыщенной*, если из условия $G/\Phi(G) \in F$ следует, что $G \in F$. Формации всех нильпотентных и абелевых групп обозначают через \mathbf{N} и \mathbf{A} соответственно. Обозначим через $[A]B$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B , $O_p(G)$ – наибольшую нормальную p -подгруппу группы G , $O_{p'}(G)$ – наибольшую нормальную p' -подгруппу группы G .

Группа G называется A_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных знакопеременной группе A_4 . Подгруппой Фраттини неединичной группы называется пересечение всех ее максимальных подгрупп и обозначается $\Phi(G)$.

Если t – длина самого короткого нормального ряда группы G с абелевыми факторами, то число t называют *производной длиной* группы G и обозначают через $d(G)$.

Если t – длина самого короткого нормального ряда группы G с нильпотентными факторами, то число t называют *нильпотентной длиной* группы G и обозначают через $n(G)$.

Если l – наименьшее число p -факторов среди всех нормальных рядов группы G , факторы которых являются либо p -группами, либо p' -группами, то число l называют p -длиной группы G и обозначают через $l_p(G)$.

Следующая лемма легко выводится из соответствующих определений.

Лемма 1. Пусть F – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит F , но $G/N \in F$ для всех неединичных нормальных подгрупп N группы G . Тогда G – примитивная группа.

Лемма 2. [2, теорема II.3.2]. Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M . Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p -группой порядка p^n для некоторого простого p ;

3) в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

Лемма 3. [5, лемма 12]. Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то $H \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$;

2) если $n = 3$, то $H \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^5$;

3) если $n \in \{2, 3\}$, $p > 3$ и $O_p(H) = 1$, то H – p' -группа.

Лемма 4. [5, лемма 13].

1. Если H – разрешимая A_4 -свободная подгруппа группы $GL(2, p)$, то H – метабелева.

2. Если H – разрешимая A_4 -свободная неприводимая подгруппа группы $GL(3, p)$, то $H \in \mathbf{A}^4$.

Лемма 5. Пусть H – неприводимая подгруппа нечетного порядка группы $GL(n, p)$. Тогда:

1) если $n = 2$, то H – циклическая и $|H|$ делит $(p^2 - 1)$;

2) если $n = 3$, то H – метабелева.

Доказательство. 1. Утверждение вытекает из леммы VI.8.1 [2].

2. Утверждение вытекает из теоремы 4В [6].

Лемма 6. [5, лемма 7]. $G \in \mathbf{N} \mathbf{A}^k$ тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G) \in \mathbf{A}^{k+1}$.

Лемма 7. Если G – разрешимая группа и $F(G) = E_4 \neq G$, то $G \cong A_4$ или $G \cong S_4$.

Доказательство. Поскольку $F(G)$ – абелева подгруппа, то согласно теореме 4.22 [1] $C_G(F(G)) = F(G)$. Так как $\text{Aut}(F(G)) \cong GL(2, 2) \cong S_3$, то либо $G/F(G) \cong Z_3$, либо $G/F(G) \cong S_3$. Если $G/F(G) \cong Z_3$, то $G \cong A_4$. Если $G/F(G) \cong S_3$, то $G \cong S_4$.

Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы.

Воспользуемся индукцией по порядку группы G и покажем, что $G \in \mathbf{F} = \mathbf{N}^4 \cap \mathbf{N}A^5$. Хорошо известно, что формационные произведения \mathbf{N}^4 и $\mathbf{N}A^5$ являются насыщенными формациями, поэтому \mathbf{F} – насыщенная формация. Очевидно, что все фактор-группы группы G имеют порядок, свободный от четвертых степеней. Поэтому на них распространяется индукция и они принадлежат \mathbf{F} . По лемме 1 группа G примитивна, и по лемме 2 можно считать, что $\Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G . Кроме того, $F = C_G(F)$ и F является элементарной абелевой p -группой порядка p^n для некоторого простого p . Ясно, что F является подгруппой некоторой силовской p -подгруппы группы G и порядок F равен p , p^2 или p^3 .

Пусть сначала $|F| = p$. Тогда G/F – циклическая группа, как группа автоморфизмов группы простого порядка p , и G метабелева. Отсюда следует, что $G \in \mathbf{A}^2 \subseteq \mathbf{F}$.

Пусть $|F| = p^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(2, p)$. Из п. 1 леммы 3 следует, что $G/F \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^4$, поэтому $G \in \mathbf{F}$.

Пусть $|F| = p^3$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе группы $GL(3, p)$. Из п. 2 леммы 3 следует, что $G/F \in \mathbf{N}^3 \cap \mathbf{A}^5$, поэтому $G \in \mathbf{F}$.

Из $G \in \mathbf{N}^4$ следует, что нильпотентная длина группы G не превышает 4.

Из $G \in \mathbf{N}A^5$ и леммы 6 следует, что $G/\Phi(G) \in \mathbf{A}^6$. Докажем, что $d(G) \leq 6$. Если $\Phi(G) = 1$, то $G \in \mathbf{A}^6$, и производная длина группы G не превышает 6.

Пусть теперь $\Phi(G) \neq 1$. По индукции можно считать, что в группе G существует единственная минимальная нормальная подгруппа. Поэтому $F = F(G) = O_p(G) \leq G_p$ для некоторого $p \in \pi(G)$ и $O_{p'}(G) = 1$. Поскольку группа G разрешима, то в силу лемм 4.21 и 4.22 [1] $\Phi(G) \neq F$ и $F/\Phi(G)$ совпадает со своим централизатором в группе $G/\Phi(G)$. По теореме 4.23 [1] группа $F/\Phi(G)$ дополняема в $G/\Phi(G)$, т. е. существует подгруппа $H/\Phi(G)$, такая, что $G/\Phi(G) = [F/\Phi(G)](H/\Phi(G))$. Так как $F/\Phi(G) \leq G_p/\Phi(G)$, то $F/\Phi(G)$ дополняема в $G_p/\Phi(G)$.

Поскольку порядок силовской p -подгруппы G_p группы G свободен от четвертых степеней, то $d(F) \leq d(G_p) \leq 2$ и $G_p/\Phi(G)$ подгруппа порядка p или p^2 , т. к. $1 \neq \Phi(G) \leq G_p$.

Пусть $F/\Phi(G)$ – элементарная абелева подгруппа порядка p^2 . По теореме 4.24 [1] фактор-группа $F/\Phi(G)$ является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп фактор-группы $G/\Phi(G)$. Если $F/\Phi(G)$ – минимальная нормальная подгруппа фактор-группы $G/\Phi(G)$, то $(G/\Phi(G))/(F/\Phi(G)) \cong G/F$, и эта фактор-группа изоморфна некоторой подгруппе группы $GL(2, p)$. По п. 1 леммы 3

$d(G/F) \leq 4$ и $d(G) \leq 6$. Если $\bar{F} = F/\Phi(G)$ является прямым произведением двух минимальных нормальных подгрупп $\bar{F}_1 = F_1/\Phi(G)$ и $\bar{F}_2 = F_2/\Phi(G)$ простых порядков p , то для каждого фактора \bar{F}_i верно, что фактор-группа $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{F}_i)$ абелева. Поэтому $\bar{G}/(C_{\bar{G}}(\bar{F}_1) \cap C_{\bar{G}}(\bar{F}_2)) = \bar{G}/\bar{F}$ абелева и $d(G) \leq 3$.

Если $F/\Phi(G)$ – группа порядка p , то фактор-группа G/F ; $H/\Phi(G)$ абелева, как группа автоморфизмов группы простого порядка. Тогда $d(G) \leq 3$. Таким образом, доказано неравенство $d(G) \leq 6$.

Поскольку p -длина всякой метанильпотентной группы не превышает 1 и $G \in \mathbf{N}^4$, то p -длина группы G не превышает 2 для всех простых чисел p .

Уточним оценку p -длины для $p > 3$. С помощью индукции по порядку G покажем, что $l_p(G) \leq 1$ для любого $p > 3$. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_p(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная p -подгруппа. Ясно, что порядок F равен p , p^2 или p^3 , где p – простое число.

Если $|F| = p$, то G/F изоморфна подгруппе циклической группы автоморфизмов $\text{Aut} F$ группы F , порядок которой равен $p-1$. Отсюда, $G_p = F$ и $l_p(G) \leq 1$.

Если $|F| = p^n$, $n \in \{2, 3\}$, то $\text{Aut} F = GL(n, p)$, G/F – неприводимая разрешимая подгруппа группы $GL(n, p)$ и $O_p(G/F) = 1$. По лемме 3, G/F – p' -группа, т. е. $l_p(G) \leq 1$ для всех простых $p > 3$. Теорема доказана.

Доказательство следствия 1.

Пусть G A_4 -свободна. Повторяя доказательство теоремы и применяя в соответствующих местах лемму 4, получим, что производная длина группы G не превышает 5.

Воспользуемся индукцией по порядку группы и докажем, что $l_p(G) \leq 1$ для $p \in \{2, 3\}$. По лемме VI.6.9 [2] можно считать, что $O_p(G) = \Phi(G) = 1$, а подгруппа Фиттинга $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа порядка p^α , где $\alpha \leq 2$ для $p = 2$ и $p = 3$. В частности, $C_G(F) = F$.

Если $|F| = p$, то G/F имеет порядок $p-1$ и $l_p(G) \leq 1$.

Если $|F| = 4$, то, по лемме 7, либо $G \cong A_4$, либо $G \cong S_4$. В любом случае группа не A_4 -свободна. Противоречие.

Пусть $|F| = 9$. Тогда G/F изоморфна подгруппе группы $GL(2, 3)$ и $O_3(G/F) = 1$. Известно, что $H \in \{1, Z_2, Z_4, Z_8, Z_2 \times Z_2, D_8, Q_8, SD_{16}, SL(2, 3), GL(2, 3)\}$. Во всех случаях, кроме $G/F \cong SL(2, 3)$ и $G/F \cong GL(2, 3)$, подгруппа F является силовской 3-подгруппой в G . Поэтому $l_3(G) \leq 1$. Так как $SL(2, 3)$ и $GL(2, 3)$ не являются A_4 -свободными, то они из рассмотрения исключаются.

Итак, $l_p(G) \leq 1$ для $p \in \{2, 3\}$. Из теоремы следует, что $l_p(G) \leq 1$ для $p > 3$.

Следствие 1 доказано.

Доказательство следствия 2.

Пусть G – группа нечетного порядка. Повторяя доказательство теоремы и применяя в соответствующих местах лемму 5, получим, что производная длина группы G не превышает 3. Следствие 2 доказано.

Пример 1. С помощью системы компьютерной алгебры GAP [7] найдена группа $G = [E_{5^3}]S_4$, где S_4 – симметрическая группа степени 4, E_{5^3} – элементарная абелева группа порядка 5^3 . Очевидно, что $|G| = 3000 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^3$. Для группы G нильпотентная длина равна 4. Значит, оценка нильпотентной длины, полученная в теореме, является точной.

Пример 2. С помощью системы компьютерной алгебры GAP [7] найдена A_4 -свободная группа $G = [E_{7^3}](S)Q_8$, где S – экстраспециальная группа порядка 27, E_{7^3} – элементарная абелева группа порядка 7^3 , Q_8 – группа кватернионов порядка 8. Очевидно, что $|G| = 4536 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^3$. Для группы G производная длина равна 5. Значит, оценка производной длины, полученная в следствии 1, является точной.

Пример 3. Зафиксируем простые числа $p = 5$ и $q = 3$. Тогда показатель числа 5 по модулю 3 равен 2 и существует группа Шмидта $G = [P]Q$, такая что P – неабелева порядка 5^3 , а Q – циклическая подгруппа порядка 3 [8, теорема 1.3]. Так как P неабелева, то $Z(P) = P' = \Phi(P)$. Из свойств групп Шмидта следует, что $G' = P$. Таким образом $((G'))' = (P)' = Z(P) = 1$ и $d(G) = 3$. Следовательно, оценка производной длины, полученная в следствии 2, является точной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
3. Dietrich, H. On the groups of cube-free order / H. Dietrich, B. Eick // J. Algebra. – 2005. – Vol. 292. – P. 122–137.
4. Монахов, В. С. Конечные группы, силовские подгруппы которых либо циклические, либо порядка p^2 / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2008. – № 2 (47). – С. 139–145.
5. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
6. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.
7. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1 [Electronic resource]. – 2021. – Mode of access: <http://www.gap-system.org>.
8. Монахов, В. С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В. С. Монахов // Алгебра і теорія чисел : Пр. Укр. мат. конгр. – Київ : Ін-т математики НАН України. – 2001. – С. 81–90.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk: Vyssh. Shk., 2006. – 207 s.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967.
3. Dietrich, H. On the groups of cube-free order / H. Dietrich, B. Eick // J. Algebra. – 2005. – Vol. 292. – P. 122–137.
4. Monakhov, V. S. Koniechnyje gruppy, silovskije podgruppy kotorykh libo cyclichieskije, libo poriadka p^2 / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Izv. Gomiel. gos. un-ta im. F. Skori-na. – 2008. – № 2 (47). – P. 139–145.
5. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 892–903.
6. Palfy, P. P. Bounds for linear groups of odd order / P. P. Palfy // Rend. Circ. mat. Palermo. Ser. 2. – 1990. – Vol. 39, nr 23. – P. 253–263.
7. The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.11.1 [Electronic resource]. – 2021. – Mode of access: <http://www.gap-system.org>.
8. Monakhov V. S. Podgruppy Shmidta, ikh sushchiestvovaniye i niekotoryje prilozhenija / V. S. Monakhov // Algebra i teoriya chisel : Pr. Ukr. mat. konhr. – Kyjiv : In-t matematyky NAN Ukrainy, 2001. – S. 81–90.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 25.10.2021

УДК 510.522

Александр Евгеньевич Будько*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Aleksandr Budko***PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor,
Associate Professor of Department of Algebra, Geometry, and Mathematical Modelling
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: budzko@brsu.brest.by*

О ПОРЯДКЕ СЛЕДОВАНИЯ КОМАНД В ПРОГРАММАХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ МАШИН ТЬЮРИНГА СТЕПЕНИ 2

Рассматривается одноленточная машина Тьюринга с внешним алфавитом, состоящим из двух символов. Программа машины задаётся списком команд. Определяется, каким образом машина отыскивает очередную команду в своей программе, которую она должна выполнять. Определяется оптимальный порядок следования команд в программе как порядок, при котором время их отыскания будет наименьшим. Под наименьшим понимается наименьшее среднее время как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций. Исходя из структуры программы машины, заданной графом, определяются элементарные машины Тьюринга степени 2. Для элементарных машин степени 2 указан оптимальный порядок следования команд и определено минимальное время их отыскания.

Ключевые слова: элементарная машина Тьюринга, команда, программа, порядок следования команд, время отыскания команд.

On the Order of Following Commands in Programs of Elementary Turing Machines of Degree 2

The article investigates a single-tape Turing machine with external alphabet, consisting of two symbols. The machine's program is set by the order of commands. The article defines the way in which the machine retrieves a further command in the program to be executed. The optimal order of following commands in programs is defined as the order in which command retrieval time is the shortest. The shortest retrieval time is the least average time as the ratio of the sum of the retrieval time over all initial configurations to the number of these configurations. Based on the structure of the program of the machine given by the graph, elementary Turing machines of degree 2 are determined. For the elementary machines of degree 2 the optimal order of following commands is defined as well as the minimal retrieval time.

Key words: elementary Turing machine, command, program, order of following commands, command retrieval time.

Введение

Машина Тьюринга является одной из классических моделей алгоритма. Она позволяет исследовать свойства алгоритма. Наибольшее количество исследований по машинам Тьюринга посвящено рассмотрению сложности тьюринговых вычислений. Обзоры исследований по этому направлению даны в [1–3]. Исследуется также сложность самого алгоритма и, в частности, сложность универсальных машин Тьюринга [4; 5]. Разрабатывается программное обеспечение анимации работы машины [6; 7]. Данная работа посвящена нахождению оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга и продолжает ранее начатые исследования [8–11].

В настоящей работе рассматриваются машины Тьюринга с одной лентой, одной головкой и внешним алфавитом из двух символов. Программу машины Тьюринга можно задавать как списком команд, так и ориентированным графом. При задании списком программа определяется перечнем команд вида $q_i a_i \rightarrow a_k D q_j$, где q_i, q_j – внутренние состояния машины, $a_i, a_k \in \{0, 1\}$, $D \in \{L, P, C\}$.

Состояние q_0 называется конечным и команда, в правой части которой записано это состояние, – тоже конечной. В [8] определено каким образом машина отыскивает в списке команду, которую она должна выполнять в данный момент.

1. Пусть в начальный момент головка обозревает символ a_r . Тогда машина, начиная с первой команды списка, сравнивает $q_1 a_r$ с левыми частями команд до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_1 a_r$, которую она и будет выполнять.

2. Пусть в момент после выполнения команды $q_i a_i \rightarrow a_k D q_j$ ($q_j \neq q_0$) головка обозревает символ a_c . Тогда, начиная с команды, следующей за выполненной, машина сравнивает $q_j a_c$ с левыми частями команд списка до тех пор, пока не найдет команду с левой частью $q_j a_c$, которую она и будет выполнять.

3. Сравнение производится в том порядке, в котором команды следуют в списке. При этом, если после сравнения с левой частью последней команды списка нужная команда не найдена, сравнение продолжается, начиная с первой команды списка. Сравнение любого $q_j a_k$ с левой частью любой команды списка проводится за одинаковое время – за одну единицу времени.

В [8] определяется оптимальный порядок следования команд в программе как порядок, при котором время их отыскания будет наименьшим. Под наименьшим понимается наименьшее среднее время как отношение суммы времени отыскания по всем начальным конфигурациям к числу этих конфигураций.

В [9] введена классификация L_0, L_1, L_2, \dots машин Тьюринга в зависимости от структуры графа, задающего программу машины. Классу L_0 принадлежат машины, программы которых удовлетворяют требованиям:

- 1) граф является связным и не содержит циклов;
- 2) в каждую неконечную вершину, отличную от начальной, входит ровно одна дуга; в начальную вершину не входит ни одна дуга.

