

# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Рэдакцыйная калегія*

*галоўны рэдактар*  
А. М. Сендзер

*намеснік галоўнага рэдактара*  
А. Я. Будзько

*адказны рэдактар*  
М. М. Сендзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)  
А. І. Басік (Беларусь)  
В. М. Волкаў (Беларусь)  
М. А. Громаў (Расія)  
А. У. Дзямідчык (Беларусь)  
М. І. Ляўчук (Беларусь)  
І. П. Маргынаў (Беларусь)  
А. І. Мелькер (Расія)  
В. С. Манахаў (Беларусь)  
У. А. Плецюхоў (Беларусь)  
В. М. Радзькоў (Беларусь)  
В. Р. Самойленка (Украіна)  
А. А. Трафімук (Беларусь)  
Уба Люба (Польшча)

Пасведчанне аб рэгістрацыі  
ў Міністэрстве інфармацыі  
Рэспублікі Беларусь  
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:  
224016, г. Брэст,  
бульвар Касманаўтаў, 21  
тэл.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага  
ўніверсітэта» выдаецца  
са снежня 1997 года

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

**Выходзіць два разы ў год**

**Заснавальнік – Установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»**

**№ 1 / 2021**

У адпаведнасці з Дадаткам да загада  
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь  
ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай  
камісіі Рэспублікі Беларусь ад 16.02.2021 № 36  
(са змяненнямі, унесенымі загадам ВАК ад 16.03.2021 № 65,  
09.04.2021 № 105, 28.04.2021 № 121)  
часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта.  
Серыя 4. Фізіка. Матэматыка» ўключаны  
ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў  
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

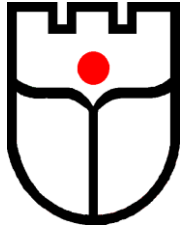
# ЗМЕСТ

## ФІЗИКА

<b>Лионо В. А., Лявшук И. А., Секержицкий С. С., Сабуть А. В.</b> Плотнейшая двухслойная шаровая упаковка – модель ГПУ .....	5
<b>Охрименко И. П., Кольчевский Н. Н., Петров П. В.</b> Имитационное моделирование детектора гравитационных волн LIGO .....	14
<b>Плетюхов В. А.</b> Тензорная масса в релятивистской динамике .....	28
<b>Римский Г. С., Янушкевич К. И.</b> Влияние катионного замещения на кристаллическую структуру и магнитные характеристики твердых растворов $MnNi_{1-x}V_xSb$ .....	34
<b>Черкас С. Л., Калашников В. Л.</b> Уравнение состояния вакуума и образование структур материи во Вселенной .....	41

## МАТЭМАТЫКА

<b>Грицук Д. В., Курилюк С. В., Трофимук А. А.</b> О корадикале конечной группы, факторизуемой взаимно перестановочными подгруппами .....	59
<b>Зубей Е. В., Кулеш А. Ю., Трофимук А. А.</b> Признаки расширенной сверхразрешимости конечной группы, факторизуемой взаимно перестановочными подгруппами .....	65
<b>Марзан С. А.</b> Приближенное решение задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с производными Капуто .....	71
<b>Матысик О. В.</b> Метод итераций приближенного решения линейных уравнений с неограниченным оператором в гильбертовом пространстве .....	81
<b>А. А. Юдов, Е. В. Арабчик, Д. С. Арабчик, Е. В. Кисилук</b> Дифференциальная геометрия однородных пространств со структурной группой – группой Ли движений пространства $L_5$ .....	87



# *Vesnik*

*of Brest University*

*Editorial Board*

*editor-in-chief*  
A. M. Sender

*deputy editor-in-chief*  
A. Ya. Budzko

*managing editor*  
M. M. Sender

A. B. Antanievich (Belarus)  
A. I. Basik (Belarus)  
V. M. Volkau (Belarus)  
M. A. Gromau (Russia)  
A. U. Dziamidchyk (Belarus)  
M. I. Liauchuk (Belarus)  
I. P. Martynau (Belarus)  
A. I. Melkier (Russia)  
V. S. Manakhau (Belarus)  
U. A. Plietsiukhou (Belarus)  
V. M. Razkou (Belarus)  
V. R. Samoilenka (Ukraine)  
A. A. Trafimuk (Belarus)  
Uba Liuba (Poland)

## Series 4

PHYSICS

MATHEMATICS

**SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL**

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment  
«Brest State A. S. Pushkin University»

*№ 1 / 2021*

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:  
224016, Brest,  
21, Kosmonavtov Boulevard  
tel.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 nr 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from February 16, 2021 nr 36 (with the amendments made by the orders of Supreme Certification Commission from March 16, 2021 nr 65, April 09, 2021 nr 105, April 28, 2021 nr 121) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» has been included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

# CONTENTS

## PHYSICS

<b>Valery Liopo, Irena Laushuk, Stanislav Sekerzhitsky, Andrej Sabut</b> Dense Two-Layer Ball Packaging – <i>HDP</i> Model.....	5
<b>Ivan Ohrymenko, Nikolai Kolchevsky, Pavel Petrov</b> Simulation Modelling of the Gravitational Wave Detector Ligo.....	14
<b>Vladimir Pletyukhov</b> Tensor Mass in the Relativistic Dynamics .....	28
<b>Grigoriy Rimsky, Kazimir Yanushkevich</b> Effect of Cationic Substitution on the Crystal Structure and Magnetic Properties of Solid Solutions $MnNi_{1-x}V_xSb$ .....	34
<b>Sergei Cherkas, Vladimir Kalashnikov</b> The Equation of Vacuum State and the Structure Formation in the Universe .....	41

## MATHEMATICS

<b>Dmitriy Gritsuk, Stepan Kurilyuk, Aleksandr Trofimuk</b> On the Residual of Finite Group That Is Factorized by Mutually Permutable Subgroups.....	59
<b>Yekaterina Zubei, Anna Kulesh, Aleksandr Trofimuk</b> Sufficient Conditions of Widely Supersolubility of Finite Group That Is Factorized by Mutually Permutable Subgroups .....	65
<b>Sergei Marzan</b> An Approximate Solution to the Cauchy Problem for a System Nonlinear Differential Equations With Derivatives Kaputo .....	71
<b>Oleg Matysik</b> Iteration Method for Approximate Solution of Linear Equations With Unbounded Operator in the Hilbert Space .....	81
<b>Aleksandr Yudov, Yelena Arabchik, Dmitriy Arabchik, Yelena Kisilyuk</b> Differential Geometry of Homogeneous Spaces With Structure Group – the Lie Group of Motions of the Space $L_5$ .....	87

УДК 538.9

**Валерий Александрович Лиопо<sup>1</sup>, Ирена Александровна Лявишук<sup>2</sup>,  
Станислав Станиславович Секержицкий<sup>3</sup>, Андрей Вацлович Сабуть<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф.

<sup>2</sup>магистр природовед. наук, ст. преподаватель каф. информационных систем и технологий  
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц.

<sup>4</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. теоретической физики и теплотехники  
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

**Valery Liopo<sup>1</sup>, Irena Laushuk<sup>2</sup>, Stanislav Sekerzhitsky<sup>3</sup>, Andrej Sabut<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

<sup>2</sup>Master of Science in Natural Sciences,

Senior Lecturer of the Department of Information Systems and Technologies

Yanka Kupala State University of Grodno

<sup>3</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor

<sup>4</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,

Assistant Professor of the Department of Information Systems and Technologies

Yanka Kupala State University of Grodno

e-mail: [sekerzhitsky@rambler.ru](mailto:sekerzhitsky@rambler.ru)

## ПЛОТНЕЙШАЯ ДВУХСЛОЙНАЯ ШАРОВАЯ УПАКОВКА – МОДЕЛЬ ГПУ

Проведен анализ структуры гексагональной плотнейшей упаковки, который показал, что она не соответствует требованиям симметрии гексагональных решеток. Исследована двухслойная плотнейшая шаровая упаковка как модель ГПУ. При этом построено матричное представление групп  $\bar{6}$  и  $\bar{6}$  в кристаллографическом базисе. Установлено, что в двухслойной плотнейшей шаровой упаковке (ДПШУ) нет осей  $\bar{6}$  и  $\bar{6}$ . Показано, что ячейка (ДПШУ) не соответствует ни одному из типов ячеек Браве. Выявлено, что в (ДПШУ) нельзя построить ячейку  $P$ -типа. Обосновано утверждение, что (ДПШУ) не является решетчатой структурой и должна рассматриваться как самостоятельный тип атомно-молекулярных систем.

### Dense Two-Layer Ball Packaging – HDP Model

The analysis of the structure of the hexagonal closest packing has been carried out, which has shown that it does not meet the requirements of the symmetry of hexagonal lattices. A two-layer densest spherical packing is investigated as an HCP model. At the same time, a matrix representation of groups  $\bar{6}$  and  $\bar{6}$  in the crystallographic basis was constructed. It was found that there are no axes  $\bar{6}$  and  $\bar{6}$  in a two-layer densest ball packing (TLDBP). It is shown that the cell (TLDBP) does not correspond to any of the types of Bravais cells. It was revealed that in (TLDBP) it is impossible to build a  $P$ -type cell. The statement is substantiated that (TLDBP) is not a lattice structure and should be considered as an independent type of atomic-molecular systems.

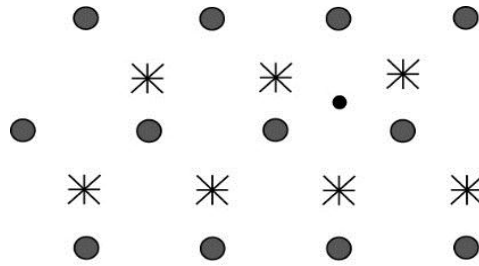
### Введение

Атомы в кристаллах с изодесмической связью моделируются шарами. Межатомные расстояния равны сумме их радиусов, которые, наряду с атомными, имеют свои значения в зависимости от типа связей (атомные, ионные, металлические и т. п.).

Если кристалл состоит только из атомов одного типа, то его структура зачастую подчиняется принципу плотнейшей упаковки [1]. Плотнейшая упаковка построена по принципу, приведенному на рисунке 1.

Атомы первого слоя –  $A$  – формируют плоскую плотнейшую упаковку. Атомы второго слоя –  $B$  – также формируют плотнейшую плоскую упаковку, но эти атомы размещаются в центре лунок (пустот) в атомной  $A$ -сетке. Слой атомов, расположенных

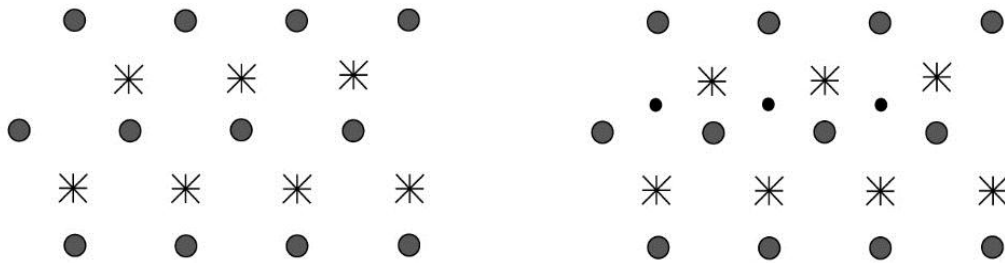
над слоем  $B$ , размещается в лунках этого слоя, но размещение этого слоя возможно двумя способами. Первый способ – атом размещается над атомами слоя  $A$  в лунках слоя  $B$ . Чередование слоев при такой упаковке следующее:  $\dots ABABABAB \dots$ , поэтому упаковка такого типа называется двухслойной. Если атомы слоя размещаются над пустотами как слоя  $B$ , так и слоя  $A$  (на рисунке 1 атом такого слоя обозначен  $C - (\bullet)$ ), то последовательность слоев имеет вид:  $\dots ABCABCABC \dots$ . Такая плотнейшая упаковка называется трехслойной, и ячейка такой структуры – гранецентрированная кубическая. Пример этих упаковок приведен на рисунке 2.



$A - \bullet, B - *, C - \bullet$ .

$A$  – центры плоской шаровой упаковки,  
 $B$  – центры атомов второго слоя  
 над пустотами между атомами слоя  $A$ ,  
 $C$  – центр атома третьего слоя  
 над пустотами в слое  $A$  и  $B$ .

Рисунок 1. – Схема плотнейшей шаровой упаковки



$A - \bullet, B - *$ .

а)

$A - \bullet, B - *, C - \bullet$ .

б)

Рисунок 2. – Плотнейшие шаровые упаковки:

а) – двухслойная, б) – трехслойная

Для обеих упаковок коэффициент компактности равен  $\kappa = 74\%$ . В обеих плотнейших упаковках координационное число атомов равно 12. Наименьшим структурным полиэдром является тетраэдр с ребрами, равными  $2r$ , но на такой ячейке построить трехмерную решетку невозможно, т. к. вдоль оси, не совпадающей с атомными слоями, трансляция отсутствует. Поэтому выбирается ячейка с параметрами  $a = b = 2r$ , которые лежат в атомной плоскости, параметр  $c$  нормален этой плоскости и равен

$\frac{2\sqrt{6}}{3}a$ . Каждый атомный слой формирует плоскую сетку с осью  $b$ . Именно поэтому двухслойную плотнейшую шаровую упаковку называют гексагональной плотнейшей упаковкой (ГПУ). Коэффициенты компактности двух- и трехслойной упаковок одинаковые и равны 0,74.

Параметры ячейки гексагональной решетки:  $a = b \neq c$ ;  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ . Нижнее основание ячейки находится в слое  $A$ .

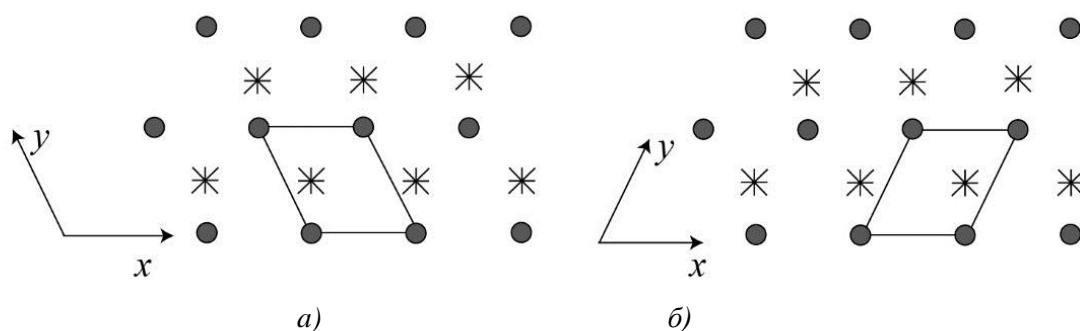


Рисунок 3. – Ячейки с углами а)  $\gamma = 120^\circ$ , б)  $\gamma = 60^\circ$

На рисунке 3 приведена проекция двухслойной плотнейшей упаковки на координатную плоскость  $XY$ . Видно, что основание – это параллелограмм с углами  $\gamma = 120^\circ$  и  $\gamma = 60^\circ$ . Обе эти ячейки имеют тождественную структуру, т. к. они определяют только выбор начала координат и направление координатных осей. Ячейка двухслойной плотнейшей упаковки (ДПУ) представляет собой параллелепипед с основанием  $a = b$ ,  $\gamma = 120^\circ$  или  $a = b$ ,  $\gamma = 60^\circ$ . Верхнее основание – трансляционно-тождественный параллелепипед, высота которого равна  $c = \frac{2\sqrt{6}}{3}a = 1,633a$ . Какая бы ячейка ни выбиралась,  $\gamma = 60^\circ$  или  $\gamma = 120^\circ$ , в обеих внутри имеются атомы, структурно абсолютно тождественные атомам в вершинах ячейки (рисунок 4).

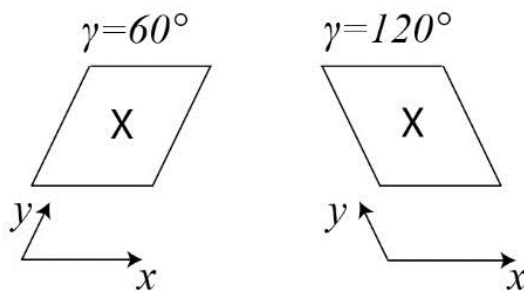


Рисунок 4. – Проекция ячеек на плоскость  $xy$  для  $\gamma = 60^\circ$  и  $\gamma = 120^\circ$

Координаты атома внутри ячейки для  $\gamma = 60^\circ$  –  $(0,0,0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ , для  $\gamma = 120^\circ$  –  $(0,0,0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ . Данные координаты – кристаллографические. В атомном слое  $B$  именно через эти точки проходит ось  $b$ , определяющая симметрию

сетки атомов  $B$ , но только в пределах этого слоя. Поэтому в атомных сетках оси  $b$  имеются, но для кристалла как объемной структуры ось  $b$  отсутствует.

### Матричное представление групп $\bar{6}$ и $\bar{6}$ в кристаллографическом базисе

В гексагональных кристаллах есть группа  $\bar{6}$ , матрица-генератор которой имеет вид:

$$|\bar{6}|_{K\Phi} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

В кристаллографическом базисе матрица-генератор точечной группы определяется по формуле:

$$|\bar{6}|_{KT} = |M|^{-1} |\bar{6}|_{K\Phi} |M|, \quad (1)$$

где  $|M|$  и  $|M|^{-1}$  – метрические тензоры решетки [2], которые для значений  $\gamma = 60^\circ$  и  $\gamma = 120^\circ$  имеют вид:

$$\gamma = 60^\circ, |M| \Rightarrow \begin{vmatrix} a & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}, |M|^{-1} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

$$\gamma = 120^\circ, |M| \Rightarrow \begin{vmatrix} a & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}, |M|^{-1} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{vmatrix}. \quad (2')$$

Следовательно, группы  $|\bar{6}|_{KT}$  для этих установок начала координат имеют вид:

$\gamma = 60^\circ$ , ось  $\bar{b}$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$\gamma = 120^\circ$ , ось  $\bar{b}$ :

$$\begin{vmatrix} \bar{1} & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$



**Обратная решетка двухслойной плотнейшей упаковки**

Обратная решетка двухслойной плотнейшей упаковки описывается функцией  $F(hkl)$ , которая при  $\gamma = 60^\circ$  имеет вид:

$$F(hkl) = f \left[ 1 + \exp \left\{ 2\pi i \left[ \frac{2}{3}h + \frac{2}{3}k + \frac{l}{2} \right] \right\} \right] = f \left[ 1 + \exp \left\{ 2\pi i \left[ \frac{2}{3}(h+k) + \frac{l}{2} \right] \right\} \right],$$

т. е. для рефлексов типа  $00l$  значение  $l = 2n$ .

Для рефлексов  $hk0$  узлы  $h+k = 3n$  описываются действительными функциями  $F(hk0)$ . На рефлексы общего типа  $(hkl)$  условие погасания не налагается.

Если  $\gamma = 120^\circ$ , то:

$$F(hkl) = f \left[ 1 + \frac{2\pi i}{3}(h+2k) + \frac{l}{2} \right],$$

т. е. для рефлексов типа  $00l$   $F(00l) \neq 0$  только при условии  $l = 2n$ .

Полученные группы являются изоморфными. В обеих группах элементы 2, 4, 6 образуют подгруппы 3, а элементы 3, 6 – подгруппу  $m_z$  [3].

С каждым атомным слоем ( $A$  или  $B$ ) совпадает плоскость отражения ( $m_z$ ). Если группами  $b_{60}$  и  $b_{120}$  будем действовать на узел решетки  $(100)$ , то получим кристаллографические орбиты в  $K\Gamma$ -базисе.

В обратной решетке кристалла распределение узлов подчиняется той же точечной симметрии, что и в прямой решетке. Поэтому координаты узлов прямой и обратной решеток в индексах  $(hkl)$  те же самые, что и в таблице 1. В ней приведены кристаллографические орбиты для исходной точки  $B$  ячеек  $\gamma = 60^\circ$  и  $\gamma = 120^\circ$ .

$$\begin{aligned} \gamma = 60^\circ & \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \gamma^* = 60^\circ & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \\ \\ \gamma^* = 120^\circ & \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \gamma = 120^\circ & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Таблица 1. – Кристаллографические орбиты точечной группы  $\bar{6}$  прямой и обратной решеток для исходной точки  $(xyz) = (100)$  или  $hkl = 100$  для ячеек  $\gamma = 60^\circ$  и  $\gamma = 120^\circ$ 

Угол поворота	$0^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$180^\circ$	$240^\circ$	$300^\circ$
$\gamma = 60^\circ \bar{6}$	100	$0\bar{1}0$	$\bar{1}10$	100	$0\bar{1}0$	$\bar{1}10$
$\gamma = 120^\circ \bar{6}$	100	$\bar{1}\bar{1}0$	010	100	$\bar{1}\bar{1}0$	010
$\gamma = 60^\circ$	$\frac{2\ 2\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ \bar{4}\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$	$\frac{\bar{4}\ 2\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ 2\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ \bar{4}\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{\bar{4}\ 2\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$
$\gamma = 120^\circ$	$\frac{1\ 2\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{\bar{1}\ 2\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ \bar{1}\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{\bar{1}\ 2\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$	$\frac{1\ 2\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ \bar{1}\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$

Как следует из результатов, приведенных в таблице 1, в двухслойной плотнейшей упаковке ось  $\bar{6}$  отсутствует. Для атомов слоя *A* под действием группы  $\bar{6}$  формируются только координаты трех атомов. Для атомов слоя *B* формируется «антипризма» с треугольными основаниями, развернутыми относительно друг друга на  $60^\circ$ .

Группа  $6_{KT}$  в кристаллографическом базисе для различных значений  $\gamma$  имеет вид:  
 $\gamma = 60^\circ$  :

$$\begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

$\gamma = 120^\circ$  :

$$\begin{vmatrix} 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Таблица 2. – Кристаллографические орбиты точечной группы  $\bar{6}$  в *KT*-базисе для  $\gamma = 60^\circ$  и  $\gamma = 120^\circ$  для исходных точек слоев *A* и *B*

Угол поворота	$0^\circ$	$60^\circ$	$120^\circ$	$180^\circ$	$240^\circ$	$300^\circ$
$\gamma = 60^\circ$	100	010	$\bar{1}10$	$\bar{1}00$	$0\bar{1}0$	$1\bar{1}0$
$\gamma = 120^\circ$	100	110	010	$\bar{1}00$	$\bar{1}\bar{1}0$	$0\bar{1}0$
$\gamma = 60^\circ$	$\frac{2\ 2\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ \bar{4}\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{\bar{4}\ 2\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ 2\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ \bar{4}\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{4\ \bar{2}\ 1}{3\ 3\ 2}$
$\gamma = 120^\circ$	$\frac{1\ 2\ 1}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ 1}{3\ 2}$	$\frac{2\ 1}{3\ 2}$	$\frac{1\ 2\ \bar{1}}{3\ 3\ 2}$	$\frac{2\ \bar{1}}{3\ 2}$	$1 - \frac{2\ 1}{3\ 2}$

В двухслойной плотнейшей упаковке отношение параметров  $c/a = 1,633$ . В таблице 3 приведены литературные данные для металлов с *ГПУ*-структурой [4].

Таблица 3. – Отношение параметров  $c/a$  для металлов с *ГПУ*-структурой

Металл в таблице Менделеева	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>c/a</i>	<i>c/a</i> – 1,633
литий	3,111	5,093	1,637	0,004
бериллий	2,2853	3,5829	1,5677	–0,0653
натрий	3,767	6,154	1,634	0,001

Окончание таблицы 1

магний	3,20928	5,21023	1,6235	-0,0095
скандий	3,3090	5,2733	1,5936	-0,0394
$\alpha$ -титан	2,9504	4,6833	1,587	-0,046
$\alpha$ -кобальт	2,5074	4,0699	1,62316	-0,0098
цинк	2,66466	4,9469	1,856	0,223
$\beta$ -стронций	4,319	7,071	1,635	0,002
$\alpha$ -иттрий	3,6474	5,7306	1,5712	-0,0618
$\alpha$ -цирконий	3,2312	5,1477	1,5931	-0,0399
технеций	2,735	4,388	1,604	-0,029
рутений	2,7057	4,2815	1,5824	-0,0506
кадмий	2,9787	5,6166	1,8858	0,2528
$\alpha$ -лантан	3,770	12,159	3,2252	1,5922
$\alpha$ -гафний	3,1946	5,0510	1,5811	-0,0519
рений	2,760	4,458	1,615	-0,018
осмий	2,7353	4,3191	1,5790	-0,054
$\alpha$ -таллий	3,4564	5,5247	1,598	-0,035
$\alpha$ -празеодим	3,6725	11,8354	3,2227	1,5897
$\alpha$ -неодим	3,6579	11,7992	3,2257	1,5927
$\alpha$ -самарий	3,621	26,25	7,241	5,608
$\alpha$ -гадолиний	3,6360	5,7826	1,5904	-0,0426
$\alpha$ -тербий	3,6010	5,6936	1,5811	-0,0519
диспрозий	3,5903	5,6475	1,5730	-0,06
гольмий	3,5773	5,6158	1,5698	-0,0632
эрбий	3,5588	5,5874	1,5700	-0,063
тулий	3,5375	5,5546	1,5702	-0,0628
лютеций	3,5031	5,5509	1,5846	-0,0484

Из таблицы 3 следует, что отношение  $c/a$  отличается от теоретического на вполне допустимую величину, свойственную непрецизионным исследованиям. Кроме того, в ряде случаев эти отношения объясняются авторами исследований тем, что форма некоторых атомов отличается от сферической, т. е. присутствуют анизодесмические факторы в межатомных взаимодействиях. В двухслойной плотнейшей упаковке реперы ячейки, как и в любых решеточных системах, это три некопланарных вектора. Если за начальный атом взят атом слоя  $A$ , то в этой сетке он определяется шестью другими атомами. Два ближайших к начальному атому определяют базовые векторы  $a = b$  с углом между ними  $60^\circ$  или  $120^\circ$ . Вектор  $\overrightarrow{AB}$ , где  $B$  – атом слоя \* на рисунке 1, определяет вектор  $\vec{c}$ , модуль которого  $c = a$ . Но на этих трех векторах построить ячейку невозможно. Т. е., строго говоря, ГПУ не есть ячейка с решеточной системой. Ячейка любой решетки должна удовлетворять следующим признакам: точечная симметрия кристалла должна отражаться в точечной симметрии ячейки, ячейка должна относиться к одному из типов Браве: примитивный ( $P$ ), база бокоцентрированная  $C$  ( $A, B$ ), объемноцентрированная ( $I$ ), гранецентрированная ( $F$ ).

Гексагональная решетка характеризуется ячейкой  $P$ -типа. В некоторых работах ячейку относят к  $C$ -типу с пространственной группой  $D_{6h}^4 - C6/mmc$  [4]. Основным признаком гексагональных решеток (таксоном) является наличие в них осей  $6$  или  $\bar{6}$  [5]. Гексагональная решетка относится к средним сингониям.

Рассмотрим соответствие двухслойной плотнейшей упаковки требованиям гексагональной сингонии. Приведенные результаты расчета кристаллографических орбит

в  $KГ$ -базисе (таблицы 1 и 2) показывают, что ось  $b$  имеется как в слое атомов  $A$ , так и в слое атомов  $B$  (рисунок 1). Причем эти две оси совпадают друг с другом. В решетке ось  $b$ , как и ось  $\bar{b}$ , отсутствует. Таких осей, естественно, нет и в ячейке решетки. Т. к. для описания ячейки необходимо знать два параметра, то для гексагональных упаковок – это параметры  $a = b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$  или  $\gamma = 60^\circ$ . В плотнейшей двухслойной упаковке это условие не выполняется: ячейка описывается одним параметром  $a$ , а  $c = \frac{2\sqrt{6}}{3}a = 1,633a$ .

В двухслойной плотнейшей упаковке ячейка решетки содержит два структурно абсолютно тождественных атома:  $(000)$ ,  $\left(\frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2}\right)$  или  $(000)$ ,  $\left(\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2}\right)$ . Поэтому на ячейку приходятся две гомологичные точки, а сама ячейка не соответствует ни одной ячейке Браве. В любой решеточной структуре всегда можно построить примитивную ячейку. Для этого необходимо выбрать начальную точку (атом) и соединить его с ближайшими атомами в той же координационной системе. Репер Браве определяют три вектора  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  и углы между ними. Параллелепипед, построенный на этих векторах, – это и есть ячейка решетки. Такими базисными векторами в двухслойной плотнейшей упаковке будут ребра тетраэдра, т. к. ближайшие атомы в слое  $A$  лежат от него на расстоянии  $a = 2r$ . Атом  $B$  в лунке этих трех слоев определяет вектор  $C$ . Т. е. репер Браве – это три вектора  $a$  с углами между ними  $60^\circ$ . Однако трансляции вдоль этих векторов по оси  $c$  нет, поэтому ячейку кристалла построить невозможно. Выбор в слое  $A$  других двух атомов так, чтобы угол стал равным  $120^\circ$ , ничего не меняет. Слои  $A$  и  $B$  совпадают с плоскостями отражения. Следовательно, в последовательности  $...ABABAB...$  два соседних слоя энантиоморфны друг к другу. Каждый слой совпадает не только с зеркальной плоскостью, но и является плоскостью двойникования.

### Заклучение

Метод моделирования кристаллических структур упаковками шаров широко используется в практике кристаллофизических исследований. В этой модели атомы представлены в виде шаров, радиусы которых относятся друг к другу, как относятся атомные (или ионные) радиусы атомов (ионов) в кристалле. Для моноэлементных кристаллов в качестве модельных берутся шары одинакового размера. Из этих шаров формируется плоская сетка так, что каждый шар окружен шестью контактирующими с ним соседними шарами. Прямая линия, перпендикулярная плоскости упаковки, проходящая через любой атом, является осью шестого порядка (6). В лунки между тремя шарами нижнего слоя размещаются по такой же схеме шары второго слоя. Над шарами второго слоя размещаются шары третьего слоя, но их размещение может быть осуществлено двумя способами. Первый способ, когда шары третьего слоя располагаются в лунках второго слоя над шарами первого слоя. Второй способ – шары третьего слоя размещаются над лунками первого и второго слоев. В этом случае получаются соответственно двухслойные  $...ABABAB...$  и трехслойные  $...ABCABCABC...$  плотнейшие упаковки.