Машина Тьюринга класса L_0 с n внутренними состояниями называется элементарной [10], если в ее программе, заданной графом, из каждой вершины i ($1 \leq i \leq n - 1$) одна дуга уходит в вершину $i+1$, а другая – в конечную вершину. Из вершины n обе дуги уходят в конечную вершину. Такую машину будем называть еще элементарной машиной степени 1.

Будем рассматривать только те начальные конфигурации, у которых головка машины за время выполнения программы просматривает все символы начальной конфигурации.

Теорема 1 [10]. Для элементарной машины Тьюринга, имеющей n внутренних состояний, выполняются следующие утверждения:

- 1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n$;
- 2) оптимальным является тот порядок, при котором вначале следуют команды дуг, исходящих из вершины 1, затем – команды дуг, исходящих из вершины 2, и т. д. При этом в каждой паре команд дуг, исходящих из вершины i ($1 \leq i \leq n - 1$), первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину.

Лемма 1 [8]. При оптимальном порядке команды любого пути из начальной вершины в конечную следуют в порядке, определяемом дугами этого пути.

Пусть дана программа элементарной машины степени 1, заданная графом. В программе этой машины к концу дуги, уходящей из вершины j ($1 \leq j \leq n - 1$) в конечную вершину, присоединим граф программы другой элементарной машины степени 1. Полученную машину M назовем элементарной машиной степени 2. Программу машины M можно разбить на программы трех машин M_0 , M_1 и M_2 . Программа машины M_0 определяется командами дуг, выходящими из вершин $1, 2, \dots, j$, программы машин M_1 и M_2 – командами дуг поддеревьев, начальными вершинами у которых являются концы соответственно верхней и нижней дуг, выходящих из вершины j . Очевидно, каждая из машин M_0, M_1, M_2 является элементарной степени 1. Количество внутренних состояний машин M_1 и M_2 обозначим соответственно через k_1 и k_2 . Очевидно, $k_1 + k_2 + j = n$. Меньшую из величин k_1 и k_2 обозначим через k .

Лемма 2. Если $j = 1$, то для элементарной машины Тьюринга степени 2 выполняются следующие утверждения:

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n + k$;

а) оптимальным является следующий порядок следования команд:

б) команда дуги, исходящая из вершины 1 и входящая в начальную вершину графа той машины из M_1 и M_2 , у которой меньшее число внутренних состояний, затем команды самой этой машины;

с) команда дуги, исходящая из вершины 1 и входящая в начальную вершину программы той машины из M_1 и M_2 , у которой большее число внутренних состояний, затем команды самой этой машины;

д) в каждой из машин M_1 и M_2 команды следуют в порядке, определяемом теоремой 1.

Доказательство. Так как $j = 1$, то из начальной вершины верхняя дуга уходит во входную вершину графа программы машины M_1 , а нижняя – во входную вершину графа программы машины M_2 . Пусть, для определенности, $k_1 \leq k_2$.

В силу леммы 1 при оптимальном порядке команда верхней дуги, выходящей из вершины 1, должна следовать до команд машины M_1 , а команда нижней дуги – до команд машины M_2 . Кроме того, в силу этой же леммы и команды машины M_1 и команды машины M_2 должны следовать в порядке, определяемом теоремой 1.

Возможны следующие случаи очередности следования команд.

Случай 1. Первой следует команда верхней дуги, выходящей из вершины 1.

Случай 1.1. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следуют все команды машины M_1 .

В машине M_1 имеется k_1 неконечных вершин. Поэтому конечных вершин будет $k_1 + 1$ и соответственно столько же начальных конфигураций для машины M_1 . При работе над каждой из этих начальных конфигураций машина вначале просматривает команду верхней дуги исходящей из вершины 1. Поэтому с учетом этого время отыскания команд для машины M_1 по теореме 1 равно

$$(k_1 + 1) + (k_1^2 + 2k_1) = k_1^2 + 3k_1 + 1.$$

Случай 1.1.1. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1 и командами машины M_1 следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1. Тогда, очевидно, за перечисленными выше командами следуют все команды машины M_2 .

В машине M_2 имеется k_2 неконечных вершин. Поэтому конечных команд будет $k_2 + 1$ и соответственно столько же начальных конфигураций для машины M_2 . При работе над каждой из этих начальных конфигураций машина M_2 вначале просматривает команду верхней дуги, исходящей из вершины 1, затем – $2k_1$ команд машины M_1 . После

этого машина просматривает команду нижней дуги, исходящей из вершины 1, и начинают выполняться команды машины M_2 . Поэтому с учетом этого время отыскания команд для машины M_2 по теореме 1 равно

$$\begin{aligned} & (1 + 2k_1)(k_2 + 1) + (k_2 + 1) + (k_2^2 + 2k_2) = \\ & = k_2^2 + 2k_2 + k_2 + 1 + 2k_1k_2 + 2k_1 + k_2 + 1 = \\ & = k_2^2 + 4k_2 + 2k_1k_2 + 2k_1 + 2. \end{aligned}$$

Тогда общее время отыскания команд для машины M будет равно

$$\begin{aligned} & (k_1^2 + 3k_1 + 1) + (k_2^2 + 4k_2 + 2k_1k_2 + 2k_1 + 2) = \\ & = (k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2) + 5k_1 + 4k_2 + 3 = (k_1 + k_2)^2 + 5k_1 + 4k_2 + 3. \end{aligned}$$

Так как $j = 1$, то $n = k_1 + k_2 + 1$ и $n^2 = (k_1 + k_2)^2 + 2(k_1 + k_2) + 1$.

Следовательно, общее время отыскания команд для машины M будет равно

$$\begin{aligned} & (k_1 + k_2)^2 + 5k_1 + 4k_2 + 3 = \\ & = ((k_1 + k_2)^2 + 2(k_1 + k_2) + 1) + 3k_1 + 2k_2 + 2 = \\ & = n^2 + 3k_1 + 2k_2 + 2 = n^2 + 2n + k_1. \end{aligned}$$

Так как $k_1 \leq k_2$, то $k = k_1$ и общее время отыскания команд для машины M будет равно $n^2 + 2n + k$. Это время и порядок следования команд удовлетворяют доказываемой лемме.

Случай 1.1.2. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1 и командами машины M_1 следует одна из команд машины M_2 . Данный порядок в силу леммы 1 оптимальным не является, так как при оптимальном порядке до команд машины M_2 должна следовать команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

Случай 1.2. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следует r ($r < 2k_1$) команд машины M_1 .

Случай 1.2.1 За r командами машины M_1 следует одна из команд машины M_2 . В силу леммы 1 такой порядок оптимальным не является.

Случай 1.2.2. За r командами машины M_1 следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1. Количество команд машины M_2 , находящихся среди команд машины M_1 , обозначим через s . Пусть в программе машины M_1 эти команды находятся на местах $t_1, t_2, t_3, \dots, t_s$. Место нахождения команды нижней дуги, выходящей из вершины 1, обозначим через t_0 . Среди s команд машины M_2 количество конечных команд равно, очевидно, $\lfloor s/2 \rfloor$. Эти конечные команды соответствуют $\lfloor s/2 \rfloor$ начальным конфигурациям машины M_2 , которые обозначим через $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{\lfloor s/2 \rfloor}$.

При работе над конфигурацией P_1 машина M_2 просматривает не все $2k_1$ команд машины M_1 как в случае 1.1.1, а только $t_1 - 2$. Поэтому по сравнению со случаем 1.1.1 время отыскания команд при работе машины M_2 над конфигурацией P_1 уменьшается на $2k_1 - (t_1 - 2) = (2k_1 - t_1) + 2$. Аналогично, при работе машины M_2 над конфигурацией P_2 время отыскания команд уменьшается на $2k_1 - (t_3 - 4) = (2k_1 - t_3) + 4$ и т.д. При работе машины M_2 над конфигурацией $P_{\lfloor s/2 \rfloor}$ время отыскания команд уменьшается на $2k_1 - (t_s - s - 1) = (2k_1 - t_s) + (s + 1)$. Следовательно, по сравнению со случаем 1.1.1 общее время отыскания команд при работе машины M_2 уменьшается на

$$\begin{aligned} T_2 & = (2k_1 - t_1) + 2 + (2k_1 - t_3) + 4 + (2k_1 - t_5) + 6 + \dots + (2k_1 - t_s) + (s + 1) = \\ & = 2k_1 \lfloor s/2 \rfloor - (t_1 + t_3 + t_5 + \dots + t_s) + (2 + 4 + 6 + \dots + (s + 1)) \leq \\ & \leq 2k_1 \frac{(s + 1)}{2} - (t_1 + t_3 + t_5 + \dots + t_s) + (2 + 4 + 6 + \dots + (s + 1)) = \\ & = k_1(s + 1) - (t_1 + t_3 + t_5 + \dots + t_s) + \frac{1}{2} \lfloor s/2 \rfloor (s + 3). \end{aligned}$$

Вместе с тем, по сравнению со случаем 1.1.1 увеличивается время отыскания команд при работе машина M_1 . Действительно, каждому пути из начальной вершины в конечную соответствует начальная конфигурация. Поэтому каждый путь, в котором встречается команда нижней дуги, выходящей из вершины 1, и находящаяся на t_0 -ом месте, будет давать увеличение на одну единицу времени отыскания для машины M_1 . Таких путей будет, очевидно, $(k_1 + 1) - \lceil t_0 / 2 \rceil$.

Аналогично, каждый путь, в котором встречается первая команда машины M_1 , находящаяся на t_1 -ом месте, будет давать увеличение на одну единицу времени отыскания для машины M_1 . Таких путей будет, очевидно, $(k_1 + 1) - \lceil 1/2 (t_1 - 1) \rceil$ и т. д.

Следовательно, по сравнению со случаем 1.1.1 общее время отыскания команд при работе машина M_1 увеличивается на

$$T_1 = ((k_1 + 1) - \lceil t_0 / 2 \rceil) + ((k_1 + 1) - \lceil 1/2 (t_1 - 1) \rceil) + ((k_1 + 1) - \lceil 1/2 (t_2 - 2) \rceil) + \\ + ((k_1 + 1) - \lceil 1/2 (t_s - s) \rceil) = (k_1 + 1)(s + 1) - \lceil t_0 / 2 \rceil - \\ - (\lceil 1/2 (t_1 - 1) \rceil + \lceil 1/2 (t_2 - 2) \rceil + \dots + \lceil 1/2 (t_s - s) \rceil) = k_1(s + 1) + (s + 1) - \\ - (\lceil 1/2 (t_0 - 0) \rceil + \lceil 1/2 (t_1 - 1) \rceil + \lceil 1/2 (t_2 - 2) \rceil + \dots + \lceil 1/2 (t_s - s) \rceil).$$

Нетрудно показать, что $\lceil 1/2 (a - b) \rceil \leq \lceil a/2 \rceil - \lceil b/2 \rceil$. Поэтому для каждого $i \geq 1$ будет выполняться условие $\lceil 1/2 (t_i - i) \rceil \leq \lceil t_i/2 \rceil - \lceil i/2 \rceil$.

Следовательно,

$$T_1 = k_1(s + 1) + (s + 1) - (\lceil 1/2 (t_0 - 0) \rceil + \lceil 1/2 (t_1 - 1) \rceil + \lceil 1/2 (t_2 - 2) \rceil + \\ + \lceil 1/2 (t_s - s) \rceil) \geq k_1(s + 1) + (s + 1) - (\lceil 1/2 t_0 \rceil + \lceil 1/2 t_1 \rceil + \lceil 1/2 t_2 \rceil + \\ + \lceil 1/2 t_s \rceil) + (\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \dots + \lceil s/2 \rceil).$$

Поскольку для машины M_1 время отыскания команд увеличилось, а для машины M_2 – уменьшилось, то разность соответствующих величин будет равна

$$T_1 - T_2 \geq k_1(s + 1) + (s + 1) - (\lceil 1/2 t_0 \rceil + \lceil 1/2 t_1 \rceil + \lceil 1/2 t_2 \rceil + \\ + \lceil 1/2 t_s \rceil) + (\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \dots + \lceil s/2 \rceil) - (k_1(s + 1) - (t_1 + t_3 + t_5 + \dots + t_s) + \\ + \lceil 1/2 \rceil^s / 2 \lceil (s + 3) \rceil = (s + 1) - (\lceil 1/2 t_0 \rceil + \lceil 1/2 t_1 \rceil + \lceil 1/2 t_2 \rceil + \dots + \lceil 1/2 t_s \rceil) + \\ + (\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \dots + \lceil s/2 \rceil) + (t_1 + t_3 + t_5 + \dots + t_s) - \lceil 1/2 \rceil^s / 2 \lceil (s + 3) \rceil = \\ = (s + 1) + (t_1 - (\lceil t_0 / 2 \rceil + \lceil t_1 / 2 \rceil)) + (t_3 - (\lceil t_2 / 2 \rceil + \lceil t_3 / 2 \rceil)) + (t_5 - (\lceil t_4 / 2 \rceil + \\ + \lceil t_5 / 2 \rceil)) + \dots + (t_s - (\lceil t_{s-1} / 2 \rceil + \lceil t_s / 2 \rceil)) + (\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \dots + \lceil s/2 \rceil) - \\ - \lceil 1/2 \rceil^s / 2 \lceil (s + 3) \rceil.$$

Так как для каждого $i \geq 1$ выполняется условие $t_i > t_{i-1}$, то $\lceil t_i / 2 \rceil + \lceil t_{i-1} / 2 \rceil < t_i$ и поэтому $t_i - (\lceil t_i / 2 \rceil + \lceil t_{i-1} / 2 \rceil) > 0$ или $t_i - (\lceil t_i / 2 \rceil + \lceil t_{i-1} / 2 \rceil) \geq 1$.

Тогда разность $T_1 - T_2$ примет вид

$$T_1 - T_2 \geq (s + 1) + s + (\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \dots + \lceil s/2 \rceil) - \lceil 1/2 \rceil^s / 2 \lceil (s + 3) \rceil.$$

Очевидно, $\lceil 1/2 \rceil + \lceil 2/2 \rceil + \lceil 3/2 \rceil + \lceil 4/2 \rceil + \lceil 5/2 \rceil + \dots + \lceil s/2 \rceil =$
 $= 0 + 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + \lceil (s - 1) / 2 \rceil + \lceil s/2 \rceil.$

Если s – четное, то $[(s-1)/2] + [s/2] = (s-2)/2 + s/2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + [(s-1)/2] + [s/2] &= 1 + 1 + 2 + 2 + \dots + (s-2)/2 + s/2 = \\
 &= (1 + 1 + 2 + 2 + \dots + (s-2)/2 + (s-2)/2) + s/2 = \\
 &= 2(1 + 2 + \dots + (s-2)/2) + s/2 = 2 \cdot 1/2 (1 + (s-2)/2) (s-2)/2 + s/2 = \\
 &= s/2 (s-2)/2 + s/2 = s/2 \cdot s/2.
 \end{aligned}$$

В этом случае так как s – четное, то $]s/2[= s/2$, и поэтому

$$\begin{aligned}
 T_1 - T_2 &\geq (s+1) + s + s/2 \cdot s/2 - 1/2 \cdot s/2 (s+3) = \\
 &= 2s + 1 + s^2/4 - s^2/4 - 3s/4 = 5s/4 + 1 > 0/
 \end{aligned}$$

Так как $T_1 - T_2 > 0$, то время отыскания команд в рассматриваемом случае будет больше, чем в случае 1.1.1.

Случай, когда s – нечетное рассматривается аналогично.

Случай 1.3. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следует одна из команд машины M_2 . Данный порядок в силу леммы 1 оптимальным не является, так как до команд машины M_2 при оптимальном порядке должна следовать команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

Случай 1.4. За командой верхней дуги, выходящей из вершины 1, следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1.

Случай 1.4.1. За командами верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, следуют все команды машины M_1 . Тогда, очевидно, за перечисленными выше командами следуют все команды машины M_2 .

В машине M_1 имеется $k_1 + 1$ конечных вершин и соответственно столько же начальных конфигураций для самой машины M_1 . При работе над каждой из этих начальных конфигураций машина вначале просматривает команды двух дуг, исходящих из вершины 1. Поэтому с учетом этого время отыскания команд для машины M_1 по теореме 1 равно

$$2(k_1 + 1) + k_1^2 + 2k_1 = k_1^2 + 4k_1 + 2,$$

т. е. это время больше, чем в случае 1.1.1.

Поскольку машина M_2 , как и в случае 1.1.1, до выполнения своих команд должна вначале просмотреть команды двух дуг, исходящих из вершины 1 и все команды машины M_1 , то время отыскания команд при работе машины M_2 будет таким же как и в случае 1.1.1.

Таким образом в случае 1.4.1 общее время отыскания команд при работе машины M будет больше, чем в случае 1.1.1 за счет увеличения времени отыскания команд машины M_1 .

Случай 1.4.2. За командами верхней и нижней дуг, выходящими из вершины 1, следует t_1 ($t_1 < 2k_1$) команд машины M_1 . Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.2.

Случай 1.4.3. За командами верхней и нижней дуг, выходящих из вершины 1, следуют все команды машины M_2 . Тогда, очевидно, за перечисленными выше командами следуют команды машины M_1 . Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.4.1.

Случай 1.4.4. За командами верхней и нижней дуг, выходящими из вершины 1, следует r ($r < 2k_1$) команд машины M_2 . Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.2.

Случай 2. Первой следует команда нижней дуги, выходящей из вершины 1. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1.

Случай 3. Первой следует одна из команд машины M_1 или M_2 . В силу леммы 1 такой порядок следования команд оптимальным не является. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. Для элементарной машины Тьюринга степени 2 выполняются следующие утверждения:

1) минимальная сумма времени отыскания команд по всем начальным конфигурациям равна $n^2 + 2n + k$;

2) оптимальным является следующий порядок следования команд:

а) команды пар дуг, исходящих из вершин $1, 2, 3, \dots, j-1$; при этом в каждой паре первой следует команда дуги, уходящей в конечную вершину;

б) оставшиеся команды следуют в порядке, определяемом леммой 2.

Доказательство. Пусть дана L – элементарная машина Тьюринга степени 2. Машину L можно рассматривать как последовательное соединение двух машин L_0 и L_1 . Машина L_0 определяется командами дуг, исходящими из вершин $1, 2, 3, \dots, j-1$, машина L_1 – командами оставшихся дуг. Очевидно, команды машины L_1 при оптимальном порядке должны следовать в порядке, определяемом леммой 2 (без учета остальных команд). Кроме того, в силу леммы 1 команды дуг машины L_0 , исходящие из вершин $1, 2, 3, \dots, j-1$ и не входящие в конечную вершину, при оптимальном порядке должны следовать до команд машины L_1 в порядке $1, 2, 3, \dots, j-1$. Остались нерассмотренными команды дуг машины L_0 , исходящие из вершин $1, 2, 3, \dots, j-1$ и входящие в конечную вершину.

Возможны следующие случаи следования команд.

Случай 1. Команды следуют в порядке, определяемом в п. 2) теоремы. Определим время отыскания команд для этого порядка. Команды дуг машины L_0 , исходящие из вершин $1, 2, 3, \dots, j-1$ и входящие в конечную вершину, являются конечными и соответствуют $j-1$ начальным конфигурациям. При рассматриваемом порядке следования эти команды имеют номера $1, 3, 5, \dots, 2(j-1) - 1$. Эти номера являются также временем отыскания команд при работе машины L_0 над $j-1$ начальными конфигурациями. Поэтому время отыскания команд при работе машины L_0 будет равно

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2(j-1) - 1 = \frac{1}{2} (1 + 2j - 3)(j-1) = (j-1)^2.$$

Машина L_1 имеет $n - (j-1) = n - j + 1$ внутренних состояний. Поэтому по лемме 2 время отыскания команд для машины L_1 (без учета просмотра команд с состояниями $1, 2, 3, \dots, j-1$) будет равно

$$(n - j + 1)^2 + 2(n - j + 1) + k.$$

Для машины L_1 машина имеется $n - (j-1) + 1 = n - j + 2$ начальных конфигураций. При работе над каждой из этих конфигураций машина L_1 должна вначале просмотреть $2(j-1)$ команд машины L_0 . Время отыскания этих команд по всем начальным конфигурациям будет равно $2(j-1)(n - j + 2)$.

Тогда общее время отыскания команд для машины L будет равно

$$\begin{aligned} & (j-1)^2 + (n - j + 1)^2 + 2(n - j + 1) + k + 2(j-1)(n - j + 2) = \\ & = j^2 - 2j + 1 + (n - j)^2 + 2(n - j) + 1 + 2n - 2j + 2 + k + 2jn + 4j - 2n - 4 - \\ & - 2j^2 + 2j = j^2 + n^2 - 2nj + j^2 + 2n - 2j + 2n + k + 2jn - 2n - 2j^2 + 2j = \\ & = n^2 + 2n + k. \end{aligned}$$

Случай 2. Из $j-1$ команд дуг машины L_0 , исходящих из вершин $1, 2, 3, \dots, j-1$ и входящих в конечную вершину, s ($1 \leq s \leq j-1$) команд находятся среди команд машины L_1 .

Пусть эти команды находятся на местах $t_1^1, t_2^1, t_3^1, \dots, t_s^1$. Места, на которых находились эти команды в случае 1 обозначим соответственно через $t_1, t_2, t_3, \dots, t_s$.

В случае 2 по сравнению со случаем 1 увеличивается время отыскания команд при выполнении команд дуг машины L_0 , исходящих из вершин $1, 2, 3, \dots, j-1$ и входящих в конечную вершину на величину

$$(t_1^1 - t_1) + (t_2^1 - t_2) + (t_3^1 - t_3) + \dots + (t_s^1 - t_s).$$

Вместе с тем по сравнению со случаем 1 уменьшается время отыскания при работе машины L_1 . Покажем это на примере команды, находящейся в случае 1 на t_1 -ом месте и в случае 2 – на t_1^1 -ом.

В случае 1 машина L_1 при работе над всеми начальными конфигурациями команду, находящуюся на t_1 -ом месте, просматривала. В случае 2 при работе над некоторыми начальными конфигурациями машина L_1 команду, находящуюся на t_1^1 -ом месте, уже не просматривает. Это будет выполняться, очевидно, в том случае, если команда, находящаяся на t_1^1 -ом месте, следует после конечной команды, соответствующей начальной конфигурации. Поэтому количество таких конфигураций будет равно количеству конечных команд машины L_1 , следующих до команды, находящейся на t_1 -ом месте. Таких команд будет, очевидно, не больше чем $\lceil t_1^1/2 \rceil - (j-1)$. Кроме того, первая конечная команда машины L_1 находится не ранее, чем на $2j$ -ом месте. Поэтому $t_1^1 \geq 2j$.

Рассмотрим разность $(t_1^1 - t_1) - (\lceil t_1^1/2 \rceil - (j-1))$.

Так как для целого a выполняется условие $\lceil a/2 \rceil + \lfloor a/2 \rfloor = a$, то рассматриваемая разность равна

$$\lceil t_1^1/2 \rceil - t_1 + (j-1).$$

Очевидно, $t_1 \leq 2(j-1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lceil t_1^1/2 \rceil - t_1 + (j-1) &\geq \lceil t_1^1/2 \rceil - 2(j-1) + (j-1) = \lceil t_1^1/2 \rceil - (j-1) \geq \\ &\geq \lceil 2j/2 \rceil - (j-1) = \lfloor j \rfloor - (j-1) = j - (j-1) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемая разность больше нуля. Это означает, что время отыскания команд в случае 2 будет больше, чем в случае 1. Аналогично проводится сравнение времени отыскания для команды находящейся в случае 1 на t_2 -ом месте и в случае 2 – на t_2^1 -ом, и т. д. Теорема 2 доказана.

Следствие. Минимальное среднее время отыскания команд для элементарной машины Тьюринга степени 2 по всем начальным конфигурациям равно $\frac{n^2 + 2n + k}{n+1} = n + \frac{n+k}{n+1}$.

Заключение

Таким образом, для элементарных машин Тьюринга степени 2 определен оптимальный порядок следования команд. Кроме того, для таких машин указано минимальное время отыскания команд.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченков, С. С. Сложность алгоритмов и вычислений / С. С. Марченков, В. Л. Матросов // Итоги науки и техники. Сер.: Теория вероятностей. Мат. статистика. Теорет. кибернетика. – 1979. – Т. 16. – С. 103–149.

2. Слисенко, О. А. Сложностные задачи теории вычислений / О. А. Слисенко // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, вып. 6 (222). – С. 21–103.
3. Крупский, В. Н. Введение в сложность вычислений / В. Н. Крупский. – М. : Факториал Пресс, 2006. – 217 с.
4. Минский, М. Вычисления и автоматы / М. Минский. – М. : Мир, 1971. – 281 с.
5. Рогожин, Ю. В. Семь универсальных машин Тьюринга / Ю. В. Рогожин // Мат. исслед. – 1982. – № 6. – С. 76–90.
6. Ясюкович, Э. И. Разработка алгоритма и программного обеспечения детерминированной машины Тьюринга / Э. И. Ясюкович // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 13–22.
7. Мозговой, М. В. Классика программирования: алгоритмы, языки, автоматы, компиляторы. Практический подход / М. В. Мозговой. – СПб. : Наука и Техника, 2006. – 320 с.
8. Будько, А. Е. О некоторых свойствах оптимального порядка следования команд в программах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Нанопроектирование, технология, компьютерное моделирование (НПТКМ-2019) : материалы XVIII междунар. симп. по новым приложениям высоких технологий, посвящ. памяти В. А. Пальмова, Брест, 24–27 сент. 2019 г. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 19–20.
9. Будько, А. Е. О двух классах машин Тьюринга / А. Е. Будько // Докл. АН БССР. – 1985. – № 9. – С. 792–793.
10. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах элементарных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Вучон. зап. Брэсц. дзярж. ун-та імя А. С. Пушкіна. – 2020. – Вып. 16, ч. 2. – С. 7–12.
11. Будько, А. Е. О порядке следования команд в программах полных древовидных машин Тьюринга / А. Е. Будько // Весн. МДУ імя А. А. Куляшова. – 2021. – № 1. – С. 19–26.

REFERENCES

1. Marchienkov, S. S. Slozhnost' algoritmov i vychislenij / S. S. Marchienkov, V. L. Matrosov // Itogi nauki i tiekhniki. Ser.: Teorija vjerojatnostiej. Mat. statistika. Teoriet. kibernetika. – 1979. – Т. 16. – S. 103–149.
2. Slisienko, O. A. Slozhnostnyje zadachi tieorii vychislenij / O. A. Slisienko // Uspiekhii mat. nauk. – 1981. – Т. 36, vyp. 6 (222). – S. 21–103.
3. Krupskij, V. N. Vviedienije v slozhnost' vychislenij / V. N. Krupskij. – М. : Factorial Press, 2006. – 217 s.
4. Minskij, M. Vychislienija i avtomaty / M. Minskij. – М. : Mir, 1971. – 281 s.
5. Rogozhin, Yu. V. Siem' universal'nykh mashin T'juringa / Yu. V. Rogozhin // Mat. isslied. – 1982. – № 6. – S. 76–90.
6. Yasiukovich, Ye. I. Razrabotka algoritma i programmogo obiespiechienija deteminirovannoj mashiny T'juringa / Ye. I. Yasiukovich // Viesn. MDU imia A. A. Kuliashova. – 2017. – № 2. – S. 13–22.
7. Mozgovej, M. V. Klassika programmirovaniya: algoritmy, jazyki, avtomaty, kompiliatory. Praktichieskij podkhodk/ M. V. Mozgovej. – SPb. : Nauka i Tiekhnika, 2006. – 320 s.
8. Bud'ko, A. Ye. O niekotorykh svojstvakh optimal'nogo poriadka sledovaniya komand v programmakh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Nanoprojektirovanije, tiekhnologija, kompjuternoje modelirovanije (NPTKM-2019) : matierialy XVIII miezhdunar. simp. po novym prilozhenijam vysokikh tekhnologij, posviashch. pamiati V. A. Pal'mova, Briest, 24–27 sient. 2019 g. – Briest : BrGU, 2019. – S. 19–20.
9. Bud'ko, A. Ye. O dvukh klassakh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Dokl. AN BSSR. – 1985. – № 9. – S. 792–793.

10. Budko, A. Ye. O poriadkie sledovaniya komand v programmakh eliemientarnykh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Vuchon. zap. Brest. dzyarzh. un-ta imia A. S. Pushkina. – 2020. – Vyp. 16, ch. 2. – S. 7–12.

11. Bud'ko, A. Ye. O poriadkie sledovaniya komand v programmakh polnykh drievo-vidnykh mashin T'juringa / A. Ye. Bud'ko // Viesn. MDU imia A. A. Kuliashova. – 2021. – № 1. – S. 19–26.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 23.11.2021

УДК 512.542

Дмитрий Владимирович Грицук*канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Dmitry Gritsuk***PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: dmitry.gritsuk@gmail.com***ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНОЙ p -ДЛИНЫ p -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОРЯДКА ЕЕ СИЛОВСКОЙ p -ПОДГРУППЫ**

Пусть G – p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$, факторы G_{i+1}/G_i которого являются либо p' -группами, либо абелевыми p -группами. Наименьшее число абелевых p -факторов среди всех таких субнормальных рядов p -разрешимой группы G называется производной p -длиной p -разрешимой группы. В данной статье получены оценки производной p -длины p -разрешимой группы в зависимости от порядка ее силовской p -подгруппы.

Ключевые слова: p -разрешимая группа, силовская p -подгруппа, производная p -длина.

Estimates of the Derivative of the p -Length of the p -Solvable Group Depending on the Order of its Sylow's p -Subgroup

Let G is a p -solvable group. Then it has a subnormal series рядом $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$ whose factors G_{i+1}/G_i are either p' -groups or abelian p -groups. The smallest number of Abelian p -factors among all such subnormal series of a p -solvable group G is called the derivative of the p -length of the p -solvable group. In this paper, estimates are obtained for the derivative of the p -length of a p -solvable group depending on the order of its Sylow p -subgroup.

Key words: p -solvable group, Sylow p -subgroup, derived p -length.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1; 2].

В 1956 г. Ф. Холл и Г. Хигмэн [3] предложили понятие p -длины p -разрешимой группы и исследовали ее зависимость от некоторых инвариантов силовской p -подгруппы [2, VI.6.6]. В частности, p -длина p -разрешимой группы с силовской p -подгруппой порядка p^n не превышает n . Эта оценка существенно снижена Е. Г. Брюхановой [4], которая доказала, что p -длина p -разрешимой группы не превышает производной длины ее силовской p -подгруппы. А. Манн [5] установил, что производная длина группы G порядка p^n не превышает числа d , удовлетворяющего неравенству:

$$n > 2^{d-1} + 2d - 4.$$

В 2006 г. В. С. Монахов [6] предложил аналог производной длины для p -разрешимых групп. Пусть G – p -разрешимая p -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1, \quad (1)$$

факторы которого являются либо p' -группами, либо абелевыми p -группами. Наименьшее число абелевых p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной p -длиной группы G и обозначается через $l_p^a(G)$. Ясно, что производная p -длина p -группы совпадает с ее производной длиной. Начальные свойства и некоторые оценки производной p -длины получены в работах [7–12].

Понятно, что

$$d(G_p) \leq l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot d(G_p), \quad (2)$$

где $l_p(G)$ – p -длина p -разрешимой группы G , а $d(G_p)$ – производная длина ее силовой p -подгруппы.

Из неравенства (2) и [4] получаем общую оценку производной p -длины p -разрешимой группы G :

$$l_p^a(G) \leq (d(G_p))^2. \quad (3)$$

Но эта оценка неточная. Из (3) для симметрической группы S_4 степени 4 получаем, что $l_2^a(S_4) \leq 4$, в то время как $l_2^a(S_4) = 2$. Соответствующие примеры можно привести для любого простого p .

В настоящей статье исследуется производная p -длина p -разрешимой группы G в зависимости от порядка p^n ее силовой p -подгруппы.

1. Используемые понятия и обозначения

Зафиксируем некоторое множество простых чисел π . Если $\pi(m) \subseteq \pi$, то натуральное число m называется π -числом. Группа G называется π -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi$ и π' -группой, если $\pi(G) \subseteq \pi'$. В последнем случае $\pi(G) \cap \pi = \emptyset$.

Цепочку подгрупп (1) называют субнормальным рядом группы G , если подгруппа G_{i+1} нормальна в G_i для каждого i . Фактор-группы G_i/G_{i+1} называют факторами ряда (1).

Группа называется p -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми p -группами, либо p' -группами. Наименьшее число p -факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется p -длиной p -разрешимой группы G и обозначается через $l_p^a(G)$.

Производной длиной группы G называют наименьшее натуральное число m , для которого выполняется равенство $G^{(m)} = 1$, и обозначают через $d(G)$. Здесь G' – коммутант группы G и $G^{(m)} = (G^{(m-1)})'$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [7]. Если G – p -разрешимая группа, то

$$d(G_p) \leq l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot d(G_p).$$

Лемма 2 [7]. Если N – нормальная подгруппа p -разрешимой группы G , то

$$l_p^a(G) \leq l_p^a(G/N) + l_p^a(N).$$

Лемма 3 [13, теорема 4, следствие 1].

1. Если G – p -разрешимая группа, то $l_p(G) \leq 2 + \log_2 r_p(G)$.

2. Пусть G – p -разрешимая группа. Если $l_p(G) = r_p(G)$, то либо $r_p(G) = 1$, либо $r_p(G) = 2$ и $p \in \{2, 3\}$. В частности, если $r_p(G) \geq 3$, то $l_p(G) \leq r_p(G) - 1$.

Лемма 4 [5]. Пусть G – p -разрешимая группа порядка p^m и производной длины d . Тогда

$$m > 2^{d-1} + 2d - 4.$$

3. Производная π -длина π -разрешимой группы с заданной π -холловой подгруппой

Теорема. Пусть G – p -разрешимая группа, а G_p – ее силовская p -подгруппа. Тогда:

- 1) если G_p имеет порядок p или p^2 , то $l_p^a(G) \leq 1$;
- 2) если G_p имеет порядок p или p^3 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для всех p ;
- 3) если G_p имеет порядок p^4 , то $l_p^a(G) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$;
- 4) если G_p имеет порядок p^5 , то $l_p^a(G) \leq 3$ для всех p .
- 5) если порядок G_p не превышает p^6 , то $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Доказательство.

1. Так как силовская p -подгруппа G_p имеет порядок p или p^2 , то G_p является абелевой. Поэтому по [2, VI.6.6] $l_p(G) \leq 1$. Применяя лемму 1, получаем $l_p^a(G) \leq 1$.

2. Если G_p абелева, то $l_p(G) \leq 1$ по [2, III.6.6]. Если G_p неабелева, то она изоморфна по [2, I.14.10] либо метациклической группе

$$M_3(p) = \langle a, b | a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle = [\langle a \rangle] \langle b \rangle a,$$

либо группе экспоненты p . В любом случае $l_p(G) \leq 2$ для любого p по [2, VI.6.6, b)].

Из [14, лемма 2] для метациклической группы имеем, что $l_p(G) \leq 1$ при $p > 2$. Пусть G_p является группой экспоненты p и $l_p(G) = 2$. По [2, III.10.2] подгруппа G_p регулярна. Так как G_p неабелева, то $p > 2$ и p – простое число Ферма по [15, IX.4.8,b]. Теперь из [15, IX.5.5,b)] вытекает, что $p > 3$.

При $l_p(G) = 1$ из леммы 1 получаем, что $l_p^a(G) \leq 2$. Пусть $l_p(G) = 2$. Тогда существует (p', p) -ряд, в котором точно два p -фактора. Так как $|P| = p^3$, то порядки этих p -факторов не превышают p^2 и, следовательно, они абелевы. Поэтому $l_p^a(G) \leq 2$.

3. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G)=4$, то G_p абелева и $l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G)=3$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^3 , другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G)=2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^2), (p, p^2, p), (p^2, p, p), (p^2, p^2).$$

Для последовательностей (p, p, p^2) , (p^2, p, p) и (p^2, p^2) группа G содержит нормальную подгруппу K , такую, что силовские p -подгруппы в K и G/K имеют порядки p^2 .

По первому пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$ и $l_p^a(G/K) \leq 1$, а из леммы 2 следует $l_p^a(G) \leq 2$.