В двухслойных упаковках, которые называются гексагональными плотнейшими упаковками, ячейка кристалла строится в соответствии с требованиями гексагональной сингонии. Для анализа структуры двухслойных плотнейших шаровых упаковок ДПШУ использовались матричные представления точечных групп для кристаллографического базиса. Этот метод основан на описании симметрий группами, элементами матриц которых являются  $0, \pm 1$ . Основным критерием принадлежности решетки к гексагональной

сингонии является наличие осей  $b$  и  $\bar{b}$ . В ДПШУ оси  $b$  имеются в каждом слое, но эти оси не совпадают друг с другом, и поэтому в решетке ось  $b$  отсутствует. Поскольку ячейка гексагональной решетки имеет параметры  $a = b \neq c$ ,  $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$ , то для описания ячейки необходимо знать два параметра:  $a=b$  и  $c$ . В ячейке ДПШУ ячейку определяет один параметр, т. к.  $c = \frac{2\sqrt{6}}{3} = 1,633a$ . В гексагональных решетках ячейка может быть только примитивной, т. е. внутри ячейки не может быть точек, гомологичных точкам ее вершин. В ДПШУ атом, находящийся внутри ячейки, имеет координаты  $\frac{2}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$  или  $\frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2}$  и др. в зависимости от выбора системы координат, что не соответствует ни одной из ячеек Браве.

В любой решетке можно построить примитивную ячейку на трех минимальных по размеру векторах. В ДПШУ основным структурным полиэдром есть тетраэдр. Базисными векторами являются ребра тетраэдра, выходящие из общей вершины, т. е. такой базис имеет вид:  $a = b = c$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ . Но на этом базисе построить решетку для ДПШУ невозможно. Объясняется это тем, что плоскость, проходящая через любой атомный слой, является плоскостью отражения и плоскостью двойникования. Отсюда следует, что ДПШУ, во-первых, не может называться гексагональной, а во-вторых, не соответствует требованиям решетки. Следовательно, ДПШУ должна рассматриваться как самостоятельная атомная структура со своими особенностями и с наличием дальнего порядка с учетом зеркальной симметрии смежных слоев.

Работа может представлять интерес для специалистов в области кристаллографии и кристаллофизики.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конвей, Дж. Упаковки шаров, решетки и группы : в 2 т. / Дж. Конвей, Н. Слоэн. – М. : Мир, 1990. – Т. 2. – 376 с.
2. Лиопо, В. А. Матричная кристаллография / В. А. Лиопо. – Гродно : Изд-во ГрГУ, 1998. – 78 с.
3. Вайнштейн, В. Б. Современная кристаллография : в 4 т. / В. Б. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979. – Т. 1. – 384 с.
4. Андреев, А. И. Фундаментальная теория классов симметрии кристаллов / А. И. Андреев // Мир современной науки. – М. : Перо, 2015. – С. 10–16.
5. Narai-Sabo, I. Inorganic crystal chemistry / I. Narai-Sabo. – Budapest : Acad. of Sciences of Hungary, 1969. – 504 p.

*Рукапіс надііть у редакцію 24.12.2020*

УДК 530.122.1

**Иван Петрович Охрименко<sup>1</sup>, Николай Николаевич Кольчевский<sup>2</sup>,  
Павел Васильевич Петров<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>аспирант каф. физической электроники и нанотехнологий  
Белорусского государственного университета

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. физической электроники и нанотехнологий  
Белорусского государственного университета

<sup>3</sup>ст. преподаватель каф. физической электроники и нанотехнологий  
Белорусского государственного университета

**Ivan Ohrymenko<sup>1</sup>, Nikolai Kolchevsky<sup>2</sup>, Pavel Petrov<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Postgraduate Student of the Department of Physical Electronics and Nanotechnology  
at the Belarusian State University

<sup>2</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Associate Professor of the Department of Physical Electronics and Nanotechnology  
at the Belarusian State University

<sup>3</sup>Senior Lecturer, of the Department of Physical Electronics and Nanotechnology  
at the Belarusian State University  
e-mail: [ivan.ohrymenko@gmail.com](mailto:ivan.ohrymenko@gmail.com)

## ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕТЕКТОРА ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН LIGO

*Рассмотрены функционирующие детекторы гравитационных волн и проекты разрабатываемых детекторов. Предложена модель космического детектора гравитационных волн на основе системы ортогональных геостационарных спутников. Предложена модификация детектора гравитационных волн на основе интерферометра Майкельсона с осциллирующим и отражающими зеркалами. Разработана программа LIGO-RM, моделирующая работу детектора гравитационных волн с осциллирующими зеркалами с функцией интерактивного управления численным экспериментом, имитацией распространения волн в интерферометре и анимацией движения зеркал. Обсуждаются принципы имитационного моделирования детектора гравитационных волн.*

### Simulation Modelling of the Gravitational Wave Detector Ligo

*The operating gravitational waves detectors and projects of the developing detectors are considered in this paper. A model of a space gravitational wave detector based on a system of orthogonal geostationary satellites is proposed. The paper introduces modification of the gravitational wave detector based on the Michelson interferometer with oscillating reflecting mirrors. The LIGO-RM software simulating the operation of the gravitational wave detector with oscillating mirrors with the function of interactive control of a numerical experiment, imitation of wave propagation in an interferometer and animation of mirror movement available has been developed. The simulation modeling of the gravitational wave detector principles are discussed.*

### Введение

Вопрос природы взаимодействия тел без посредства чего-либо и без физического контакта беспокоит ученых еще со времен Ньютона. После успеха в теории электромагнитного (ЭМ) поля, где тела взаимодействуют между собой без видимого контакта, Джеймс Клерк Максвелл рассуждает о применении сути теории поля к теории гравитации [1]. Теория поля оказалась весьма успешной и популярной, что дало толчок развитию теории гравитации: в 1893 г. известный физик Оливер Хэвисайд получил аналитическое решение гравитационного аналога уравнений Максвелла в виде волн [2; 3]. А в работе французского физика Генри Пуанкаре впервые появляется термин «Гравитационные волны» (фр. *Ondes Gravifiques*) [4]. Пуанкаре рассматривал проблему с точки зрения релятивизма и полагал, что гравитационное поле будет основано на принципе близкодействия. Эйнштейн опубликовал две работы по гравитационным волнам (ГВ) в 1911 и 1918 гг. [5; 6]. Во второй работе в рамках общей теории относительности

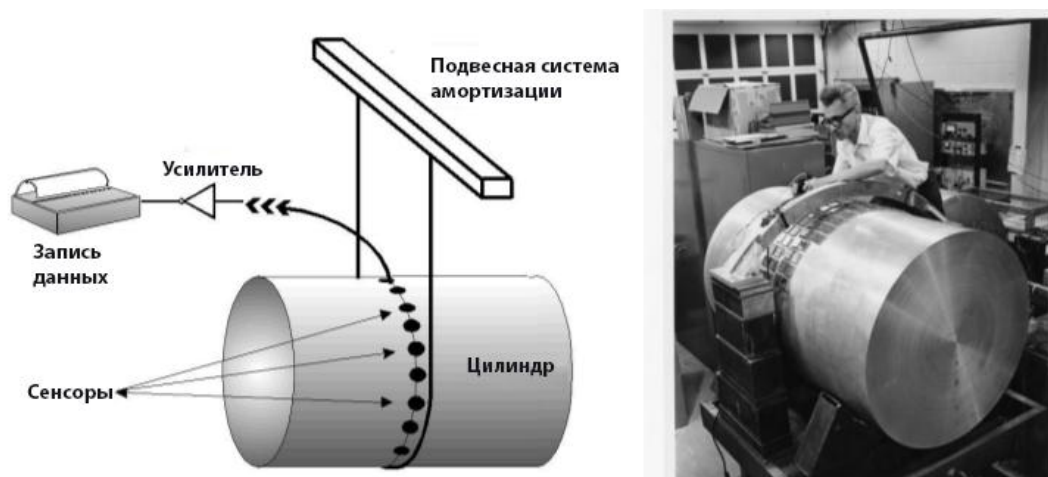
(ОТО) гравитация определяет решетку в пространстве-времени, и требуется 10 тензорных уравнений для описания гравитационного поля, что делает его теорию более сложной, чем векторная динамическая теория электромагнитного поля Максвелла.

В конце 1950-х гг. совместная работа физиков Германа Бонди, Феликса Пирани, Ивора Робинсона и польского ученого Анджея Траутмана окончательно установила реальность гравитационных волн в ОТО [7–14]. Потребовалось еще 60 лет теоретического, экспериментального и инструментального прогресса, прежде чем ученые смогли непосредственно обнаружить гравитационные волны и исследовать их свойства в реальном мире [15]. Реализация гравитационных детекторов, действительно способных зарегистрировать гравитационные волны, стала возможной лишь в XX в. За «решающий вклад в детектор LIGO и наблюдение гравитационных волн» была присуждена Нобелевская премия 2017 г. в области физики трем ученым: Кипу Торну (CalTech), Райнеру Вайссу (MIT) и Барри Бэришу (CalTech) [16]. По состоянию на декабрь 2019 г. обсерватория LIGO зарегистрировала 50 всплесков гравитационных волн [17].

### Детекторы гравитационных волн

Наибольшее распространение получили два типа наземных детекторов гравитационных волн:

- 1) массивный цилиндр длиной от 1 до 3 метров (рисунок 1), регистрирующий низкочастотные механические колебания (Weber bar) – резонансный детектор [18];
- 2) лазерный интерферометр [19].



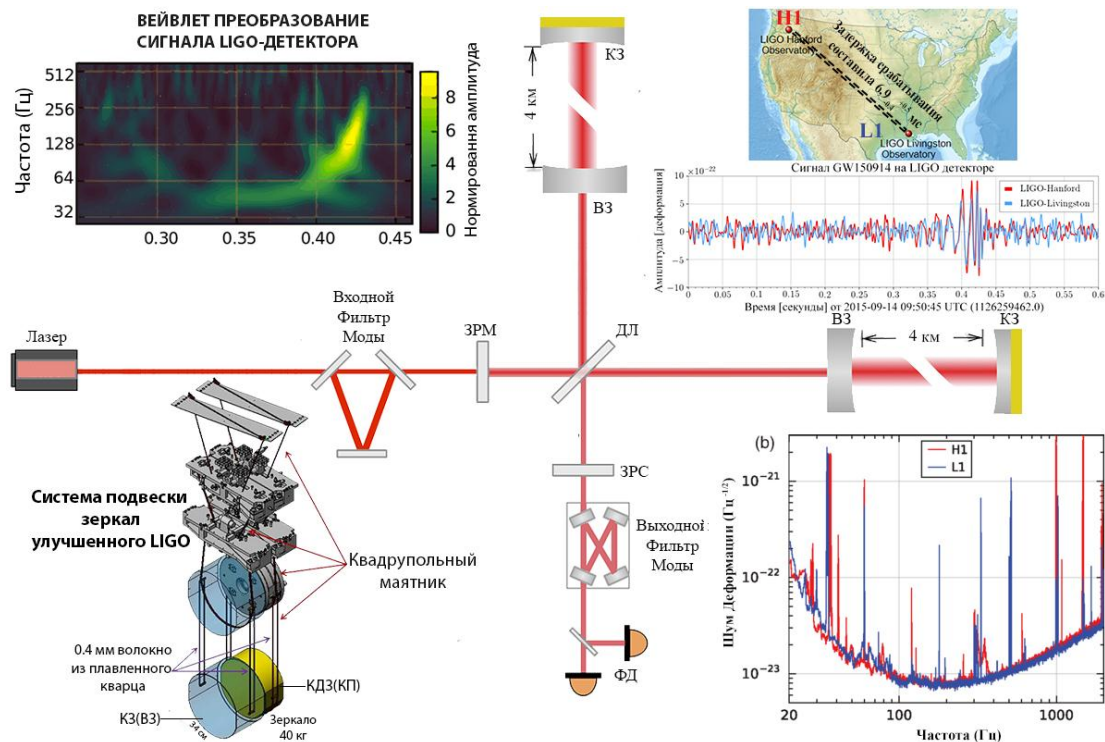
**Рисунок 1. – Схема детектора гравитационных волн механического типа («Вебер бар») и Дж. Вебер с разработанным им первым детектором (1965 г.)**

Амплитуда возмущений, вызванных гравитационной волной от реальных астрономических источников, обратно пропорциональна расстоянию до источника и является малой величиной порядка  $1 \cdot 10^{-21}$  и меньше. Соответственно, основной проблемой детекторов первого типа являются тепловые колебания, а в случае детекторов второго типа – сейсмические [20]. В 1965 г. Дж. Вебер из университета Мэриленда построил детектор: цилиндрический стержень размером 1 м × 2 м и весом 1,5 т, изготовленный из твердого алюминия. Идея эксперимента заключалась в следующем: гравитационная волна сжимала и растягивала «стержень Вебера», вызывая вибрации, которые при совпадении с резонансной частотой стержня вызывали бы измеримые возбуждения. В 1969 г. Вебер объявил, что он обнаружил гравитационные волны на двух подобных установках, разделенных на 1 000 км: в Чикаго и Мэриленде [21]. Однако эти результа-

ты не были воспроизведены другими экспериментальными группами, а амплитуда за-  
явленных сигналов была на несколько порядков выше, чем предсказано для предпо-  
ложительных астрофизических источников. В результате на сегодняшний день физиче-  
ское сообщество подвергает сомнению, что полученные Вебером сигналы являются  
следствием гравитационных волн [22; 23]. Экспериментальная работа и методы Вебера  
привлекли внимание многих ученых. В частности, Райнер Вайсс в 1972 г. написал  
23-страничную заметку в одном из ежеквартальных информационных журналов Массачу-  
сетского технологического института (MIT), в которой впервые подробно описана  
экспериментальная установка и проанализированы источники шума лазерного интер-  
ферометра, способного обнаруживать и регистрировать гравитационные волны с ам-  
плитудой порядка  $1 \cdot 10^{-21}$ , что впоследствии станет основой лазерной интерферометра и  
гравитационно-волновой обсерватории (LIGO) [24].

### LIGO-детектор

LIGO (*Laser-Interferometer Gravitational-wave Observatory*) – крупнейшая в мире  
гравитационно-волновая обсерватория. LIGO обсерватория построена в 2002 г. и со-  
стоит из двух детекторов второго типа, разнесенных в разные концы Соединенных  
Штатов Америки на 3 002 км: один в Ливингстоне (Луизиана), а другой в Хэнфорде  
(Вашингтон). LIGO использует физические свойства света (рисунок 2) и самого про-  
странства для обнаружения гравитационных волн. Проект финансируется Националь-  
ным научным фондом США, управляется CalTech и MIT.



КЗ – концевое зеркало; КДЗ – концевое дублирующее зеркало; ВЗ – входное зеркало;  
КП – корректирующая пластина; ДЛ – делитель луча; ЗРМ – зеркало рециркуляции  
мощности; ЗРС – зеркало рециркуляции сигнала; ФД – фотодетекторы

**Рисунок 2. – LIGO обсерватория, ее местоположение, график ее чувствительности  
и данные первой зарегистрированной гравитационной волны GW150914**

Детекторы LIGO представляют из себя модернизированный интерферометр  
Майкельсона за счет добавления резонаторов Фабри – Перо (рисунок 2) в каждое из



плеч интерферометра, что фактически увеличило оптический хода луча с 4 км до 300 км. Основа интерферометра Майкельсона включает в себя (рисунок 2):

- 1) источник – лазер;
- 2) делитель луча ДЛ;
- 3) два перпендикулярных плеча, по которым распространяются лучи;
- 4) фотодетектор ФД, на котором два луча смешиваются обратно в один.

Идея эксперимента заключается в следующем: когда гравитационная волна проходит через детектор, растяжение и сжатие пространства заставляет плечи интерферометра удлиниться и укорачиваться в силу поляризации ГВ, что приводит к изменению в интерференции между волнами лазера [25]. Более детальную информацию можно найти в публикации [26]. Весь проект LIGO детектора обошелся примерно в \$ 820 млн.

Наблюдательный запуск обсерватории LIGO с 2002 по 2010 г. результатов не дал. После этого его работа была приостановлена до 2015 г. для внедрения ряда усовершенствований. Сразу после запуска усовершенствованного детектора, 14.09.2015, была задетектирована первая ГВ, названная *GW150914* [15; 27]. На сегодняшний день функционируют три гравитационно-волновые обсерватории: LIGO (USA), Virgo (Italy) и KAGRA (Japan) [28]. Данные детекторы относятся ко второму поколению ГВ-детекторов, но уже ведутся перспективные разработки будущих детекторов третьего поколения и космических детекторов гравитационных волн (таблица 1). Совместный запуск трех обсерваторий планируется на 2020–2021 гг. [29].

Таблица 1. – Классификация детекторов и планируемые даты запуска

Первое поколение	Второе поколение	Третье поколение (2030-е гг.)	Космические обсерватории
Weber bar (США, 1965)	GEO 600 (Германия, 2010)	«Телескоп Эйнштейна» (Евросоюз)	DECIGO, B-DECIGO (Япония, 2027)
	Усовершенствованный LIGO (США, 2015)		Taiji (Китай, 2030)
	Усовершенствованный Virgo (Италия, 2016)	«Космический исследователь» (Евросоюз)	LISA (Евросоюз, 2034)
	KAGRA (LCGT, Япония, 2020)		TianQin (Китай, 2035)
	IndIGO (LIGO, Индия, 2023)		

Наземные детекторы ГВ (LIGO-детектор и др.) в основном работают в области частот гравитационных волн от 10 Гц до 10 кГц. Смещение рабочего диапазона в сторону низких частот достигается увеличением длины плеч лазерного интерферометра. Переход к размещению подобного детектора в космическом пространстве сместит рабочий диапазон в сторону низких частот: между 0,1 мГц и 1 Гц (LISA). Размещение ГВ-детектора в космосе открывает возможность для обнаружения широкого диапазона астрофизических источников, например, ультракомпактных бинарных звезд, слияния сверхмассивных черных дыр и закручивающихся объектов, имеющих экстремальные массовые отношения.

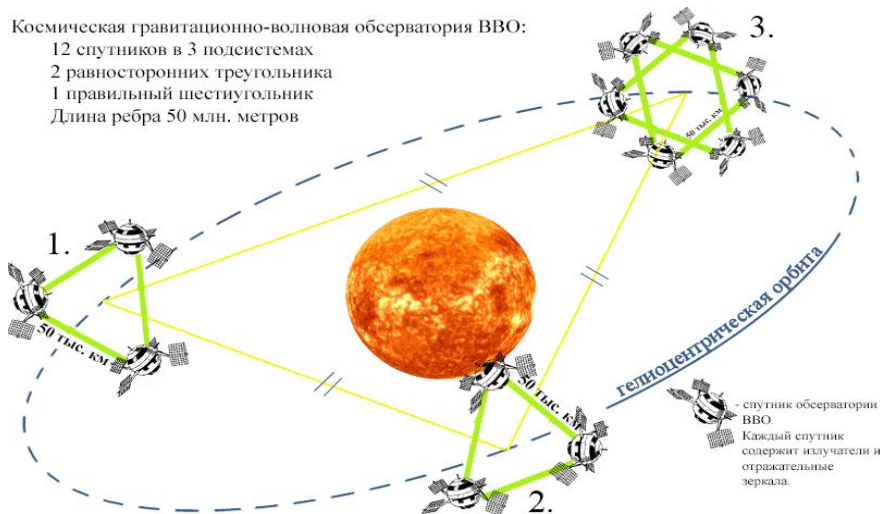
«Космический исследователь» (CE) – проект наземной гравитационно-волновой обсерватории третьего поколения. Космический исследователь имеет конфигурацию LIGO с длиной плеч 40 км. Это значительно повысит чувствительность обсерватории и гипотетически позволит наблюдать слияния первых черных дыр во Вселенной [30; 31].

«Телескоп Эйнштейна» (ET), или обсерватория Эйнштейна, – это проект Евросоюза. Он разрабатывается для проверки теории сильного поля в общей теории относительности и для расширения спектра детектирования источников ГВ. Детектор будет располагаться под землей, длина плеч детектора составит 10 км. Плечи образуют равносторонний треугольник, в каждом углу будет по два вложенных детектора: один рассчитан на высокие частоты от 10 Гц до 10 кГц – второй на низкие частоты от 1 до 250 Гц. Испытательный комплекс, называемый ET-Pathfinder, будет построен в Маастрихтском университете в Нидерландах. В 2021–2022 г. будет объявлено местоположение телескопа Эйнштейна [32].

«Лазерная интерферометрическая космическая антенна» (LISA) – проект Европейского космического агентства (ESA). Концепция LISA представляет собой систему из трех космических аппаратов, расположенных в равностороннем треугольнике с плечами длиной 2,5 млн км и находящихся на гелиоцентрической орбите в точках Лагранжа [33; 34].

«Интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория Децигерца» (DECIGO, B-DECIGO, Япония) – два проекта для работы в космическом пространстве. Название детектора говорит о полосе частот 0,1–10 Гц. Полоса частот находится между полосой частот детекторов LIGO и LISA. Конструкция детектора подобна LISA: три спутника в треугольном расположении. Первый проект – длина плеч 1000 км. Второй проект (B-DECIGO) – длина плеч 100 км на околоземной орбите со средней высотой 2 000 км [35; 36].

«Наблюдатель Большого Взрыва» (BBO) – проект-преемник LISA от Европейского космического агентства (ESA). Основная научная цель – наблюдение реликтовых гравитационных волн, излучившихся в результате «Большого Взрыва». Полоса частот детектора перекроет спектры детекторов LIGO, LISA, DECIGO. Его предельная чувствительность будет определяться мощностью лазеров и корреляцией сигналов с другими интерферометрами, которые будут размещены вокруг Солнца. Космическая обсерватория BBO состоит из двенадцати космических аппаратов, разбитых на системы по три и шесть спутников, равномерно распределенных на солнечной орбите (каждые 120°) (рисунок 3). Системы представляют из себя спутники, расположенные в вершинах двух равносторонних треугольников и одном правильном шестиугольнике соответственно (рисунок 3). Длина плеч составит около 50 тыс. км. Отдельные спутники будут отличаться более мощными лазерами в сравнении с LISA [36; 37].



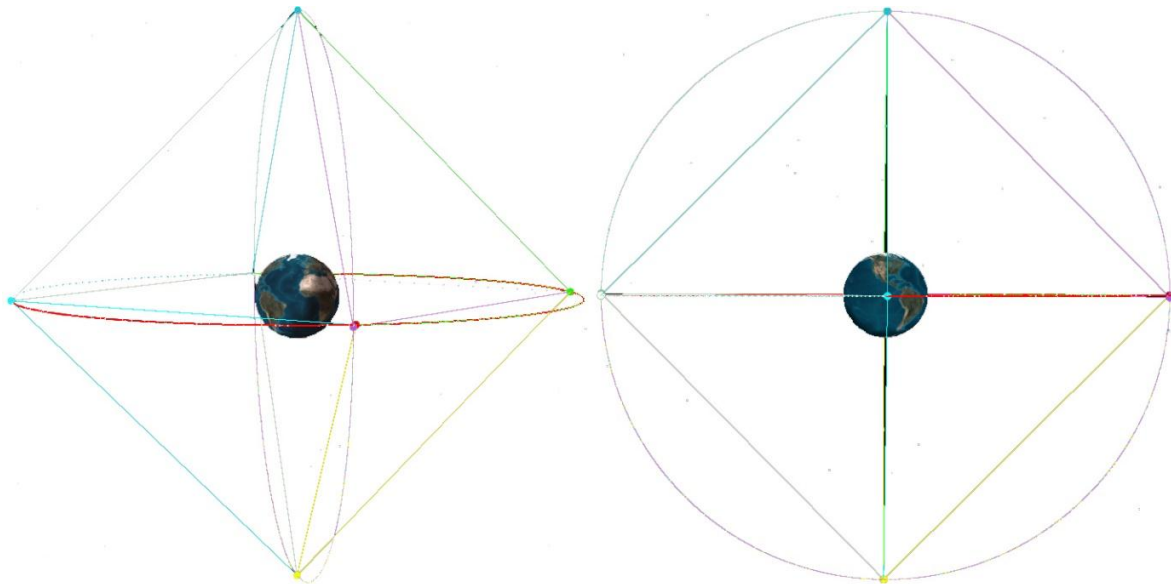
**Рисунок 3. – Конфигурация космического детектора гравитационных волн Европейского космического агентства, именуемого «BBO» (англ. *Big Bang Observer*)**

Обнаруженные гравитационные волны уже успели оказать большое влияние на фундаментальную физику, астрофизику и ядерную физику. Ожидается, что в ближайшие десятилетия будут получены важные научные результаты в теории гравитационного поля. Например, в США запатентован генератор высокочастотных гравитационных волн [38].

**Модель спутниковой системы**

Космос – пространство, в котором можно разместить детектор огромных размеров и получить доступ к областям спектра гравитационных волн, недоступных для LIGO-детекторов, размещенных на Земле. К другим преимуществам можно отнести сверхнизкие давления и отсутствие сейсмических вибраций. Для LIGO-детекторов наземного типа характерна сложная и затратная система глубокого вакуума и амортизации.

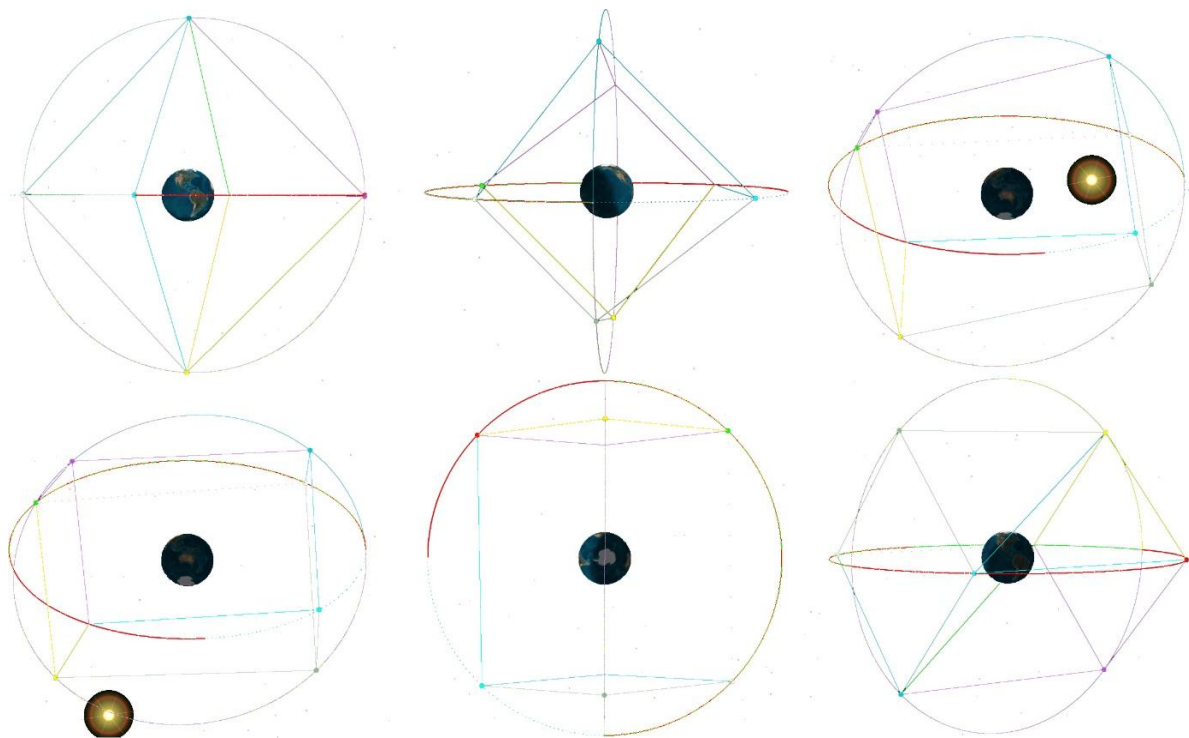
В качестве космического детектора ГВ может выступать космическая измерительная система спутников, расположенная на орбитах планет, естественных спутниках, планетоидах. Для постоянного взаимодействия с космической измерительной системой возможно использовать геостационарные спутники. Геостационарный тип орбит обеспечивает постоянную связь с наземным комплексом для передачи данных и доступа к управлению детектором ГВ. Подразумевается наличие наземной составляющей спутникового детектора ГВ: центр управления, обработки и передачи данных высокопотребляемой энергией. Для расширения диаграммы чувствительности детектора LIGO предложена система из восьми спутников, расположенных на ортогональных геостационарных орбитах. Как показано на рисунке, первые четыре спутника располагаются на геостационарной орбите, образуя квадрат, еще четыре спутника расположены на ортогональной орбите в углах квадрата (рисунок 4).



**Рисунок 4. – Модель космического детектора гравитационных волн в виде системы из восьми спутников, расположенных на двух круговых ортогональных геостационарных орбитах (спутники образуют фигуру октаэдра)**

Четыре спутника выводятся на одну орбиту и отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии. В первом приближении, т. к. спутники находятся на одной орбите, они вращаются вокруг планеты с одинаковой угловой скоростью. Данный факт означает, что каждые три спутника из четырех, расположенных на одной орбите, образуют пер-

пендикулярные плечи интерферометра по типу Майкельсона. Всего получается четыре возможных детектора для одной орбиты: каждая вершина является угловой станцией детектора ГВ подобно LIGO-детектору. Добавление второй орбиты, ортогональной первой, обеспечивает увеличение числа интерферометров и широкую диаграмму направленности всей системы. Орбитальное вращение приводит к изменению взаимного расположения спутников. Взаимное расположение спутников и их орбитальное движение моделировалось в специализированной программе AGI STK, которая часто используется учеными и инженерами в производстве космических аппаратов. Расположение спутников может образовать правильные фигуры: куб и октаэдр. Эволюция геометрических фигур показана на рисунке 5. Правильные фигуры характеризуются большим числом интерферометров типа LIGO. Конфигурация в виде куба сразу дает до 24 классических интерферометров LIGO, однако возможно создать большее число комбинаций интерферометров с неперпендикулярными плечами.



**Рисунок 5. – Эволюция геометрических фигур, выстраиваемых системой спутников космического детектора, построенных в программе AGI STK (системы спутников периодически образуют правильные фигуры – октаэдр и куб)**

Предлагается размещение не менее трех источников излучения и трех антенн на каждом из спутников. Рассмотренная система из спутников позволяет в один момент времени иметь сразу несколько интерферометров различной ориентации в пространстве, что повышает чувствительность и достоверность детектирования гравитационных волн.