Остается рассмотреть последовательность (p, p^2, p) . Если $l_p(G) \leq 1$, то $l_p^a(G) \leq 2$ по лемме 1, поскольку $d(G_p) \leq 2$ [2, III.7.2 (d)].

Пусть $l_p(G) > 1$. Так как $l_p(G) \leq r_p(G) \leq 2$, то $l_p(G) = r_p(G) = 2$ и $p \in \{2,3\}$ по лемме 3 (2). Силовская p -подгруппа в $O_{p',p,p',p}(G)$ имеет порядок p^3 и $l_p^a(O_{p',p,p',p}(G)) \leq 2$ по второму пункту доказываемой леммы. Силовская p -подгруппа в фактор-группе $G/O_{p',p,p',p}(G)$ имеет порядок p , поэтому $l_p^a(G/O_{p',p,p',p}(G)) \leq 1$. Теперь $l_p^a(G) \leq 3$ по лемме 2.

4. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G) = 5$, то G_p абелева и $l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G) = 4$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^4 , другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G) = 3$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^3), (p, p^3, p), (p^3, p, p), (p^3, p^2), (p^2, p^3).$$

Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 3$.

Пусть $r_p(G) = 2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p, p^2), (p, p, p^2, p), (p, p^2, p, p), (p^2, p, p, p), (p^2, p^2, p), (p^2, p, p^2), (p, p^2, p^2).$$

Для последовательностей

$$(p, p, p, p^2), (p, p^2, p, p), (p^2, p, p, p); (p, p^2, p^2)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^3 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 .

По второму пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 2$, а по первому пункту доказываемой леммы $l_p^a(G/K) \leq 1$. Из леммы 2 следует, что $l_p^a(G) \leq 3$.

Для последовательностей

$$(p^2, p^2, p), (p^2, p, p^2), (p, p, p^2, p)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^2 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^3 .

По первому пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$, а по второму пункту доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 2$. Из леммы 2 следует, что $l_p^a(G) \leq 3$ для всех p .

Пусть $r_p(G) = 1$. Тогда порядки главных p -факторов равны p , группа p -сверхразрешима и $l_p(G) \leq 1$ по [2, VI.9]. Поскольку по лемме 4 $d(G_p) \leq 2$, то

$$l_p^a(G) \leq l_p(G) \cdot (G_p) \leq 2.$$

5. Пусть G_p – силовская p -подгруппа, $r_p(G)$ – p -ранг группы G . Если $r_p(G) = 6$, то G_p абелева и $l_p(G) \leq l_p^a(G) \leq 1$.

Пусть $r_p(G) = 5$. Тогда у главного ряда группы G точно два p -фактора: один имеет порядок p^5 , а другой – p . Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p(G) \leq l_p^a(G) \leq 2$.

Пусть $r_p(G) = 4$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p^4); (p, p^4, p); (p^4, p, p); (p^4, p^2); (p^2, p^4).$$

Так как главные p -факторы абелевы, то $l_p^a(G) \leq 3$.

Пусть $r_p(G) = 3$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p, p^3); (p, p, p^3, p); (p, p^3, p, p); (p^3, p, p, p); (p^3, p^2, p); (p^3, p, p^2); (p^2, p, p^3); (p^2, p^3, p); (p, p^3, p^2); (p, p^2, p^3); (p^3, p^3).$$

Для последовательностей

$$(p, p^3, p, p); (p^3, p, p, p); (p^3, p, p^2); (p, p^3, p^2)$$

группа G содержит нормальную группы K , такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^4 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 . По 3-му пункту теоремы, которую мы сейчас доказываем, $l_p^a(K) \leq 2$ для $p \geq 2$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$, а по 1-му пункту доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 1$.

Также нам известно, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Для последовательностей

$$(p, p, p, p^3); (p, p, p^3, p); (p^2, p, p^3); (p^2, p^3, p)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K , и она такая, что силовская p -под-группа в K имеет порядок p^2 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^4 . Из 1-го пункта доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$, а по 4-му пункту $l_p^a(G/K) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G/K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$. Также следует, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Так как главные p -факторы абелевы, то для последовательностей

$$(p^3, p^2, p); (p^3, p^3, p)$$

имеем $l_p^a(G) \leq 3$.

Пусть $r_p(G)=2$. Тогда порядки главных p -факторов могут располагаться в следующих последовательностях:

$$(p, p, p, p, p^2); (p, p, p, p^2, p); (p, p, p^2, p, p); (p, p^2, p, p, p); (p^2, p, p, p, p); (p^2, p^2, p, p); (p^2, p, p^2, p); (p^2, p, p, p^2); (p, p^2, p, p^2); (p, p, p^2, p^2); (p^2, p^2, p^2).$$

Для последовательностей

$$(p, p, p, p, p^2); (p, p, p^2, p, p); (p, p^2, p, p, p); (p^2, p, p, p, p); (p^2, p^2, p, p); (p^2, p, p, p^2); (p, p^2, p, p^2); (p, p, p^2, p^2); (p^2, p^2, p^2)$$

группа G содержит нормальную подгруппу K , такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^4 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 . По 3-му пункту доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 2$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$, а по 1-му пункту доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 1$. Получим, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p \geq 5$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Для последовательности (p^2, p, p^2, p) группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^2 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^4 . По 1-му и 3-му пунктам доказываемой теоремы $l_p^a(K) \leq 1$ и $l_p^a(G/K) \leq 2$ для $p > 3$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$.

Для последовательности (p, p^2, p, p^2) группа G содержит нормальную подгруппу K такую, что силовская p -подгруппа в K имеет порядок p^4 , а силовская p -подгруппа в G/K имеет порядок p^2 . По 1-му и 3-му пунктам доказываемой теоремы $l_p^a(G/K) \leq 1$ и $l_p^a(K) \leq 2$ для $p > 3$ и $l_p^a(K) \leq 3$ для $p \in \{2,3\}$. Следовательно, получим, что $l_p^a(G) \leq 3$ для $p > 3$ и $l_p^a(G) \leq 4$ для $p \in \{2,3\}$.

Пусть $r_p(G)=1$. Тогда порядки главных p -факторов равны p , группа p -сверх-разрешима и $l_p(G) \leq 1$. Поскольку $d(G_p) \leq 2$, то

$$l_p^a(G) \leq l_p(G)d(G_p) \leq 2.$$

Теорема доказана.

Заклучение

Получение новых оценок производной p -длины конечной p -разрешимой группы имеет важное значение не только для теории конечных групп и их классов, но и в современной криптографии. В частности, полученные оценки будут полезны при получении новых шифров и новых криптосистем с высокой эффективностью и криптостойкостью. Найденные оценки производной p -длины конечной p -разрешимой группы могут стать основой для создания новых методов современной теории защиты информации и теории кодирования.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 312 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.
3. Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.
4. Брюханова, Е. Г. Связь между 2-длиной и производной длиной силовой 2-подгруппы конечной разрешимой группы / Е. Г. Брюханова // Мат. заметки. – 1981. – № 2 (29). – С. 161–170.
5. Mann, A. The derived length of p -groups / A. Mann // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
6. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
7. Грицук, Д. В. О производной π -длине π -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
8. Грицук, Д. В. Производная π -длина π -разрешимой группы, силовые p -подгруппы которой либо бициклические, либо имеют порядок p^3 / Д. В. Грицук // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 2 (19). – С. 54–58.
9. Monakhov, V. S. On derived π -length of a finite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
10. Монахов, В. С. О производной π -длине конечной π -разрешимой группы с заданной π -холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.
11. Грицук, Д. В. Конечные π -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных π -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.
12. Грицук, Д. В. Оценки производной π -длины π -разрешимой группы, у которой π -холловы подгруппы свободны от n -х степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артюшениа // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
13. Монахов, В. С. О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В. С. Монахов, А. А. Трофимук // Сиб. мат. журн. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1123–1137.
14. Монахов, В. С. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп / В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70, № 4. – С. 603–612.
15. Huppert, B. Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1982. – 531 p.

REFERENCES

1. Monakhov, V. S. Vviedeniye v teoriiyu koniechnykh grupp i ikh klassov / V. S. Monakhov. – Minsk : Vysh. shk., 2006. – 312 s.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.
3. Hall, P. The p -length of a p -soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem / P. Hall, G. Higman // Proc. London Math. Soc. – 1956. – Vol. 3, nr 7. – P. 1–42.
4. Briukhanova, Ye. G. Sviaz' miezhdu 2-dlinoj i proizvodnoj dlinoj silovskoj 2-podgruppy koniechnoj razrieshimoj gruppy / Ye. G. Briukhanova // Mat. zamietki. – 1981. – № 2 (29). – S. 161–170.
5. Mann, A. The derived length of p -groups / A. Mann // J. Algebra. – 2000. – Vol. 224. – P. 263–267.
6. Monakhov, V. S. Koniechnyje gruppy s polunormal'noj khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov // Mat. zamietki. – 2006. – T. 80, № 4. – S. 573–581.
7. Gricuk, D. V. O proizvodnoj π -dlinie π -razrieshimoj gruppy / D. V. Gricuk, V. S. Monakhov, O. A. Shpyrko // Viestn BGU. Sier. 1. – 2012. – № 3. – S. 90–95.
8. Gricuk, D. V. Proizvodnaja π -dlina π -razrieshimoj gruppy, silovskije p -podgruppy kotoroj libo bicyklichieskije, libo imiejut poriadok p^3 / D. V. Gricuk // Problemy fiziki, matematiki i tiekhniki. – 2014. – № 2 (19). – S. 54–58.
9. Monakhov, V. S. On derived π -length of a finite π -solvable group with supersolvable π -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
10. Monakhov, V. S. O proizvodnoj π -dlinie koniechnoj π -razrieshimoj gruppy s zadannoj π -khollovoj podgruppoy / V. S. Monakhov, D. V. Gricuk // Tr. In-ta matematiki i mekhaniki of the UrO RAN. – 2013. – T. 18, № 3. – S. 215–223.
11. Gricuk, D. V. Koniechnyje π -razrieshimyje gruppy s zadannymi svojstvami 2-maksimal'nykh π -podgrupp / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk // Viestn. Brist. gos. tiekh. un-ta. Fizika, matematika, informatika. – 2017. – № 5 (107). – S. 69–72.
12. Gricuk, D. V. Ocenki proizvodnoj π -dliny π -razrieshimoj gruppy, u kotoroj π -khollovy podgruppy svobodny ot n -kh stiepieniej / D. V. Gricuk, A. A. Trofimuk, T. A. Artiushenia // Viestn. Vitieb. gos. un-ta im. P. M. Masherova. – 2018. – № 1 (98). – S. 11–15.
13. Monakhov, V. S. O koniechnykh razrieshimykh gruppakh fiksirovannogo ranga / V. S. Monakhov, A. A. Trofimuk // Sib. mat. zhurn. – 2011. – T. 52, № 5. – S. 1123–1137.
14. Monakhov, V. S. O maksimal'nykh i silovskikh podgruppakh koniechnykh razrieshimykh grupp / V. S. Monakhov, Ye. Ye. Gribovskaja // Mat. zamietki. – 2001. – T. 70, № 4. – S. 603–612.
15. Huppert, B. Endliche Gruppen II / B. Huppert, N. Blackburn. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1982. – 531 p.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 03.11.2021

УДК 519.6+519.81

Владимир Васильевич Морозов*ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Vladimir Morozov***Senior Lecturer of the Department of Applied Mathematics and Computer Science
at the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: morozoffw@mail.ru***ОЦЕНКИ ГРАНЕЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ
ПРЕДБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ**

Отсутствие в бесконечномерных банаховых пространствах счетного базиса вынуждает исследователей, изучающих нелинейные функциональные уравнения с дифференциальными и/или интегральными операторами, разрабатывать все новые и новые грандиозные сеточные схемы. Однако, следуя постулатам функционального анализа А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина, Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова, аппроксимацию корней банаховых уравнений надлежит осуществлять с помощью элементов всюду плотного в полном нормированном пространстве решений множества многочленов. Полные счетно-нормированные метрические пространства будем называть предбанаховыми. Линейные операторы таких пространств могут аппроксимироваться счетными матрицами, которые, в свою очередь, являются пределами последовательностей конечномерных матриц, отображающих конечные базисы всюду плотных множеств предбанаховых пространств.

Ключевые слова: сходимость последовательности, аппроксимация, оценка нормы оператора.

Estimates of the Faces of Continuous Linear Operators Before-Banach Spaces

The absence of a countable basis in infinite-dimensional Banach spaces forces researchers studying non-linear functional equations with differential and / or integral operators to develop more and more grandiose grid schemes. However, following the postulates of functional analysis by A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, the approximation of the roots of Banach equations should be carried out using elements of a set of polynomials that is everywhere dense in the full normalized space of solutions. We will call the complete countably normalized metric spaces before-Banach spaces. The linear operators of such spaces can be approximated by countable matrices, which in turn are the limits of sequences of finite-dimensional matrices that map finite bases of everywhere dense sets of before-Banach spaces.

Key words: sequence convergence, approximation, operator norm estimation.

Полные метрические пространства с всюду плотным множеством многочленов
Будем считать, что оператор $F : U \rightarrow V$ уравнения вида

$$F(u(x)) = 0, x \in X \subset R^M \quad (1)$$

банаховый, причем если B -пространства U и V бесконечномерные, то они сепарабельны.

К таким пространствам относятся конечномерные множества чисел R^n и C^n , многочленов P^n и T^n , а также бесконечномерные пространства непрерывных $C_{[a, b]} \equiv C^0_{[a, b]}$, дифференцируемых $C^k_{[a, b]}$, $k \in N$ и суммируемых $L^p_{[a, b]}$, $p = 1, 2$ функций. Отметим, что эти сепарабельные пространства являются полными метрическими пространствами, содержащими всюду плотные множества многочленов P и T с рациональными коэффициентами. Это значит, что замыкание множества многочленов в метрике одного из этих пространств совпадает с соответствующим пространством функций. Используем это свойство для приближенного представления элементов пространств в виде многочленов множества P^n (или T^n , n – четное).

Проектирование элементов M -пространств L^p_X и C^k_X в конечномерное подмножество P^n (или T^n); прикладной анализ достаточно гладких в области $Q \subset U$ отображений $F : Q \rightarrow V$ (U и V – B -пространства) и аппроксимация их производных; генерация фундаментальных процессов поиска корней и применение критериев их

локализации при исследовании уравнения (1), реализуемые в интегрированной среде программирования с итеративным базисом всюду плотного в пространствах U и V множества P (или T) многочленов с рациональными коэффициентами, назовем *полиномиальным* анализом, а разрабатываемые методы анализа – *полиномиальными*.

В математической физике полиномиальный (предкомпактный интегро-дифференциальный) анализ так же, как и численный (компактный суммарно-разностный) анализ, предназначен для изучения корректности постановки интегро-дифференциальных задач в метрических пространствах и решения адекватных им операторных уравнений. Полиномиальный анализ раскрывает утилитарную суть таких абстрактных понятий функционального анализа сепарабельных M -пространств, как измеримость и компактность множеств, базисы мер и пространств из *теории множеств*; слабая и сильная производные отображений из *теории дифференцирования*; аппроксимация компактных операторов и локализация корней уравнений из *теории приближений*.

Если M -пространство является векторным, то для линейных и билинейных операторов, действующих на элементы единичного шара E_M такого пространства, введем понятия верхней и нижней грани.

Определение. Пусть $A : U \rightarrow V$ – линейный оператор, отображающий векторное M -пространство U в векторное M -пространство V . Если существуют такие числа C , что неравенство $\rho_v(0, Au) \leq C \rho_u(0, u)$ справедливо для всех $u \in E_U$, то наименьшее из чисел C обозначим $\lceil A \rceil$ и назовем *s-гранью* оператора A . Если существуют такие числа c , что неравенство $\rho_v(0, Pu) \geq c \rho_u(0, u)$ верно при любых $u \in E_U$, то наибольшее из чисел c обозначим $\lfloor A \rfloor$ и назовем *i-гранью* линейного оператора A .

Определение. Пусть $B : U^2 \rightarrow V$ – билинейный оператор векторных метрических пространств U и V . Если существуют такие числа C , что неравенство $\rho_v(0, Bu^2) \leq C \rho_u^2(0, u)$ верно при любых $u \in E_U$, то наименьшее из чисел C обозначим $\lceil B \rceil$ и назовем *s-гранью* оператора B . Если существуют такие числа c , что неравенство $\rho_v(0, Bu^2) \geq c \rho_u^2(0, u)$ справедливо для всех элементов $u \in E_U$, то наибольшее из чисел c обозначим $\lfloor B \rfloor$ и назовем *i-гранью* билинейного оператора B .

В дальнейшем расстояние от элемента u до точки 0 в векторных метрических пространствах будем обозначать $\rho(0, u) \equiv \rho(u)$.

Сеточные методы решения (1) основаны на представлении корня $u(x)$ из пространства U числовой последовательностью значений искомой функции в точках сетки. При неограниченном росте параметра дискретизации эта последовательность может поточечно сходиться к корню (1). Однако использовать решение из пространства R^∞ бесконечных числовых последовательностей, например, в качестве непрерывно дифференцируемой функции неправомочно.

В этом случае для аппроксимации непрерывных корней воспользуемся другим счетно-нормированным пространством $C^\infty_{[a, b]}$ бесконечно дифференцируемых функций, полным относительно метрики

$$\rho_\infty(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|u - v\|_n}{1 + \|u - v\|_n}, \text{ где } \|\cdot\|_n \equiv \|\cdot\|_{C^n}. \quad (2)$$

Определение. Полные счетно-нормированные метрические пространства будем называть *предбанаховыми* и обозначать B (B -пространство).

Чтобы воспользоваться формулой (2) и найти верхнюю и нижнюю грани линейного оператора $A : U \rightarrow V$, где U – B -пространство $C^\infty_{[a, b]}$, а V – B -пространство $C^k_{[a, b]}$, совокупность точек единичного шара E_{C^∞} представим как множество отрезков, соединяющих точки единичной сферы с центром 0 .