Данную систему можно развернуть на геостационарных орбитах (геоорбитах) любой из планет Солнечной системы. Очевидно, что интерес представляет наибольший радиус геоорбит, т. к. это даст большие длины плеч интерферометра, что напрямую связано с чувствительностью ГВ детектора и его спектром охвата источников. В таблице 2 представлены результаты расчета геостационарных орбит для восьми планет Солнечной системы по формуле:

$$R = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_3}{\omega^2}} \quad (1)$$

Таблица 2. – Значения радиусов геостационарных орбит и соответствующих им длин плеч интерферометра космического детектора гравитационных волн в виде системы из восьми спутников, размещенных на данных орбитах, для планет Солнечной системы

Планета	Масса, $M_3$	Время вращения, с	Угловая скорость, рад/с	G	$M_3$ , кг	Радиус георбит, м	Плечо интерферометра, км
Меркурий	0.055	$5.1 \cdot 10^6$	$1.237 \cdot 10^{-6}$	$6.67 \cdot 10^{-11}$	$5.97 \cdot 10^{24}$	$243 \cdot 10^6$	$344 \cdot 10^3$
Венера	0.815	$21 \cdot 10^6$	$2.993 \cdot 10^{-7}$			$1537 \cdot 10^6$	$2172 \cdot 10^3$
Земля	1	$0.0861 \cdot 10^6$	$7.294 \cdot 10^{-5}$			$42.2 \cdot 10^6$	$59.6 \cdot 10^3$
Марс	0.107	$0.0887 \cdot 10^6$	$7.088 \cdot 10^{-5}$			$20.4 \cdot 10^6$	$28.9 \cdot 10^3$
Юпитер	318	$0.0358 \cdot 10^6$	$176 \cdot 10^{-6}$			$16.0 \cdot 10^6$	$227 \cdot 10^3$
Сатурн	95	$0.0384 \cdot 10^6$	$164 \cdot 10^{-6}$			$112 \cdot 10^6$	$159 \cdot 10^3$
Уран	14	$0.0622 \cdot 10^6$	$101 \cdot 10^{-6}$			$81.8 \cdot 10^6$	$116 \cdot 10^3$
Нептун	17	$0.0580 \cdot 10^6$	$108 \cdot 10^{-6}$			$83.3 \cdot 10^6$	$118 \cdot 10^3$

Из таблицы 2 видно, что самый большой радиус орбиты у планеты Венера: он составляет 1 млн 536 тыс. 477 км. Соответственно, плечо интерферометра будет в корень из двух раз больше и составит 2 млн 172 тыс. 906 км. Для сравнения: длина плеча интерферометра для Юпитера составляет 226 тыс. км, а у LIGO-детектора длина плеча составляет лишь 300 км.

Для регистрирования гравитационных волн Солнца гравитационный детектор необходимо размещать как можно ближе к исследуемому объекту, т. е. на орбите Меркурия. Для регистрации гравитационных волн из дальнего космоса необходимо гравитационный детектор размещать как можно дальше от любых источников возмущений, т. е. на орбите планеты Нептун или планетоида Плутон.

Период вращения планеты Нептун вокруг Солнца составляет 165 лет, а период вращения вокруг своей оси – 15 ч 57 мин 59 с. Радиус георбиты и длина плеча интерферометра – 83 тыс. км и 117 тыс. км соответственно.

Для планеты Меркурий период вращения вокруг Солнца составляет 88 дней, а период вращения вокруг своей оси – 58 дней. Радиус георбиты 243 тыс. км, а длина плеч интерферометра – 344 тыс. км.

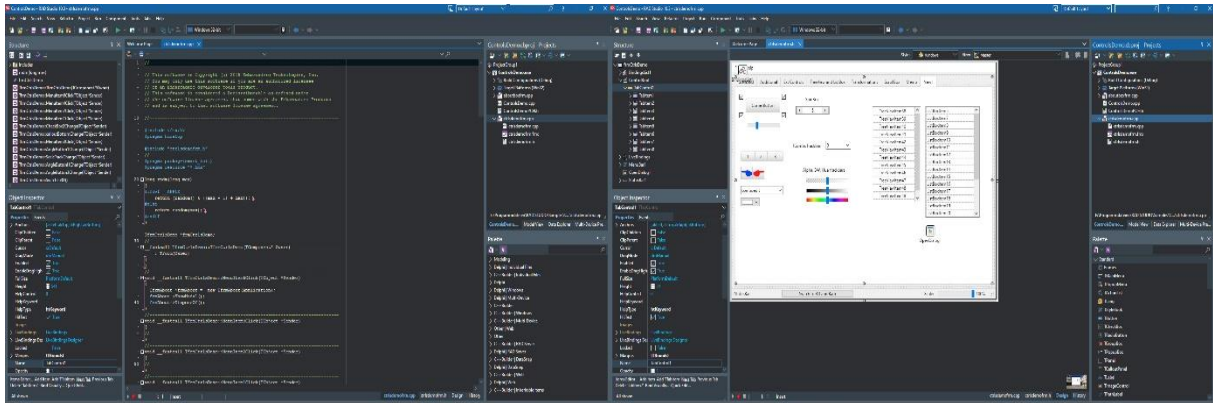
### Моделирование детектора гравитационных волн LIGO-RM

Исходя из высокой стоимости детекторов ГВ, появляется необходимость в программном обеспечении, которое моделирует детекторы гравитационных волн и рассчитывает чувствительность детектора в зависимости от конфигурации.

Для изучения работы ГВ-детектора и численной оценки его разрешающей способности разработано программное обеспечение «LIGO-RM». Программа написана на языке C++ в кроссплатформенной среде разработки Embarcadero RAD Studio, запускается на ОС Windows, но также может быть скомпилирована для ОС Mac, Linux и на мобильные платформы Android и iOS. В среде разработки Rad Studio можно выделить две рабочих области (рисунок 6), в которых ведется основная разработка – это редактор кода и графический редактор, или GUI разрабатываемой программы. Эти рабочие области напрямую связаны, т. к. любой базовый класс имеет графическое пред-



ставление, что значительно упрощает разработку графического интерфейса. Поддержка нескольких языков программирования делает среду разработки Rad Studio привлекательной для разработки научного программного обеспечения.



**Рисунок 6. – Снимок среды разработки Embarcadero Rad Studio: слева – редактор кода, справа – графический редактор интерфейса разрабатываемой программы**

Приложение «LIGO-RM» позволяет управлять конфигурацией интерферометра, моделировать сигнал детектора, а также проводить численные эксперименты для оценки чувствительности детектора. При запуске программы пользователь вводит исходные параметры детектора гравитационных волн и параметры гравитационной волны. В приложении «LIGO-RM» пользователь может задавать и контролировать следующие параметры: частоту излучения в детекторе, длины плеч интерферометра, количество полуволн в плече, положение зеркал, запуск колебания зеркала по заданному закону с заданной частотой, выбор закона, по которому происходит колебание зеркала, положение зеркал с точностью фазы излучателя от 0 до  $2\pi$ , запуск гравитационной волны, тип гравитационной волны, параметры выбранной ГВ.

Для расчета фазового сдвига волны источника излучения в детекторе, вызванного деформацией плеч интерферометра от взаимодействия с ГВ, предлагается следующее выражение:

$$T = t_0 \cdot \left( 1 + \frac{\int_0^T g(t) dt}{T} \right), \quad (2)$$

где  $t_0$  – время обычное, или неизменное, которое волна излучателя затрачивает на прохождение плеча интерферометра при отсутствии возмущающей гравитационной волны,  $g(t)$  – функция комплексной амплитуды гравитационной волны,  $T$  – фаза волны в момент ее возврата на делитель луча. Формула (2) используется в LIGO-RM для проведения численных экспериментов.

Приложение «LIGO-RM» имеет графический интерфейс GUI (рисунок 7), что значительно повышает эффективность проведения численного эксперимента (моделирования). Графический интерфейс позволяет оперативно управлять настройками эксперимента, изменяя параметры детектора за счет ввода новых значений или использования интерактивных функций: перетаскивания зеркал с помощью мыши, поворота регуляторов управляющих параметров и т. д. Для отображения результатов численного эксперимента и образовательной части приложение поддерживает интерактивный режим с анимацией, отображающий распространение излучения в плечах интерферометра, движение зеркал, а также построение графиков в реальном времени, имитируя работу осциллографа. Все это дает возможность пользователю наблюдать работу детектора с возможностью непосредственного вмешательства.



Рисунок 7. – Снимок окна приложения «LIGO-RM»

После того как пользователь ввел параметры, программа производит расчет анимации и физический расчет интерференции сигналов. В LIGO-RM анимировано распространение волны в интерферометре до зеркал и обратно, положение зеркал и их движение. Пользователь может динамически управлять положением зеркал и характером их движения. Произведенные изменения сказываются на сигнале детектора и позволяют визуализировать принципы работы LIGO-детектора. Пользователь может активировать колебания зеркал по определенному закону, выбирая из «выпадающего списка» и задавать частоту колебаний. Графики законов колебания зеркал при их активации отображаются в правом нижнем углу программы. Сигналы ГВ-детектора отображаются в отдельном окне в виде построения динамических графиков в режиме реального времени с шагом, который задается пользователем (по умолчанию – 1 мс). Динамическими графиками являются: график результирующей амплитуды сигнала на детекторе, график результирующей интенсивности сигнала, графики колебания зеркал. Анимации движения зеркал и распространения волны разработаны при помощи стандартных библиотек Rad Studio, что повышает надежность кода программы.

Численные расчеты в программе являются основой для анимации. После каждого этапа расчета происходит запуск анимации. Для реализации бегущей волны в плече интерферометра схематически изображены плечи интерферометра с помощью встроенного класса и соответствующему ему графического компонента TRectangle, а для прорисовки самой волны лазера использовался класс TPath внутри компонента TLayout. Волна прорисовывается по точкам ( $x$  и  $y$ ), полученным из физического расчета, производимого внутри программы с помощью метода  $TPath \rightarrow Data \rightarrow LineTo(TPointF(float y, float x))$ , и автоматически прорисовывается в его графическом компоненте.

Интервал, с которым производится расчет, и прорисовка анимации реализуются при помощи класса TTimer, где явно задается периодичность запуска исполняемого блока кода или функции (например, 1 мс). Когда точки фронта волны достигают координат отражающего зеркала (границы графического компонента TPath), происходит отражение волны и начинается прорисовка распространения волны (волна зеленого цве-

та) (рисунок 7) в обратном направлении. Цикл повторяется многократно. Все это позволяет пользователю визуализировать принцип работы детектора относительно распространения волн лазера в интерферометре. В LIGO-RM можно увидеть наложение прямых и отраженных лучей, наблюдать сдвиг фаз на детекторе (рисунок 7). Помимо этого, можно визуально наблюдать изменение длины волны источника, если пользователь изменяет частоту излучателя, и прямо увидеть, какое число полуволн укладывается в плечи интерферометра для заданных им размеров плеча. Действия пользователя на моделируемый детектор моментально отображаются графически, что помогает восприятию и пониманию, как устроен и функционирует LIGO-детектор.

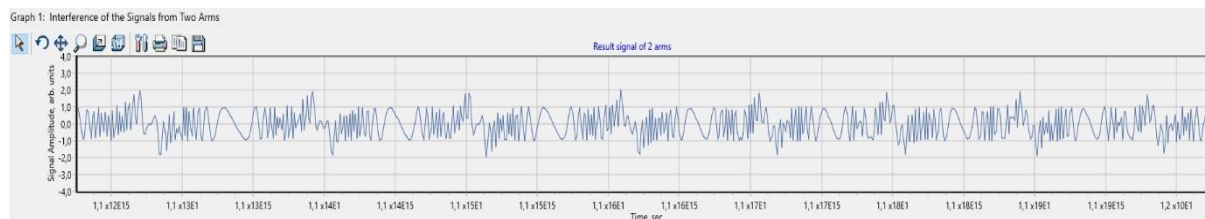
Анимация колебания зеркал реализована с помощью прорисовки движения зеркала, прорисованного с помощью готового компонента `TRectangle`, где пользователь с помощью GUI просто указывает значение высоты, ширины и различные цветовые настройки. Прорисовка движения реализована с помощью встроенного класса `TFloatAnimation`, который привязывается к компоненту, для которого нужна анимация (в нашем случае `TRectangle`), и указывается переменная компонента, которая изменяется во время анимации – в нашем случае это положение зеркала: координата  $x$  или  $y$ . У компонента `TFloatAnimation` имеются встроенные законы интерполяции: *линейная, квадратичная, экспоненциальная, синусоидальная, кубическая* и др., по которым происходят изменения от начального *StartValue* до конечного *StopValue* значения анимированной переменной, и время, за которое эта переменная должна измениться. Несмотря на то, что это быстрая реализация анимации, ее недостатками является то, что нет полного контроля процесса, и если задать большое изменение переменной за минимальное время, то исчезнет гладкость кривых и полученные данные будет невозможно интерпретировать с точки зрения физики. В LIGO-RM реализованы функции, которые отслеживают курсор и нажатия клавиш мыши компьютера. Реализован обработчик событий по перемещению зеркал с помощью мыши по принципу «нажал и переместил». Это позволяет пользователю даже во время запущенной симуляции динамически изменять положение отражающих зеркал интерферометра, моделируемого ГВ-детектора. Новая длина плеч интерферометра отображается численно в окне-индикаторе. Пользователь может перемещать зеркала только в разрешенных осях. Движения зеркал изменяют сигнал детектора ГВ и отображаются на динамических графиках с частотой в 1мс. Пользователь может исследовать разнообразные колебательные движения зеркал, не останавливая численный эксперимент. Если пользователь включает опцию колебания зеркал по выбранному им закону, то LIGO-RM анимирует характер движения, что позволяет визуально соотнести характер колебаний зеркала и сигнал детектора.

Построение динамических графиков реализовано с помощью встроенной коммерческой библиотеки `TeeChart` и компонента `TTimer`. Библиотека `TeeChart` поддерживает множество встроенных функций для построения и обработки графиков. Компонент `TTimer` управляет частотой обновления графика. Ограничение компонента `TTimer` – это минимальная частота обновления, равная 1 мс. После запуска моделирования производится физический расчет интерференции детектора ГВ и данные сразу же поступают в компонент `TChart`, где отображаются сигналы детектора. При запуске колебания зеркал их координаты также передаются в другой экземпляр `TChart` и отображаются в GUI. Динамические графики передают изменения сигнала детектора с частотой в 1 мс, что значительно быстрее человеческого восприятия, и обеспечивают анимированную работу детектора ГВ.

Созданное ПО было численно протестировано на известных задачах, которые имеют аналитическое решение: 1) при разной длине плеч интерферометра наблюдался постоянный сигнал; 2) при одинаковой длине плеч сигнал был равен нулю. Анимирование тестовых задач может быть использовано для визуализации принципов работы



LIGO-детектора и для проведения численных экспериментов. На рисунке 8 показан рассчитанный в программе сигнал детектора в зависимости от колебаний зеркал.



**Рисунок 8. – График сигнала на детекторе гравитационных волн, когда оба зеркала движутся в противофазе по закону, где изменение координаты определяется законом 5-ой степени ( $x^5$ )**

### Заклучение

В работе рассмотрены два вида детекторов гравитационных волн: наземные и космические. Показано, что космос является очень притягательной и перспективной площадкой для размещения будущих гравитационно-волновых детекторов.

В работе предложен космический детектор гравитационных волн в виде системы из восьми спутников, расположенных на геостационарных орбитах (рисунок 5). Такая система позволяет иметь от 4 до 24 детекторов гравитационных волн различной ориентации, функционирующих одновременно. Подобные системы могут быть основой для создания мультidetекторов и новых принципов регистрации гравитационных волн. Показаны результаты расчетов параметров георбит и параметров космического детектора для восьми планет Солнечной системы (таблица 2). Обсуждаются результаты данных расчетов. Наиболее перспективной планетой для размещения данной системы космического детектора гравитационных волн является Венера. Длина плеч такого интерферометра составит 2 млн 172 тыс. 906 км.

В работе рассмотрен новый тип детектора гравитационных волн – детектор с осциллирующими отражающими зеркалами на базе интерферометра Майкельсона. Разработано программное обеспечение «LIGO-RM», моделирующее детектор гравитационных волн с осциллирующими зеркалами и позволяющее проводить численный эксперимент. LIGO-RM имеет графический интерфейс и позволяет управлять расчетом в интерактивном режиме, не останавливая моделирования. LIGO-RM содержит наглядную часть в виде анимации распространения электромагнитных волн в интерферометре моделируемого детектора гравитационных волн и анимации движения-колебания отражающих зеркал и системы управления детектором. Интерактивная реализация позволяет пользователю влиять на параметры конфигурации детектора: положение зеркал, включение осцилляций зеркал, частоту излучателя, тонкую подстройку – и наблюдать результат на сигнале детектора в режиме реального времени. Анимирование в разработанном приложении LIGO-RM позволяет визуализировать принципы работы LIGO-детектора. Численные эксперименты по расчету сигнала детектора гравитационных волн с колеблющимися зеркалами показывают, что графики будут содержать периодические участки с высокой и низкой частотой сигнала (рисунок 8) и определяются характером движения зеркал.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Maxwell, J. C. A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field / J. C. Maxwell // Phil. Trans. R. Soc. Lond. – 1865. – Vol. 155, nr VIII. – P. 459–512.

2. Heaviside, O. A Gravitational and Electromagnetic Analogy. Part I / O. Heaviside // *The Electrician*. – 1893. – Vol. 31. – P. 281–282.
3. Heaviside, O. A Gravitational and Electromagnetic Analogy. Part II / O. Heaviside // *The Electrician* 31. – 1893. – P. 359.
4. Poincare, H. Sur la dynamique de l'électron / H. Poincare // *Rend. Circ. Mat. Palermo*. – 1906. – Vol. 21, ser. 1. – P. 129–176.
5. Einstein, A. On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light / A. Einstein // *Annalen der Physik*. – 1911. – Vol. 35. – P. 898–908.
6. Einstein, A. Gravitationswellen / A. Einstein // *Preussische Akademie der Wissenschaften Sitzungsberichte*. – 1918. – Part 1. – P. 154–167.
7. Trautman, A. Sur la propagation des discontinuités du tenseur de Riemann / A. Trautman // *CR Acad. Sci. Paris*. – 1958. – Vol. 246. – P. 1500–1502.
8. Trautman, A. Boundary conditions at infinity for physical theories / A. Trautman // *Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys.* – 1958. – Vol. 6. – P. 403–406.
9. Trautman, A. Radiation and boundary conditions in the theory of gravitation / A. Trautman // *Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys.* – 1958. – Vol. 6. – P. 407–412.
10. Trautman, A. On gravitational radiation damping / A. Trautman // *Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. math., astr. et phys.* – 1958. – Vol. 6. – P. 627–633.
11. Trautman, A. Lectures on General Relativity / A. Trautman // *Lectures at King's College London*. – 1958.
12. Robinson, I. Spherical gravitational waves / I. Robinson, A. Trautman // *Phys. Rev. Lett.* – 1960. – Vol. 4. – P. 431–432.
13. Bondi, H. Plane gravitational waves in general relativity / H. Bondi // *Nature*. – 1957. – Vol. 179. – P. 1072–1073.
14. Bondi, H. Gravitational waves in general relativity III: Exact plane waves / H. Bondi, F. A. E. Pirani, I. Robinson // *Proc. R. Soc. London*. – 1959. – Vol. 251, Ser. A. – P. 519–533.
15. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger / B. P. Abbott [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* – 2016. – Vol. 116, iss. 6.
16. The Nobel Prize [Electronic resource] : The Nobel Prize in Physics 2017. – Mode of access: [Nobelprize.org](https://www.nobelprize.org). – Date of access: 12.12.2019.
17. LIGO NEWS [Electronic resource] : LIGO Suspends Third Observing Run (O3). – Mode of access: <https://www.ligo.caltech.edu/news/ligo20200326>. – Date of access: 01.04.2020.
18. Weber, J. Gravitational-wave-detector events / J. Weber // *Physical Review Letters*. – 1968. – Vol. 20, iss. 23. – P. 1307–1308.
19. Gertsenshtein, M. E. On the detection of low frequency gravitational waves / M. E. Gertsenshtein, V. I. Pustovoit // *JETP*. – 1962. – Vol. 43, nr 2. – P. 605–607.
20. Exploring the sensitivity of next generation gravitational wave detectors / B. P. Abbott [et al.] // *Class. Quantum Grav.* – 2017. – Vol. 34, nr 4.
21. Weber, J. Evidence for discovery of gravitational radiation / J. Weber // *Phys. Rev. Lett.* – 1969. – Vol. 22. – P. 1320–1324.
22. Kafka, P. Are Weber's Pulses Illegal? / P. Kafka. – Babson Park MA : Gravity Research Foundation, 1972.
23. Allen, W. D. Gravitational radiation experiments at the University of Reading and the Rutherford Laboratory / W. D. Allen, C. Christodoulides // *J. Phys. A Math. Gen.* – 1975. – Vol. 8. – P. 1726–1733.
24. Weiss, R. Electromagnetically coupled broadband gravitational antenna / R. Weiss // *Quarterly Report of the Research Laboratory for Electronics*. – 1972. – nr 105. – P. 54–76.

25. LIGO [Electronic resource] : Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. – Mode of access: <https://www.ligo.caltech.edu/>. – Date of access: 29.05.2020.
26. Advanced LIGO [Electronic resource] : LIGO Scientific Collaboration / LIGO – Livingston : Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory, 2014. – Mode of access: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1411/1411.4547.pdf>. – Date of access: 01.01.2020.
27. Cervantes-Cota, J. L. A Brief History of Gravitational Waves / J. L. Cervantes-Cota, S. Galindo-Uribarri, G. F. Smoot // Universe. – 2016. – Vol. 2, iss. 3. – P. 22–52.
28. KAGRA Observatory News [Electronic resource] : KAGRA Gravitational-wave Telescope Starts Observation. – Mode of access: <https://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/archives/1381>. – Date of access: 25.02.2020.
29. Prospects for observing and localizing gravitational-wave transients with Advanced LIGO, Advanced Virgo and KAGRA / B. P. Abbott [et al.] // Living Rev Relativ. – 2018. – Vol. 21, iss. 3.
30. Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO / D. Reitze [et al.] // Bulletin of the American Astronomical Society. – 2019. – Vol. 51, iss. 7, id. 35.
31. Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory. Instrument Science White Paper : LIGO-T1600119–v4 : adopted 27.10.16. – Cambridge : Technical Note : LIGO Scientific Collaboration, 2016. – 116 p.
32. Sensitivity studies for third-generation gravitational wave observatories / S. Hild [et al.] // Class. Quantum Grav. – 2011. – Vol. 28, nr 9.
33. Laser Interferometer Space Antenna : A proposal in response to the ESA call for L3 mission concepts / K. Danzmann [et al.]. – Hannover, 2017. – 41 p.
34. NGO, Revealing a hidden Universe: opening a new chapter of discovery (New Gravitational wave Observatory) : Assessment Study Report / O. Jenrich [et al.]. – Paris, 2011. – 153 p. – № ESA/SRE (2011) 19.
35. The Japanese space gravitational wave antenna – DECIGO / S. Kawamura [et al.] // J. Phys.: Conf. Ser. – 2008. – Vol. 122.
36. Laser interferometry for the Big Bang Observer / G. M. Harry [et al.] // Class. Quantum Grav. – 2006. – Vol. 23. – P. 4887–4894.
37. Yagi, K. Detector configuration of DECIGO/BBO and identification of cosmological neutron-star binaries / K. Yagi, N. Seto // Phys. Rev. D. – 2011. – Vol. 83. – 20 p.
38. High frequency gravitational wave generator [Electronic resource] : pat. US 10,322,827 B2 / Salvatore Cezar Pais. – Publ. date 18.01.2019. – Mode of access: [https://pdfpiw.uspto.gov/.piw?docid=10322827&SectionNum=1&IDKey=59C80614D29C&-HomeUrl=http://patft.uspto.gov/netacgi/nphParser?Sect1=PTO2%2526Sect2=HITOFF%2526u=%25252Fneta-html%25252FPTO%25252Fsearchadv.htm%2526r=2%2526f=G%2526l=50%2526d=PTXT%2526p=1%2526S1=\(2019\\$.PD.%2526BAND%2526%252522LIGO%252522\)%2526OS=ISD/2019%2526BAND%2526%252522LIGO%252522%2526RS=\(ISD/2019%2526BAND%2526%252522LIGO%252522\)](https://pdfpiw.uspto.gov/.piw?docid=10322827&SectionNum=1&IDKey=59C80614D29C&-HomeUrl=http://patft.uspto.gov/netacgi/nphParser?Sect1=PTO2%2526Sect2=HITOFF%2526u=%25252Fneta-html%25252FPTO%25252Fsearchadv.htm%2526r=2%2526f=G%2526l=50%2526d=PTXT%2526p=1%2526S1=(2019$.PD.%2526BAND%2526%252522LIGO%252522)%2526OS=ISD/2019%2526BAND%2526%252522LIGO%252522%2526RS=(ISD/2019%2526BAND%2526%252522LIGO%252522)). – Date of access: 01.02.2020.

*Рукапис надруковано у редакцію 10.09.2020*

УДК 372 016:53

**Владимир Анестиевич Плетюхов***д-р физ.-мат. наук, проф. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина***Vladimir Pletyukhov***Doctor of Physical and Mathematical Sciences,  
Professor of the Department of General and Theoretical Physics  
at the Brest State A. S. Pushkin University**e-mail: [pletukhov@yandex.by](mailto:pletukhov@yandex.by)***ТЕНЗОРНАЯ МАССА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ**

*Обсуждаются различные трактовки понятия массы в релятивистской динамике. Предлагается новый способ введения массы в СТО, который базируется на формулировке релятивистского уравнения движения в виде, аналогичном второму закону Ньютона. В данном подходе масса выступает как тензорная, а не скалярная величина. Тензор массы позволяет просто описать анизотропный характер инертных свойств релятивистского объекта.*

**Tensor Mass in the Relativistic Dynamics**

*In this work we discuss different interpretations of mass in the relativistic dynamics. A new way to introduce mass is proposed. Our way is based on the relativistic equation of motion expressed in the form of the Newton's second law. In this approach mass appears as a tensor, not as a scalar. The tensor mass allows us simply to describe anisotropic character of inert features of a relativistic object.*

**Введение**

Идеи специальной теории относительности (СТО) настолько изменили физические представления о пространстве, времени, материи, энергии и движении, что их осмысление продолжается до настоящего времени. Одной из обсуждаемых тем является трактовка понятия массы в релятивистской динамике [1].

Коснемся кратко истории вопроса. В классической механике уравнение движения точечного тела имеет вид

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1)$$

где  $m$  – масса,  $\vec{p} = m\vec{v}$  – импульс тела. При этом, согласно Ньютону,  $m$  является инвариантной величиной, вследствие чего (1) можно переписать следующим образом:

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \left(\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\right). \quad (2)$$

Величина  $m$  в уравнении (2) выступает в качестве коэффициента пропорциональности между силой и ускорением, что позволяет придать ей наглядный физический смысл: масса характеризует способность тела приобретать определенное ускорение под действием данной силы, или, как обычно говорят, является мерой инертности тела. Таким образом, в классической механике указанные два свойства массы: инвариантность и мера инертности – «мирно сосуществуют» и рассматриваются в качестве основного определения массы как физического понятия.

Иначе обстоит дело в СТО. Трехмерное релятивистское уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \vec{F} \quad (\beta = \frac{v}{c}), \quad (3)$$

где  $m$  – та же самая инвариантная величина, которая фигурирует в классическом уравнении движения (1), (2). Нетрудно заметить, что в (3) величина  $m$  не является коэффициентом пропорциональности между силой и ускорением, т. е. уже не может служить в качестве меры инертности тела в вышесформулированном смысле (в смысле второго закона Ньютона). Следовательно, возникает естественный вопрос: что считать массой и какой смысл она должна иметь в релятивистском случае?

На протяжении нескольких десятилетий после создания СТО доминирующей в физическом сообществе была трактовка, согласно которой релятивистской массой считалась величина [2–4]:

$$M = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (4)$$

Основанием служило то обстоятельство, что релятивистское уравнение (3) можно получить из (1) путем формальной замены  $m \rightarrow M$ . Величина  $m$  в данном подходе рассматривалась «всего лишь» как нерелятивистский предел массы  $M$  и называлась массой покоя. Отметим, что «концепция двух масс» (назовем ее так) имеет методологическое сходство с подходом, используемом в релятивистской кинематике, где различают релятивистскую длину  $l$  и собственную (инвариантную) длину  $l_0$  стержня, релятивистский промежуток времени  $\Delta t$  и собственный (инвариантный) промежуток времени  $\Delta \tau$  между событиями.

Вторая трактовка (назовем ее «концепцией одной массы»), которая получила распространение в последние десятилетия и практически вытеснила первую из научной и учебно-методической литературы, заключается в том, что в ней за основу берется свойство инвариантности массы. Поэтому рассматривается только одна классическая масса  $m$  и никаких других масс не вводится. Вопрос о мере инертности релятивистского тела, по существу, замалчивается как неактуальный. Инвариантная масса удобна для использования в физике микромира, поскольку может служить в качестве идентификационного признака элементарных частиц. Последнее обстоятельство и послужило, главным образом, причиной того, почему неинвариантная масса  $M$  была фактически исключена из понятийного аппарата релятивистской динамики.

На наш взгляд, обе вышеуказанные концепции обладают существенными недостатками, не позволяющими ни одну из них принять как истину в последней инстанции. В настоящей работе мы предложим трактовку релятивистской массы, которая, по нашему мнению, более полно и точно отражает физическое содержание как самого этого понятия, так и релятивистской динамики в целом.

Сначала о недостатках существующих подходов.

В концепции двух масс величина  $M$  (4) не сохраняет ни одного свойства, которые присущи понятию массы в ее исходном, классическом понимании. Эта величина не является ни инвариантом, ни, вообще говоря, мерой инертности в смысле второго закона Ньютона, поскольку релятивистское уравнение движения (3) нельзя представить в форме, аналогичной (2) (за исключением одного случая, о котором подробнее будет сказано ниже). Здесь фактически идет речь о сущностном переопределении понятия массы, или, иначе говоря, о подмене исходного понятия массы некоторым другим понятием. Одного лишь факта, что классическая масса  $m$  является нерелятивистским пределом величины  $M$  явно недостаточно, чтобы считать последнюю релятивистским преемником (обобщением) классической массы.

В концепции одной массы за основу, как уже отмечалось выше, берется свойство инвариантности. Но сама по себе инвариантность массы еще ничего не говорит о физическом смысле данного понятия. Поэтому предлагается в указанном качестве использовать соотношение

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4, \quad (5)$$

означающее, что из двух неинвариантных величин: энергии и импульса – можно составить инвариантную комбинацию

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - c^2 p^2}, \quad (6)$$

которая и раскрывает якобы смысл понятия массы в релятивистской динамике.