Отсюда

$$E_{C^\infty} \setminus \{0\} = \{\lambda u : \rho_\infty(u) = 1, \lambda \in (0; 1]\}.$$

Теорема 1. Пусть $u \in C^\infty_{[a, b]}$ и $\rho_\infty(u) = 1$, тогда

$$\rho_\infty(\lambda u) = \frac{2\lambda}{1+\lambda}.$$

Найдем расстояние от 0 до точки λu по формуле (2) при $\|u\|_n = 1$

$$\rho_\infty(\lambda u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|\lambda u\|_n}{1 + \|\lambda u\|_n} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) = \frac{2\lambda}{1+\lambda}.$$

Следствие. Если $\rho_\infty(u) = 1$, то при $0 \leq \lambda \leq 1$ справедливо неравенство

$$\lambda \leq \rho_\infty(\lambda u) \leq 2\lambda. \quad (3)$$

В полных счетно-нормированных пространствах с метрикой $\rho = \rho_\infty$ s - и i -грани линейных и билинейных операторов определяются по той же схеме, что и в B -пространствах. Но из-за разной топологии банаховых и предбанаховых пространств оценки граней этих операторов, полученные на единичном шаре полных счетно-нормированных пространств, нельзя продолжить на все B -пространство.

Теорема 2. Пусть линейный оператор A отображает B -пространство U в B -пространство V . Тогда

$$\lceil A \rceil \leq \sup_{\rho(u)=1} \|Au\|_V \text{ и } \lfloor A \rfloor \geq \frac{1}{2} \inf_{\rho(u)=1} \|Au\|_V.$$

Доказательство теоремы следует из отношения

$$\frac{\|A(\lambda u)\|}{\rho(\lambda u)} = \frac{(1+\lambda)\lambda\|Au\|}{2\lambda} = \frac{(1+\lambda)\|Au\|}{2}.$$

Теорема 3. Если $B : U^2 \rightarrow V$ – билинейный оператор (U – B -пространство, V – B -пространство), то

$$\lceil B \rceil \leq \sup_{\rho(u)=1} \|Bu^2\|_V, \lfloor B \rfloor \geq \frac{1}{4} \inf_{\rho(u)=1} \|Bu^2\|_V.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2. Отметим лишь, что единичный шар E_{C^∞} определяется вложением шаров E_{C^k} .

Вычисление s - и i -граней операторов в 1 -окрестности нуля обусловлено тем, что сходимость итерационных процессов зависит от скорости пошагового сужения расстояний между нулем и поправкой к приближению, которое в метрике пространства решений изначально меньше 1.

Что касается верхней и нижней граней линейных и билинейных операторов, действующих в метрических пространствах неекторного типа, то они определяются по принципу константы Липшица, а именно: v -гранью линейного оператора A назовем число L , удовлетворяющее неравенству

$$\rho_V(Au, Av) \leq L \rho_U(u, v);$$

v -гранью билинейного оператора B назовем число K , удовлетворяющее

$$\rho_V(Bu^2, Bv^2) \leq K \rho_U^2(u, v);$$

n -гранью линейного оператора A назовем число $l \geq 0$, удовлетворяющее

$$\rho_V(Au, Av) \geq l \rho_U(u, v);$$

n -гранью билинейного оператора B назовем число $k \geq 0$, удовлетворяющее

$$\rho_V(Bu^2, Bv^2) \geq k \rho_U^2(u, v),$$

справедливых для любых u и v из M -пространства U .

Действие билинейного оператора B дважды на один и тот же элемент пространства U обусловлено спецификой применения этого оператора в формулах Тейлора и конечных приращений.

Восстановление элементов функциональных пространств по сеточному представлению

Сеточное представление функций – это связующий (промежуточный) этап между явным изображением элементов функциональных пространств и их δ -аппроксимирующими многочленами. Другими словами, увеличивая параметр дискретизации пространства U , можно сколь угодно точно приблизить изучаемую функцию многочленом по норме пространств дифференцируемых, непрерывных и суммируемых функций.

Этот процесс назовем восстановлением явного вида функции по ее сеточному представлению. Сразу оговоримся, что в буквальном смысле эта задача не разрешима, т. к. мощность множества исходных функций – континуум, а мощность множества всевозможных последовательностей значений функций, вычисленных в рациональных точках или на сегментах с рациональными концами, – счетное. Однако в силу сепарабельности множества многочленов с рациональными коэффициентами в этих пространствах для каждой функции $u(x) \in U$ и любой точности приближения δ существует такой конечный многочлен ${}^n u(x)$, что

$$\|u(x) - {}^n u(x)\| < \delta.$$

По заданной точности определяется степень многочлена, позволяющего аппроксимировать искомую функцию с точностью δ , затем из всех многочленов данной степени находится (единственный) многочлен наилучшего приближения функции по норме. Этот многочлен назовем *многочленом восстановления* искомой функции с заданной точностью.

Отметим, что процесс поиска многочлена восстановления аналитической функции сходится к ее ряду Тейлора, по отрезкам которого при помощи специальной таблицы можно определить явный вид функции.

Сформулируем задачу «нахождения многочлена восстановления (НМВ) функции $u(x) \in U$ » с параметром дискретизации $c+1$. Пусть задана последовательность пар, состоящая из сегментов отрезка $[a, b]$ и соответствующих значений сеточной функции ${}^{c+1}u$ на них

$${}^c \Psi = \{(\underline{x}_i, u_i), i = 0, \dots, c\}.$$

Требуется найти коэффициенты многочлена ${}^n u(x)$ восстановления исследуемой функции $u(x) \in E_U$.

В зависимости от задания нормы в пространстве U , содержащем функцию $u(x)$, рассмотрим три ветви алгоритма решения этой задачи.

Если $U = C^k_{[a, b]}$, $k \in N$, то степень требуемого многочлена $n = c$ и задача нахождения многочлена восстановления сводится к поиску соответствующего интерполяционного многочлена сеточной функции ${}^{c+1}u$ на сетке ${}^c \Omega_u$.

Если $U = C_{[a, b]}$, то степень требуемого многочлена $n \leq c/3$ (доказать для произвольной сетки ${}^c\Omega_n$) и задача НМВ сводится к поиску соответствующего супрополяционного многочлена ${}^n u(x)$ сеточной функции ${}^{c+1}U$.

Если $U = L^p_{[a, b]}$, $p = 1, 2$, то степень требуемого многочлена $n < c/2$ (доказать для равномерной сетки ${}^c\Omega_p$) и задача НМВ сводится к поиску соответствующего квадрополяционного многочлена ${}^n u(x)$ сеточной функции ${}^{c+1}U$.

То есть каждая ветвь алгоритма НМВ реализуется заменой вычисляемых значений $u(x)$ в точках сетки ${}^c\Omega$ вектором сеточных значений искомой функции. Таким образом, во втором и третьем вариантах степень n многочлена восстановления значительно меньше параметра дискретизации $c+1$, что ухудшает сходимость последовательности приближений корня уравнения (1), т. к. требует надлежащего увеличения c .

Третья составляющая задачи НМВ имеет самостоятельный аспект в математической статистике, где коэффициенты ${}^z c = (c_0, \dots, c_n)$ многочлена наилучшего приближения линейной или нелинейной регрессии вычисляются из условия минимизации функционала $Z({}^z c)$ по E -норме R^{c+1} .

Связать корень уравнения (1)

$${}^n u(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$$

с нормой какого-либо функционального пространства, где он станет МНП сеточной функции ${}^{c+1}U$, можно лишь условно. Чтобы поставить задачу НМВ в $L^2_{[a, b]}$, введем понятие «равного влияния» точек сетки ${}^c\Omega$ на формирование МНП, т. е. осуществим линейное интерполирование простой функции ${}^{c+1}U \in L^2_{[a, b]}$ (среднеквадратично сходящееся к $u(x)$), где мера i -го сегмента равна

$$\mu_i = (x_i - x_{i-1})/2 + (x_{i+1} - x_i)/2$$

и при $i = \{0 \vee n\}$ одно из двух слагаемых опускается.

Для этого потребуется минимизировать функционал

$$Z(c_0, c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=0}^c \left(\sum_{k=0}^n c_k x_i^k - u(x_i) \right)^2 \mu_i, \mu_i \in {}^c\Omega_{[a, b]}. \quad (4)$$

Чтобы вычислить значения ${}^z c$, найдем частные производные $Z({}^z c)$ по всем неизвестным коэффициентам и составим ЛСАУ

$$\sum_{k=0}^n c_k \sum_{i=0}^c \mu_i x_i^{k+j} = \sum_{i=0}^c \mu_i x_i^j u_i, j = 0, \dots, n. \quad (5)$$

В приложении 2 [5] показана объект-схема алгоритма поиска многочлена наилучшего приближения простой функции ${}^c U$, заданной в точках сетки, расположенных на отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. С небольшими изменениями он трансформируется в интегральный метод поиска МНП по норме $L^2_{[a, b]}$.

Слабое и сильное проектирование M -пространств на множество многочленов

При решении (1) полиномиальными методами, генерирующими в пространстве решений сходящуюся к корню последовательность многочленов, требования к проекторам значительно возрастают.

Важнейшее из них касается сходимости последовательности проекций корня к точному решению, обеспечиваемое условием $\overset{n}{\Pi} u \rightarrow u$ в метрике M -пространства или $\|\overset{n}{\Pi} u - u\|_U \rightarrow 0$ (по норме B -пространства U).

Рассмотрим проекторы, обладающие этим свойством. В функциональном анализе [4, с. 211] изучается ортогональное проектирование элементов H -пространства U на векторное подпространство Y .

Здесь $y \in Y$ – проекция элемента $u \in U$ определяется при помощи скалярного произведения из условия $(u - y) \perp Y$. В работе [4, с. 231] приведен пример, где проектором $\overset{n}{\Pi} : L^2_{[a, b]} \rightarrow P^n$ является преобразование Фурье элементов H -пространства $L^2_{[a, b]}$ на подпространство, порожденное ортонормированной системой $\{e^j, j = 0, \dots, n\}$. Однако эти проекторы позволяют аппроксимировать многочленами наилучшего приближения по норме лишь элементы H -пространства $L^2_{[a, b]}$.

В разделе 8.6 [5] построен проектор $\overset{n}{\Pi} : C_{[a, b]} \rightarrow P^n$, осуществляющий аппроксимацию функций из $C_{[a, b]}$ МНП по чебышевской норме.

По определению проектор $\overset{n}{\Pi} : U \rightarrow P^n$ обладает свойством $(\overset{n}{\Pi})^2 = \overset{n}{\Pi}$ или $\overset{n}{\Pi} : P^n \rightarrow P^n$, т. е. $\overset{n}{\Pi}$ – тождественный оператор на конечномерном подмножестве P . Эту функцию проектора из $C^\infty_{[a, b]}$ выполняет интерполятор Лагранжа. Но, как показано в разделе 5.5 [5], на некоторых элементах M -пространства $U = C_{[a, b]}$ этот проектор не ограничен. Значит, интерполятор Лагранжа не может сходиться к тождественному (ограниченному) оператору, т. к. это противоречило бы принципу Банаха – Штейнгауза равномерной ограниченности линейного оператора.

Теорема 4 [4, с. 233]. Пусть U – B -пространство, V – нормированное пространство и M – множество ограниченных линейных операторов $M \subset L(U, V)$, такое, что для любого $u \in U$ существует постоянная $C_u > 0$, такая, что $\|Au\| \leq C_u$ для любого $A \in M$. Тогда M – ограниченное множество, т. е. существует такая постоянная C , что $\|A\| \leq C$ для всех $A \in M$.

Утверждение теоремы остается в силе, если ее условие достоверно для элементов множества P всюду плотного в B -пространстве U .

В работе [2, с. 523] говорится об интерполяционном проектировании элементов B -пространства $C_{[a, b]}$ решений (1), удовлетворяющем условию «хорошей аппроксимации». В классическом варианте [6, с. 106] за узлы сетки на отрезке $[-1; 1]$, обеспечивающем минимальное уклонение многочлена интерполирования от порождающей его абсолютно непрерывной функции по чебышевской норме, принимают корни многочлена Чебышева $T_n(x) \equiv \cos(n \arccos x)$:

$$x_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Теорема 5 [6, с. 106]. Если $u(x)$ принадлежит множеству $C^q_{[-1; 1]}$ абсолютно непрерывных функций, то построенный на сетке Чебышева (10.6) процесс интерполирования $\overset{n}{u}(x) = \overset{n}{\Pi} u(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к порождающей функции равномерно относительно x на отрезке $[-1; 1]$.

При определении коэффициентов интерполяционного приближения корней интегральных уравнений на сетке $\overset{n}{\Omega}_i$ (6) могут изменяться все значения сеточной функции.

Но для решения интегро-дифференциальных краевых задач требуется, чтобы, во-первых, концы отрезка являлись точками сетки; во-вторых, сетка ${}^n\Omega_q$ позволяла строить интерполяционные многочлены n -ой степени, т. е. имела $(n+1)$ узел; и, в-третьих, сетка была нанесена на отрезок $[0; 1]$.

Всем этим условиям удовлетворяет множество точек

$${}^n\Omega_q = \left\{ x_i = \frac{1}{2} \left(1 - q \cos \frac{2i+1}{2(n+1)} \pi \right), i = \overline{0, n} \right\}, \text{ где } q = \left(\cos \frac{\pi}{2(n+1)} \right)^{-1}, \quad (7)$$

которые являются узлами сетки Чебышева на отрезке $[(1-q)/2, (1+q)/2]$, сходящемся при $n \rightarrow \infty$ к отрезку $[0; 1]$.

Формально абсолютная непрерывность функций должна выполняться на отрезке $[(1-q)/2, (1+q)/2]$, что мы и будем всегда подразумевать. Если понадобится нанести чебышевскую сетку на отрезок $[a, b]$, то воспользуемся преобразованием

$$\chi_i = a + x_i(b-a), \text{ где } x_i \in {}^n\Omega_q.$$

Из теоремы 5 следует, что элементы семейства абсолютно непрерывных функций с заданным изменением $K < \infty$ на отрезке $[a, b]$ равномерно проектируются на множество P^n ($n = n(\varepsilon, u(x))$). То есть последовательность интерполяторов

$$P : C^a_{[a, b]} \rightarrow P^n$$

с сеткой Чебышева при $n \rightarrow \infty$ сходится поточечно к оператору Ica на ограниченном множестве $Q_\delta \subset C^a_{[a, b]}$.

При решении уравнений с дифференциальным оператором элементами пространства решений U являются функции из $C^k_{[a, b]}$, $k \geq 1$. Опишем проектор, отображающий эти функции в многочлены из P^n .

Теорема 6 [6, с. 111]. Для того чтобы интерполяционный процесс сходилась при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $[a, b]$ для всякой функции $u(x) \in C^k_{[a, b]}$, $k \geq 1$, необходимо и достаточно существование такого $M < \infty$, что

$$\int_a^b \left| \sum_{j=0}^n e^j(x) E(t-x_j) \frac{(t-x_j)^{k-1}}{(k-1)!} \right| dt \leq M, \quad (8)$$

где $n = k, k+1, \dots$, $x \in [a, b]$ и «гасящая» функция

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 1/2 & \text{при } x = 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Представляет интерес частный случай теоремы 6 с $k = 1$, для которого оценка M может быть получена при $n = 1, 2, \dots$ из неравенства

$$|e^0(x)|(x_1-x_0) + |e^0(x) + e^1(x)|(x_2-x_1) + \dots + \left| \sum_{j=0}^{n-1} e^j(x) \right| (x_n - x_{n-1}) \leq M. \quad (10)$$

Приведем значения M_n для оценки параметра M на сетке Чебышева (M^n_n) и равномерной сетке (M^p_n), полученные при различных значениях n .

Таблица. – Значения M_n для оценки параметра M в формуле (10)

$M_n \backslash n$	4	6	8	10	12	14	16	18	20
M_n^i	1,114	1,129	1,135	1,137	1,1385	1,1394	1,1399	1,1403	1,1405
M_n^p	1,137	1,228	1,428	2,230	5,000	12,83	36,22	107,3	330,3

Преимущество чебышевской сетки объясняется не только наименьшим уклонением функций из $C^a_{[a, b]}$ от отвечающих им интерполяционных многочленов или существованием M в формуле (10), обеспечивающим равномерную сходимость процесса интерполирования функций из $C^1_{[a, b]}$, т. е. ее алгебраическими и аналитическими свойствами, но и с помощью геометрических особенностей соответствующего данной сетке итерационного базиса (предбазиса B -пространства $C_{[a, b]}$).

Определение. Предскалярным произведением векторов u и v в линейном пространстве L назовем действительную функцию $\langle\langle u, v \rangle\rangle$, удовлетворяющую условиям

- 1) $\langle\langle u, v \rangle\rangle = \langle\langle v, u \rangle\rangle$;
- 2) $\langle\langle \alpha u, v \rangle\rangle = \alpha \langle\langle u, v \rangle\rangle, 0 < \alpha \in R$;
- 3) $\langle\langle \alpha u, u \rangle\rangle = \alpha \langle\langle u, u \rangle\rangle, \forall \alpha \in R$;
- 4) $\langle\langle u, u \rangle\rangle \geq 0$, причем $\langle\langle u, u \rangle\rangle = 0$ только при $u = 0$.

Введенное таким образом предскалярное произведение элементов полного по норме $\|u\| = \langle\langle u, u \rangle\rangle^{1/2}$ банахова пространства задает в нем геометрию, подобную геометрии гильбертовых пространств.

Например, угол между элементами u и v не отличается от угла между v и u (аксиома 1). Умножение одного из векторов пары на положительное число не влияет на величину угла между ними (аксиомы 1 и 2).

Произведение сонаправленных элементов B -пространства положительно, а противоположно направленных – отрицательно (аксиомы 3 и 4). В связи с этим угол между элементами B -пространства будем определять из формулы

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = \|u\| \|v\| \cos(u \wedge v). \tag{11}$$

Равенство нулю предскалярного произведения ненулевых элементов означает их взаимную перпендикулярность. Для введения понятия предскалярного произведения в B -пространстве $C_{[a, b]}$ непрерывных функций определим экстремальное умножение двух функций этого пространства.

Определение 10.5. Пусть $s = \max_{a \leq x \leq b} (u(x)v(x))$ и $i = \min_{a \leq x \leq b} (u(x)v(x))$, тогда экстремальным умножением $u(x)$ и $v(x)$ из $C_{[a, b]}$ назовем функционал

$$\text{extr}_{a \leq x \leq b} (u(x), v(x)) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \geq |i|; \\ i, & \text{если } |i| > |s|. \end{cases} \tag{12}$$

Теорема 7. Экстремальное умножение элементов $u(x)$ и $v(x)$ банахова пространства $C_{[a, b]}$ задает в нем предскалярное произведение.

Доказательство справедливости 1, 3 и 4 условий из определения 10.4 очевидно. Докажем истинность второго свойства при $\alpha > 0$:

$$\langle\langle \alpha u, v \rangle\rangle = \text{extr}_{a \leq x \leq b} (\alpha u(x), v(x)) = \begin{cases} \alpha s, & \text{если } |s| \geq |i|; \\ \alpha i, & \text{если } |i| > |s|. \end{cases} = \alpha \langle\langle u, v \rangle\rangle.$$

При $s+i=0$ равенство $\langle\langle u, v \rangle\rangle = s$ означает, что предскалярное произведение в отличие от скалярного определяется с точностью до знака, а угол $u \wedge v$ находится из формулы $s = \|u\| \|v\| \cos(u \wedge v)$. Это обстоятельство никоим образом не влияет на достижение

основных целей $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, т. к. если $|\cos(u^\wedge v)| \approx 0$, то углы $u^\wedge v$ и $180^\circ - u^\wedge v$ незначительно отличаются от прямого, а если $|\cos(u^\wedge v)| \approx 1$, то элементы $u(x)$ и $v(x)$ почти коллинеарны.

Полная линейно независимая система функций M -пространства не всегда может быть использована в качестве базиса. Во многом это связано с величиной углов между парами ее элементов. Если один из углов репера близок к 0° или 180° , то разложить по предбазису функцию из единичного шара, используя данную пару элементов системы, практически невозможно, из-за чего возникает проблема выбора предбазиса даже в сепарабельных B -пространствах. Одной из неудачных полных систем пространства $C_{[a, b]}$ с этой точки зрения является степенной предбазис

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$$

Значительно лучше различаются направления элементов итеративного предбазиса, но и в этом случае есть отличие в качестве аппроксимации функций из $C_{[a, b]}$ интерполяционными многочленами, зависящем от сетки отрезка $[a, b]$. Например, минимальное \mathcal{E} из множества значений углов между элементами итеративного предбазиса, построенного на равномерной сетке ${}^n\Omega_p$, уже при $n = 16$ становится менее $30'$, а на сетке ${}^{16}\Omega_q$ Чебышева параметр $\mathcal{E} > 66^\circ 30'$. Это обеспечивает равномерную сходимость процесса интерполирования абсолютно непрерывных функций на сетке ${}^n\Omega_q$.

Построив итеративную сетку для множества непрерывных функций, удовлетворяющих аксиоме $\langle\langle u + w, v \rangle\rangle = \langle\langle u, v \rangle\rangle + \langle\langle w, v \rangle\rangle$ (отличающей скалярное произведение от предскалярного), и приблизив \mathcal{E} к 90° , можно классифицировать пространство $C_{[a, b]}$ по равномерной интерполируемости.

Определение. Если последовательность проекторов сходится к тождественному оператору поточечно, т. е. для $\forall \delta > 0$ и каждой функции $u \in Q$ существует такое $N(\delta, u) \in N$, что при всех $n > N$ верно неравенство

$$\|(\overset{n}{\Pi} - I_Q)u\|_Q \leq \delta, \quad (13)$$

то данное проектирование назовем *слабым*.

Последовательность проекторов $\overset{n}{\Pi}$, аппроксимирующих функции N -пространства $L^2_{[a, b]}$ МНП порядка n , осуществляет слабое проектирование ограниченного подмножества $Q \subset L^2_{[a, b]}$ на множество $T^n_{[a, b]}$ многочленов.

Определение. Если последовательность проекторов сходится к тождественному оператору по операторной норме, т. е. для $\forall \sigma > 0$ и $\forall u \in Q \exists N(\sigma) \in N$, такое, что при каждом $n > N$ выполняется неравенство

$$\|(\overset{n}{\Pi} - I_Q)u\|_Q \leq \sigma \|u\|_Q, \quad (14)$$

то данное проектирование назовем *сильным*.

Теорема 8. Последовательность операторов $\overset{n}{\underset{\mathcal{V}}{\Pi}} : C^k_{[a, b]} \rightarrow P^n$, преобразующих функции из ограниченного подмножества $Q = \{u : \|u\| < \delta\}$ M -пространства $C^\infty_{[a, b]}$ в интерполянты Лагранжа на равномерной сетке, осуществляет сильное проектирование Q на множество $P^n_{[a, b]}$ многочленов, т. е.

$$\overset{n}{\underset{\mathcal{V}}{\Pi}} {}^n u(x) = {}^n u(x) \text{ или } \left(\overset{n}{\underset{\mathcal{V}}{\Pi}} \right)^2 = \overset{n}{\underset{\mathcal{V}}{\Pi}};$$

и для каждой функции $u(x) \in Q \subset C^\infty_{[a, b]}$ и любого $\sigma > 0$ существует такое m , что для всех $n > m$ выполняется неравенство

$$\|u(x) - \prod_{\nu}^n u(x)\|_{ck} < \sigma \|u(x)\|_{ck}.$$

Утверждение с $n > k$ следует из формулы Лагранжа [6, с. 35] для бесконечно дифференцируемых функций, принадлежащих $C^k_{[a, b]}$.

Таблица. – Значения σ_n для оценки σ в теореме 8 с k , равным 1 и 2

$k \backslash n$	4	6	8	10	12	14	16
1	$7,9 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-9}$	$9,2 \cdot 10^{-12}$	$8,7 \cdot 10^{-15}$	$6,1 \cdot 10^{-18}$	$3,2 \cdot 10^{-21}$
2	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$9,1 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-7}$	$5,5 \cdot 10^{-10}$	$6,5 \cdot 10^{-13}$	$5,5 \cdot 10^{-16}$	$3,5 \cdot 10^{-19}$

Данные таблицы 6 подтверждают вывод теоремы 8 о сходимости последовательности проекторов к тождественному оператору I_Q по норме, что очень важно при определении оценок i -граней линейных операторов, аппроксимируемых этими проекторами. В то же время для получения оценок s -граней линейных операторов при решении функциональных уравнений достаточно, чтобы проектор отличался от тождественного оператора по норме не более, чем на $\sigma < 0,5$.

Сильное проектирование (см. пример 3 из [1, с. 230]) по норме $L^2_{[a, b]}$ осуществляется квадрополированием (не уступающим по качеству интерполированию) непрерывных функций $u(x) \in Q_\delta \subset C^k_{[a, b]}$ с помощью римановского интегрирования.

Но даже такой процесс аппроксимации исключает итеративность метода Галеркина нахождения МНП по норме H -пространства $L^2_{[a, b]}$ непрерывного корня (1) «в том смысле, что отыскание каждого последующего приближения не использует предыдущих приближений» [3, с. 194]. Это касается и решения линеаризованного уравнения для (1)

$$F'(u)\Delta u = -F(u), \tag{15}$$

методом Галеркина, который не осуществляет априорный анализ точности приближений на каждом шаге процесса \prod^n проектирования корня Δu .

Так как процесс аппроксимации на всем M -пространстве решений U не обеспечивает, вообще говоря, стремление последовательности проекторов к тождественному оператору I_U по норме $L(U, U)$, то сходимость \prod^n к I_U возможна лишь на некотором подмножестве пространства U .

Один из способов достижения этой цели – выбор предкомпактного в U множества P . Тогда каждую функцию $u(x) \in P$ можно с любой точностью $\varepsilon > 0$ приблизить элементом конечной сети P^n с базисом $\{e^s, \dots, e^n\}$, $n = n(\varepsilon)$. Другими словами, для

$$\forall u(x) \in P \exists p = \sum_{i=s}^n \alpha_i e^i \text{ из } P^n, \text{ что } \|u(x) - p\| < \varepsilon \text{ или}$$

$$\|(\prod_P^n - I_P) u(x)\| < \varepsilon, \text{ где } \prod_P^n u(x) \equiv p. \tag{16}$$

Теорема 9. Пусть для $\forall \varepsilon > 0 \tau = \min_{p \in P^n} \|p\| - \varepsilon > 0$ и $\|u_0(x)\| \geq \tau + \delta$. Тогда в области

$$Q_\delta = \{\|u(x) - u_0(x)\| < \delta\} \subset P \text{ имеет место } \lim_{n \rightarrow \infty} \overset{n}{\Pi} = I_{Q_\delta}.$$

$$\text{По определению } \left[\overset{n}{\Pi} - I_{Q_\delta} \right] = \sup_{u(x) \in Q_\delta} \frac{\|(\overset{n}{\Pi} - I_{Q_\delta})u(x)\|}{\|u(x)\|} < \frac{\varepsilon}{\tau} < (\forall \varepsilon > 0).$$

Следовательно, проекторы $\overset{n}{\Pi}$ сходятся к оператору I по норме только на предкомпактных подмножествах пространств решений и образов. Это связано с тем, что в бесконечномерных B -пространствах тождественный оператор не компактен [1, с. 311] и не может быть ε -аппроксимирован конечным оператором. На предкомпактах B -пространств U и V может иметь место и обратимость компактного оператора.

Отметим, что для генерации сильно сходящихся приближений к корню (1) требуются оценки не только норм элементов пространств решений и образов, но и граней операторов, участвующих в этих процессах. Так как операторная норма вводится в пространстве непрерывных линейных операторов, то сильная сходимость к корню может быть достигнута лишь с использованием сильного проектирования пространства решений.

Оценки граней непрерывных линейных операторов предбанаховых пространств

Часто при решении функциональных уравнений наряду с аппроксимацией основного или вспомогательного операторов поставленной задачи требуется определить точность полученных приближений. Эта проблема может быть решена при помощи проектирования B -пространства решений на всюду плотное в нем множество многочленов. Необходимым условием здесь является сходимость последовательности МНП (полученных сильным или слабым проектированием) к порождающей функции (корню функционального уравнения) по метрике B -пространства.

Использование аппроксимирующих многочленов обусловлено тем, что поиск корней функционального уравнения (1) в виде генерации последовательности приближений из пространства решений по рекуррентным формулам не всегда может быть реализован на практике.

Например, если концы отрезка в методе половинного деления суть иррациональные числа, то решение уравнения в пространстве R определяется лишь теоретически. Также не представляется возможным найти иррациональный корень уравнения с помощью метода Ньютона. Для приближенного решения подобных уравнений используются элементы множества рациональных чисел всюду плотного в пространстве R .

Тем не менее, если замкнутое ограниченное множество в R компактно, то в бесконечномерных функциональных M -пространствах замкнутость и ограниченность подмножества не гарантируют ему компактность в M . Рассмотрим, какие дополнительные условия требуется наложить на проекторы этих пространств для получения необходимых оценок граней операторов.

Теорема 10 [1, с. 131]. Пусть U и V – метрические пространства, V – полное M -пространство, P – всюду плотное подмножество пространства U , $F : P \rightarrow V$ – равномерно непрерывное отображение.

Тогда существует, и притом единственное, непрерывное продолжение F отображения F на все U , и это продолжение ($F : U \rightarrow V$) равномерно непрерывно. Если F удовлетворяет условию Липшица с константой C , то продолжение F удовлетворяет условию Липшица с той же константой.

При доказательстве теоремы для любой точки $u \in U$ строится сходящаяся к ней последовательность Коши $\{^n u\}$, которая затем отображением F переводится в последовательность Коши полного пространства V . Таким образом осуществляется продолжение F отображения F .

Применительно к линейному ограниченному оператору $A : U \rightarrow V$, который на всюду плотном множестве P удовлетворяет условию Липшица с константой $C = \lceil A \rceil$, $A : P \rightarrow V$, его продолжение A удовлетворяет условию Липшица с этой же константой. Значит, константа Липшица для A равна $\lceil A \rceil$.

Используем это свойство для оценки s -границ функционального линейного оператора A , отображающего B -пространство U в V .

При помощи сильного проектирования (14) построим фундаментальную последовательность $\{^n p(x)\}$ степенных многочленов, сходящуюся к порождающей функции $u(x) \in Q \subset U$. Из условия $\|(\overset{n}{P} - I_Q)u\| \leq \sigma \|u\|$ следует, что норма проекции $^n p(x)$ элемента $u(x)$ удовлетворяет неравенству

$$(1 - \sigma) \|u\| \leq \|^n p(x)\| \leq (1 + \sigma) \|u\|, \tag{16}$$

а норма $u(x)$ находится в пределах

$$\frac{\|^n p(x)\|}{1 + \sigma_n} \leq \|u(x)\| \leq \frac{\|^n p(x)\|}{1 - \sigma_n}, \text{ где } \sigma_n = \sigma(n) < 1.$$

Следствия теоремы 10 справедливы и для слабого проектирования в U . Однако для оценки границ линейных операторов, действующих на элементы замкнутого M -пространства $C^\infty[a, b]$, используется сильное проектирование оператора A справа по схеме:

1) условие «для любых $u \in Q \subset U$ и $\sigma > 0$ существует такой элемент $^n p(x) \in P^n \subset P$, что $\|u - ^n p(x)\| \leq \sigma \|u\|$ » определяет для каждого $n = n(\sigma)$ проектор элементов пространства решений $\overset{n}{P} : U \rightarrow P^n$;

2) образ многочлена $^n p(x)$, определяемого вектором ^{n+1}P , под действием оператора A есть элемент пространства V (в общем случае не конечный ряд):

$$A ^n p(x) = A \overset{n}{P} u = (A \overset{n}{P}) u \equiv {}^n A u = {}^n A {}^{n+1} P, \text{ где } {}^n A = {}^N o \{a_{ij}\}^n o.$$

В отличие от квадратной матрицы ${}^z A = \{a_{ij}\}^n o$ с конечным числом строк и столбцов линейный оператор ${}^n A$ имеет счетное число строк. При условии сильного проектирования для s -границ оператора ${}^n A$ справедливо двойное неравенство

$$(1 - \sigma_n) \lceil A \rceil \leq \lceil {}^n A \rceil \leq (1 + \sigma_n) \lceil A \rceil. \tag{17}$$

Доказательство этого двойного неравенства следует из двойного неравенства (16) и определения s -границ

$$\lceil {}^n A \rceil = \sup_{u \neq 0} \frac{\|{}^n A u\|}{\|u\|} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|A {}^n u\|}{\|{}^n u\|} \frac{\|{}^n u\|}{\|u\|}.$$

Из соотношения (17) вытекает более значимое в прикладном анализе двойное неравенство, оценивающее s -границу линейного оператора A :

$$\frac{\lceil {}^n A \rceil}{1 + \sigma_n} \leq \lceil A \rceil \leq \frac{\lceil {}^n A \rceil}{1 - \sigma_n}. \tag{18}$$

Покажем, как с помощью оператор-счетной теории объясняется равенство $A^n p(x) = {}^N A^{n+1} p$. Для этого изобразим линейный оператор A и многочлен ${}^n p(x)$ в виде счетной матрицы и счетного вектора соответственно:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{00} & \dots & a_{0n} & a_{0n+1} & \dots & a_{0N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m0} & \dots & a_{mn} & a_{mn+1} & \dots & a_{mN} \\ \hline a_{m+10} & \dots & a_{m+1n} & a_{m+1n+1} & \dots & a_{m+1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{N0} & \dots & a_{Nn} & a_{Nn+1} & \dots & a_{NN} \end{array} \right) \text{ и } {}^n p = \begin{pmatrix} {}^n p(x_0) \\ \vdots \\ {}^n p(x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В пространстве образов V итерационный базис может быть построен с произвольным параметром дискретизации $m+1$, $m \geq n$ (например, при решении интегральных уравнений). Однако в полиномиальных методах решения функциональных уравнений вида (1) методом Ньютона или методом второго порядка будем полагать, что $m = n$. Это связано с корректностью решения соответствующей линейной или квадратичной системы уравнений.

Тогда всякий непрерывный линейный оператор $A : U \rightarrow V$, действующий из ограниченного подмножества B -пространства $C^k_{[a,b]}$, $k \in N$, состоящего из элементов M -пространства $C^\infty_{[a,b]}$, в $C^\infty_{[a,b]} \subset V$, является пределом последовательности конечных операторов и его с любой точностью ε можно аппроксимировать матрицей ${}_m^n A = {}^m_0 \{a_{ij}\}^n_0$, используя сильное проектирование элементов U и V на множество многочленов $P^n_{[a,b]}$ или $T^n_{[a,b]}$.

Левый проектор оператора A , проецирующий элементы $v \in \tilde{O}_\rho \subset C^\infty_{[a,b]}$ на множество P^m с точностью $\|v - {}^m p\| \leq \sigma_m \|v\|$, обозначим $\tilde{P} : \tilde{O}_\rho \rightarrow P^m$. Тогда в условиях изложения справедлива оценка s -границы матрицы ${}_m^n A$

$$(I - \sigma_n)(I - \sigma_m) \lceil A \rceil \leq \lceil {}_m^n A \rceil \leq (I + \sigma_n)(I + \sigma_m) \lceil A \rceil, \quad (19)$$

или, что более важно в прикладном анализе,

$$\frac{\left| {}_m^n A \right|}{(I + \sigma_n)(I + \sigma_m)} \leq \lceil A \rceil \leq \frac{\left| {}_m^n A \right|}{(I - \sigma_n)(I - \sigma_m)}. \quad (20)$$

Аналогично оценим i -грань банахова линейного оператора.

Теорема 11. Пусть U и V – B -пространства, P – всюду плотное подмножество U , $A : P \rightarrow V$ – непрерывный линейный оператор, ограниченный снизу $\lfloor A \rfloor \geq c$. Тогда существует, и притом единственное, непрерывное продолжение A отображения A на все U и $\lfloor A \rfloor \geq c$.

Пусть $\lfloor A \rfloor \geq c$, тогда для любых фундаментальных последовательностей из P справедливо неравенство $\|A^n p(x) - A^n q(x)\| \geq c \|{}^n p(x) - {}^n q(x)\|$.

Переходя к пределу, получим

$$\|Au(x) - Av(x)\| \geq c \|u(x) - v(x)\|.$$

Другими словами, если второе неравенство будет нарушено, то найдутся последовательности, сходящиеся к $u(x)$ или $v(x)$ такие, что первое неравенство для них не выполнится.