Однако если проследить происхождение формул (5), (6), то нетрудно видеть, что (5) представляет собой трехмерную форму записи ковариантного соотношения

$$P_\mu^2 = -m^2 c^2, \quad (7)$$

где  $P_\mu = m U_\mu$  – четырехмерный импульс,  $U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$  – четырехмерная скорость,  $d\tau$  – дифференциал собственного времени. Соотношение (7), в свою очередь, является тривиальным следствием кинематического тождества

$$U_\mu^2 = -c^2, \quad (8)$$

в котором масса  $m$  вообще не фигурирует. Если (8) умножить на  $m^2$ , затем в левой части полученного равенства «спрятать»  $m$  в обозначениях

$$mU_i = p_i, \quad mU_4 = i \frac{E}{c}, \quad (9)$$

то мы приходим к формуле (5). Таким образом, получается, что масса  $m$  определяется через понятия энергии и импульса, в которых она же сама фигурирует в качестве множителя. Попытка дать определение более фундаментального понятия через менее фундаментальные или понятия одинаковой степени фундаментальности неизбежно приводит к тавтологии, с чем мы и сталкиваемся в настоящем случае.

Для того чтобы вернуть массе в СТО физический смысл, снова обратимся к концепции двух масс, но модернизируем ее. Из того бесспорного факта, что величина  $M$  (4) не может, вообще говоря, служить мерой инертности релятивистского тела, вовсе не следует, что в СТО ей нельзя найти подходящую замену.

Возьмем производную в левой части уравнения (3):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m\vec{v}}{c^2 (1-\beta^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2 (1-\beta^2)} \right) \vec{a} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}{(1-\beta^2)} \right) \vec{a} \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ,  $\left(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt}\right) = (\vec{v}, \vec{a})$  – скалярное произведение;  $\vec{v} \cdot \vec{v}, \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$  – прямое (диадное) произведение векторов. Если представить векторы  $\vec{F}$  и  $\vec{a}$  в виде столбцов

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

то диада  $\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}$  представляет собой матрицу

$$\vec{\beta} \cdot \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & \beta_1\beta_2 & \beta_1\beta_3 \\ \beta_2\beta_1 & \beta_2^2 & \beta_2\beta_3 \\ \beta_3\beta_1 & \beta_3\beta_2 & \beta_3^2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В преобразованиях (10) использовано свойство диады

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}). \quad (13)$$

С учетом (10) уравнение (3) принимает вид

$$\vec{F} = \mu \vec{a}, \quad (14)$$

где  $\vec{F}$  и  $\vec{a}$  – трёхмерные вектор-столбцы (11),  $\mu$  – матрица  $3 \times 3$  вида

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( 1 + \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}{1-\beta^2} \right). \quad (15)$$

В индексных обозначениях будем соответственно иметь:

$$F_i = \mu_{ij} a_j, \quad (16)$$

где

$$\mu_{ij} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( \delta_{ij} + \frac{\beta_i \beta_j}{1-\beta^2} \right) \quad (17)$$

и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнения (14), (16) можно обратить:

$$\vec{a} = \mu^{-1} \vec{F}, \quad a_i = \mu_{ij}^{-1} F_j, \quad (18)$$

где обратная матрица  $\mu^{-1}$  имеет вид

$$\mu^{-1} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta}), \quad \mu_{ij}^{-1} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} (\delta_{ij} - \beta_i \beta_j). \quad (19)$$

Очевидно, что именно тензор-матрица  $\mu$ , выступающая в качестве «коэффициента пропорциональности» между векторами силы и ускорения, адекватно отражает смысл понятия «мера инертности» в релятивистской динамике. Тензорный характер массы означает, что инертность релятивистского тела не является изотропным свойством. Ускорение тела зависит не только от абсолютных значений силы и скорости, но и от угла между ними в данный момент времени. Кроме того, направления силы

и ускорения, вообще говоря, не совпадают. Указанная неизотропность обусловлена тем, что движущееся тело создает в пространстве выделенное направление, совпадающее с направлением скорости тела в данный момент времени.

Особый интерес представляют два частных случая, когда направление ускорения совпадает с направлением силы.

Один из них имеет место, когда  $\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{v}$ . Тогда тензорное уравнение (18) при учете (19) принимает вид

$$\vec{a} = \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{m} \vec{F}. \quad (20)$$

В этом случае мерой инертности является скалярная величина (скалярная матрица)

$$\frac{m}{(1-\beta^2)^{3/2}}, \quad (21)$$

называемая продольной массой [5, с. 45–48].

В случае, когда  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , имеем

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{m} \vec{F}, \quad \text{или} \quad \vec{F} = \frac{m}{\sqrt{1-\beta^2}} \vec{a}. \quad (22)$$

Коэффициент пропорциональности между силой  $\vec{F}$  и ускорением  $\vec{a}$  в (22), который естественно назвать поперечной массой [5], совпадает с выражением (4). Следовательно, величина  $M$  (4), которая некогда «претендовала» на универсальную роль релятивистской массы, на самом деле является «всего лишь» поперечной, но все-таки массой.

Что касается атрибута массы как меры полной энергии релятивистского тела, ситуация выглядит следующим образом. Смысл формулы

$$E = MC^2 \quad (23)$$

не сводится к тривиальному переобозначению одной и той же с точки зрения физического содержания величины (энергии). Эта формула устанавливает связь между *различными* величинами – полной энергией релятивистского тела и его инертной поперечной массой. Так что соотношение (23) является все-таки законом природы, пусть и не настолько фундаментальным, как это считалось во времена Эйнштейна. Обычно же приводимая в рамках концепции одной массы связь

$$E_0 = mc^2$$

представляет собой всего лишь предельный случай закона (23).

### Заклучение

В классической механике масса инвариантна и является мерой инертности тела. В СТО эти свойства классической массы, которые служат фактически ее определением, становятся несовместными. Если отдать приоритет первому свойству, то в релятивистской механике в качестве единственной массы надо принять инвариантную классическую массу  $m$ . Тогда она выступает в роли «врожденного» физического признака материального объекта и в данном качестве удобна для идентификации элементарных частиц. Масса служит также мерой запаса энергии покоящегося тела. При таком подходе



теряется исходный смысл массы как меры инертности, вследствие чего становится проблемной трактовка физического содержания этого понятия. Отсылка к формулам (5), (6) не только не решает проблему, а запутывает ее еще больше.

Если же во главу угла поставить свойство классической массы как меры инертности, то в релятивистском случае в качестве массы следует принять тензорную массу  $m_{ij}$  (17). Тензорная масса адекватно отображает инертные свойства релятивистского тела, в т. ч. их анизотропный характер. Инвариантная масса  $m$  (со всеми присущими ей атрибутами) в данном подходе также сохраняется в статусе нерелятивистского предела массы  $m_{ij}$ . Находит свою нишу здесь и величина  $M$  (4) как поперечная масса и мера запаса полной релятивистской энергии тела.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Окунь, Л. Б. «Релятивистская кружка» [Электронный ресурс] / Л. Б. Окунь. – Режим доступа: arXiv:1010.5400 [physics.pop-ph] 26 Oct 2010.
2. Фейнман, Р. Фейнмановские лекции по физике : в 9 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. – Изд. 2-е. – М. : Мир, 1966–1967. – Т. 2. – 1967. – 168 с.
3. Бергман, П. Г. Введение в теорию относительности / П. Г. Бергман. – М. : Инлитгиз, 1947. – 380 с.
4. Левич, В. Г. Курс теоретической физики : в 2 т. / В. Г. Левич. – М. : Наука, 1969. – Т. 1. – 912 с.
5. Эйнштейн, А. Собрание научных трудов : в 4 т. / А. Эйнштейн. – М. : Наука, 1965. – Т. 1. – 700 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 23.12.2020*

УДК 544.22+537.63

**Григорий Семенович Римский<sup>1</sup>, Казимир Иосифович Янушкевич<sup>2</sup>**<sup>1</sup>аспирант лаб. фізікі магнітных матэрыялаў навучна-практычнага цэнтра  
НАН Беларусі па матэрыялаведэнню<sup>2</sup>д-р фіз.-мат. навук, зав. лаб. фізікі магнітных матэрыялаў  
навучна-практычнага цэнтра НАН Беларусі па матэрыялаведэнню**Grigoriy Rimsky<sup>1</sup>, Kazimir Yanushkevich<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Postgraduate Student of the Laboratory of Physics of Magnetic Materials  
of the Scientific and Practical Center

National Academy of Sciences of Belarus for Materials Science

<sup>2</sup>Doctor of Physical and Mathematical Sciences,

Head of the Laboratory of Physics of Magnetic Materials of the Scientific and Practical Center

National Academy of Sciences of Belarus for Materials Science

e-mail: rimskiy@physics.by

**ВЛИЯНИЕ КАТИОННОГО ЗАМЕЩЕНИЯ НА КРИСТАЛЛИЧЕСКУЮ СТРУКТУРУ  
И МАГНИТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ  $MnNi_{1-x}V_xSb$** 

Синтезированы твердые растворы замещения  $MnNi_{1-x}V_xSb$  в интервале концентраций  $0,00 \leq x \leq 0,30$ . Выявлено, что увеличение концентрации ванадия в твердых растворах не приводит к значительным изменениям размеров элементарной кристаллической ячейки и плотности составов. Изучены температурные и полевые зависимости удельной намагниченности синтезированных составов. Установлено, что замещение никеля ванадием в  $MnNiSb$  приводит к уменьшению температуры фазового превращения «магнитный порядок – магнитный беспорядок» при увеличении концентрации  $x$  от 0 до 20 мол. %.

**Effect of Cationic Substitution on the Crystal Structure  
and Magnetic Properties of Solid Solutions  $MnNi_{1-x}V_xSb$** 

Solid solutions of  $MnNi_{1-x}V_xSb$  substitution were synthesized in the concentration range  $0.00 = x = 0.30$ . It was found that an increase in the vanadium concentration in solid solutions does not lead to significant changes in the size of the elementary crystal cell and the density of the compositions. The temperature and field dependences of the specific magnetization of the synthesized compositions are studied. It was found that the substitution of Nickel with vanadium in  $MnNiSb$  leads to a decrease in the temperature of the «magnetic order – magnetic disorder» phase transformation with an increase in the concentration  $x$  from 0 to 20 mol. %.

**Введение**

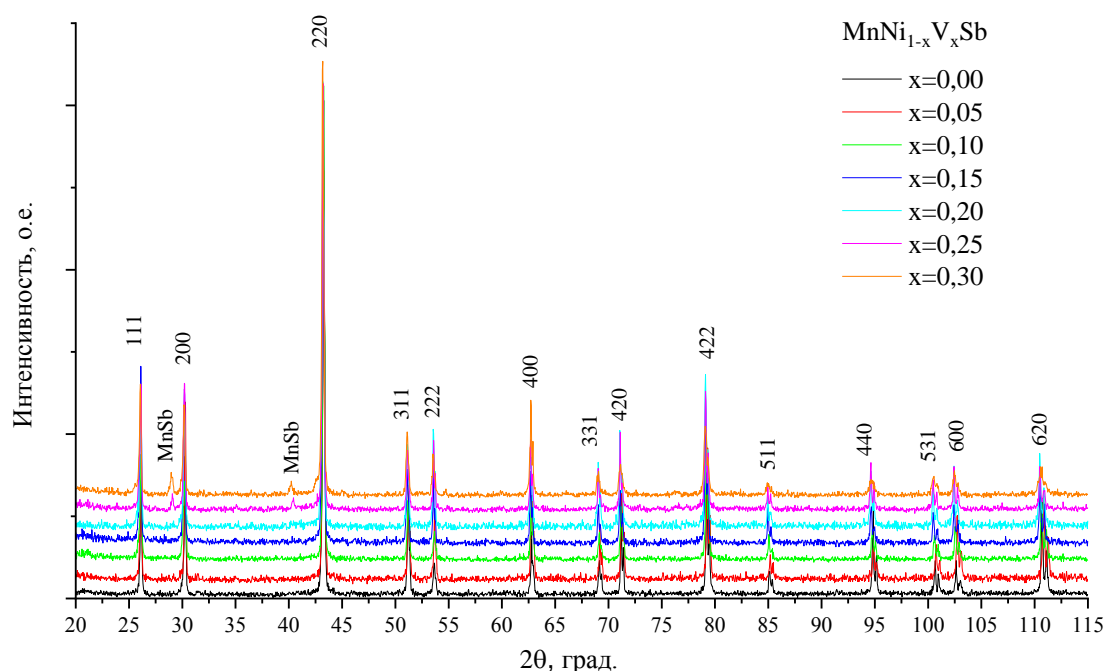
Полуметаллические ферромагнетики представляют интерес не только для фундаментальной науки, но и благодаря возможности их практического применения. Эти материалы имеют металлическое поведение для одной спиновой зоны и полупроводниковое для противоположной спиновой зоны. Будучи металлами для одной спиновой проекции и полупроводниками для противоположной, они имеют различные по величине спиновые вклады в транспортные свойства, что может привести к проявлению эффекта магнитосопротивления в гетероструктурах. Как правило, для них характерно ферромагнитное либо ферримагнитное упорядочение магнитных моментов и наличие «идеальной» спиновой поляризации на уровне Ферми [1; 2], что делает перспективным их применение в спинтронных устройствах. Благодаря высоким величинам температуры Кюри, удельной намагниченности и спиновой поляризации к таким материалам можно отнести и  $MnNiSb$  [3; 5]. Обзор литературных источников показал, что влияние магнитного поля, температуры, давления и легирования на физические свойства  $MnNiSb$  остается мало изученным. В данной работе приведены результаты изучения кристаллической структуры и магнитных свойств твердых растворов  $MnNi_{1-x}V_xSb$  в диапазоне концентраций  $0,00 \leq x \leq 0,30$ .

### Методы эксперимента

Образцы поликристаллических порошков  $MnNi_{1-x}V_xSb$  с шагом по концентрации 5 мол. % синтезированы методом прямого сплавления исходных компонентов в вакуумированных кварцевых ампулах в однозонной печи сопротивления с последующей закалкой в воде. Фазовый состав и параметры элементарной кристаллической ячейки составов определены дифракцией рентгеновских лучей  $Cu\ K\alpha$ -излучения. Температурные зависимости удельной намагниченности и обратной магнитной восприимчивости изучены в диапазоне температур  $80 \leq T \leq 900$  К пондеромоторным методом в магнитном поле с индукцией 0,86 Тл. Полевые зависимости удельной намагниченности получены вибрационным методом в магнитном поле  $\pm 10$  Тл при температурах 5, 77 и 300 К.

### Результаты и обсуждение

На рисунке 1 представлены рентгенограммы порошков твердых растворов  $MnNi_{1-x}V_xSb$  составов  $0,00 \leq x \leq 0,30$  в диапазоне углов  $20^\circ \leq 2\Theta \leq 115^\circ$ .



**Рисунок 1. – Рентгенограммы порошков твердых растворов  $MnNi_{1-x}V_xSb$  составов  $0,00 \leq x \leq 0,30$**

При комнатной температуре твердые растворы  $MnNi_{1-x}V_xSb$  имеют кубическую сингонию типа  $MgAgAs$  ( $C1_b$ ) пространственной группы  $F\bar{4}3m$ . Граница растворимости находится в интервале  $0,20 \leq x \leq 0,25$ . При дальнейшем увеличении замещения ванадием на рентгенограммах присутствуют дифракционные рефлекссы гексагональной сингонии типа  $Co_{1,75}Ge$  пространственной группы типа  $P6_3/mmc$ , антимонида марганца (MnSb), интенсивность которых по мере увеличения содержания ванадия увеличивается.

Концентрационные зависимости параметра  $a = f(x)$  и  $\rho = f(x)$  образцов твердых растворов  $MnNi_{1-x}V_xSb$  приведены на рисунке 2.

Ход зависимостей параметра элементарной кристаллической ячейки  $a = f(x)$  и теоретической плотности  $\rho = f(x)$  представлены на рисунке 2. Зависимости  $a = f(x)$  и  $\rho = f(x)$  демонстрируют, что в пределах ошибки измерений при комнатной температуре изменение величин параметров, характеризующих кристаллическую структуру составов, с увеличением концентрации  $x$  содержания ванадия невелико. Численные значения величин, характеризующих размеры кубических элементарных кристаллических

ячеек  $a$ , объемов элементарных ячеек  $V$  и рентгеновская плотность  $\rho_{\text{рен}}$  твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  при  $T \sim 300 \text{ K}$ , приведены в таблице 1.

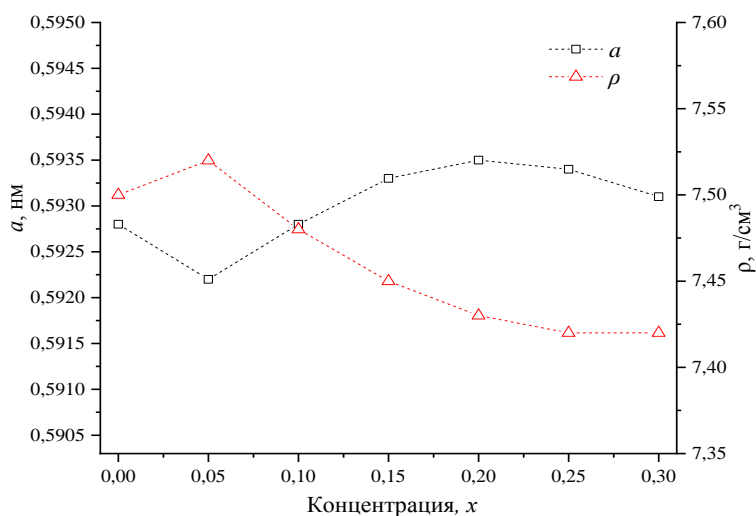


Рисунок 2. – Концентрационные зависимости параметра  $a$  ( $\square$ ) и рентгеновской плотности  $\rho$  ( $\Delta$ ) твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$

Таблица 1. – Величины значения параметра  $a$ , объемов элементарных ячеек  $V$  и рентгеновской плотности  $\rho_{\text{рен}}$  твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$

$x$	$a$ , нм	$V$ , $10^{-2} \text{ нм}^3$	$\rho_{\text{рен}}$ , $\text{г/см}^3$
0,00	0,592(8)	20,83	7,50
0,05	0,592(2)	20,76	7,52
0,10	0,592(8)	20,83	7,48
0,15	0,593(3)	20,89	7,45
0,20	0,593(5)	20,90	7,43
0,25	0,593(4)	20,89	7,42
0,30	0,593(1)	20,87	7,42

Результаты измерений удельной намагниченности исследуемых составов представлены на рисунке 3.

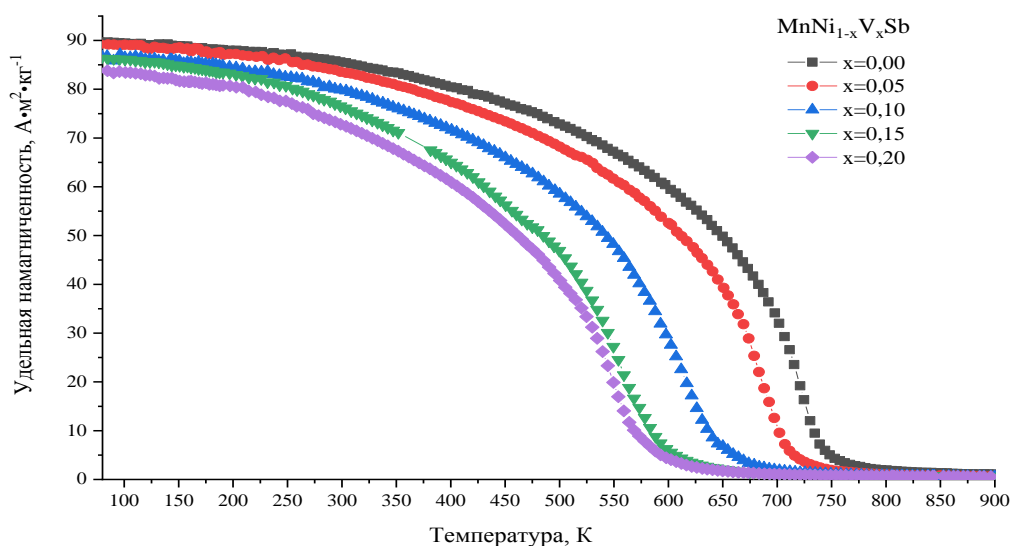
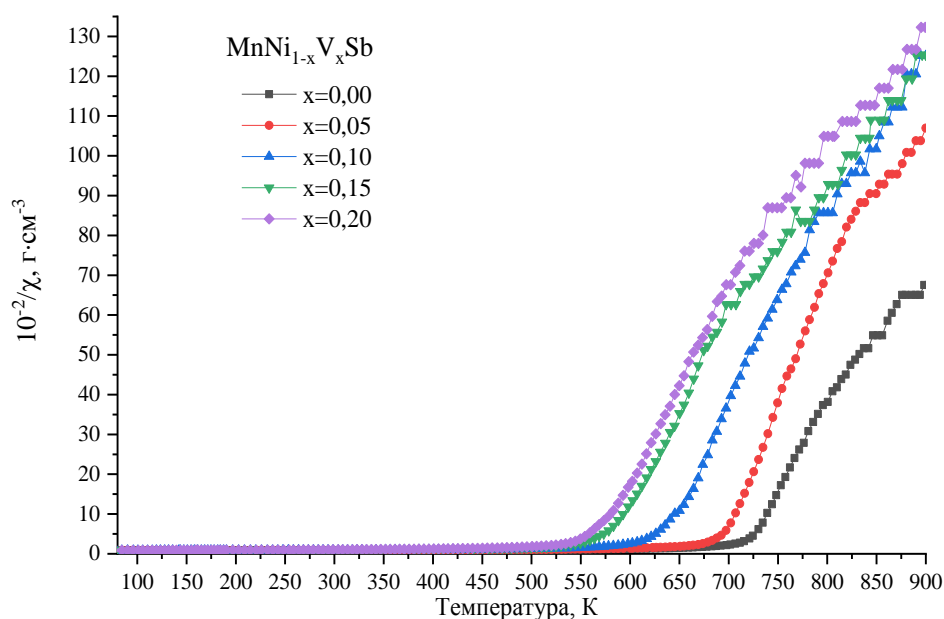


Рисунок 3. – Температурные зависимости намагниченности твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  при нагреве в магнитном поле 0,86 Тл

Наибольшим значением намагниченности ( $89,70 \text{ A}\cdot\text{m}^2\cdot\text{кг}^{-1}$  при  $80 \text{ K}$ ) обладает состав  $\text{MnNiSb}$ . При дальнейшем увеличении содержания ванадия в твердых растворах происходит уменьшение их удельной намагниченности. Величины температур фазового превращения «магнитный порядок – магнитный беспорядок» в твердых растворах системы  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  определены с использованием зависимости квадрата удельной намагниченности  $\sigma^2 = f(T)$ .

На рисунке 4 представлены зависимости магнитной восприимчивости твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  составов  $0,00 \leq x \leq 0,20$ .



**Рисунок 4. – Температурные зависимости магнитной восприимчивости твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  в магнитном поле  $0,86 \text{ Тл}$**

Проекции к оси  $T$  парамагнитной составляющей зависимостей  $10^{-2}/\chi = f(T)$  находится в положительной области значений температур. Это косвенным путем указывает на ферромагнитную природу обменного взаимодействия в твердых растворах. Величины удельной намагниченности и средних магнитных моментов при  $80$  и  $300 \text{ K}$ , температуры разрушения упорядоченного магнитного состояния твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  представлены в таблице 2.

**Таблица 2. – Численные значения величин удельной намагниченности, средних магнитных моментов при  $80$  и  $300 \text{ K}$ , температуры Кюри твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$**

$x$	$\sigma_{80\text{K}}, \text{ A}\cdot\text{m}^2\cdot\text{кг}^{-1}$	$\sigma_{300\text{K}}, \text{ A}\cdot\text{m}^2\cdot\text{кг}^{-1}$	$\mu_{80\text{K}}, \mu\text{Б}$	$\mu_{300\text{K}}, \mu\text{Б}$	$T, \text{ K}$
0,00	89,70	85,59	3,78	3,61	733
0,05	88,18	83,57	3,71	3,52	697
0,10	87,04	79,88	3,66	3,36	627
0,15	86,30	76,54	3,62	3,21	575
0,20	83,91	72,86	3,51	3,05	564

Изучены полевые зависимости удельной намагниченности  $\sigma = f(B)$  составов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  при температуре  $5, 77$  и  $300 \text{ K}$  (рисунки 4 и 5).

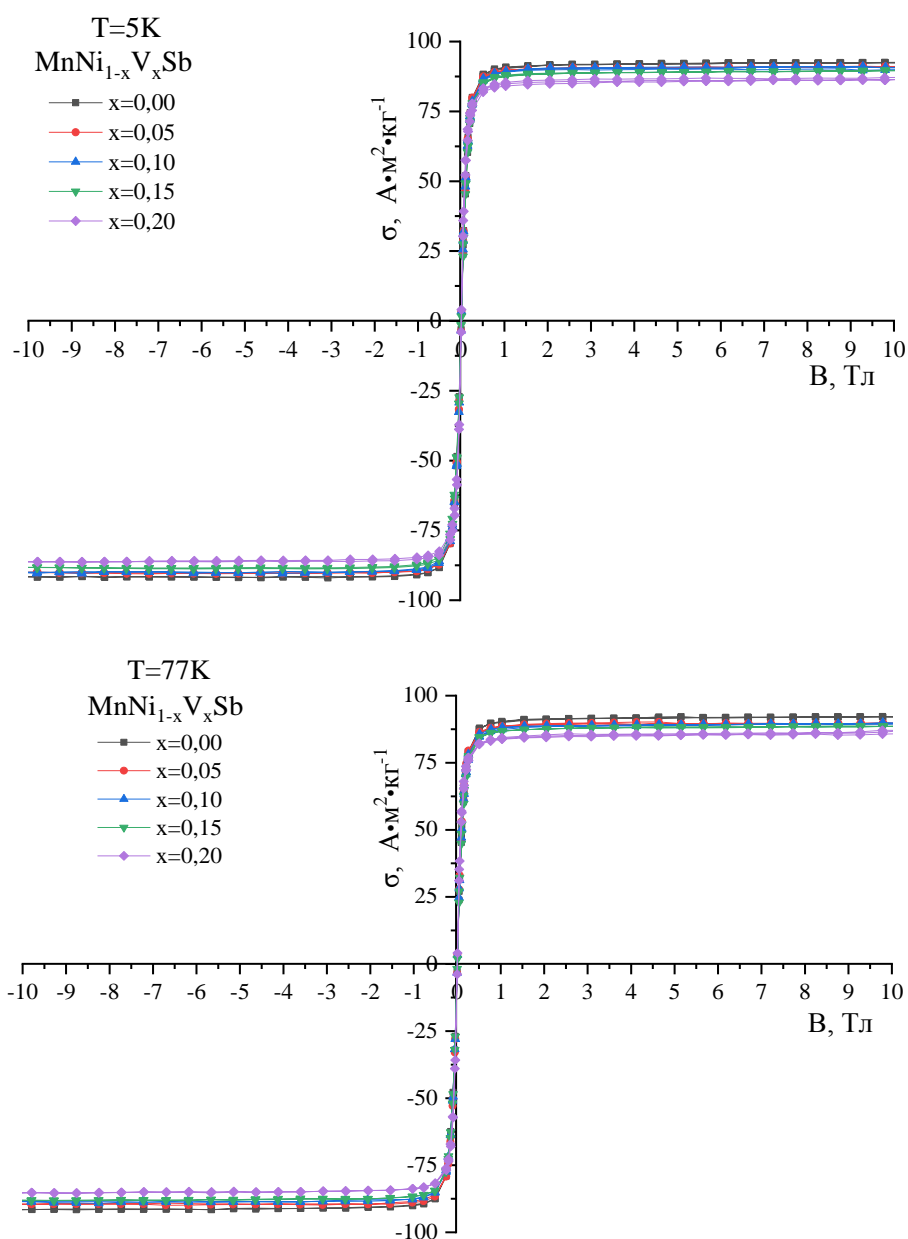
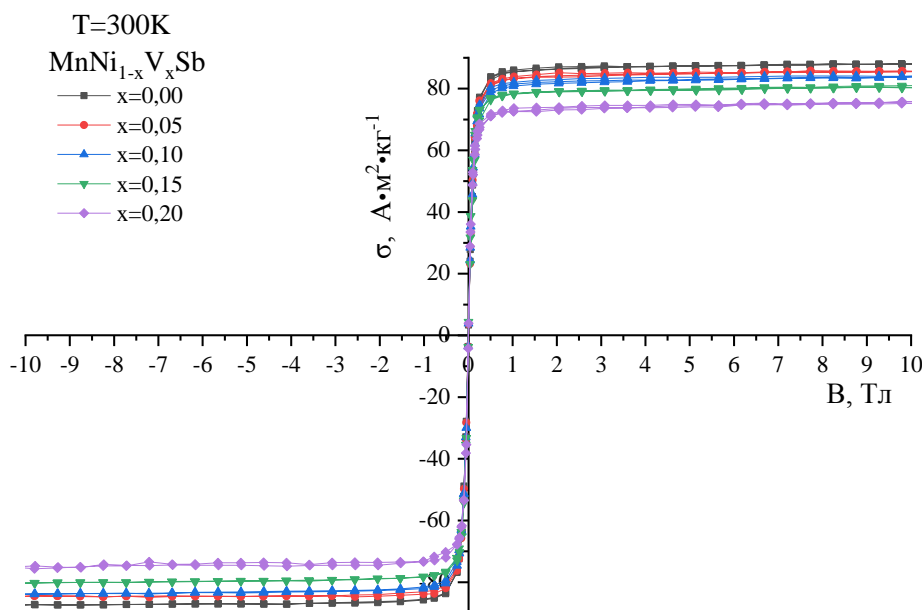


Рисунок 5. – Полевые зависимости удельной намагниченности твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  при 5 и 77 К

Из представленных зависимостей следует, что в магнитном поле  $B \geq 1,0$  Тесла намагниченность твердых растворов  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  выходит на насыщение. Сопоставление полученных результатов хорошо согласуется с результатами магнитных измерений методом Фарадея: во-первых, исследуемые твердые растворы обладают большими значениями величин намагниченности; во-вторых, с понижением температуры намагниченность изменяется незначительно. Твердые растворы  $\text{MnNi}_{1-x}\text{V}_x\text{Sb}$  относятся к магнитомягким материалам.



**Рисунок 6. – Полевые зависимости удельной намагниченности твердых растворов MnNi<sub>1-x</sub>V<sub>x</sub>Sb при 300 К**

Определены удельная намагниченность насыщения ( $\sigma_s$ ) и значения магнитных моментов твердых растворов, рассчитанные из величин удельных намагниченностей при насыщении с использованием соотношения (1):

$$\mu = \frac{\sigma \cdot M}{N_A} \mu_B, \tag{1}$$

где  $\sigma$  – значение удельной намагниченности при насыщении,  $M$  – молярная масса,  $\mu_B$  – величина магнетон Бора,  $N_A$  – постоянная Авогадро. Полученные значения приведены в таблице 3.

**Таблица 3. – Удельная намагниченность насыщения ( $\sigma_s$ ) и значения магнитных моментов ( $\mu$ ) твердых растворов MnNi<sub>1-x</sub>V<sub>x</sub>Sb при температурах 5, 77 и 300 К**

x	T = 5 К		T = 77 К		T = 300 К	
	$\sigma_s, \text{A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$	$\mu, \mu_B$	$\sigma_s, \text{A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$	$\mu, \mu_B$	$\sigma_s, \text{A} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$	$\mu, \mu_B$
0,00	90,33	3,81	90,45	3,81	85,45	3,60
0,05	89,70	3,77	88,55	3,73	83,25	3,50
0,10	89,26	3,75	87,40	3,67	80,81	3,39
0,15	87,99	3,69	86,78	3,64	78,32	3,28
0,20	85,39	3,58	84,37	3,53	72,65	3,04

**Заключение**

Методом синтеза в твердой фазе впервые синтезированы растворы замещения MnNi<sub>1-x</sub>V<sub>x</sub>Sb в интервале концентраций 0,00 ≤ x ≤ 0,30. Рентгеноструктурные исследования показали, что образцы однофазны при комнатной температуре в интервале концентраций 20–25 мол.%. Установлено, что увеличение концентрации ванадия в твердых растворах приводит к увеличению размеров элементарной кристаллической ячейки. Величины намагниченности исходного твердого раствора MnNiSb больше, чем у легированных соединений. Выявлено, что температура фазового превращения «магнитный

порядок – магнітны беспарадак» в исследованных твердых растворах уменьшается при увеличении концентрации  $x$  замещения ионов Ni на V от 732 К для MnNiSb до 564 К для образца MnNi<sub>0,80</sub>V<sub>0,20</sub>Sb.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Magnetic hyperfine field on Cd in the Ni<sub>1+x</sub>MnSb alloy / J. Schaf [et al.] // *Hyperfine Interactions*. – 1978. – Vol. 4. – P. 397–401.
2. Giant magnetoresistance effects in intermetallic compounds (invited) / V. Sechovský [et al.] // *J. Appl. Phys.* – 1994. – Vol. 76. – P. 6913–6918.
3. Ruzs, J. Exchange interactions and correlation in Ni<sub>1+x</sub>MnSb Heusler alloys / J. Ruzs, J. Kudrnovsky, I. Turek // *J. of Magnetism and Magnetic Materials*. – 2007. – Vol. 310. – P. 1654–1656.
4. Electronic and magnetic properties of NiMn<sub>1-x</sub>Ho<sub>x</sub>Sb compounds / R. Grasin [et al.] // *Phys. Status Solidi B*. – 2012. – Vol. 249, nr 9. – 1779–1783.
5. Tuning the magnetocaloric response in half-Heusler/Heusler MnNi<sub>1+x</sub>Sb solid solutions / E. E. Levin [et al.] // *Phys. Rev. Materials*. – 2017. – Vol. 7, nr 1. – Article ID.075003.



УДК 530.112

**Сергей Леонидович Черкас<sup>1</sup>, Владимир Леонидович Калашиников<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник Института ядерных проблем  
Белорусского государственного университета

<sup>2</sup>канд. физ.-мат. наук, проф., ст. науч. сотрудник Римского университета Ла Сapiенца  
**Sergei Cherkas<sup>1</sup>, Vladimir Kalashnikov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Senior Researcher at the Institute of Nuclear Problems at the Belarusian State University

<sup>2</sup>Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Senior Researcher at the Sapienza University of Rome  
e-mail: <sup>1</sup>cherkas@inp.bsu.by, <sup>2</sup>vladimir.kalashnikov@uniroma1.it

## УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ВАКУУМА И ОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУР МАТЕРИИ ВО ВСЕЛЕННОЙ

*Рассчитывается вклад квантовых вакуумных флуктуаций в плотность энергии и давление вакуума, выводится уравнение состояния вакуума, а также определяется скорость скалярных упругих вакуумных волн в предположении нулевой энтропии вакуума. В рамках пятивекторной теории гравитации, допускающей произвольный выбор уровня отсчета плотности энергии, численно решаются уравнения для скалярных возмущений вакуума, материи и метрики пространства-времени. Рассчитывается фактор роста возмущений плотности материи и вакуума в ходе эволюции Вселенной начиная от поверхности последнего рассеяния до нашего времени. Полученные результаты позволяют предположить, что: 1) эволюция фоновой метрики близка к описываемой в рамках космологии Милна; 2) проявления темной энергии и темной материи могут быть интерпретированы как единый результат вакуумных флуктуаций; 3) формирование как мелкомасштабных так и крупномасштабных структур во Вселенной может начинаться гораздо раньше, чем предсказывает стандартная  $\Lambda$ CDM-модель и без какой-либо темной материи.*

### The Equation of Vacuum State and the Structure Formation in the Universe

*The vacuum is considered as some fluid emergent from the zero-point fluctuations of the quantum fields contributing into the vacuum energy density and pressure. The equation of vacuum state and the speed of vacuum sound-waves are deduced under the assumption of zero vacuum entropy. Evolution of the background space-time metric resembles that of the Milne's-like universe. In the framework of the five-vector theory of gravitation allowing an arbitrary choice of the energy density reference level, the dynamics of the vacuum, pressureless matter, and space-time metrics perturbations is traced under this background. The obtained results show the very early formation of the Universe structure without the need of dark matter. Thus, a vacuum can be considered as some type of the dark-energy-matter unification*

#### Введение

Влияние вакуума квантовых полей на эволюцию Вселенной является важной задачей, пока еще окончательно не решенной [1–8]. Можно выделить две различные точки зрения на данный вопрос. В 50-е г. прошлого века на фоне успехов квантовой теории поля в пространстве Минковского широко рассматривался квазиклассический подход [9], когда источником гравитационного поля в уравнениях Эйнштейна служило среднее значение тензора-энергии импульса квантовых полей

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle, \quad (1)$$

где  $\Lambda$  – космологическая постоянная Эйнштейна. Хотя, в принципе, гравитация не перенормируема, считая ее некоторой эффективной теорией, можно по аналогии с квантовой теорией поля использовать перенормировку при вычислении среднего значения тензора-энергии импульса  $\langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$  [9], что приводит к

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = Ag_{\mu\nu} + B\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \dots F_{\mu\nu}(R), \quad (2)$$

где  $F_{\mu\nu}$  – некоторая нелинейная функция тензора кривизны Римана  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ . В таком подходе слагаемое, расходящееся до перенормировки как 4-я степень импульса (константа  $A$ ), приводит к перенормировке космологической постоянной  $\Lambda$ , а слагаемое, расходящееся как вторая степень импульса (константа  $B$ ), перенормирует гравитационную постоянную  $G$ . Оставшиеся слагаемые служат основанием для так называемых  $F(R)$  теорий [10]. После перенормировки для безмассовых полей из соображений размерности плотность вакуума в расширяющейся Вселенной имеет порядок  $\rho_{vac} : H^4$ , где  $H$  – постоянная Хаббла. Поскольку критическая плотность  $\rho_{cr} : H^2 M_p^2$ , где  $M_p$  – масса Планка, то вакуум оказывается практически пуст, по крайней мере, в настоящее время, когда постоянная Хаббла очень мала.

С другой стороны, идейно простая структура уравнений Эйнштейна, согласно которой тензор-энергии импульса определяет кривизну пространства-времени, сталкивается с некоторыми труднообъяснимыми фактами при сопоставлении с астрофизическими данными. В частности, ротационные кривые спиральных галактик указывают на существование некой несветящейся материи, а ускоренное расширение Вселенной [2; 3] – на темную энергию, действующую как космологическая постоянная Эйнштейна.

В вышеупомянутом подходе получается, что и темная энергия, и материя должны представлять собой некоторые классические субстанции, не связанные с квантовыми свойствами вакуума. Здесь существенным моментом является требование инвариантности среднего значения  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$  относительно общих преобразований координат. Однако видно, что при таком взгляде существует фундаментальная проблема – в общей теории относительности (ОТО) невозможно определить вакуумное состояние, инвариантное относительно общих преобразований координат [9; 11], более того, только в некоторых частных случаях фоновых метрик оказывается возможным построить вакуумное состояние [12].

Возникает вопрос: является ли правомерным требовать инвариантности величины  $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ , если само вакуумное состояние  $|0\rangle$  неинвариантно? В связи с этим в последнее время появилась точка зрения, что в самой теории гравитации инвариантность относительно общих преобразований координат должна быть нарушена. Примерами теорий подобного типа являются теория Хоравы – Лившица [13], теория динамических форм [14], унимодулярная гравитация [15–21], а также пятивекторная гравитация (ПВТ) [22]. Соответственно, открываются новые возможности для отождествления плотности энергии вакуума с темной энергией, а также, поскольку вакуум пертурбуруется (т. е. может быть неоднородным), то и с темной материей.

В частности, нарушение инвариантности относительно общих преобразований координат в рамках ПВТ, в которой плотность энергии определяется с точностью до некоторой константы, позволяет объяснить, почему главное слагаемое  $\rho_{vac} : M_p^4$  не влияет на расширение Вселенной. В рамках ОТО его нельзя отбрасывать произвольно. Между тем из физических соображений можно предположить, что некоторые расходящиеся составляющие в плотности энергии и давления могут и должны быть исключены, в то время как другие должны корректно учитываться. Это хорошо заметно на примере таких простых моделей, как модель Гоуди [23]. Этот вопрос будет исследован с использованием ультрафиолетового обрезания сопутствующих

импульсов  $k$  (конформных, или так называемых comoving), связанных с физическими импульсами  $p = k/a$ , где  $a$  – масштабный фактор. Сопутствующие импульсы  $k$  не меняются в ходе эволюции Вселенной, так что кажется приемлемым обрезать их некоторой постоянной величиной порядка массы Планка  $M_p$ .

Оказывается возможным получить правильный порядок величины  $\rho_{vac} : M_p^2 H^2$ , рассматривая остаточные вакуумные флуктуации [24; 25]. Свойства остаточной энергии вакуума наводят на заманчивую мысль описывать вакуум как некоторую среду, обладающую вполне определенным уравнением состояния. История данной концепции прослеживается начиная с эфира, когда вакуум отождествлялся с некоторой субстанцией [26–28], и заканчивая моделями квинтэссенции, к-эссенции и космологического газа Чаплыгина [29; 30]. По-видимому, реальная ситуация выглядит следующим образом: для пространства-времени Минковского эфир отсутствует, что связано с инвариантностью вакуумного состояния по отношению к преобразованиям Лоренца. Для гравитации, поскольку нет вакуумного состояния, инвариантного относительно общих преобразований координат, имеется некоторая предпочтительная система отсчета, что, по-видимому, указывает на существование квантово-гравитационного эфира. Можно сказать, что инвариантность имеет следствием пустое пространство, в то время как нарушение инвариантности приводит к существованию эфира.

### Нарушение калибровочной инвариантности в рамках ПВТ

Согласно ПВТ [22] стандартное действие Эйнштейна – Гильберта варьируется не по всем возможным метрикам  $g_{\mu\nu}$  пространства-времени, а по некоторому ограниченному их классу:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2 (1 - \partial_m P^m)^2 d\eta^2 - \gamma_{ij} (dx^i + N^i d\eta)(dx^j + N^j d\eta), \quad (3)$$

где  $x^\mu \equiv \{\eta, \mathbf{x}\}$ ,  $\gamma_{ij}$  – метрический тензор трехмерного пространства,  $a = \gamma^{1/6}$  – масштабный фактор, определенный локально,  $\gamma = \det \gamma_{ij}$ . Пространственная часть интервала (3) может быть записана как

$$dl^2 \equiv \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2(\eta, \mathbf{x}) \tilde{\gamma}_{ij} dx^i dx^j, \quad (4)$$

где  $\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij}/a^2$  – матрица с определителем равным единице.

По форме интервал (3) аналогичен ADM [31], но вместо функции хода используется выражение  $1 - \partial_m P^m$ , где  $\partial_m$  – частная производная,  $P^m$  – трехмерный вектор (относительно вращений). Варьирование стандартного действия Эйнштейна – Гильберта [32]

$$S = -\frac{M_p^2}{12} \int G \sqrt{-g} d^4x, \quad (5)$$

где  $G = g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\alpha\nu}^\rho \Gamma_{\beta\rho}^\nu - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \Gamma_{\nu\rho}^\rho)$  и  $M_p$  – масса Планка,  $M_p = \sqrt{\frac{3}{4\pi G}}$  по векторам  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{N}$  и 3-метрике  $\gamma_{ij}$ , которую можно параметризовать тремя векторами-триадами, приводит к уравнениям ПВТ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \gamma_{ij}} \left( \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} - \frac{6}{M_p^2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) &= 0, \\
\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial N^i} \left( \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} - \frac{6}{M_p^2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) &= 0, \\
\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial(\partial_j P^i)} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial(G\sqrt{-g})}{\partial(\partial_\lambda g^{\mu\nu})} - \frac{6}{M_p^2} T_{\mu\nu} \sqrt{-g} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Последнее уравнение более слабое, чем соответствующее уравнение Гамильтоновой связи ОТО. С другой стороны, в ПВТ возникают ограничения  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) = 0$ ,  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{N}) = 0$  на множители Лагранжа [22]. Если выбрать калибровку в виде  $\nabla \cdot \mathbf{N} = 0$ , то гамильтонова связь удовлетворяется с точностью до константы.

Хотя ослабление требования инвариантности относительно общих преобразований координат допускает более широкий класс лагранжианов, чем (5), в данной работе используется лагранжиан ОТО, т. е. гамильтонова связь становится слабее только из-за ограничения класса возможных метрик. Что касается лоренц-инвариантности, то нарушение инвариантности относительно общих преобразований координат может как сохранять ее (как, например, в унимодулярной гравитации [15–19]), так и нарушать [33; 34]. В данном случае класс метрик (10), в котором время и пространство не рассматриваются как единое многообразие, явным образом нарушает лоренц-инвариантность (иначе кванто-гравитационный эфир перестал бы существовать). Разумеется, это относится только к гравитации и квантовым полям ее фона, что касается квантовых полей в отсутствие гравитации, то лоренц-инвариантность имеет место, поскольку в этом случае лоренц-инвариантное вакуумное состояние существует.

Для плоского фонового пространства-времени после компенсации главной части вакуумной энергии константой, возникающей в гамильтоновой связи ПВТ, симметрия восстанавливается до ОТО. Для почти плоского фонового пространства-времени (расширяющейся Вселенной) остаются плотность энергии и давление остаточных вакуумных флуктуаций.

### Вакуум как субстанция с уравнением состояния

Рассмотрим квантовое скалярное поле  $\hat{\phi}(\eta, \mathbf{x})$  на классическом фоне однородной, плоской, расширяющейся Вселенной с метрикой пространства-времени:

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) (d\eta^2 - \tilde{\gamma}_{ij} dx^i dx^j), \tag{7}$$

где  $\tilde{\gamma}_{ij} = \text{diag}\{1, 1, 1\}$  – евклидова 3-метрика. На настоящий момент известно по крайней мере одно скалярное поле, а именно недавно открытый бозон Хиггса [35]. Также было показано [24], что гравитационные волны дают такой же вклад в плотность энергии вакуума, как и скалярное поле. Операторы плотности и давления безмассового скалярного поля записываются следующим образом:

$$\hat{P}_\phi = \frac{\hat{\phi}'^2}{2a^2} + \frac{(\nabla \hat{\phi})^2}{2a^2}, \quad \hat{P}_\phi = \frac{\hat{\phi}'^2}{2a^2} - \frac{(\nabla \hat{\phi})^2}{6a^2}. \tag{8}$$

Случай массивных полей будет рассмотрен в следующем разделе. Средние давление и плотность всех видов материи определяют эволюцию масштабного фактора, например, для плоской Вселенной

$$-\frac{1}{2}M_p^2 a'^2 + \rho a^4 = const, \quad (9)$$

$$M_p^2 a'' = (\rho - 3p)a^3, \quad (10)$$

где штрих означает дифференцирование по конформному времени  $\eta$ . Обратим внимание, что уравнение Фридмана (9) выполняется с точностью до константы в рамках ПВТ.

Разложим скалярное поле по плосковолновым модам  $\hat{\phi}(\eta, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ , которые выражаются стандартным образом через операторы рождения и уничтожения [9]:

$$\hat{\phi}_{\mathbf{k}}(\eta) = \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ \chi_{\mathbf{k}}^*(\eta) + \hat{a}_{\mathbf{k}} \chi_{\mathbf{k}}(\eta). \quad (11)$$

Комплексные функции  $\chi_k(\eta)$  удовлетворяют соотношениям [9; 12]

$$\chi_k'' + 2 \frac{a'}{a} \chi_k' + k^2 \chi_k = 0, \quad (12)$$

$$a^2(\eta)(\chi_k \chi_k'^* - \chi_k^* \chi_k') = i$$

и могут быть найдены в адиабатическом приближении

$$\chi_k(\eta) = \frac{\exp\left(-i \int_0^\eta \sqrt{k^2 - \frac{a''(\tau)}{a(\tau)}} d\tau\right)}{\sqrt{2} a(\eta)^4 \sqrt{k^2 - \frac{a''(\eta)}{a(\eta)}}}. \quad (13)$$

Вычислим вакуумную плотность энергии скалярного поля  $\rho_v \equiv \frac{1}{V} \int_v \langle 0 | \hat{\rho}_\phi | 0 \rangle d^3 \mathbf{x}$ , находя среднее по вакуумному состоянию, а также по некоторому нормировочному объему  $V$ , который далее полагается равным единице:

$$\begin{aligned} \rho_v a^4 &= \frac{a^2}{2} \int \left( \langle 0 | \hat{\phi}'^2 | 0 \rangle + \langle 0 | (\nabla \hat{\phi})^2 | 0 \rangle \right) d^3 \mathbf{x} = \frac{a^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \langle 0 | \hat{\phi}'_{\mathbf{k}} \hat{\phi}'_{-\mathbf{k}} | 0 \rangle + k^2 \langle 0 | \hat{\phi}_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{-\mathbf{k}} | 0 \rangle = \\ &= \frac{a^2}{2} \sum_{\mathbf{k}} \chi_k'^* \chi_k' + k^2 \chi_k^* \chi_k \approx \frac{1}{2} \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \left( \frac{k_{max}^4}{4} + \frac{k_{max}^2 a'^2}{4a^2} + O(a'^3) + O(a'a'') + O(a''' + \dots) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где считается, что  $a'^2$ ,  $a''$  имеют второй порядок малости,  $a'^3$ ,  $a''a'$  – третий и т. д. [25]. Как видно из уравнения (14), два первых слагаемых в средней вакуумной плотности энергии содержат расходимости 4-ой и 2-ой степени по  $k_{max}$ . Первое слагаемое может быть отброшено, если считать, что уравнение Фридмана выполняется с точностью до константы. Если во втором слагаемом использовать ультрафиолетовое обрезание  $k_{max} : M_p$  (т. е. порядка массы Планка), то плотность энергии будет порядка критической плотности. Может возникнуть вопрос, почему обрезаются сопутствующие импульсы  $k$ , а не, например, физические  $p = k/a$ . Дело в том, что для обрезания сопутствующих импульсов достаточно легко построить фундаментальную модель, рассматривая, например, теорию гравитации в метрике (10) на решетке, когда максимальный импульс определяется с периодом решетки. В то же время для обрезания физических импульсов требуется строить сложные динамические модели.

Следует заметить, что, поскольку мы рассматриваем уравнение Фридмана, выполняющееся с точностью до константы, само понятие критической плотности  $M_p^2 H^2 / 2$  теряет свое фундаментальное геометрическое значение как разграничивающее замкнутую и открытую Вселенные, т. е. три возможных значения кривизны изотропного пространства  $-1, 0, 1$  не связаны больше с критической плотностью. В данной работе априори рассматривается плоская Вселенная. В результате для плотности энергии вакуума находим

$$\rho_v = \frac{a'^2}{2a^6} M_p^2 S_0, \quad (15)$$

где для описания ультрафиолетового обрезания был введен параметр

$$S_0 = \frac{1}{2M_p^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} = \frac{1}{M_p^2 (2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2k} = \frac{k_{max}^2}{8\pi^2 M_p^2}.$$

Вычислим среднее значение следующей величины:

$$\begin{aligned} \int \langle 0 | \hat{\rho}_\phi - 3\hat{p}_\phi | 0 \rangle d^3 \mathbf{x} &= -\frac{1}{a^2} \int (\langle 0 | \hat{\phi}'^2 | 0 \rangle - \langle 0 | (\nabla \hat{\phi})^2 | 0 \rangle) d^3 \mathbf{x} = \\ &= -\frac{1}{a^2} \sum_{\mathbf{k}} \langle 0 | \hat{\phi}'_{\mathbf{k}} \hat{\phi}'_{-\mathbf{k}} | 0 \rangle - k^2 \langle 0 | \hat{\phi}_{\mathbf{k}} \hat{\phi}_{-\mathbf{k}} | 0 \rangle = -\frac{1}{a^2} \sum_{\mathbf{k}} a (\chi_k'^* \chi_k' - k^2 \chi_k^* \chi_k) \approx \\ &= \frac{1}{2a^6} (aa'' - a'^2) \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{k} + O(a'^3) + O(a'a'') + O(a''') + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Поскольку величина  $\rho_v - 3p_v$  не содержит расходимости :  $k_{max}^4$ , отбрасывая порядки выше второго по производным по времени, получим:

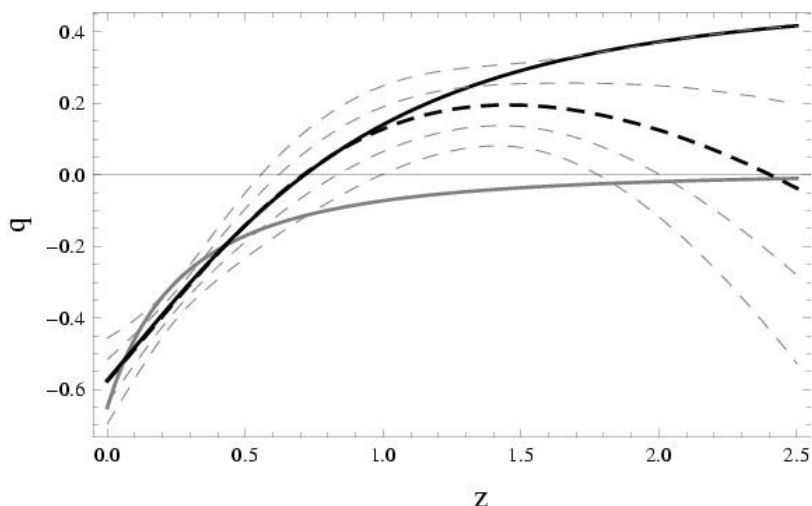
$$\rho_v - 3p_v = \frac{1}{a^6} (aa'' - a'^2) M_p^2 S_0. \quad (17)$$

Из уравнений (17) и (15) найдем давление вакуума:

$$p_v = \frac{M_p^2 S_0}{a^6} \left( \frac{1}{2} a'^2 - \frac{1}{3} a'' a \right). \quad (18)$$

Легко проверить, что давление и плотность вакуума, определяемые выражениями (15) и (18), удовлетворяют уравнению

$$\rho_v' + 3 \frac{a'}{a} (\rho_v + p_v) = 0. \quad (19)$$



Сплошная черная линия – стандартная  $\Lambda$  CDM-модель, сплошная серая линия – вакуумно-доминантная модель (22) настоящей работы, штриховые линии – результат реконструкции наблюдений [41], включающий среднее наблюдаемое значение (черная) и пределы  $1\sigma$  и  $2\sigma$  каналов погрешностей (серые).

**Рисунок 1. – Зависимость параметра замедления от красного смещения**

Уравнение (19) является одним из важнейших уравнений для описания эволюции Вселенной и позволяет рассматривать вакуум как некоторую субстанцию с определенным уравнением состояния. Можно записать уравнение состояния вакуума в явном виде. Для этого необходимо сначала найти зависимость масштабного фактора  $a$  от конформного времени. В более общем случае, когда кроме вакуума имеется холодная пылевидная материя, уравнения (9), (10) переписываются как

$$-\frac{1}{2}M_p^2 a'^2 + \rho_v a^4 + \frac{1}{2}M_p^2 \Omega_m H^2 a = const, \quad (20)$$

$$M_p^2 a'' = (\rho_v - 3p_v)a^3 + \frac{1}{2}M_p^2 \Omega_m H^2, \quad (21)$$

где  $\Omega_m$  – безразмерная константа, характеризующая плотность материи,  $H$  – значение постоянной Хаббла (в наше время  $\eta = \eta_0$ ), когда масштабный фактор равен 1. Полагая константу в правой части уравнения (20) равной  $\frac{1}{2}H^2 M_p^2 (S_0 + \Omega_m - 1)$ , так, чтобы  $a'(\eta_0) = H$  при  $a(\eta_0) = 1$ , находим зависимость постоянной Хаббла от масштабного фактора

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a^2} \frac{da}{d\eta} = \frac{H}{a^2} \sqrt{\frac{S_0 + \Omega_m - 1 - \Omega_m a}{S_0 a^{-2} - 1}} \quad (22)$$

и уравнение состояния вакуума

$$w_v = p_v/\rho_v = \left(1 - \frac{2}{3} \frac{a'' a}{a'^2}\right) = \frac{2a^3 \Omega_m - 3a^2 (S_0 + \Omega_m - 1) + S_0 (S_0 + \Omega_m - 1)}{3(a^2 - S_0)((a-1)\Omega_m - S_0 + 1)}, \quad (23)$$

где было использовано, что  $a' = a^2 H(a)$ ,  $a'' = a^2 H(a) \frac{d}{da} (a^2 H(a))$ . Точка в уравнении (22) означает дифференцирование по космическому времени  $dt = ad\eta$ .

Уравнение состояния (23) не имеет особенностей до Большого разрыва (так называемый Big Rip [36]) при  $a = \sqrt{S_0}$ , который должен случиться в будущем, если  $S_0 > 1$  (при  $S_0 < 1$  мы уже были бы свидетелями этого явления). Явное вычисление плотности вакуума приводит к выражению

$$\rho_v = \frac{H^2 M_p^2 S_0 (S_0 + \Omega_m - 1 - a\Omega_m)}{2a^4 (S_0 - a^2)}. \quad (24)$$

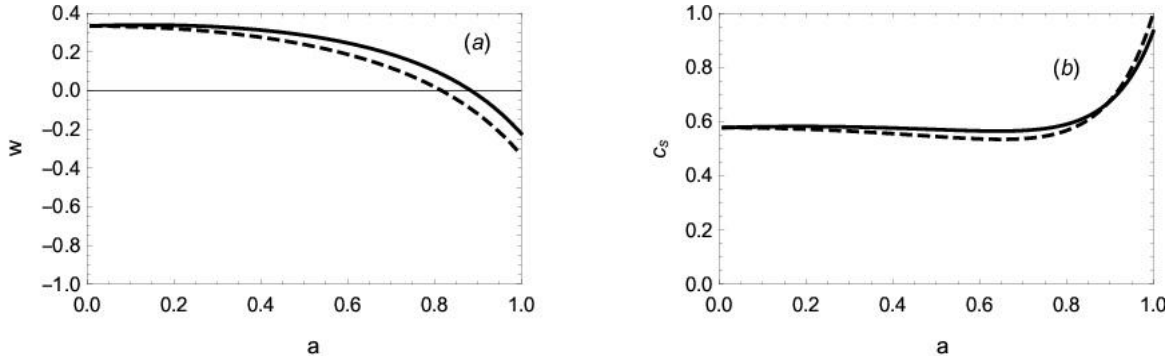
Следует заметить, что когда речь идет о простых зависимостях типа  $p = w\rho$ , где  $w = const$ , то из уравнения (19) мы имеем:  $\rho a^{3(1+w)} = const$ . В этом случае легко записать закон расширения Вселенной: из уравнения (10) находим  $a'' a^{-3w} = const$ , откуда следует, что  $a : \eta^{2+3w}$ , кроме  $w = -1/3$ , когда

$$a : \exp(H\eta). \quad (25)$$

Последний случай соответствует экспоненциальному расширению Вселенной в конформном времени и линейному  $a(t) : Ht$  в космическом времени, т. е. Вселенной типа Милна [37].

Для более сложных уравнений состояния, соответствующих вакууму, ситуация не так проста. Для вакуума с помощью уравнения (23) можно определить, какое будет уравнение состояния, если известен в данный момент закон расширения. Например, для Милновской Вселенной мы имеем из (15), (18), что  $w_{vac} : 1/3$ , т. е. как для излучения. Получается, что, если вакуум имеет на данном промежутке времени уравнение состояния типа радиации, это не значит, что мы имеем Вселенную, расширяющуюся как радиационно-доминантная. Дело в том, что в уравнение (10) для второй производной по конформному времени входит выражение  $1 - 3w$ , и при  $w$ , близком к  $1/3$ , играют роль поправки к закону  $w = 1/3$ . Для радиационно-доминантной Вселенной эти поправки в точности равны нулю, в то время как для вакуумно-доминантной Вселенной они оказываются ненулевыми, что и приводит к расширению Милновского типа. Действительно, при малых масштабных факторах из уравнения (22) имеем  $H(a) : 1/a$ , т. е. как для вселенной Милна. На рисунке 1 приведены результаты расчета по формуле (22) так называемого параметра замедления расширения Вселенной  $q(z) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{1+z}{H} \frac{dH(z)}{dz} - 1$ . Как видно, вплоть до  $z = 2$  этот параметр близок к нулю, как для Милновской Вселенной. Разумеется, пространственная геометрия исходной Милновской Вселенной представляет собой пространство постоянной отрицательной кривизны, в то время как авторы ведут рассмотрение на фоне евклидова пространства (плоская модель). В последнее время космология с линейным расширением в космическом времени вновь привлекла внимание исследователей [38–40], хотя, по-видимому, она находится в противоречии с наблюдаемым ускоренным расширением Вселенной. Модель, обсуждаемая в данной работе, свободна от указанного противоречия, поскольку Вселенная в ней расширяется с ускорением при  $z \leq 2$ , как показано на рисунке 1, где также приведены результаты реконструкции параметра замедления  $q$  по экспериментальным данным [41].