Аналогично неравенствам (17–20), оценивающим s -грань банахова линейного оператора, приведем оценки его i -граней в некотором замкнутом подмножестве, например, единичном шаре пространства U .

$$(I - \sigma_n)(I - \sigma_m) \lfloor A \rfloor \leq \lfloor {}_m^n A \rfloor \leq (I + \sigma_n)(I + \sigma_m) \lfloor A \rfloor. \quad (21)$$

$$\frac{\lfloor {}_m^n A \rfloor}{(I + \sigma_n)(I + \sigma_m)} \leq \lfloor A \rfloor \leq \frac{\lfloor {}_m^n A \rfloor}{(I - \sigma_n)(I - \sigma_m)}. \quad (22)$$

Полученные оценки граней линейного банахова оператора A в полных метрических подпространствах могут отличаться от оценок граней оператора на всем банаховом пространстве. Это обстоятельство, прежде всего, надо учитывать при решении нелинейных функциональных уравнений. Для решения входящего в метод Ньютона линеаризованного уравнения (15), корень которого ищется в окрестности 0 пространства U , большое значение имеет также выполнение условий теоремы 9.

Заключение

Оценки граней линейных и билинейных операторов банаховых пространств необходимы, прежде всего, для локализации методами полиномиального анализа изолированных корней функционального уравнения (1) в определенной окрестности $Q_r = \|u - u_0\| \leq r$ приближения из всюду плотного множества пространства решений. При достаточно малом r , это позволяет исследователям использовать данное приближение в качестве искомого корня, не нарушая методологию функционального анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.
2. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.
3. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнко, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
4. Антоневиц, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневиц, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.
5. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.
6. Крылов, В. И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Наука и техника, 1983. – 288 с.

REFERENCES

1. Kolmogorov, A. N. Elementy teorii funkciy i funkcional'nogo analiza / A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin. – M. : Nauka, 1989 – 624 s.
2. Kantorovich, L. V. Funkcional'nyj analiz / L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. – M. : Nauka, 1977 – 742 s.
3. Krasnosiel'skij, M. A. Priblizhennoje sostojanije opieratornykh uravnienij / M. A. Krasnosiel'skij, G. M. Vajniko, P. P. Zabriejko. – M. : Nauka, 1969. – 456 s.
4. Antonievich, A. B. Funkcional'nyj analiz i integral'nyje uravnienija / A. B. Antonievich, Ya. V. Radyno. – Minsk : BSU, 2006. – 430 s.

5. Morozov, V. V. Prikladnoj analiz i programmirovaniye : posobiye / V. V. Morozov. – Brest : BrGU, 2012. – 246 s.

6. Krylov, V. I. Nachala teorii vychislitel'nykh mietodov. Interpolirovaniye i integrirovaniye / V. I. Krylov, V. V. Bobkov, P. I. Monastyrnyj. – Minsk : Nauka i tiekhnika, 1983. – 288 s.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 14.10.2021

УДК 513.82

*Александр Андреевич Юдов¹, Елена Вячеславовна Кисилюк²*¹*канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина*²*преподаватель каф. прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Aleksandr Yudov¹, Elena Kisilyuk²*¹*Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling
at the Brest State A. S. Pushkin University*²*Lecturer at the Department of Applied Mathematics and Informatics
at the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: modelmath@brsu.brest.by***ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ
СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА 1R_6**

В ходе исследования классифицированы однородные редуктивные пространства с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства 1R_6 и все их редуктивные дополнения.

Ключевые слова: *группа, подгруппа, однородное пространство, группа Ли, алгебра Ли, коммутатор, редуктивное однородное пространство, редуктивное дополнение.*

***Differential Geometry of Homogeneous Spaces with a Structure Group –
the Lie Group of Motions of the Space 1R_6***

The study classified homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the space 1R_6 and all their reductive complements.

Key words: *group, subgroup, homogeneous space, Lie group, Lie algebra, commutator, reductive homogeneous space, reductive complement.*

Введение

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности, с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства 1R_6 .

Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства 1R_6 .

Определение 1. Однородное пространство H / G_i называется редуктивным, если алгебра Ли \overline{H} группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G}_i$, где $ad\overline{G}_i$ – присоединенное представление алгебры Ли \overline{G}_i .

Рассмотрим однородное пространство H/G_2 , где G_2 – подгруппа Ли группы Ли H вращений шестимерного Лоренцового пространства, имеющая алгебру Ли $\overline{G}_2 = \{i_7\}$, где

$$i_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению пятнадцати случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \psi \end{pmatrix}.$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов $X_1 \dots X_{14}$, определяющих инвариантные подпространства m , причем базис в алгебре \overline{H} выберем следующим образом: $i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}$. Таким образом, инвариантные подпространства $m = \{X_1, \dots, X_{14}\}$ задаются векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_8 + \lambda i_{21}, X_2 = i_9 + \mu i_{21}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{21}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{21}, X_5 = i_{12} + s i_{21}, \\ X_6 &= i_{13} + t i_{21}, X_7 = i_{14} + p i_{21}, X_8 = i_{15} + q i_{21}, X_9 = i_7 + r i_{21}, X_{10} = i_{16} + \\ &+ \varepsilon i_{21}, X_{11} = i_{17} + \omega i_{21}, X_{12} = i_{18} + \rho i_{21}, X_{13} = i_{19} + \varphi i_{21}, X_{14} = i_{20} + \psi i_{21}. \end{aligned} \quad (2)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda [a, i_{21}] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_{21}] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \vartheta [a, i_{21}] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma [a, i_{21}] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s [a, i_{21}] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t [a, i_{21}] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p [a, i_{21}] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q [a, i_{21}] = i_{11} \\ [a, X_9] &= [a, i_7] + r [a, i_{21}] = 0 \\ [a, X_{10}] &= [a, i_{16}] + \varepsilon [a, i_{21}] = 0 \\ [a, X_{11}] &= [a, i_{17}] + \omega [a, i_{21}] = 0 \\ [a, X_{12}] &= [a, i_{18}] + \rho [a, i_{21}] = 0 \\ [a, X_{13}] &= [a, i_{19}] + \varphi [a, i_{21}] = 0 \\ [a, X_{14}] &= [a, i_{20}] + \psi [a, i_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(i_8 + \lambda i_{21}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{21}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{21}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{21}) + \omega_1(i_{12} + \\ & + s i_{21}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{21}) + \theta_1(i_{14} + p i_{21}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{21}) + \psi_1(i_7 + \\ & + r i_{21}) + \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{21}) + p_1(i_{17} + \omega i_{21}) + q_1(i_{18} + \rho i_{21}) + r_1(i_{19} + \varphi i_{21}) + \\ & + f_1(i_{20} + \psi i_{21}) = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \\ & + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + p_1 i_{17} + q_1 i_{18} + r_1 i_{19} + f_1 i_{20} + i_{21}(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + \\ & + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \omega p_1 + \rho q_1 + \varphi r_1 + \psi f_1). \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \\ + \omega p_1 + \rho q_1 + \varphi r_1 + \psi f_1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0, \\ q_2 = 0, r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2 + \sigma \delta_2 + s \omega_2 + t \varepsilon_2 + p \theta_2 + q \varphi_2 + r \psi_2 + \varepsilon \rho_2 + \\ + \omega p_2 + \rho q_2 + \varphi r_2 + \psi f_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично, сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с четвертой формулой (3), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с пятой формулой (3), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с шестой формулой (3), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с седьмой формулой (3), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с восьмой формулой (3), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 1^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{21}, i_{16} + \varepsilon i_{21}, i_{17} + \omega i_{21}, i_{18} + \rho i_{21}, i_{19} + \varphi i_{21}, i_{20} + \\ + \psi i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуцированное дополнение в виде:

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{21}, i_{16} + \varepsilon i_{21}, i_{17} + \omega i_{21}, i_{18} + \rho i_{21}, i_{19} + \varphi i_{21}, i_{20} + \\ + \psi i_{21}\}.$$

Аналогічна рассматриваются случаи $2^0 - 15^0$.

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 2^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_8 + \lambda i_{20}, X_2 = i_9 + \mu i_{20}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{20}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{20}, X_5 = i_{12} + \\ &+ s i_{20}, X_6 = i_{13} + t i_{20}, X_7 = i_{14} + p i_{20}, X_8 = i_{15} + q i_{20}, X_9 = i_7 + i_{20}, X_{10} = \\ &= i_{16} + \varepsilon i_{20}, X_{11} = i_{17} + \omega i_{20}, X_{12} = i_{18} + \rho i_{20}, X_{13} = i_{19} + \varphi i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda [a, i_{20}] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_{20}] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \vartheta [a, i_{20}] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma [a, i_{20}] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s [a, i_{20}] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t [a, i_{20}] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p [a, i_{20}] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q [a, i_{20}] = i_{11} \\ [a, X_9] &= [a, i_7] + r [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{10}] &= [a, i_{16}] + \varepsilon [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{11}] &= [a, i_{17}] + \omega [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{12}] &= [a, i_{18}] + \rho [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{13}] &= [a, i_{19}] + \varphi [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{14}] &= [a, i_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_8 + \lambda i_{20}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{20}) + \gamma_1(i_{10} + \vartheta i_{20}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{20}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{20}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{20}) + \theta_1(i_{14} + p i_{20}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{20}) + \psi_1(i_7 + r i_{20}) + \\ + \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{20}) + p_1(i_{17} + \omega i_{20}) + q_1(i_{18} + \rho i_{20}) + r_1(i_{19} + \varphi i_{20}) + f_1 i_{21} = \\ = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + \\ + p_1 i_{17} + q_1 i_{18} + r_1 i_{19} + f_1 i_{21} + i_{20}(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + \\ + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \omega p_1 + \rho q_1 + \varphi r_1). \end{aligned} \quad (7)$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \\ + \omega p_1 + \rho q_1 + \varphi r_1) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай 3^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_8 + \lambda i_{19}, X_2 = i_9 + \mu i_{19}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{19}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{19}, X_5 = i_{12} + s i_{19}, \\ X_6 &= i_{13} + t i_{19}, X_7 = i_{14} + p i_{19}, X_8 = i_{15} + q i_{19}, X_9 = i_7 + r i_{19}, X_{10} = i_{16} + \varepsilon i_{19}, \\ X_{11} &= i_{17} + \omega i_{19}, X_{12} = i_{18} + \rho i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda[a, i_{19}] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu[a, i_{19}] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \nu[a, i_{19}] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{19}] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s[a, i_{19}] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t[a, i_{19}] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p[a, i_{19}] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q[a, i_{19}] = i_{11} \\ [a, X_9] &= [a, i_7] + r[a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{10}] &= [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{11}] &= [a, i_{17}] + \omega[a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{12}] &= [a, i_{18}] + \rho[a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{13}] &= [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{14}] &= [a, i_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_8 + \lambda i_{19}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{19}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{19}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{19}) + \omega_1(i_{12} + s i_{19}) + \\ \varepsilon_1(i_{13} + t i_{19}) + \theta_1(i_{14} + p i_{19}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{19}) + \psi_1(i_7 + r i_{19}) + \\ + \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{19}) + p_1(i_{17} + \omega i_{19}) + q_1(i_{18} + \rho i_{19}) + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \\ + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + p_1 i_{17} + \\ + q_1 i_{18} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + i_{19}(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + \\ + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \omega p_1 + \rho q_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9), получим:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \\ + \omega p_1 + \rho q_1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (10) со второй формулой (9), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0, \\ q_2 = 0, r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2 + \sigma \delta_2 + s \omega_2 + t \varepsilon_2 + p \theta_2 + q \varphi_2 + r \psi_2 + \\ + \varepsilon \rho_2 + \omega p_2 + \rho q_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (10) с третьей формулой (9), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с четвертой формулой (9), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с пятой формулой (9), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с шестой формулой (9), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с седьмой формулой (9), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с восьмой формулой (9), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям. Таким образом, в случае 3^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{19}, i_{16} + \varepsilon i_{19}, i_{17} + \omega i_{19}, i_{18} + \rho i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуцированное дополнение в виде

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{19}, i_{16} + \varepsilon i_{19}, i_{17} + \omega i_{19}, i_{18} + \rho i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$4^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 4^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_8 + \lambda i_{18}, X_2 = i_9 + \mu i_{18}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{18}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{18}, X_5 = i_{12} + s i_{18}, \\ X_6 &= i_{13} + t i_{18}, X_7 = i_{14} + p i_{18}, X_8 = i_{15} + q i_{18}, X_9 = i_7 + r i_{18}, X_{10} = i_{16} + \\ &+ \varepsilon i_{18}, X_{11} = i_{17} + \omega i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{aligned} \quad (11)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda[a, i_{18}] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu[a, i_{18}] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \nu[a, i_{18}] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{18}] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s[a, i_{18}] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t[a, i_{18}] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p[a, i_{18}] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q[a, i_{18}] = i_{11} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
[a, X_9] &= [a, i_7] + r[a, i_{18}] = 0 \\
[a, X_{10}] &= [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{18}] = 0 \\
[a, X_{11}] &= [a, i_{17}] + \omega[a, i_{18}] = 0 \\
[a, X_{12}] &= [a, i_{19}] = 0 \\
[a, X_{13}] &= [a, i_{20}] = 0 \\
[a, X_{14}] &= [a, i_{21}] = 0 .
\end{aligned}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(i_8 + \lambda i_{18}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{18}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{18}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{18}) + \omega_1(i_{12} + \\
&+ s i_{18}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{18}) + \theta_1(i_{14} + p i_{18}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{18}) + \psi_1(i_7 + r i_{18}) + \\
&+ \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{18}) + p_1(i_{17} + \omega i_{18}) + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \\
&+ \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + p_1 i_{17} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + \\
&+ f_1 i_{21} + i_{18}(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \\
&+ \omega p_1).
\end{aligned} \tag{13}$$

Сравнивая формулу (13) с первой формулой (12), получим:

$$\begin{aligned}
\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = \\
= 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1 + \\
+ \omega p_1) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (13) со второй формулой (12), получим:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, \\
p_2 = 0, q_2 = 0, r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2 + \sigma \delta_2 + s \omega_2 + t \varepsilon_2 + p \theta_2 + \\
+ q \varphi_2 + r \psi_2 + \varepsilon \rho_2 + \omega p_2) = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (13) с третьей формулой (12), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с четвертой формулой (12), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с пятой формулой (12), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с шестой формулой (12), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с седьмой формулой (12), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (13) с восьмой формулой (12), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 4^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{18}, i_{16} + \varepsilon i_{18}, i_{17} + \omega i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде:

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{18}, i_{16} + \varepsilon i_{18}, i_{17} + \omega i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$5^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 5^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_8 + \lambda i_{17}, X_2 = i_9 + \mu i_{17}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{17}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{17}, X_5 = i_{12} + \\ &+ s i_{17}, X_6 = i_{13} + t i_{17}, X_7 = i_{14} + p i_{17}, X_8 = i_{15} + q i_{17}, X_9 = i_7 + r i_{17}, X_{10} = \\ &= i_{16} + \varepsilon i_{17}, X_{11} = i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda[a, i_{17}] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu[a, i_{17}] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \nu[a, i_{17}] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma[a, i_{17}] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s[a, i_{17}] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t[a, i_{17}] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p[a, i_{17}] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q[a, i_{17}] = i_{11} \\ [a, X_9] &= [a, i_7] + r[a, i_{17}] = 0 \\ [a, X_{10}] &= [a, i_{16}] + \varepsilon[a, i_{17}] = 0 \\ [a, X_{11}] &= [a, i_{18}] = 0 \\ [a, X_{12}] &= [a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{13}] &= [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{14}] &= [a, i_{21}] = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_8 + \lambda i_{17}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{17}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{17}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{17}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{17}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{17}) + \theta_1(i_{14} + p i_{17}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{17}) + \psi_1(i_7 + r i_{17}) + \\ + \rho_1(i_{16} + \varepsilon i_{17}) + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \\ + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{16} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + \\ + i_{17}(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1 + \varepsilon \rho_1). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим случай 6^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 = i_8 + \lambda i_{16}, X_2 = i_9 + \mu i_{16}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{16}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{16}, X_5 = i_{12} + \\ + s i_{16}, X_6 = i_{13} + t i_{16}, X_7 = i_{14} + p i_{16}, X_8 = i_{15} + q i_{16}, X_9 = i_7 + r i_{16}, X_{10} = \\ = i_{17}, X_{11} = i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda [a, i_{16}] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_{16}] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \nu [a, i_{16}] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma [a, i_{16}] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s [a, i_{16}] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t [a, i_{16}] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p [a, i_{16}] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q [a, i_{16}] = i_{11} \\ [a, X_9] &= [a, i_7] + r [a, i_{16}] = 0 \\ [a, X_{10}] &= [a, i_{17}] = 0 \\ [a, X_{11}] &= [a, i_{18}] = 0 \\ [a, X_{12}] &= [a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{13}] &= [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{14}] &= [a, i_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_8 + \lambda i_{16}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{16}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{16}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{16}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{16}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{16}) + \theta_1(i_{14} + p i_{16}) + \varphi_1(i_{15} + q i_{16}) + \psi_1(i_7 + r i_{16}) + \\ + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \\ + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \psi_1 i_7 + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + \\ + i_{16}(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1). \end{aligned} \quad (19)$$

Сравнивая формулу (19) с первой формулой (18), получим:

$$\omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1 + r \psi_1) = 0.$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (19) со второй формулой (18), получим:

$$\varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0, q_2 = 0, r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2 + \sigma \delta_2 + s \omega_2 + t \varepsilon_2 + p \theta_2 + q \varphi_2 + r \psi_2) = 0.$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (19) с третьей формулой (18), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с четвертой формулой (18), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с пятой формулой (18), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с шестой формулой (18), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с седьмой формулой (18), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (19) с восьмой формулой (18), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям. Таким образом, в случае 6^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Из условия прямой суммы следует, что $r \neq 0$. Таким образом, получаем редуцированное дополнение в виде

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + ri_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$7^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 7^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_8 + \lambda i_7, X_2 = i_9 + \mu i_7, X_3 = i_{10} + \vartheta i_7, X_4 = i_{11} + \sigma i_7, X_5 = i_{12} + s i_7, \\ X_6 &= i_{13} + t i_7, X_7 = i_{14} + p i_7, X_8 = i_{15} + q i_7, X_9 = i_{16}, X_{10} = i_{17}, X_{11} = i_{18}, \\ X_{12} &= i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{aligned} \quad (20)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda [a, i_7] = i_{12} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_7] = i_{13} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \nu [a, i_7] = i_{14} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma [a, i_7] = i_{15} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s [a, i_7] = i_8 \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t [a, i_7] = i_9 \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p [a, i_7] = i_{10} \\ [a, X_8] &= [a, i_{15}] + q [a, i_7] = i_{11} \\ [a, X_9] &= [a, i_{16}] = 0 \\ [a, X_{10}] &= [a, i_{17}] = 0 \\ [a, X_{11}] &= [a, i_{18}] = 0 \\ [a, X_{12}] &= [a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{13}] &= [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{14}] &= [a, i_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(i_8 + \lambda i_7) + \beta_1(i_9 + \mu i_7) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_7) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_7) + \omega_1(i_{12} + s i_7) + \\ & + \varepsilon_1(i_{13} + t i_7) + \theta_1(i_{14} + p i_7) + \varphi_1(i_{15} + q i_7) + \psi_1 i_{16} + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + \\ & + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \varphi_1 i_{15} + \\ & + \psi_1 i_{16} + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + i_7(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + \\ & + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая формулу (22) с первой формулой (21), получим:

$$\begin{aligned} \omega_1 = 1, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = \\ = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1 + q \varphi_1) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует: $s = 0$.