Сплошная диния –  $S_0 = 2.3$ ,  $\Omega_m = 0.3$ , штриховая  $S_0 = 2.3$ ,  $\Omega_m = 0.03$ .

**Рисунок 2.** – Уравнение состояния вакуума (а) и скорость скалярных упругих волн в вакууме (б) в зависимости от масштабного фактора

Поясним близость к Милновской Вселенной еще раз, рассмотрев для наглядности частный случай  $\Omega_m = 0$ . Тогда

$$\rho_v = \frac{H^2 M_p^2 S_0 (S_0 - 1)}{2a^4 (S_0 - a^2)}, \quad w_v = \frac{1}{3} - \frac{2a^2}{3(S_0 - a^2)}. \quad (26)$$

Из уравнения (10) находим:

$$\frac{M_p^2 a''}{a} = \rho_v (1 - 3w_v) a^2 = \frac{H^2 M_p^2 S_0 (S_0 - 1)}{(S_0 - a^2)^2}, \quad (27)$$

откуда при малых  $a$  следует  $\frac{a''}{a} : const$ , т. е. приближенно Вселенная типа Милна.

В то же время для уравнения состояния  $w = -1/3$  и  $\rho = \frac{H^2 M_p^2}{2a^2}$  получается  $\frac{a''}{a} = const$ , т. е. чисто экспоненциальное расширение в конформном времени, в точности как у Милновской Вселенной.

Выполнение уравнения (19) позволяет предполагать, что описание вакуума как некоторой среды распространяется не только на уравнение состояния, но также на скорость звука, которая равна

$$c_s^2 = \frac{p'}{\rho'} = \frac{2}{3} \frac{(5a^5 \Omega_m - a^3 \Omega_m S_0 + (7a^2 S_0 - 9a^4 - 2S_0^2)(\Omega_m + S_0 - 1))}{(a^2 - S_0)(5a^3 \Omega_m - 3a \Omega_m S_0 + (4S_0 - 6a^2)(\Omega_m + S_0 - 1))}. \quad (28)$$

Заметим, что согласно (14), (16) главный вклад в давление и плотность вакуума вносят планковские частоты, которые заведомо больше частоты упругих волн, распространяющихся по вакууму (т. е. локальные сжатия и расширения в вакуумной упругой волне можно рассматривать как расширение и коллапс некоторой маленькой Вселенной). В формуле (28) предполагается, что рождением частиц из вакуума (т. е. изменением энтропии вакуума) можно пренебрегать, т. е. рассматривается адиабатический вакуум, который остается вакуумом на протяжении всей эволюции, а также когда по нему проходит волна возмущения.

Результаты расчета (рисунок 2) показывают, что количество материи слабо влияет на скорость упругой (звуковой) волны в вакууме, которая возрастает от  $1/\sqrt{3}$  до значения, соответствующего настоящему времени. При дальнейшем расширении

Вселенной скорость звука становится больше скорости света и обращается в бесконечность примерно при  $a = \sqrt{\frac{2}{3}} S_0$ , т. е. из уравнения для скорости звука следует, что Большой разрыв наступает несколько раньше, чем это следует из уравнения состояния. Что касается превышения скорости света, то на основе данной эмпирической модели трудно сказать, имеем ли мы дело с физическим эффектом [42] или следствием пренебрежения энтропией вакуума. Заметим только, что фактически рассмотрение идет не в рамках ОТО, а в рамках ПВТ.

Заметим также, что количество излучения вообще не влияет на уравнение состояния и скорость упругих волн в вакууме, поскольку для излучения  $\rho a^4 = const$ , и любое его количество в уравнении (9) может компенсироваться константой, с другой стороны, для излучения  $\rho - 3p = 0$ , и оно никак не влияет на вычисление давления вакуума с помощью формулы (16).

В отличие от линейно расширяющейся Вселенной с уравнением состояния  $w = -1/3$  [38; 40] и мнимой скоростью звука  $c_s = \sqrt{w}$ , в нашем случае скорость звука всегда положительна. Это означает отсутствие нефизических экспоненциально растущих решений. Такие решения легко отбрасывать в аналитике [43], но при численном счете это затруدنительно.

#### Массивные поля и конденсаты

В предыдущем разделе была рассмотрена вакуумная энергия для безмассового поля. Для массивных полей основная часть вакуумной энергии, не зависящая от скорости расширения Вселенной, записывается как

$$\rho_v = \frac{1}{4\pi^2 a^4} \int_0^{k_{max}} k^2 \sqrt{k^2 + a^2 m^2} dk \approx \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{k_{max}^4}{a^4} + \frac{m^2 k_{max}^2}{a^2} + \frac{m^4}{8} \left( 1 + 2 \ln \left( \frac{m^2 a^2}{4k_{max}^2} \right) \right) \right). \quad (29)$$

Первое слагаемое в (29), соответствующее невидимой, т. е. непертурбирующей радиации, компенсируется константой в уравнении (9). Что касается остальных слагаемых, то, поскольку столь быстрое расширение Вселенной не наблюдается, должен существовать механизм компенсации этих плотностей энергии, по крайней мере, до уровня критической плотности. Второе слагаемое  $\rho_v : m^2 k_{max}^2 / a^2$  ведет себя как некоторая субстанция с уравнением состояния  $w = -1/3$ , и, в принципе, такая субстанция может пертурбироваться, однако скорость звука в ней чисто мнимая, что приводит к существованию экспоненциально растущих решений [43], поэтому должен существовать точный компенсационный механизм для слагаемых этого типа. Более чем полвека назад Паули предположил, что вакуумные энергии бозонов и фермионов должны быть взаимно скомпенсированы [44]. Для примера, рассмотрим только очень грубую компенсацию, рассматривая самые тяжелые частицы. Как известно, фермион наибольшей массы – это топ-кварк  $m_t = 173.2$  ГэВ. Имеются также бозон Хиггса  $m_H = 125$  ГэВ, заряженный векторный бозон  $m_W = 80,4$  ГэВ, а также нейтральный векторный бозон  $m_Z = 91.2$  ГэВ. В результате правило сумм Паули для слагаемых  $\rho_v : m^2 k_{max}^2 / a^2$  записывается как

$$m_H^2 + 6m_W^2 + 3m_Z^2 + \sum_{A=1}^{N_A} m_A^2 = 12m_t^2, \quad (30)$$

где предполагается, что в природе существуют еще  $N_A$  неоткрытых скалярных бозонов. Тогда находим, что правило сумм удовлетворяется, если существует еще один неоткрытый бозон массой  $m_A : 530$  ГэВ или, например, четыре бозона массой  $m_A : 265$  ГэВ каждый. Ситуация со слагаемыми  $\rho_v : m^4$ , обладающими уравнением состояния  $p_v = -\rho_v$  более сложна, поскольку конденсаты, возникающие в процессе генерации масс в Стандартной модели физики частиц, имеют такой же порядок величины:  $\rho_v : m_H^4$  для механизма Хиггса [45] и  $\rho_v : m_d^4$  для конденсата квантовой хромодинамики [46], где  $m_d$  – масса d-кварка. Также возможна (и необходима) неполная компенсация с точностью порядка критической плотности. Слагаемые :  $m^4$  типа космологической постоянной в принципе могут существовать (после компенсации до необходимого уровня), но их плотность энергии не пертурбуруется, и таким образом они влияют на образование структур только через закон расширения Вселенной. В данной работе эта возможность не рассматривается, поскольку космологическая постоянная оказывает влияние на закон расширения только на поздних стадиях, там, где закон расширения Вселенной после поверхности последнего рассеяния удовлетворительно воспроизводится (рисунок 1) только уравнением состояния вакуума (15), (18).

Интересно, что слагаемые подобного типа, связанные с массой нейтрино  $\rho_v : m_\nu^4$ , не требуют какой-либо компенсации, поскольку имеют правильный порядок. В то же время общепринятого механизма генерации масс нейтрино пока не было предложено.

Заметим также, что предлагались суперсимметричные модели, в которых число бозонных степеней свободы равно числу фермионных степеней свободы с мягким нарушением симметрии [47], приводящие к точной компенсации всех слагаемых.

В рамках ПВТ равенство бозонных и фермионных степеней свободы необязательно, поскольку нет необходимости требовать компенсации слагаемых типа  $\rho_v : k_{max}^4/a^4 : M_p^4/a^4$ , поэтому модели без суперсимметрии также возможны.

### Образование структур материи во Вселенной

Найденное уравнение состояния (23) и скорость звука в вакууме (28) являются основой для описания эволюции возмущений вакуума, радиации и материи в расширяющейся Вселенной. Поскольку предполагается, что уравнение Фридмана выполняется с точностью до константы, теория возмущений также должна быть построена в рамках ПВТ [43].

Метрика расширяющейся Вселенной с учетом возмущений пространства-времени имеет следующий вид:

$$ds^2 = a(\eta)^2(1 + 2A) \left( d\eta^2 - \left( \left( 1 + \frac{1}{3} \sum_{m=1}^3 \partial_m^2 F \right) \delta_{ij} - \partial_i \partial_j F \right) dx^i dx^j \right). \quad (31)$$

Данная метрика принадлежит классу метрик (3), по которому варьируется действие в ПВТ. Также рассматриваются возмущения плотности, давления  $\rho_c(\eta, \mathbf{x}) = \rho_c(\eta) + \delta\rho_c(\eta, \mathbf{x})$ ,  $p_c(\eta, \mathbf{x}) = p_c(\eta) + \delta p_c(\eta, \mathbf{x})$  и 4-скорости каждой из компонент среды:

$$u_c'' = \frac{1}{a(\eta)} \{(1-A), \nabla v_c(\eta, \mathbf{x})\}, \quad (32)$$

где  $v_c$  – потенциал скорости. В результате мы имеем дело со следующей системой уравнений [43] для Фурье преобразований возмущений  $\delta\rho_c(\eta, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta\rho_{c\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \dots$

$$-6A_k' + 6A_k \alpha' + k^2 F_k' + \frac{18}{M_p^2} e^{2\alpha} \sum_c V_{c\mathbf{k}} = 0, \quad (33)$$

$$-18\alpha' A_k' - 18A_k \alpha'^2 - 6k^2 A_k + k^4 F_k + \frac{18}{M_p^2} e^{2\alpha} \sum_c \delta\rho_{c\mathbf{k}} + 4A_k \rho_c = 0, \quad (34)$$

$$-12A_k - 3(F_k'' + 2\alpha' F_k') + k^2 F_k = 0, \quad (35)$$

$$-9(A_k'' + 2\alpha' A_k') - 18A_k \alpha'' - 18A_k \alpha'^2 - 9k^2 A_k + k^4 F_k - \frac{9}{M_p^2} e^{2\alpha} \sum_c 4A_k (3\rho_c - \rho_c) + 3\delta p_{c\mathbf{k}} - \delta\rho_{c\mathbf{k}} = 0, \quad (36)$$

$$-3\alpha' (\delta p_{c\mathbf{k}} + \delta\rho_{c\mathbf{k}}) - 3A_k' (\rho_c + p_c) - \delta\rho_{c\mathbf{k}}' + k^2 V_{c\mathbf{k}} = 0, \quad (37)$$

$$(\rho_c + p_c) A_k + 4V_{c\mathbf{k}} \alpha' + \delta p_{c\mathbf{k}} + V_{c\mathbf{k}}' = 0, \quad (38)$$

где  $\alpha = \ln a$  и были введены обозначения  $V_c = (p_c + \rho_c) v_c$  для каждого вида среды  $c$ .

Заметим, что в рамках ОТО обычно рассматриваются калибровочно-инвариантные потенциалы, соответствующие метрике

$$ds^2 = a^2(\eta) ((1 + 2\Phi(\eta, \mathbf{x})) d\eta^2 - (1 - 2\Psi(\eta, \mathbf{x})) \delta_{ij} dx^i dx^j), \quad (39)$$

а также инвариантные контрасты плотностей и потенциалов скоростей [49; 50]:

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_{c\mathbf{k}}(\eta) &= \frac{\delta\rho_{c\mathbf{k}}(\eta)}{\rho_c(\eta)} + \frac{\rho_c'(\eta)}{2\rho_c(\eta)} F_k'(\eta), \\ \tilde{v}_{c\mathbf{k}} &= \frac{V_{c\mathbf{k}}(\eta)}{\rho_c(\eta) + p_c(\eta)} - \frac{F_k'(\eta)}{2}, \\ \Phi_{\mathbf{k}}(\eta) &= A_{\mathbf{k}}(\eta) + \frac{a'(\eta) F_k'(\eta) + a(\eta) F_k''(\eta)}{2a(\eta)}, \\ \Psi_{\mathbf{k}}(\eta) &= -\frac{a'(\eta) F_k'(\eta)}{2a(\eta)} - A_{\mathbf{k}}(\eta) + \frac{1}{6} k^2 F_k(\eta). \end{aligned} \quad (40)$$

Разумеется, при выполнении уравнения Фридмана уравнения (33) – (38) могут быть переписаны в терминах инвариантных величин. Такие уравнения совпадают с известными [49; 50]. Однако, если уравнение Фридмана выполняется только с точностью до константы (9), то именно система (33) – (38) является фундаментальной, поскольку в этом случае невозможно получить непротиворечивую систему в терминах инвариантных переменных (39), (40). Это связано с тем, что метрика (39) не принадлежит классу метрик (3), по которым варьируется действие при описании гравитации в ПВТ.

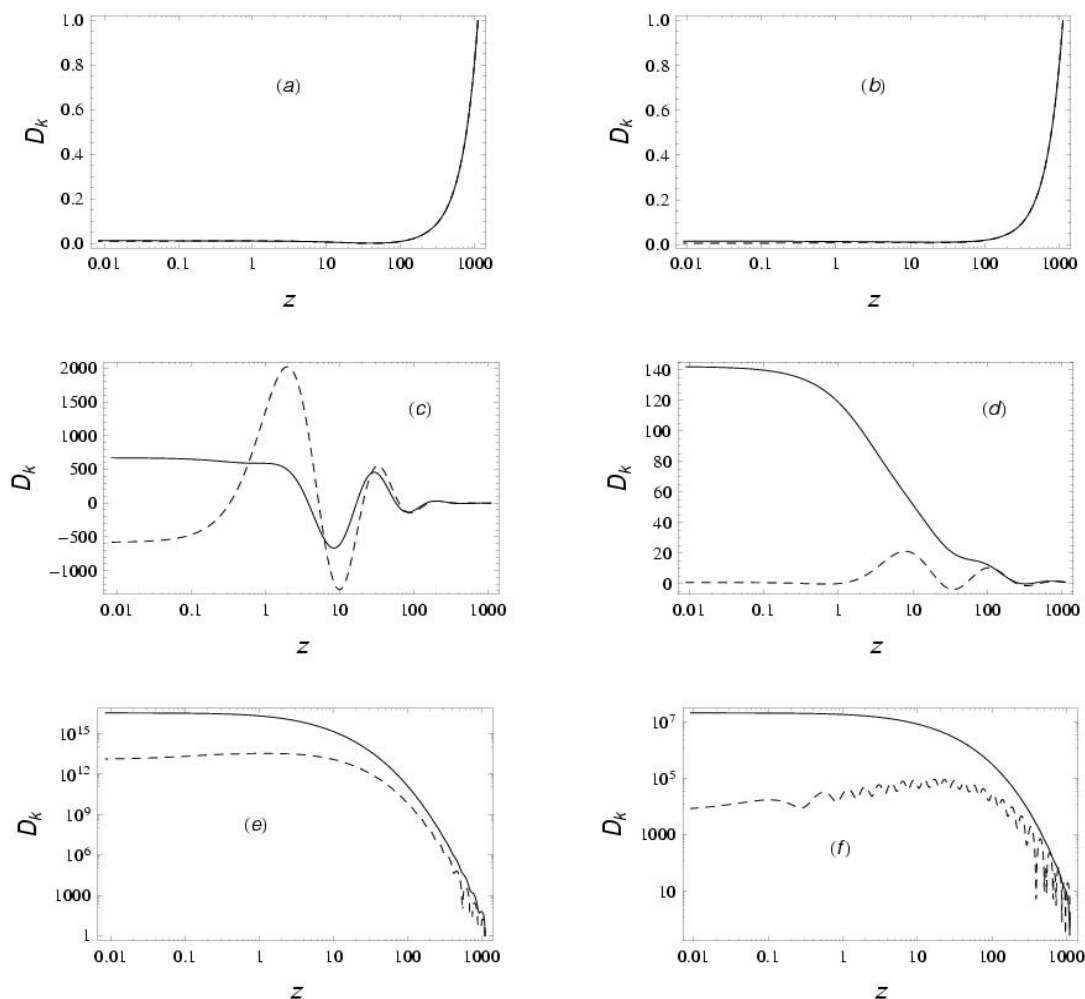
Был выполнен численный расчет эволюции возмущений материи  $c = m$  в (33) – (38) и вакуума  $c = v$  за пределами поверхности последнего рассеяния, когда излучение отделяется от вещества и начинают образовываться пространственные структуры из барионной материи. Вся материя предполагалась барионной  $\Omega_m \equiv \Omega_b$ . Как известно,

анизотропия микроволнового излучения показывает, какова степень пространственной неоднородности барион-фотонной плазмы на поверхности последнего рассеяния. Далее неоднородности отделившегося от излучения вещества возрастают с эволюцией Вселенной, что приводит к образованию структур: звезд, галактик и скоплений галактик [3; 55]. Авторы ограничились расчетом фактора роста неоднородностей

$$D_k(z) = \tilde{\delta}_k(z) / \tilde{\delta}_k(1100), \tag{41}$$

где  $z = 1100$  красное смещение, соответствующее поверхности последнего рассеяния. В уравнение (41) входят «инвариантные» величины, т. е. расчет ведется в выделенной системе координат (31), но затем следует перейти к величинам (40), одинаковым для всех наблюдателей.

Хотя в рассматриваемой модели горизонт отсутствует, постоянная Хаббла является характерным масштабом для эволюции пертурбаций, в частности, пертурбации с волновым числом  $k$ :  $H$  убывают, в то время как пертурбации с  $k > H$  возрастают (рисунок 3).



Сплошная линия изображает фактор роста для материи, штриховая – для вакуума. Параметр, характеризующий плотность материи  $\Omega_b = 0.3$  для (a, c, e) и  $\Omega_b = 0.03$  для (b, d, f).

**Рисунок 3.** – Фактор роста неоднородностей (41) при различных значениях волнового числа: (a, b) –  $k/h = 0.0001 \text{ Мпк}^{-1}$ , (c, d) –  $k/h = 0.001 \text{ Мпк}^{-1}$ , (e, f) –  $k/h = 0.01 \text{ Мпк}^{-1}$

Можно заметить, что для бóльших масштабов (рисунок 3а, b) вакуум привязан к материи в том смысле, что эволюция неоднородностей для вакуума и материи происходит одинаковым образом. Для меньших масштабов (рисунок 3с, d), вакуум менее склонен к возмущениям по сравнению с материей (рисунок 3d), тем не менее он становится неоднородным. Наблюдаемая анизотропия реликтового микроволнового излучения указывает, что типичная неоднородность на поверхности последнего рассеяния составляет  $10^{-4} - 10^{-5}$ . Умножение данной величины на фактор роста (рисунок 3с, d) дает число меньше единицы, что говорит о росте неоднородностей в линейном режиме. Для более малых масштабов, соответствующих кластерам галактик и показанных на рисунках 3е, f, в данной модели реализуется сильнонелинейный режим, в отличие от стандартной  $\Lambda$ CDM-модели, где режим слабонелинейный на ранних стадиях эволюции Вселенной (т. е. конечная неоднородность порядка единицы для  $z \leq 10$ ). Ранний выход на нелинейный режим (рисунок 3е, f) не противоречит наблюдениям крупномасштабных структур, сформировавшихся на очень ранних этапах эволюции Вселенной [3].

Сравним образование структур материи в данной модели и стандартной космологической модели. Хотя в данной работе рассмотрение ограничено эволюцией возмущений после поверхности последнего рассеяния, следует упомянуть нуклеосинтез, поскольку он дает ограничения на количество барионной материи. В стандартной модели нуклеосинтез фиксирует значение чисто барионной компоненты на уровне  $\Omega_b = 0.03$  [48]. Для линейной космологии исследования нельзя считать завершенными, но, по видимому, доля барионной материи должна быть на уровне  $\Omega_b : 0.2$ , чтобы получить наблюдаемое количество  ${}^4\text{He}$  [51–53].

До поверхности последнего рассеяния механизм генерации и усиления пространственно неоднородных возмущений совершенно различен для рассматриваемых моделей, что связано в первую очередь с тем, что в стандартной космологии наблюдаемые в настоящее время масштабы находились за горизонтом до равенства плотностей темной материи и радиации, в то время как в линейной космологии для всех наблюдаемых масштабов действие разворачивается внутри горизонта. До рекомбинации возмущения плазмы в линейной космологии примерно сохраняют свою амплитуду [43]. В стандартной космологии рост возмущений определяется темной материей, однако на данной стадии это не является принципиальным, поскольку амплитуду возмущений метрики, объясняющую величину анизотропии микроволнового излучения с помощью эффекта Сакса – Вольфа [49; 50], можно получить и без темной материи. После поверхности последнего рассеяния барионная материя отделяется от излучения, попадает в потенциальные ямы, образованные темной материей, и становится неоднородной, что приводит к образованию структур. Этот момент является принципиальным, поскольку в стандартной модели без холодной темной материи возмущения не успевают вырасти до необходимого уровня. Другими словами, в стандартной модели у темной материи должна быть своя, параллельная, достаточно длинная [54] история роста неоднородностей до поверхности последнего рассеяния, так, чтобы после поверхности последнего рассеяния барионная материя попала в уже готовые потенциальные ямы. Что касается линейной космологии, как показывают расчеты фактора роста, для образования структур нет необходимости в темной материи: независимо от того, какое количество барионной материи имеется, ее неоднородность быстро возрастает. Физической причиной этого явления является просто более медленное расширение Вселенной по сравнению со стандартной космологией.

При дальнейшей эволюции в нелинейном режиме образуются структуры, причем наблюдения показывают, что в галактиках имеется гравитационный потенциал, который не может создаваться светящейся материей [3; 55]. В стандартной космологии этот потенциал интерпретируется как создаваемый темной материей. В рассматриваемой модели, поскольку вакуум обладает уравнением состояния и скоростью звука, он, так же как и барионная материя, пертурбуруется и становится неоднородным. Таким образом, дополнительный гравитационный потенциал, наблюдаемый динамическими методами, а также в микролинзировании, может создаваться неоднородностями вакуума. Ситуация здесь прямо противоположна стандартной модели: в стандартной модели барионная материя попадает в потенциальные ямы, образованные темной материей – в рассматриваемой модели вакуум попадает в потенциальные ямы, образованные обычной материей, и тем самым образует гало. Следует сказать, что наблюдения показывают, что отдельно темная материя не наблюдается: она всегда образует гало вокруг светящейся (т. е. барионной) материи. Стоит также упомянуть так называемые каспы – сингулярные центральные области, которые должны были бы образовываться из темной материи согласно численному моделированию, однако в реальности их нет, они не наблюдаются [55]. Что касается вакуума, то он не склонен образовывать подобные структуры, поскольку обладает давлением.

Тем не менее для линейной космологии ситуация может оказаться несколько сложнее, поскольку, как было отмечено, требуемое нуклеосинтезом количество барионной материи  $\Omega_b$  довольно велико по сравнению со светящейся материей, которую удалось идентифицировать на настоящее время. С другой стороны, как показывают расчеты фактора роста, неоднородности малых масштабов интенсивно растут, что при переходе в нелинейный режим может привести к образованию несветящихся барионных объектов, например, типа МАСНО [56]. Это означает возможное существование темной материи не только в виде вакуума, но и МАСНО.

Для количественного описания нелинейного режима с учетом вакуума, по-видимому, придется решать нелинейные операторные уравнения для плотности квантовых полей.

### **Заключение**

Несмотря на то что стандартная космологическая модель может описать наблюдаемые данные, это не исключает необходимости исследовать, фундаментальную модель, основанную на физике вакуума. Более того, вопрос с которого обычно начинаются большинство статей по космологии: «Что такое темная энергия и материя?», звучит довольно бессмысленно, поскольку без установления роли нулевых колебаний квантовых полей невозможно сказать, чего еще не хватает.

Описание вакуума как некоторой упругой среды с уравнением состояния и скоростью вакуумных скалярных волн представляет собой базис для построения прецезионной космологии Милновского типа [38–40] с расширением, близким к линейному.

Возможно, в воззрениях Милна [37], исходящих из общей космологической картины и направленных к локальной теории гравитации (т. е. сверху вниз, а не наоборот), как в ОТО (т. е. снизу вверх), заключено несколько больше правды, чем это обычно считается. Действительно, здесь мы видим, что без правильного учета физики вакуумных флуктуаций (которая определяется космологией) невозможно получить правильную физическую картину реальности.

Результатом данной работы является утверждение, что уравнение состояние вакуума приводит к расширению Милновского типа при  $z > 2$ . Оказывается, что для

образования структур нет необходимости в темной материи. Полагаем, что дополнительный гравитационный потенциал, наблюдаемый в некоторых видах галактик, также создается поляризацией вакуума в нелинейном режиме, а не темной материей. Напомним, что темной материей называют материю, которая не участвует в каких-либо взаимодействиях, кроме гравитационного. Это означает, что ее давление равно нулю. Вакуум также не участвует во взаимодействии с другими видами материи, в этом смысле он подобен темной материи. В частности, столкновения скоплений галактик показывают, что облака темной материи проходят сквозь друг друга без изменений [3; 55]. В то же время вакуум обладает давлением, что предотвращает образование мелкомасштабных образований состоящих только из вакуума, – гало возможно только вокруг массивных объектов из светящейся материи.

*В принципе, темная материя допускает подавленное негравитационное взаимодействие с частицами Стандартной модели, однако для задач космологии и образования структур обычно рассматривают идеализированную модель в виде холодной пылевидной материи [3; 55].*

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sahni, V. The case for the positive cosmological  $\Lambda$ -term / V. Sahni, A. Starobinsky // *Int. J. Mod. Phys.* – 2000. – Vol. 09, nr 04. – P. 373.
2. Чернин, А. Д. Темная энергия и всемирное антитяготение / А. Д. Чернин // *УФН.* – 2008. – Т. 178, № 4. – С. 267–300.
3. Долгов, А. Д. Массивные и сверхмассивные черные дыры в современной и ранней Вселенной и проблемы космологии и астрофизики / А. Д. Долгов // *УФН.* – 2008. – Т. 188, № 4. – С. 121–142.
4. Weinberg, S. The cosmological constant problem / S. Weinberg // *Rev. Mod. Phys.* – 1989. – Vol. 61, nr 1.
5. Зельдович, Я. Б. Теория вакуума, быть может, решает загадку космологии / Я. Б. Зельдович // *УФН.* – 1981. – Т. 133, № 3. – С. 479–503.
6. Carroll, S. M. The Cosmological Constant / S. M. Carroll // *Living Rev. Relativity.* – 2001. – Vol. 4, nr 1.
7. Dark Energy / M. Li [et al.] // *Commun. Theor. Phys.* – 2011. – Vol. 56, nr 3. – P. 525 – 604.
8. Padmanabhan, T. Cosmological constant – the weight of the vacuum / T. Padmanabhan // *Phys. Rep.* – 2003. – Vol. 380, nr 5–6. – P. 235–320.
9. Birrell, N. D. Quantum Fields in Curved Space / N. D. Birrell, P. C. W. Davis. – Cambridge : Univ. Press, 1982.
10. Арбузова, Е. В. Эффекты неустойчивости в  $F(R)$ -модифицированной гравитации и при гравитационном бариогенезисе / Е. В. Арбузова, А. Д. Долгов // *ЭЧАЯ.* – 2019. – Т. 50, № 6. – С. 1116–1293.
11. Padmanabhan, T. Combining general relativity and quantum theory: points of conflict and contact / T. Padmanabhan // *Class. Quantum. Grav.* – 2002. – Vol. 19, nr 13. – P. 3551–3566.
12. Anischenko, S. V. Functional minimization method addressed to the vacuum finding for an arbitrary driven quantum oscillator / S. V. Anischenko, S. L. Cherkas, V. L. Kalashnikov // *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* – 2009. – Vol. 12, nr 1. – P. 16–26.
13. Horava, P. Quantum gravity at a Lifshitz point / P. Horava // *Phys. Rev. D* – 2009. – Vol. 79, nr 8. – P. 084008.
14. Gomes, H. The link between general relativity and shape dynamics / H. Gomes, T. Koslowski // *Class. Quant. Grav.* – 2012. – Vol. 29, nr 7. – P. 075009.



15. Bij, J. J. van der. The exchange of massless spin-two particles. / J. J. van der Bij, H. van Dam, Y. J. Ng // *Physica A*. – 1982. – Vol. 116, nr 1. – P. 307–320.
16. Wilczek, F. Foundations and Working Pictures in Microphysical Cosmology / F. Wilczek // *Phys. Rept.* – 1984. – Vol. 104, nr 2–4. – P. 143–157.
17. Buchmuller, W. Einstein Gravity From Restricted Coordinate Invariance / W. Buchmuller, N. Dragon // *Phys. Lett. B*. – 1988. – Vol. 207, nr 3. – P. 292–294.
18. Unruh, W. G. Unimodular theory of canonical quantum gravity / W. G. Unruh // *Phys. Rev. D*. – 1989. – Vol. 40, nr 4. – P. 1048–1052.
19. Alvarez, E. Can one tell Einstein's unimodular theory from Einstein's general relativity? / E. Alvarez // *J. High Energy Phys.* – 2005. – Vol. 0503. – P. 002.
20. Henneaux, M. The Cosmological Constant and General Covariance / M. Henneaux, C. Teitelboim // *Phys. Lett. B*. – 1989. – Vol. 222, nr 2. – P. 195–199.
21. Smolin, L. Quantization of unimodular gravity and the cosmological constant problems / L. Smolin // *Phys. Rev. D*. – 2009. – Vol. 80, nr 8. – P. 084003.
22. Cherkas, S. L. An approach to the theory of gravity with an arbitrary reference level of energy density / S. L. Cherkas, V. L. Kalashnikov // *Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук Natl.* – 2019. – Т. 55, № 1. – P. 83–96.
23. Cherkas, S. L. Quantum Mechanics Allows Setting Initial Conditions at a Cosmological Singularity: Gowdy Model Example / S. L. Cherkas, V. L. Kalashnikov // *Theor. Phys.* – 2017. – Vol. 2, nr 3. – P. 124–135.
24. Cherkas, S. L. Determination of the UV cut-off from the observed value of the Universe acceleration / S. L. Cherkas, V. L. Kalashnikov // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2007. – Vol. 0701. – P. 028.
25. Cherkas, S. L. Universe driven by the vacuum of scalar field: VFD model / S. L. Cherkas, V. L. Kalashnikov // *Problems of Practical Cosmology : тр. междунар. конф. «Проблемы практической космологии»*. – СПб. : Рос. геогр. о-во, 2006. – С. 135–140.
26. Schaffner, K. F. Nineteenth-Century Aether Theories / K. F. Schaffner. – Oxford : Pergamon Press, 1972.
27. Dirac, P. A. M. Is there an  $\text{\AA}$ ether? / P. A. M. Dirac // *Nature*. – 1951. – Vol. 168, nr 4282. – P. 906–907.
28. Золотарев, В. Ф. Структура и свойства среды физического вакуума / В. Ф. Золотарев, Б. Б. Шамшев // *Изв. вузов. Физика*. – 1985. – № 1. – С. 60–65.
29. Amendola, L. Dark energy: Theory and Observations / L. Amendola, Sh. Tsujikawa. – Cambridge : University Press, 2010.
30. Bento, M. C. Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification / M. C. Bento, O. Bertolami, A. A. Son // *Phys. Rev. D*. – 2002. – Vol. 66, nr 4. – P. 043507.
31. Arnowitt, R. The Dynamics of General Relativity / R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner // *Gravitation : an introduction to current research*. – New York : Wiley, 1962. – P. 227.
32. Ландау, Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988.
33. Blas, D. Models of non-relativistic quantum gravity: the good, the bad and the healthy / D. Blas, O. Pujolas, S. Sibiryakov // *J. High Energy Phys.* – 2011. – Vol. 1104. – P. 018.
34. Rubakov, V. A. Модификация гравитации на больших расстояниях и массивный гравитон / V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov // *УФН*. – 2008. – Т. 178, № 4. – С. 785–822.
35. Copeland, E. J. Dark energy in light of the discovery of the Higgs / E. J. Copeland // *Annalen. der Phys.* – 2015. – Vol. 528, nr 1–2. – P. 62–67.
36. Ellis, G. F. R. Relativistic Cosmology / G. F. R. Ellis, R. Maartens, M. A. H. MacCallum. – Cambridge : University Press, 2012.

37. Милн, Э. А. Относительность время и космология / Э. А. Милн. – М. ; Ижевск : Хаот. и регуляр. динамика, 2016.
38. John, M. V. A modified Ozer-Taha type cosmological model / M. V. John, K. B. Joseph // *Phys. Lett. B.* – 1996. – Vol. 387, nr 3. – С. 466–470.
39. Cosmological tests for a linear coasting cosmology / A. Dev [et al.] // *Phys. Lett. B.* – 2002. – Vol. 548, nr 1–2. – P. 12–18.
40. Melia, F. On Recent Claims Concerning the  $R_h = ct$  Universe / F. Melia // *MNRAS.* – 2015. – Vol. 446, nr 2. – P. 1191–1194.
41. An improved model-independent assessment of the late-time cosmic / B. S. Haridasu [et al.] // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2018. – Vol. 1810. – P. 015.
42. Ellis, G. F. R. Causality and the speed of sound / G. F. R. Ellis, R. Maartens, M. A. H. MacCallum // *Gen. Relativ. Gravit.* – 2007. – Vol. 39. – P. 1651–1660.
43. Cherkas, S. L. Plasma Perturbations and Cosmic Microwave Background Anisotropy in the Linearly Expanding Milne-like Universe / S. L. Cherkas, V. L. Kalashnikov // *Fractional Dynamics, Anomalous Transport and Plasma Science.* – Cham : Springer, 2018. – Chapter 9.
44. Visser, M. Lorentz Invariance and the Zero-Point Stress-Energy Tensor / M. Visser // *Particles.* – 2018. – Vol. 1, nr 1. – P. 138–154.
45. Комминс, Ю. Слабые взаимодействия лептонов и кварков / Ю. Комминс, Ф. Буксбаум. – М. : Энергоатомиздат, 1987.
46. Иоффе, Б. Физика элементарных частиц: квантовая хромодинамика : в 2 т. / Б. Иоффе, Л. Липатов, В. Фадин. – М. : Юрайт, 2018.
47. Softly Broken Finite Supersymmetric Grand Unified Theory / D. I. Kazakov [et al.] // *Nucl. Phys. B.* – 1996. – Vol. 471, nr 3. – P. 389–408.
48. Горбунов, Д. С. Введение в теорию ранней Вселенной. Теория горячего Большого взрыва / Д. С. Горбунов, В. А. Рубаков. – М. : ЛКИ, 2011.
49. Dodelson, S. *Modern Cosmology* / S. Dodelson. – Amsterdam : Elsevier, 2003.
50. Mukhanov, V. *Physical Foundations of Cosmology* / V. Mukhanov. – Cambridge : University Press, 2005.
51. Singh, P. Constraints on lepton asymmetry from nucleosynthesis in a linearly coasting cosmology / P. Singh, D. Lohiya // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2015. – Vol. 05. – P. 061.
52. Lewis, G. F. Primordial nucleosynthesis in the  $R_h = ct$  cosmology: pouring cold water on the simmering Universe / G. F. Lewis, L. A. Barnes, R. Kaushik // *MNRAS.* – 2016. – Vol. 460, nr 1. – P. 291–296.
53. Singh G. Inhomogeneous nucleosynthesis in linearly coasting cosmology / G. Singh, D. Lohiya // *MNRAS.* – 2018. . – Vol. 473, nr 1. – С. 14–19.
54. Sarkar, A. How late can the dark matter form in our universe? / A. Sarkar, S. Das, S. K. Sethi // *J. Cosmol. Astropart. Phys.* – 2015. – Vol. 03. – P. 004.
55. Лукаш, В. Н. Физическая космология / В. Н. Лукаш, Е. В. Михеева. – М. : Физматлит, 2010.
56. Bertone, G. A. History of Dark Matter / G. Bertone, D. Hooper // *Rev. Mod. Phys.* – 2018. – Vol. 90, nr 4. – P. 045002.

---

# МАТЭМАТЫКА

---

УДК 512.542

**Дмитрий Владимирович Грицук<sup>1</sup>, Степан Васильевич Курилюк<sup>2</sup>,  
Александр Александрович Трофимук<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>магистрант физ.-мат. факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Dmitrij Gritsuk<sup>1</sup>, Stepan Kurilyuk<sup>2</sup>, Aleksandr Trofimuk<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,  
Head of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
at the Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2</sup>Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics  
at the Brest State A. S. Pushkin University

<sup>3</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,  
Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling  
at the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: dmitrygritsuk@gmail.com

## **О КОРАДИКАЛЕ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ФАКТОРИЗУЕМОЙ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

*Говорят, что подгруппы  $A$  и  $B$  взаимно перестановочны, если  $UB = BU$  и  $AV = VA$  для всех  $U \leq A$  и  $V \leq B$ . Здесь запись  $Y \leq X$  означает, что  $Y$  – подгруппа группы  $X$ . Установлено строение  $F$ -корадикала группы  $G = AB$ , факторизуемой взаимно перестановочными  $F$ -сомножителями  $A$  и  $B$ , где  $F$  – насыщенная формация такая, что  $U \subseteq F$ . Здесь  $U$  – формация всех сверхразрешимых групп. В частности,  $F$ -корадикал такой группы содержится в нильпотентном корадикале коммутанта группы.*

### **On the Residual of Finite Group that is Factorized by Mutually Permutable Subgroups**

*The subgroups  $A$  and  $B$  of a group  $G$  are called mutually permutable if  $UB = BU$  and  $AV = VA$  for all  $U \leq A$  and  $V \leq B$ . The notation  $Y \leq X$  means that  $Y$  is a subgroup of  $X$ . The structure of the  $F$ -residual of a group  $G = AB$  that is factorized by two mutually permutable  $F$ -subgroups  $A$  and  $B$ , is established, where  $F$  is a saturated formation such that  $U \subseteq F$ . Here  $U$  is the formation of all supersoluble groups. In particular, the  $F$ -residual of such group  $G$  is contained in the nilpotent residual of the derived subgroup of  $G$ .*

### **Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Запись  $Y \leq X$  означает, что  $Y$  – подгруппа группы  $X$ .

Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *взаимно перестановочными*, если  $A$  перестановочна со всеми подгруппами из  $B$  и  $B$  перестановочна со всеми подгруппами из  $A$ . М. Асаад и А. Шаалан в [2] первыми получили результаты о строении групп, представимых в виде произведения взаимно перестановочных подгрупп. В частности, ими доказана сверхразрешимость группы  $G = HK$ , у которой коммутант  $G'$  нильпотентен и подгруппы  $H$  и  $K$  сверхразрешимы [2, теорема 3.8].

Обзор результатов о взаимно перестановочных подгруппах по состоянию на 2010 г. содержится в монографии А. Баллестера-Болинше с соавторами [3, разделы 4–5].

В работе [4, теорема 2.1] В. С. Монахов установил, что сверхразрешимый корадикал факторизуемой группы  $G = AB$  с взаимно перестановочными сверхразрешимыми сомножителями  $A$  и  $B$  совпадает с нильпотентным корадикалом взаимного коммутанта подгрупп  $A$  и  $B$ .

В настоящей статье результатов работы [4] получили развитие. Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1** Пусть  $G = AB$ , где  $A$  и  $B$  – взаимно перестановочные подгруппы группы  $G$ .

1. Пусть  $\mathbb{F}$  – насыщенная формация, такая, что  $U \subseteq \mathbb{F}$ . Если подгруппы  $A$  и  $B$  принадлежат  $\mathbb{F}$ , то  $G^{\mathbb{F}} \leq (G')^N$ .

2. Пусть  $(|G:A|, |G:B|) = 1$ . Если  $A$  и  $B$  сверхразрешимы, то

$$G^U = G^{N^2} \cap \mathbb{V}(G) = (G')^N = [A, B]^N.$$

Здесь  $\mathbb{V}(G)$  – пересечение всех нормальных в  $G$  подгрупп, фактор-группы по которым примарны или бипримарны. Более точно, пусть  $p, q$  – простые числа и  $S_{\{p,q\}}$  – формация всех  $\{p, q\}$ -групп. Для группы  $G$ ,  $|\pi(G)| > 2$ , введем следующее обозначение:

$$\mathbb{V}(G) = \bigcap_{\forall \{p,q\} \subseteq \pi(G)} G^{S_{\{p,q\}}}.$$

Если  $|\pi(G)| \leq 2$ , то считаем  $\mathbb{V}(G) = 1$ .

### Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах. Группа называется *сверхразрешимой*, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Группа с нормальной силовской  $p$ -подгруппой называется  *$p$ -замкнутой*, а группа с нормальной  $p'$ -холловой подгруппой называется  *$p$ -нильпотентной*.

Через  $G'$ ,  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы  $G$  соответственно;  $O_p(G)$  и  $O_{p'}(G)$  – наибольшие нормальные в  $G$   $p$ - и  $p'$ -подгруппы соответственно;  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ ;  $[A]B$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ .

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 5; 6].

Напомним, что класс  $\mathbb{F}$  называется *замкнутым относительно фактор-групп* или *гомоморфом*, когда выполняется требование: если  $G \in \mathbb{F}$  и  $N \triangleleft G$ , то  $G/N \in \mathbb{F}$ . Класс  $\mathbb{F}$  называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, когда выполняется требование: если  $G/N_1 \in \mathbb{F}$  и  $G/N_2 \in \mathbb{F}$ , то  $G/N_1 \cap N_2 \in \mathbb{F}$ . *Формацией* называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация  $\mathbb{F}$  называется *насыщенной*, если из  $G/\Phi(G) \in \mathbb{F}$  следует, что  $G \in \mathbb{F}$ .

Пусть  $\mathbb{F}$  – некоторая формация групп и  $G$  – группа. Тогда  $G^{\mathbb{F}}$  –  $\mathbb{F}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  из  $G$ , для которых  $G/N \in \mathbb{F}$ . Произведение формаций  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{H}$  состоит из всех групп  $G$ , для которых  $G^{\mathbb{H}} \in \mathbb{F}$ , т. е.  $\mathbb{F}\mathbb{H} = \{G \in \mathcal{G} \mid G^{\mathbb{H}} \in \mathbb{F}\}$ . Будем считать, что  $\mathbb{F}^2 = \mathbb{F}\mathbb{F}$ . Через  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N}^2$  обозначаются формации всех сверхразрешимых групп, нильпотентных и метанильпотентных групп соответственно.

Всякая функция  $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$  называется *локальным экраном*. Формация  $\mathbb{F}$  называется *локальной*, если существует локальный экран  $f$ , такой, что  $\mathbb{F}$  совпадает

с классом групп  $G$  таких, что  $G/C_G(H/K) \in f(p)$  для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$  и  $p \in \pi(H/K)$ , и обозначается через  $F = LF(f)$ . В [5, гл. I, § 4]) доказано утверждение: пусть  $f$  – локальный экран формации  $F$ . Группа  $G$  принадлежит  $F$  тогда и только тогда, когда  $G/F_p(G) \in f(p)$  для любого  $p \in \pi(G)$ . Здесь  $F_p(G)$  – наибольшая нормальная  $p$ -нильпотентная подгруппа группы  $G$ . По [6, теорема IV.3.7], для локальной формации  $F$  всегда существует локальный экран  $f$ , такой, что  $F = LF(f)$ ,  $f(p) \subseteq F$  и  $f(p) = N_p f(p)$  для любого  $p \in \mathbb{P}$ . Такой экран  $f$  называется максимальным внутренним локальным экраном формации  $F$ . По [6, теорема IV.4.6], всякая локальная формация является насыщенной формацией и наоборот.

**Лемма 2.1** Пусть  $F$  – насыщенная формация. Предположим, что группа  $G$  не принадлежит  $F$ , но  $G/K \in F$  для всех неединичных нормальных в  $G$  подгрупп  $K$ . Тогда  $G$  – примитивная группа.

*Доказательство.* Если  $\Phi(G) \neq 1$ , то по условию  $G/\Phi(G) \in F$ , а поскольку  $F$  – насыщенная формация, то  $G \in F$  – противоречие. Значит,  $\Phi(G) = 1$ . Если в группе  $G$  имеются две различные минимальные нормальные подгруппы  $N_1$  и  $N_2$ , то  $N_1 \cap N_2 = 1$ . По условию  $G/N_1 \in F$  и  $G/N_2 \in F$ , а поскольку  $F$  – формация, то  $G = G/(N_1 \cap N_2) \in F$  – противоречие. Значит, группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$ . Так как  $\Phi(G) = 1$ , то существует максимальная подгруппа  $M$ , не содержащая подгруппу  $N$ . Ясно, что  $G = MN$ . Если  $\text{Core}_G M \neq 1$ , то из единственности минимальной нормальной подгруппы  $N$  следует, что  $N \subseteq \text{Core}_G M$  и  $G = MN = M$  – противоречие. Поэтому  $\text{Core}_G M = 1$  и  $G$  – примитивная группа с примитиватором  $M$ .

**Лемма 2.2** ([7, теорема II.3.2]). Пусть  $G$  – примитивная разрешимая группа и  $M$  – примитиватор группы  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $\Phi(G) = 1$ ;
- (2) группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$ , причем  $N = C_G(N)$  и  $G = [N]M$ ;
- (3)  $N = F(G) = O_p(G)$  для некоторого  $p \in \pi(G)$  и  $O_p(M) = 1$ .

**Лемма 2.3** ([8, лемма 7]). Пусть  $F$  – формация,  $G$  – группа,  $A$  и  $B$  – подгруппы группы  $G$  такие, что  $A$  и  $B$  принадлежат  $F$ . Если  $[A, B] = 1$ , то  $AB \in F$ .

**Лемма 2.4** ([9, лемма 2.16]). Пусть  $F$  – насыщенная формация, содержащая  $U$  и  $G$  – группа с нормальной подгруппой  $E$  такой, что  $G/E \in F$ . Если  $E$  циклическая, то  $G \in F$ .

**Лемма 2.5** ([1, лемма 5.8; теорема 5.11]). Пусть  $F$  и  $H$  – формации,  $G$  – группа и  $K$  – нормальная в  $G$  подгруппа. Тогда:

- (1)  $(G/K)^F = G^F K/K$ ;
- (2)  $G^{FH} = (G^H)^F$ ;
- (3) если  $Y \leq X$  и  $F$  – наследственная формация, то  $Y^F \leq X^F$ ;
- (4) если  $H \subseteq F$ , то  $G^F \leq G^H$ .

*Доказательство.* Утверждения (1) – (2) следуют из [1, лемма 5.8; теорема 5.11]. Проверим утверждение (3). Так как  $X^F$  нормальна в  $X$ , то  $YX^F$  подгруппа группы  $X$ . Тогда

$$Y/Y \cap X^F \simeq YX^F/X^F \in F,$$

т. к.  $F$  – наследственная формация. Поэтому  $Y^F \leq Y \cap X^F \leq X^F$ . Утверждение (4) очевидно.

**Лемма 2.6** ([2, следствие 3.6]). Пусть  $H$  и  $K$  – подгруппы группы  $G$  и  $G = HK$ . Предположим, что  $H$  и  $K$  взаимно перестановочны. Тогда группа  $G$  имеет силовскую

башню сверхразрешимого типа, если  $H$  и  $K$  имеют силовские башни сверхразрешимого типа.

**Лемма 2.7** ([10, следствие 3.1]). Пусть группа  $G = AB$  является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Если индексы подгрупп  $A$  и  $B$  в группе  $G$  взаимно просты, то группа  $G$  сверхразрешима.

**Лемма 2.8.** Пусть  $A$  и  $B$  – взаимно перестановочные сверхразрешимые подгруппы группы  $G$  взаимно простых индексов. Если  $G$  метанильпотентна, то  $G$  сверхразрешима.

*Доказательство.* Поскольку  $(|G:A|, |G:B|) = 1$ , то  $G = AB$ . По лемме 2.6, группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, а значит, разрешима. Предположим противное, что  $G \notin \mathcal{U}$ . Если  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа, то подгруппы  $AN/N$  и  $BN/N$  взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10]. По индукции,  $G/N$  сверхразрешима. По лемме 2.1,  $G$  примитивна, а из леммы 2.2 получаем, что  $G = [N]M$  – примитивная группа, где  $M$  – максимальная подгруппа группы  $G$  и  $N = F(G) = G_p = C_G(N)$  – единственная минимальная нормальная в  $G$  подгруппа,  $p$  – наибольшее простое число из  $\pi(G)$ .

По [3, лемма 4.3.3(4)],  $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$ . Если  $A \cap N = 1 = B \cap N$ , то  $(|G:A|, |G:B|) \neq 1$  – противоречие. Если  $N \leq A$  и  $B \cap N = 1$ , то по [3, лемма 4.3.3(5)],  $N$  нециклическая и  $N \leq C_G(B)$ . Тогда  $B \leq C_G(N) = N$  и  $G = AB = AN = A$  – противоречие.

Пусть  $N \leq A \cap B$ . Так как  $G/N$  нильпотентна, то  $A$  и  $B$  субнормальны в  $G$ . Теперь группа  $G = AB$  является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$  взаимно простых индексов. Согласно лемме 2.7, группа  $G$  сверхразрешима.

**Лемма 2.9.** Пусть  $A$  и  $B$  – взаимно перестановочные сверхразрешимые подгруппы группы  $G$  взаимно простых индексов. Если  $|\pi(G)| \leq 2$ , то  $G$  сверхразрешима.

*Доказательство.* По лемме 2.6 группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. По условию  $|\pi(G)| \leq 2$ , поэтому  $G$  метанильпотентна. По лемме 2.8, группа  $G$  сверхразрешима.

### Доказательство теоремы

1. Рассмотрим случай, когда коммутант  $G'$  нильпотентен. Тогда группа  $G$  разрешима. Предположим противное, что  $G \notin \mathcal{F}$ . Если  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа, то подгруппы  $AN/N$  и  $BN/N$  взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10] и принадлежат  $\mathcal{F}$  ввиду того, что  $\mathcal{F}$  – формация. Так как

$$(G/N)' = G'N/N \simeq G'/G' \cap N,$$

то коммутант  $(G/N)'$  нильпотентен. Следовательно, по индукции  $G/N \in \mathcal{F}$ . Так как формация  $\mathcal{F}$  насыщенная, то группа  $G$  примитивна по лемме 2.1. Поэтому  $\Phi(G) = 1$ ,  $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$  – единственная минимальная нормальная в  $G$  подгруппа по лемме 2.2. Так как  $G'$  нильпотентен, то  $N = G'$  и  $G/N$  абелева.

По [3, лемма 4.3.3(4)],  $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$ . Если  $A \cap N = 1 = B \cap N$ , то по [3, лемма 4.3.9],  $|N| = p$  и группа  $G \in \mathcal{F}$  по лемме 2.4. – противоречие. Если  $N \leq A$  и  $B \cap N = 1$ , то по [3, лемма 4.3.3(5)],  $N$  нециклическая и  $N \leq C_G(B)$ . Тогда  $B \leq C_G(N) = N$  и  $G = AB = AN = A$  – противоречие.

Пусть  $N \leq A \cap B$ . Тогда  $A$  и  $B$  нормальны в  $G$ . Поэтому  $F_p(A) = N = F_p(B)$ . Так как  $\mathcal{F}$  – насыщенная формация, то существует внутренний максимальный

локальный экран  $f$ , такой, что  $F = LF(f)$ ,  $f(p) \subseteq F$  и  $f(p) = N_p f(p)$ . Тогда по определению локального экрана  $A/N \in f(p)$  и  $B/N \in f(p)$ . Поскольку  $f(p)$  – формация, то по лемме 2.3  $G/N \in f(p)$ . Так как  $N \in N_p$ , то  $G \in N_p f(p) = f(p) \subseteq F$ . Значит, предположение неверно.

Пусть  $(G')^N \neq 1$ . Покажем, что фактор-группа  $G/(G')^N$  принадлежит формации  $F$ . Так как

$$(G/(G')^N)' = G'(G')^N/(G')^N = G'/(G')^N,$$

то коммутант  $(G/(G')^N)'$  нильпотентен. Фактор-группа

$$\begin{aligned} G/(G')^N &= (A(G')^N/(G')^N)(B(G')^N/(G')^N), \\ A(G')^N/(G')^N &\simeq A/A \cap (G')^N, \quad B(G')^N/(G')^N \simeq B/B \cap (G')^N, \end{aligned}$$

поэтому подгруппы  $A(G')^N/(G')^N$  и  $B(G')^N/(G')^N$  принадлежат формации  $F$  и взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10].

По доказанному выше, фактор-группа  $G/(G')^{\mathfrak{R}}$  принадлежит формации  $F$ .

2. Сначала докажем, что  $G^U = G^{N^2} \cap B(G)$ . Очевидно, что все фактор-группы наследуют условие теоремы. Так как  $G/G^{N^2} \in N^2$ , то  $G/G^{N^2}$  сверхразрешима по лемме 2.8, поэтому  $G^U \leq G^{N^2}$ . Поскольку  $G/G^{S\{p,q\}} \in S_{\{p,q\}}$ , то  $G/G^{S\{p,q\}}$  сверхразрешима по лемме 2.9. По лемме Ремака [1, лемма 2.33] фактор-группа  $G/B(G)$  изоморфна подгруппе прямого произведения

$$\prod_{\forall \{p,q\} \subseteq \pi(G)} G/G^{S\{p,q\}}.$$

Поэтому  $G/B(G)$  сверхразрешима и  $G^U \leq G^{N^2} \cap B(G)$ .

Покажем обратное включение. Так как каждая сверхразрешимая группа метанильпотентна, то  $U \subseteq N^2$  и  $G^{N^2} \leq G^U$  по лемме 2.5 (4). Поэтому

$$G^{N^2} \cap B(G) \leq G^{N^2} \leq G^U.$$

Итак, равенство  $G^U = G^{N^2} \cap B(G)$  получено. Из [4, теорема 2.1] следует, что

$$G^U = G^{N^2} \cap B(G) = (G')^N = [A, B]^N.$$

Теорема доказана.

**Следствие 3.1** ([11, лемма 2]). Пусть группа  $G = AB$  – произведение попарно взаимно перестановочных подгрупп  $A, B$  и  $F$  – насыщенная формация, содержащая формацию  $U$ . Предположим, что коммутант  $G'$  нильпотентен. Если подгруппы  $A$  и  $B$  принадлежат  $F$ , то  $G \in F$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
3. Ballester-Bolinches, A. Products finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estaban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.

4. Monakhov, V. S. On the supersoluble residual of mutually permutable products / V. S. Monakhov // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – Т. 34, № 1. – С. 69–70.
5. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
6. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.
7. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Heidelberg ; Berlin : Springer-Verlag GmbH, 1967. – 796 p.
8. Трофимук, А. А. Замечание о произведении двух тсс-подгрупп / А. А. Трофимук // Чебышевский сб. – 2020. – Т. 22, № 1. – С. 493–499.
9. Skiba, A. N. On weakly s-permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.
10. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сиб. мат. журн. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.
11. Ballester-Bolinches, A. Mutually Permutable Products of Finite Groups II / A. Ballester-Bolinches, M. C. Pedraza-Aguilera // J. Algebra. – 1999. – Vol. 218. – P. 563–572.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 04.03.2021*



УДК 512.542

**Екатерина Владимировна Зубей<sup>1</sup>, Анна Юрьевна Кулеиш<sup>2</sup>,  
Александр Александрович Трофимук<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического  
моделирования Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Yekaterina Zubei<sup>1</sup>, Anna Kulesh<sup>2</sup>, Aleksandr Trofimuk<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,  
Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling  
at the Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2</sup>Master's Student of the Faculty of Physics and Mathematics  
at the Brest State A. S. Pushkin University

<sup>3</sup>PhD in Physics and Mathematics,  
Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling  
at the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: [ekaterina.zubey@yandex.ru](mailto:ekaterina.zubey@yandex.ru)

## **ПРИЗНАКИ РАСШИРЕННОЙ СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ФАКТОРИЗУЕМОЙ ВЗАИМНО ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ**

*Говорят, что подгруппы  $A$  и  $B$  взаимно перестановочны, если  $UB = BU$  и  $AV = VA$  для всех  $U \leq A$  и  $V \leq B$ . Здесь запись  $Y \leq X$  означает, что  $Y$  – подгруппа группы  $X$ . Получены признаки расширенной сверхразрешимости группы  $G = AB$ , факторизуемой взаимно перестановочными сомножителями  $A$  и  $B$ .*

### **Sufficient Conditions of Widely Supersolubility of Finite Group that is Factorized by Mutually Permutable Subgroups**

*The subgroups  $A$  and  $B$  of a group  $G$  are called mutually permutable if  $UB = BU$  and  $AV = VA$  for all  $U \leq A$  and  $V \leq B$ . The notation  $Y \leq X$  means that  $Y$  is a subgroup of  $X$ . The sufficient conditions of widely supersolubility of a group  $G = AB$  that is factorized by two mutually permutable subgroups  $A$  and  $B$ , are obtained.*

#### **Введение**

Рассматриваются только конечные группы. Используемая терминология соответствует [1]. Запись  $Y \leq X$  означает, что  $Y$  – подгруппа группы  $X$ .

Подгруппы  $A$  и  $B$  группы  $G$  называются *взаимно перестановочными*, если  $A$  перестановочна со всеми подгруппами из  $B$  и  $B$  перестановочна со всеми подгруппами из  $A$ . М. Асаад и А. Шаалан установили сверхразрешимость группы  $G = AB$  с взаимно перестановочными сверхразрешимыми подгруппами  $A$  и  $B$  при условии, что  $B$  нильпотентна [2, теорема 3.2], и в случае, когда коммутант  $G'$  нильпотентен [2, теорема 3.8]. Обзор результатов о взаимно перестановочных подгруппах по состоянию на 2010 г. содержится в монографии [3, разделы 4–5].

Согласно теореме Хупперта, сверхразрешимую группу можно определить как группу, в которой все максимальные подгруппы имеют простые индексы. Отсюда следует, что в сверхразрешимой группе  $G$  для каждой собственной подгруппы  $H$  существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \dots \leq H_n = G, |H_i : H_{i-1}| \in P, \forall i. \quad (1)$$

Поэтому вполне естественно следующее определение, предложенное в [4].

Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ , если либо  $H = G$ , либо существует цепочка подгрупп (1). В работах [4; 5] изучен класс групп с  $\mathbb{P}$ -субнормальными силовскими подгруппами. Группа  $G$  называется *расширенно сверхразрешимой* (кратко  $w$ -сверхразрешимой), если любая примарная подгруппа группы  $G$  является  $\mathbb{P}$ -субнормальной в  $G$ . Через  $wU$  обозначается класс всех  $w$ -сверхразрешимых групп. Заметим, что класс  $U$  всех сверхразрешимых групп содержится в  $wU$ .

В настоящей работе получили развитие результаты работы [2] на расширенно сверхразрешимый случай. Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.1.** Пусть группа  $G = AB$  является взаимно перестановочным произведением  $w$ -сверхразрешимых подгрупп  $A$  и  $B$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если корадикал  $G^{\mathcal{A}}$  нильпотентен, то  $G$   $w$ -сверхразрешима;

(2)  $G^{wU} = (G^{\mathcal{A}})^N$ ;

(3) если  $N$  – минимальная нормальная подгруппа в  $G$ , то подгруппы  $AN$  и  $BN$   $w$ -сверхразрешимы;

(4) если  $B$  нильпотентна, то  $G$   $w$ -сверхразрешима;

(5) если  $(|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$ , то  $G$   $w$ -сверхразрешима.

Здесь  $N$  и  $\mathcal{A}$  – формации всех нильпотентных групп и групп с абелевыми силовскими подгруппами соответственно.

### Вспомогательные результаты

Приведем известные результаты, которые неоднократно будут использоваться в доказательствах. Группа называется сверхразрешимой, если порядки ее главных факторов являются простыми числами. Группа с нормальной силовской  $p$ -подгруппой называется  $p$ -замкнутой, а группа с нормальной  $p'$ -холловой подгруппой называется  $p$ -нильпотентной.

Через  $G'$ ,  $F(G)$  и  $\Phi(G)$  обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы  $G$  соответственно;  $O_p(G)$  и  $O_{p'}(G)$  – наибольшие нормальные в  $G$   $p$ - и  $p'$ -подгруппы соответственно;  $\pi(G)$  – множество всех простых делителей порядка группы  $G$ ;  $A\tilde{B}$  – полупрямое произведение нормальной подгруппы  $A$  и подгруппы  $B$ .

В доказательствах будут использоваться фрагменты теории формаций [1; 6; 7].