Сравнивая формулу (22) со второй формулой (21), получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = 1, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0, \\ 0, r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2 + \sigma \delta_2 + s \omega_2 + t \varepsilon_2 + p \theta_2 + q \varphi_2) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует: $t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (22) с третьей формулой (21), получим:

$$\theta_3 = 1, p = 0.$$

Сравнивая формулу (22) с четвертой формулой (21), получим:

$$\varphi_4 = 1, q = 0.$$

Сравнивая формулу (22) с пятой формулой (21), получим:

$$\alpha_5 = 1, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (22) с шестой формулой (21), получим:

$$\beta_6 = 1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (22) с седьмой формулой (21), получим:

$$\gamma_7 = 1, \nu = 0.$$

Сравнивая формулу (22) с восьмой формулой (21), получим:

$$\delta_8 = 1, \sigma = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 7^0 система инвариантности имеет вид:

$$s = 0, t = 0, p = 0, q = 0, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы)

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Сумма прямая, поскольку $\Delta = 1$. Таким образом, получаем редуцированное дополнение в виде

$$\{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$8^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 8^0 . В этом случае векторы, задающие инвариантные подпространства, принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_8 + \lambda i_{15}, X_2 = i_9 + \mu i_{15}, X_3 = i_{10} + \vartheta i_{15}, X_4 = i_{11} + \sigma i_{15}, X_5 = i_{12} + s i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + t i_{15}, X_7 = i_{14} + p i_{15}, X_8 = i_7, X_9 = i_{16}, X_{10} = i_{17}, X_{11} = i_{18}, X_{11} = \\ &= i_{18}, X_{12} = i_{19}, X_{13} = i_{20}, X_{14} = i_{21}. \end{aligned} \quad (23)$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_7$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_8] + \lambda [a, i_{15}] = i_{12} + \lambda i_{11} \\ [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_{15}] = i_{13} + \mu i_{11} \\ [a, X_3] &= [a, i_{10}] + \nu [a, i_{15}] = i_{14} + \nu i_{11} \\ [a, X_4] &= [a, i_{11}] + \sigma [a, i_{15}] = i_{15} + \sigma i_{11} \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + s [a, i_{15}] = i_8 + s i_{11} \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + t [a, i_{15}] = i_9 + t i_{11} \\ [a, X_7] &= [a, i_{14}] + p [a, i_{15}] = i_{10} + p i_{11} \\ [a, X_8] &= [a, i_7] = 0 \\ [a, X_9] &= [a, i_{16}] = 0 \\ [a, X_{10}] &= [a, i_{17}] = 0 \\ [a, X_{11}] &= [a, i_{18}] = 0 \\ [a, X_{12}] &= [a, i_{19}] = 0 \\ [a, X_{13}] &= [a, i_{20}] = 0 \\ [a, X_{14}] &= [a, i_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $\{X_1, \dots, X_{14}\}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_8 + \lambda i_{15}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{15}) + \gamma_1(i_{10} + \nu i_{15}) + \delta_1(i_{11} + \sigma i_{15}) + \omega_1(i_{12} + \\ + s i_{15}) + \varepsilon_1(i_{13} + t i_{15}) + \theta_1(i_{14} + p i_{15}) + \varphi_1 i_7 + \psi_1 i_{16} + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + \\ + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} = \alpha_1 i_8 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{10} + \delta_1 i_{11} + \omega_1 i_{12} + \varepsilon_1 i_{13} + \theta_1 i_{14} + \\ + \varphi_1 i_7 + \psi_1 i_{16} + \rho_1 i_{17} + p_1 i_{18} + q_1 i_{19} + r_1 i_{20} + f_1 i_{21} + i_{15}(\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \\ + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1). \end{aligned} \quad (25)$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:

$$\omega_1 = 1, \delta_1 = \lambda, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \theta_1 = 0, \varphi_1 = 0, \psi_1 = 0, \rho_1 = 0, p_1 = 0, q_1 = 0, r_1 = 0, f_1 = 0, (\lambda \alpha_1 + \mu \beta_1 + \nu \gamma_1 + \sigma \delta_1 + s \omega_1 + t \varepsilon_1 + p \theta_1) = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma \lambda + s = 0$.

Сравнивая формулу (25) со второй формулой (24), получим:

$$\varepsilon_2 = 1, \delta_2 = \mu, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \omega_2 = 0, \theta_2 = 0, \varphi_2 = 0, \psi_2 = 0, \rho_2 = 0, p_2 = 0, q_2 = 0, r_2 = 0, f_2 = 0, (\lambda \alpha_2 + \mu \beta_2 + \nu \gamma_2 + \sigma \delta_2 + s \omega_2 + t \varepsilon_2 + p \theta_2) = 0.$$

Отсюда следует: $\sigma\mu + t = 0$.

Аналогично сравнивая формулу (25) с третьей формулой (24), получим:

$$\sigma\vartheta + p = 0.$$

Сравнивая формулу (25) с четвертой формулой (24), получим:

$$\delta_4 = \sigma, \sigma^2 = 1, \sigma = \pm 1.$$

Сравнивая формулу (25) с пятой формулой (24), получим:

$$\lambda + \sigma s = 0.$$

Сравнивая формулу (25) с шестой формулой (24), получим:

$$\mu + \sigma t = 0.$$

Сравнивая формулу (25) с седьмой формулой (24), получим:

$$v + \sigma p = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае 8^0 система инвариантности имеет вид:

$$1) \sigma = 1, s = -\lambda, t = -\mu, p = -v \text{ или } 2) \sigma = -1, s = \lambda, t = \mu, p = v.$$

В итоге получили, что векторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$ имеют вид (базисы):

$$1) \{i_8 + \lambda i_{15}, i_9 + \mu i_{15}, i_{10} + v i_{15}, i_{11} + i_{15}, i_{12} - \lambda i_{15}, i_{13} - \mu i_{15}, i_{14} - v i_{15}, i_7, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}, \text{ или}$$

$$2) \{i_8 + \lambda i_{15}, i_9 + \mu i_{15}, i_{10} + v i_{15}, i_{11} - i_{15}, i_{12} + \lambda i_{15}, i_{13} + \mu i_{15}, i_{14} + v i_{15}, i_7, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

И в первом, и во втором варианте прямой суммы нет, поскольку $\Delta = 0$. Таким образом, полученные дополнения редуцированными не являются.

В случаях $9^0 - 11^0$ аналогично полученные инвариантные подпространства редуцированными дополнениями не являются, поскольку $\Delta = 0$. В случаях $12^0 - 15^0$ системы инвариантности противоречивы.

Теорема 3.3. Однородное пространство H/G_2 редуцитивно. Все редуцитивные дополнения записываются следующим образом:

$$m_1 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{21}, i_{16} + \varepsilon i_{21}, i_{17} + \omega i_{21}, i_{18} + \rho i_{21}, i_{19} + \varphi i_{21}, i_{20} + \psi i_{21}\},$$

$$m_2 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{20}, i_{16} + \varepsilon i_{20}, i_{17} + \omega i_{20}, i_{18} + \rho i_{20}, i_{19} + \varphi i_{20}, i_{21}\}.$$

$$m_3 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{19}, i_{16} + \varepsilon i_{19}, i_{17} + \omega i_{19}, i_{18} + \rho i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$m_4 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{18}, i_{16} + \varepsilon i_{18}, i_{17} + \omega i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$m_5 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{17}, i_{16} + \varepsilon i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$m_6 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_7 + r i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

$$m_7 = \{i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}.$$

Заключение

В работе получены редуцитивные однородные пространства.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Вестн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

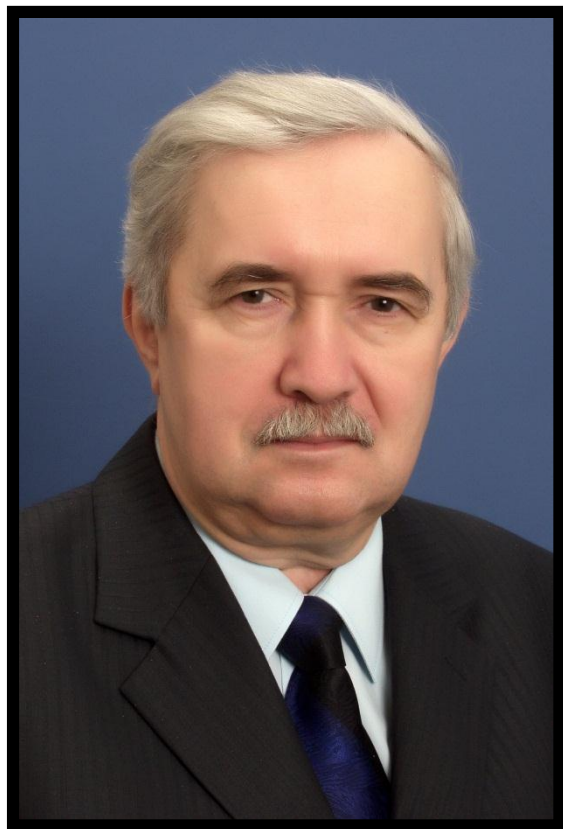
REFERENCES

1. Kobajasi, Sh. Osnovy diffierencial'noj gieometrii : v 2 t. / Sh. Kobajasi, K. Nomidzu. – M. : Nauka, 1981. – T. 2. – 413 s.
2. Kopp, V. G. O podgruppakh vrashchienij piatimiernykh i shestimiernykh jevklidovykh i lorencevykh prostranstv / V. G. Kopp // Uchion. zap. Kazan. un-ta. – 1966. – № 1 (126). – S. 13–22.
3. Rashevskij, P. K. Riemanova gieometrija i tenzornyj analiz / P. K. Rashevskij. – M. : Nauka, 1967. – 664 s.
4. Khelgason, S. Diffierencial'naja gieometrija i simmetrichnyje prostranstva / S. Khelgason. – M. : Mir, 1964. – 538 s.
5. Yudov, A. A. Classifikacija odnomiernykh podmnogoobrazij prostranstva Minkovskogo, imiejushchikh kasatiel'nuju mnimojevklidova i jevklidova tipa / A. A. Yudov, N. S. Kovalik // Viesn. Bresc. un-ta. Sier. 4, Fizika. Matematyka. – 2013. – № 1. – S. 106–115.

Рукапіс наступіў у рэдакцыю 17.10.2021

ПАМ'ЯЦІ ВУЧОНАГА

ВЛАДИМИР СТАНИСЛАВОВИЧ СЕКЕРЖИЦКИЙ (09.09.1951 – 04.12.2021)



4 декабря 2021 г. в возрасте 70 лет ушел из жизни замечательный ученый, преподаватель, руководитель.

Владимир Станиславович Секержицкий родился в г. Жабинка Брестской области. В 1972 г. он окончил Брестский государственный педагогический институт имени А. С. Пушкина по специальности «Физика», а в 1979 г. – аспирантуру Ленинградского государственного педагогического института имени А. И. Герцена по специальности «Теоретическая и математическая физика».

Кандидатскую диссертацию по специальности 01.04.02 («Теоретическая и математическая физика») Владимир Станиславович защитил в Ленинградском государственном университете имени А. А. Жданова в 1981 г. Ученое звание доцента ему было присвоено в 1983 г.

Вся трудовая и научная деятельность Владимира Станиславовича Секержицкого связана с нашим вузом: в Брестском государственном педагогическом институте имени А. С. Пушкина он начинал с ассистента

(1972), затем стал старшим преподавателем и доцентом (1981), работал заместителем декана (1981–1983) и деканом физико-математического факультета (1990–1995). После обретения Брестским государственным педагогическим институтом имени А. С. Пушкина статуса университета В. С. Секержицкий занимал высокие и ответственные должности: был деканом физического факультета (1995–1996), проректором по научной работе (1996–2003), заведовал кафедрами теоретической физики и астрономии (2005–2013), теоретической физики (2013–2016), общей и теоретической физики (2016–2018), а в последние годы (2019–2021) работал доцентом кафедры общей и теоретической физики.

Владимир Станиславович Секержицкий проявил себя в первую очередь как исследователь и руководитель научных исследований. Он принимал участие в выполнении заданий Государственной программы фундаментальных исследований «Физика взаимодействий» (2001–2005, руководитель темы), Государственной программы фундаментальных исследований «Поля и частицы» (2007–2010, исполнитель темы), Государственной программы научных исследований «Конвергенция» (2011–2013, руководитель темы), межвузовской программы фундаментальных исследований «Ядерная оптика» (1998, 1999, руководитель темы; 2000, исполнитель темы), межвузовской программы фундаментальных исследований «Микромир и вещество» (2001–2005, исполнитель и руководитель темы). Кроме того, Владимир Станиславович руководил выполнением шести госбюджетных тем (1997, 1998–1999, 2000, 2000, 2000–2002, 2001), хоздоговорной темы (1983) и инициативной темы (1986–1990); участвовал в выполне-

нии четырех госбюджетных тем (1996, 1996, 1999, 2000), четырех хоздоговорных тем (1979–1980, 1980–1981, 1981–1982, 1986) и инициативной темы (2006–2010). С 2014 г. В. С. Секержицкий участвовал в выполнении задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция».

Владимир Станиславович проявил себя и как успешный и плодотворный ученый: он автор и соавтор около 400 научных и научно-методических работ, в т. ч. двух научных монографий, более 150 публикаций – в соавторстве со студентами.

Как педагог В. С. Секержицкий руководил подготовкой около 200 самостоятельных студенческих публикаций; из 48 студенческих научных работ, принимавших участие в республиканских конкурсах, 28 отнесены к I категории. На его счету также руководство написанием и защитой 97 дипломных работ.

Научно-педагогические заслуги Владимира Станиславовича, его значительный вклад в развитие образования, внедрение передового педагогического опыта, образцовое выполнение трудовых обязанностей были отмечены государством: он награжден нагрудным знаком Министерства образования Республики Беларусь «Выдатнік адукацыі» (1995), почетными грамотами Министерства образования Республики Беларусь (2001, 2003, 2011), Грамотой Министерства образования Республики Беларусь (2005).

Владимир Станиславович отличался добротой, доброжелательным отношением к студентам и коллегам, отзывчивостью, скромностью, добросовестным отношением к работе. Он пользовался заслуженным уважением студентов, преподавателей и сотрудников университета.

Светлая память о Владимире Станиславовиче Секержицком останется в сердцах друзей, коллег, учеников.

Ректорат, физико-математический факультет

Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў адным экзэмпляры аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша (не меней за 14 000 знакаў), у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (*.doc, *.docx ці *.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармату А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадковы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Усе малюнкi і фотаздымкі павінны быць толькі ў чорна-белым выкананні. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 (у рэдакцыі загада ад 08.09.2016 № 206). Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. боб.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносак.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў (аўтараў не больш, чым 5) на мове артыкула;
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада, месца працы/вучобы) на мове артыкула;
- імя, імя па бацьку, прозвішча аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- звесткі пра аўтара/аўтараў на англійскай мове;
- e-mail аўтара/аўтараў;
- назва артыкула на мове артыкула;
- анатацыя ў аб'ёме 100–150 слоў і ключавыя словы на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- назва артыкула на англійскай мове;
- анатацыя і ключавыя словы на англійскай мове.

Звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы ўнізе.

Асноўны тэкст структуравецца ў адпаведнасці з патрабаваннямі Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў:

- Уводзіны (пастаноўка мэты і задач даследавання).
- Асноўная частка (матэрыялы і метады даследавання; вынікі і іх абмеркаванне).
- Заклучэнне (фармулююцца асноўныя вынікі даследавання, указваецца іх навізна, магчымасці выкарыстання).
- Спіс выкарыстанай літаратуры; спіс літаратуры павінен уключаць не больш за 20–22 крыніцы і абавязкова ўтрымліваць публікацыі, у тым ліку замежныя, па тэме даследавання за апошнія 10 гадоў.
- References – спіс выкарыстанай літаратуры, які прадубліраваны лацінскім алфавітам (колькасць крыніц, прыведзеных у спісе і ў References, павінна супадаць).

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- выліска з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе (вучыцца) аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацый артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Усе артыкулы абавязкова праходзяць «сляпое» рэцэнзаванне. Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегія не разглядае і не вяртае. Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Рукапіс артыкула і дакументы дасылаць на адрас: 224016, г. Брэст, бульвар Касманаўтаў, 21, рэдакцыя часопіса «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта», электронны варыянт артыкула накіроўваць на e-mail: highmath@brsu.brest.by.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друку 06.12.2021. Фармат 60×84/8. Папера афсетная. Гарнітура Таймс. Рызаграфія.

Ум. друк. арк. 13,95. Ул.-выд. арк. 8,44. Тыраж 100 экз. Заказ № 349.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.