Напомним, что класс  $\mathbb{F}$  называется *замкнутым относительно фактор-групп*, или *гомоморфизмом*, когда выполняется требование: если  $G \in \mathbb{F}$  и  $N \triangleleft G$ , то  $G/N \in \mathbb{F}$ . Класс  $\mathbb{F}$  называется *замкнутым относительно подпрямых произведений*, когда выполняется требование: если  $G/N_1 \in \mathbb{F}$  и  $G/N_2 \in \mathbb{F}$ , то  $G/N_1 \cap N_2 \in \mathbb{F}$ . *Формацией* называется класс, замкнутый относительно фактор-групп и подпрямых произведений. Формация  $\mathbb{F}$  называется *насыщенной*, если из  $G/\Phi(G) \in \mathbb{F}$  следует, что  $G \in \mathbb{F}$ .

Пусть  $\mathbb{F}$  – некоторая формация групп и  $G$  – группа. Тогда  $G^{\mathbb{F}}$  –  $\mathbb{F}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех тех нормальных подгрупп  $N$  из  $G$ , для которых  $G/N \in \mathbb{F}$ . Произведение формаций  $\mathbb{F}$  и  $\mathbb{H}$  состоит из всех групп  $G$ , для которых  $G^{\mathbb{H}} \in \mathbb{F}$ , т. е.  $\mathbb{F}\mathbb{H} = \{G \in G \mid G^{\mathbb{H}} \in \mathbb{F}\}$ . Будем считать, что  $\mathbb{F}^2 = \mathbb{F}\mathbb{F}$ .

Всякая функция  $f: \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$  называется локальным экраном. Формация  $\mathbb{F}$  называется локальной, если существует локальный экран  $f$ , такой, что  $\mathbb{F}$  совпадает с классом групп  $G$  таких, что  $G/C_G(H/K) \in f(p)$  для любого главного фактора  $H/K$  группы  $G$  и  $p \in \pi(H/K)$ , и обозначается через  $\mathbb{F} = LF(f)$ . В [5, гл. I, § 4]) доказано утверждение: пусть  $f$  – локальный экран формации  $\mathbb{F}$ . Группа  $G$  принадлежит  $\mathbb{F}$

тогда и только тогда, когда  $G/F_p(G) \in f(p)$  для любого  $p \in \pi(G)$ . Здесь  $F_p(G)$  – наибольшая нормальная  $p$ -нильпотентная подгруппа группы  $G$ . По [6, теорема IV.3.7], для локальной формации  $F$  всегда существует локальный экран  $f$  такой, что  $F = LF(f)$ ,  $f(p) \subseteq F$  и  $f(p) = N_p f(p)$  для любого  $p \in \mathbb{P}$ . Такой экран  $f$  называется максимальным внутренним локальным экраном формации  $F$ . По [6, теорема IV.4.6], всякая локальная формация является насыщенной формацией и наоборот.

**Лемма 2.1.** Пусть  $F$  – насыщенная формация. Предположим, что группа  $G$  не принадлежит  $F$ , но  $G/K \in F$  для всех неединичных нормальных в  $G$  подгрупп  $K$ . Тогда  $G$  – примитивная группа.

*Доказательство.* Если  $\Phi(G) \neq 1$ , то по условию  $G/\Phi(G) \in F$ , а поскольку  $F$  – насыщенная формация, то  $G \in F$  – противоречие. Значит,  $\Phi(G) = 1$ . Если в группе  $G$  имеются две различные минимальные нормальные подгруппы  $N_1$  и  $N_2$ , то  $N_1 \cap N_2 = 1$ . По условию  $G/N_1 \in F$  и  $G/N_2 \in F$ , а поскольку  $F$  – формация, то  $G = G/(N_1 \cap N_2) \in F$  – противоречие. Значит группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$ . Так как  $\Phi(G) = 1$ , то существует максимальная подгруппа  $M$ , не содержащая подгруппу  $N$ . Ясно, что  $G = MN$ . Если  $\text{Core}_G M \neq 1$ , то из единственности минимальной нормальной подгруппы  $N$  следует, что  $N \subseteq \text{Core}_G M$  и  $G = MN = M$  – противоречие. Поэтому  $\text{Core}_G M = 1$  и  $G$  – примитивная группа с примитиватором  $M$ .

**Лемма 2.2** ([8, теорема II.3.2]). Пусть  $G$  – примитивная разрешимая группа и  $M$  – примитиватор группы  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $\Phi(G) = 1$ ;
- (2) группа  $G$  содержит единственную минимальную нормальную подгруппу  $N$ , причем  $N = C_G(N)$  и  $G = [N]M$ ;
- (3)  $N = F(G) = O_p(G)$  для некоторого  $p \in \pi(G)$  и  $O_p(M) = 1$ .

**Лемма 2.3** ([4, теорема 2.7, предложение 2.8, теорема 2.13]).

1. Класс  $w \cup$  является насыщенной наследственной формацией.
2. Каждая  $w$ -сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа.
3. Метанильпотентные и бипримарные подгруппы  $w$ -сверхразрешимой группы сверхразрешимы.
4. Если  $G \in w \cup$ , то корадикал  $G^{\mathcal{A}}$  nilьпотентен.
5. Формация  $w \cup$  является локальной и имеет локальный экран  $f$  такой, что  $f(p) = (H \in \mathbb{B} | \text{Syl}(H) \in \mathcal{A}(p-1))$  для любого простого  $p$ .

Здесь  $\mathbb{B}$  – формация всех разрешимых групп, а  $\mathcal{A}(p-1)$  – формация всех абелевых групп экспоненты, делящей  $p-1$ .

**Лемма 2.4** ([9, лемма 2.16]). Пусть  $F$  – насыщенная формация, содержащая  $\cup$  и  $G$  – группа с нормальной подгруппой  $E$  такой, что  $G/E \in F$ . Если  $E$  циклическая, то  $G \in F$ .

**Лемма 2.5** ([1, лемма 5.8; теорема 5.11]). Пусть  $F$  и  $H$  – формации,  $G$  – группа и  $K$  – нормальная в  $G$  подгруппа. Тогда:

- (1)  $(G/K)^F = G^F K/K$ ;
- (2)  $G^{FH} = (G^H)^F$ ;
- (3) если  $Y \leq X$  и  $F$  – наследственная формация, то  $Y^F \leq X^F$ ;
- (4) если  $H \subseteq F$ , то  $G^F \leq G^H$ .

*Доказательство.* Утверждения (1) – (2) следуют из [1, лемма 5.8; теорема 5.11]. Проверим утверждение (3). Так как  $X^F$  нормальна в  $X$ , то  $YX^F$  – подгруппа группы  $X$ .

Тогда

$$Y/Y \cap X^F \simeq YX^F/X^F \in \mathbb{F},$$

т. к.  $\mathbb{F}$  – наследственная формация. Поэтому  $Y^F \leq Y \cap X^F \leq X^F$ . Утверждение (4) очевидно.

**Лемма 2.6** ([2, следствие 3.6]). Пусть  $H$  и  $K$  – подгруппы группы  $G$  и  $G = HK$ . Предположим, что  $H$  и  $K$  взаимно перестановочны. Тогда группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, если  $H$  и  $K$  имеют силовские башни сверхразрешимого типа.

#### Доказательство теоремы

1. По лемме 2.6, группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, а, значит, разрешима. Пусть группа  $G$  – контрпример наименьшего порядка.

Если  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа, то подгруппы  $AN/N$  и  $BN/N$  взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10] и  $w$ -сверхразрешимы по лемме 2.3 (1). Так как по лемме 2.5

$$(G/N)^{\mathcal{A}} = G^{\mathcal{A}}N/N \simeq G^{\mathcal{A}}/G^{\mathcal{A}} \cap N,$$

то корадикал  $(G/N)^{\mathcal{A}}$  нильпотентен и по индукции фактор-группа  $G/N$   $w$ -сверхразрешима.

Пусть  $W = G^{\mathcal{A}}$ . Так как формация  $w \cup$  насыщенная по лемме 2.3, то группа  $G$  примитивна по лемме 2.1. Поэтому по лемме 2.2  $\Phi(G) = 1$ ,  $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G) = W$  – единственная минимальная нормальная в  $G$  подгруппа.

Кроме того,  $G = [N]M$ ,  $M \in \mathcal{A}$ ,  $N = P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ , где  $p$  – наибольшее из  $\pi(G)$ .

По [3, лемма 4.3.3(4)],  $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$ . Если  $A \cap N = 1 = B \cap N$ , то по [3, лемма 4.3.9],  $|N| = p$  и группа  $G \in w \cup$  по лемме 2.4 – противоречие. Если  $N \leq A$  и  $B \cap N = 1$ , то по [3, лемма 4.3.3(5)],  $N$  нециклическая и  $N \leq C_G(B)$ . Тогда  $B \leq C_G(N) = N$  и  $G = AB = AN = A$  – противоречие.

Пусть  $N \leq A \cap B$ . Очевидно, что  $F_p(A) = N = F_p(B)$ . Следовательно  $A/F_p(A) = A/N \in f(p) = (H \in \mathbb{B} | \text{Syl}(H) \in \mathcal{A}(p-1))$  по лемме 2.3 (5), т. к.  $A$   $w$ -сверхразрешима. Аналогично получаем, что  $B/N \in f(p)$ . Заметим также, что  $M = (A \cap N)(B \cap N)$ . Так как  $A \cap N \simeq A/N \in f(p)$  и  $B \cap N \simeq B/N \in f(p)$ , то  $M \in f(p)$ , поскольку по условию  $M \in \mathcal{A}$ . Так как  $G/F_p(G) = G/N \simeq M \in f(p) = (H \in \mathbb{B} | \text{Syl}(H) \in \mathcal{A}(p-1))$ , то следует, что  $G$   $w$ -сверхразрешима – противоречие.

2. Если группа  $G$   $w$ -сверхразрешима, то  $G^{w \cup} = 1$  и  $G^{\mathcal{A}}$  нильпотентна по лемме 2.3 (4). Следовательно,  $G^{w \cup} = 1 = (G^{\mathcal{A}})^N$ , и утверждение справедливо. Далее считаем, что группа  $G$  не является  $w$ -сверхразрешимой. Поскольку  $w \cup \subseteq \mathcal{N}\mathcal{A}$ , то

$$G^{(\mathcal{N}\mathcal{A})} = (G^{\mathcal{A}})^N \leq G^{w \cup}$$

по лемме 2.5 (2, 4). Проверим обратное включение. Для этого надо доказать, что фактор-группа  $G/(G^{\mathcal{A}})^N$   $w$ -сверхразрешима. Из леммы 2.5 (1) получаем

$$(G/(G^{\mathcal{A}})^N)^{\mathcal{A}} = G^{\mathcal{A}}(G^{\mathcal{A}})^N/(G^{\mathcal{A}})^N = G^{\mathcal{A}}/(G^{\mathcal{A}})^N$$

и  $(G/(G^{\mathcal{A}})^N)^{\mathcal{A}}$  нильпотентна. Фактор-группа

$$G/(G^{\mathcal{A}})^N = (A(G^{\mathcal{A}})^N/(G^{\mathcal{A}})^N)(B(G^{\mathcal{A}})^N/(G^{\mathcal{A}})^N),$$

$$A(G^{\mathcal{A}})^N/(G^{\mathcal{A}})^N \simeq A/A \cap (G^{\mathcal{A}})^N,$$

$$B(G^{\mathcal{A}})^N/(G^{\mathcal{A}})^N \simeq B/B \cap (G^{\mathcal{A}})^N,$$

поэтому по лемме 2.3 (1) подгруппы  $A(G^{\mathcal{A}})^N/(G^{\mathcal{A}})^N$  и  $B(G^{\mathcal{A}})^N/(G^{\mathcal{A}})^N$   $w$ -сверхразрешимы, а по [3, лемма 4.1.10] они взаимно перестановочны. По п. 1 фактор-группа  $G/(G^{\mathcal{A}})^N$   $w$ -сверхразрешима и  $G^{w \cup} \leq (G^{\mathcal{A}})^N$ .

3. По [3, лемма 4.3.3(4)],  $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$ . Если  $N \leq A \cap B$ , то  $AN = A \in w \cup$  и  $BN = B \in w \cup$ . Если  $A \cap N = 1 = B \cap N$ , то по [3, лемма 4.3.9]  $|N| = p$ . Тогда  $AN/N \simeq A \in w \cup$ . По лемме 2.4  $AN \in w \cup$ . Аналогично  $BN \in w \cup$ .

Если  $N \leq A$  и  $B \cap N = 1$ , то  $AN = A \in w \cup$ . По [3, лемма 4.3.3(5)],  $N$  нециклическая и  $N \leq C_G(B)$ . Тогда  $BN = B \times N$  и  $BN \in w \cup$  по лемме 2.3.

4. По лемме 2.6, группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, а значит, разрешима. Пусть группа  $G$  – контрпример наименьшего порядка.

Если  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа, то подгруппы  $AN/N$  и  $BN/N$  взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10],  $AN/N$   $w$ -сверхразрешима по лемме 2.3 (1), а  $BN/N$  нильпотентна. По индукции  $G/N$   $w$ -сверхразрешима. Так как формация  $w \cup$  насыщенная по лемме 2.3 (1), то группа  $G$  примитивна по лемме 2.1. Поэтому по лемме 2.2  $\Phi(G) = 1$ ,  $N = C_G(N) = F(G) = O_p(G)$  – единственная минимальная нормальная в  $G$  подгруппа. Кроме того,  $G = [N]M$ ,  $N = P$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ , где  $p$  – наибольшее из  $\pi(G)$ .

По [3, лемма 4.3.3(4)],  $\{N \cap A, N \cap B\} = \{1, N\}$ . Если  $A \cap N = 1 = B \cap N$ , то по [3, лемма 4.3.9],  $|N| = p$  и группа  $G \in w \cup$  по лемме 2.4 – противоречие.

Если  $N \leq B$ , то  $B$  –  $p$ -группа, поскольку  $N = C_G(N)$ . Поэтому  $N = B$ , так как  $N$  – силовская  $p$ -подгруппа группы  $G$ . По п. 3,  $G = AB = AN$   $w$ -сверхразрешима.

Если  $N \not\leq B$ , то  $B \cap N = 1$  и  $N \leq A$ . По [3, лемма 4.3.3(5)],  $N$  нециклическая и  $N \leq C_G(B)$ . Тогда  $B \leq C_G(N) = N$  и  $G = AB = AN = A$  – противоречие.

5. Предположим, что теорема неверна и  $G$  – контрпример минимального порядка. По лемме 2.6, группа  $G$  имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Если  $N$  – неединичная нормальная в  $G$  подгруппа, то  $AN/N$  и  $BN/N$  взаимно перестановочны по [3, лемма 4.1.10],  $AN/N \simeq A/A \cap N$  и  $\frac{BN}{N} \simeq \frac{B}{B} \cap N$ ,  $w$ -сверхразрешимы по лемме 2.3 (1). Из леммы 2.5 следует, что

$$\begin{aligned} & (|(AN/N)/(AN/N)^{\mathcal{A}}|, |(BN/N)/(BN/N)^{\mathcal{A}}|) = \\ & = (|AN/(AN)^{\mathcal{A}}N|, |BN/(BN)^{\mathcal{A}}N|) = \\ & = (|AN/A^{\mathcal{A}}N|, |BN/B^{\mathcal{A}}N|) = \left( \frac{|A/A^{\mathcal{A}}|}{|S_1|}, \frac{|B/B^{\mathcal{A}}|}{|S_2|} \right), \end{aligned}$$

$$S_1 = (A \cap N)/(A^{\mathcal{A}} \cap N), \quad S_2 = (B \cap N)/(B^{\mathcal{A}} \cap N).$$

Так как  $(|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$ , то

$$(|(AN/N)/(AN/N)^{\mathcal{A}}|, |(BN/N)/(BN/N)^{\mathcal{A}}|) = 1.$$

Фактор-группа  $G/N = (AN/N)(BN/N)$   $w$ -сверхразрешима по индукции.

Так как по лемме 2.3 (1) формация всех  $w$ -сверхразрешимых групп насыщена, то  $G$  – примитивная группа по лемме 2.1. Из леммы 2.2 следует, что  $F(G) = N = G_p$  – единственная минимальная нормальная в  $G$  подгруппа,  $N = C_G(N)$ ,  $p$  – наибольшее из  $\pi(G)$ .

Из п. 4 следует, что  $AN$   $w$ -сверхразрешима. Если  $AN = G$ , то  $G$   $w$ -сверхразрешима – противоречие. Поэтому в дальнейшем считаем, что  $AN$  и  $BN$  – собственные подгруппы в  $G$ .

По лемме 2.3 (4),  $(AN)^{\mathcal{A}}$  нильпотентна. Так как  $N = C_G(N)$ , то  $(AN)^{\mathcal{A}}$  –  $p$ -группа. Поскольку  $AN/(AN)^{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ , то все силовские  $r$ -подгруппы из  $A$  абелевы,

$r \neq p$ . Так как  $A_p \leq G_p$ , где  $A_p$  – силовская  $p$ -подгруппа из  $A$ , то  $A \in \mathcal{A}$ . Аналогично,  $B \in \mathcal{A}$ . Поэтому  $A^{\mathcal{A}} = 1 = B^{\mathcal{A}}$  и  $(|A|, |B|) = (|A/A^{\mathcal{A}}|, |B/B^{\mathcal{A}}|) = 1$ . Очевидно, что  $G$   $w$ -сверхразрешима – противоречие. Теорема доказана.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Asaad, M. On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53. – P. 318–326.
3. Ballester-Bolinches, A. Products finite groups / A. Ballester-Bolinches, R. Estaban-Romero, M. Asaad. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 2010. – 334 p.
4. Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.
5. Васильев, А. Ф. О конечных группах, близких к сверхразрешимым группам / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 21–27.
6. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.
7. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin ; New York : Walter de Gruyter, 1992. – 899 p.
8. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Heidelberg ; Berlin : Springer-Verlag GmbH, 1967. – 796 p.
9. Skiba, A. N. On weakly  $s$ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2007. – Vol. 315. – P. 192–209.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 04.03.2021*

УДК 517.927.21+519.642.6

**Сергей Андреевич Марзан**

канд. физ.-мат. наук, доц.,

доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина**Sergei Marzan**PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor, Assistant Professor  
of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications  
at the Brest State A. S. Pushkin University  
e-mail: marzanserg2@gmail.com**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
С ПРОИЗВОДНЫМИ КАПУТО**

*Разработан модифицированный метод осреднения функциональных поправок приближенного решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто. Получены условия существования приближенного решения, а также оценка разности между точным и приближенным решением указанной задачи.*

**An Approximate Solution to the Cauchy Problem  
for a System Nonlinear Differential Equations with Derivatives Caputo**

*A modified method of averaging functional corrections for the approximate solution of the Cauchy problem for a system of nonlinear differential equations with fractional Caputo derivatives is developed. Conditions for the existence of an approximate solution are obtained, as well as an estimate of the difference between the exact and approximate solution of the indicated problem.*

**Введение**

Актуальной проблемой математического моделирования является проблема адекватности математических моделей исследуемым объектам. Объекты моделирования традиционно изучались посредством использования классического математического анализа, в частности аппарата интегро-дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных. В то же время поведение ряда объектов и процессов приводит к необходимости разрабатывать уточненные модели с привлечением математического анализа нецелых порядков. Последний основан на систематическом использовании понятий производных и интегралов, порядки которых не являются натуральными числами, а могут быть дробными, иррациональными или комплексными.

В теории дробного интегро-дифференцирования особое значение приобретают вопросы существования решений краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными в различных функциональных пространствах, которые достаточно полно исследованы в [1–3] для дробных производных Римана – Лиувилля. В то же время важный интерес для практического приложения теории дробного интегро-дифференцирования представляет определение производной дробного порядка по Капуто [4]:

$$({}^c D_{a+}^\alpha y)(x) = \left( D_{a+}^\alpha \left[ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right] \right)(x), \quad (1)$$

где  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ ,  $n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1$  при  $\alpha \notin \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ , и  $n = \alpha$  при  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $D_{a+}^\alpha f$  – дробная производная Римана – Лиувилля [1].

Преимуществом определения дробной производной по Капуто является более естественное решение проблемы начальных условий при решении дифференциальных уравнений нецелых порядков. Условия существования единственных решений задач Коши для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и их систем получены в [5–7].

С точки зрения приложений важной задачей является также разработка приближенных методов решения задач типа Коши и Коши для дифференциальных уравнений с дробными производными. Метод приближенного решения задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля предложен в [8], а задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто – в [9]. В то же время указанные методы не применимы для задач Коши для дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто порядков  $0 < \alpha < 1$ .

В настоящей работе предложена модификация метода осреднения функциональных поправок [10] приближенного решения задачи Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто (1) порядков  $0 < \alpha_i < 1$ .

### Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$({}^c D_{a+}^{\alpha_i} y_i)(x) = f_i[x, y_1(x), \dots, y_m(x)], \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (2)$$

с начальными условиями

$$({}^c D_{a+}^{\alpha_i} y_i)(a) = b_i, \quad b_i \in C \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Пусть функции  $f_i : D \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывны на множестве

$$D = \{(x, y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1}, x \in [a, b], |y_i - b_i| \leq \mu_i, \mu_i > 0, i = 1, 2, \dots, m\}, \quad (4)$$

где  $b_i$  определяются из начальных условий (3); при этом

$$\max_{(x, y_1, \dots, y_m)} |f_i[x, y_1, \dots, y_m]| = M_i < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5)$$

Согласно [5] при выполнении условий (5) задача Коши (2) – (3) равносильна системе интегральных уравнений

$$y_i(x) = b_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, y_1(t), \dots, y_m(t)]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (6)$$

Для построения приближенного решения системы уравнений (6) положим

$$y_{i1}(x) = b_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, p_{11}, \dots, p_{m1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \quad (7)$$

$$p_{i1} = \frac{1}{h} \int_a^{a+h} y_{i1}(x) dx \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (8)$$

где  $h > 0$ ,  $a+h \leq b$ . Подставляя выражения  $y_{i1}(x)$  в (8), получим для определения  $p_{i1}$  систему уравнений



$$hp_{i1} = b_i h + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, p_{11}, \dots, p_{m1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (9)$$

Предположим, что система (9) имеет решение  $(p_{11}, \dots, p_{m1})$  (условия существования и критерий выбора  $p_{i1} \in \square$  будут рассмотрены позже), причем

$$|p_{i1} - b_i| < \mu_i \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Во втором приближении положим

$$y_{i2}(x) = b_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, y_{11}(t) + p_{12}, \dots, y_{m1}(t) + p_{m2}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \quad (10)$$

где

$$p_{i2} = \frac{1}{h} \int_a^h \delta_{i2}(x) dx, \quad \delta_{i2}(x) = y_{i2}(x) - y_{i1}(x) \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (11)$$

На основании (7) и (10)

$$\delta_{i2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, y_{11}(t) + p_{12}, \dots, y_{m1}(t) + p_{m2}] - f_i[t, p_{11}, \dots, p_{m1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \quad (12)$$

поэтому согласно (11) для определения  $p_{i2}$  получаем систему уравнений

$$hp_{i2} = \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, y_{11} + p_{12}, \dots, y_{m1} + p_{m2}] - f_i[t, p_{11}, \dots, p_{m1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (13)$$

Продолжая таким же образом, в  $s$ -ом приближении положим

$$y_{is}(x) = b_i + \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{f_i[t, y_{1s-1} + p_{1s}, \dots, y_{ms-1} + p_{ms}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \quad (14)$$

где  $p_{is} = \frac{1}{h} \int_a^h \delta_{is}(x) dx$ ,  $\delta_{is}(x) = y_{is}(x) - y_{is-1}(x)$  ( $i=1, 2, \dots, m; s=3, 4, \dots$ ).

В силу последнего равенства  $p_{is}$  определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} hp_{is} = & \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, y_{1s-1} + p_{1s}, \dots, y_{ms-1} + p_{ms}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt - \\ & - \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, y_{1s-2} + p_{1s-1}, \dots, y_{ms-2} + p_{ms-1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

В приближенной формуле, принятой за окончательную, можно положить  $h$ , равным расчетному значению  $x-a$ , или принять  $h=b-a$ .

### Условия существования приближенного решения задачи Коши

Для установления условий существования приближенного решения задачи Коши (2) – (3) к условию (5) добавим дополнительное условие: липшицевость функции  $f_i$  относительно переменной  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ):

$$|f_i[x, y_1, \dots, y_i, \dots, y_m] - f_i[x, y'_1, \dots, y'_i, \dots, y'_m]| \leq L_i |y_i - y'_i|, \quad L_i > 0. \quad (16)$$

**Теорема 1.** Пусть  $0 < \alpha_i < 1$ , функции  $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) непрерывны на множестве  $D$ , определяемом условием (4), и удовлетворяют условиям (5) и (16). Пусть

$$\frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} < 1, \quad \frac{h^{\alpha_i} (\alpha_i + 3)}{\Gamma(\alpha_i + 2)} M_i \leq \mu_i \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (17)$$

Тогда система уравнений (9) имеет единственное решение  $(p_{11}, \dots, p_{m1})$ , удовлетворяющее условию

$$|p_{i1} - b_i| < \mu_i, \quad (18)$$

а система уравнений (15) имеет единственное решение  $p_{is}$ , удовлетворяющее условию

$$|p_{is}| \leq \frac{2h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} M_i, \quad |y_{is-1}(x) + p_{is} - b_i| \leq \mu_i \quad (i=1, 2, \dots, m; s=2, 3, \dots). \quad (19)$$

**Доказательство.** Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Theta(c_i) &= c_i - b_i - \frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, c_1, \dots, c_m]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \\ \Psi_s(c_i) &= c_i - \frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, y_{1s-1} + c_1, \dots, y_{ms-1} + c_m]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt + \\ &+ \frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, y_{1s-2} + p_{1s-2}, \dots, y_{ms-2} + p_{ms-2}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt, \quad y_{i0} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m; s=3, 4, \dots). \end{aligned}$$

Учитывая (5) и (17), получим:

$$\Theta(-\mu_i + b_i) \leq -\mu_i + \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} < 0, \quad \Theta(\mu_i + b_i) \geq \mu_i - \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} > 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Значит, система уравнений  $\Theta(c_i) = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) имеет решение  $(p_{11}, \dots, p_{m1})$ , удовлетворяющее условию (18). Покажем, что это решение, удовлетворяющее условию  $-\mu_i + b_i \leq p_{i1} \leq \mu_i + b_i$ , единственное.

Предположим, что существует еще одно решение  $(p'_{11}, \dots, p'_{m1})$  системы уравнений  $\Theta(c_i) = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ), удовлетворяющее условию (18). Тогда

$$|p'_{i1} - p_{i1}| = \frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)} \left| \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i[t, p'_{11}, \dots, p'_{m1}] - f_i[t, p_{11}, \dots, p_{m1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \right| \leq \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} |p'_{i1} - p_{i1}|,$$

откуда  $\frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \geq 1$ , что противоречит условию (17).

Согласно (7) и (5)  $|y_{i1} - b_i| \leq \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}$ , откуда

$$b_i - \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \leq y_{i1} \leq b_i + \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}, \quad (20)$$

а в силу (17)

$$\frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \leq \mu_i - \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (21)$$

Из (20) и (21) следует, что

$$b_i - \mu_i + \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \leq y_{i1}(x) \leq b_i + \mu_i - \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)},$$

$$b_i - \mu_i \leq y_{i1}(x) + \left| \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \right| \leq b_i + \mu_i \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Кроме того,

$$\Psi_2 \left( -\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \right) = -\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} -$$

$$-\frac{1}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{f_i \left[ t, y_{i1} - \frac{2M_1 h^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1 + 2)}, \dots, y_{m1} - \frac{2M_m h^{\alpha_m}}{\Gamma(\alpha_m + 2)} \right] - f_i [t, p_{11}, \dots, p_{m1}]}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq$$

$$\leq -\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} + \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m),$$

и аналогично

$$\Psi_2 \left( \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \right) \geq \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} - \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Следовательно, система уравнений  $\Psi_2(c_i) = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) имеет единственное решение  $(p_{12}, \dots, p_{m2})$ , удовлетворяющее условию  $|p_{i2}| \leq \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}$ , так что  $|y_{i1}(x) + p_{i2} - b_i| \leq \mu_i$ .

Как и выше, непосредственно проверяется, что решение  $(p_{12}, \dots, p_{m2})$  – единственное, удовлетворяющее условию  $-\frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \leq p_{i2} \leq \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ). Вообще, если

$$|y_{is-2}(x) + p_{is-1} - b_i| \leq \mu_i \quad (s=3, 4, \dots),$$

то таким же образом непосредственно устанавливается, что

$$|y_{is-1}(x) - b_i| \leq \frac{M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}; \quad -\mu_i + b_i \leq y_{is-1} + \left| \frac{2M_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \right| \leq \mu_i + b_i$$

и что существует единственное решение системы уравнений  $\Psi_s(c_i) = 0$ , удовлетворяющее условию (19). Теорема доказана.

Пусть на отрезке  $[a; a+h]$

$$|y_{i1}(x) - p_{i1}| \leq \delta_i, \quad \delta_i > 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon_i = \frac{L_i h^{\alpha_i} (\alpha_i + 2)}{\Gamma(\alpha_i + 2) - L_i h^{\alpha_i}} < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (23)$$

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \alpha_i < 1$ , функции  $f_i: D \rightarrow \square$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) удовлетворяют условиям теоремы 1 и выполняются неравенства (22), (23). Тогда каждая из последовательностей функций (14) равномерно сходится на отрезке  $[a; a+h]$  к функции  $y_i$  соответственно, при этом  $(y_1, \dots, y_m)$  является решением задачи Коши (2) – (3).

**Доказательство.** Из (13) на основании условий (16) и (22) имеем:

$$\begin{aligned} |p_{i2}| &\leq \frac{L_i}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{|y_i(t) + p_{i2} - p_{i1}|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq \\ &\leq \frac{L_i |p_{i2}|}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha_i}} + \frac{L_i \delta_i}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha_i}} = \frac{L_i |p_{i2}| h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} + \frac{L_i \delta_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

откуда

$$|p_{i2}| \leq \frac{\frac{L_i \delta_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} = \delta_i \frac{\varepsilon_i - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 + \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (24)$$

где  $\varepsilon_i$  определяется равенством (23).

Из (12) на основании неравенств (16), (22) и (24) получим:

$$\begin{aligned} |\delta_{i2}(x)| &\leq \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{|y_i(t) + p_{i2} - p_{i1}|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq \frac{L_i \delta_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} + \frac{\frac{L_i \delta_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} = \\ &= \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \left( \delta_i + \frac{\frac{L_i \delta_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \right) = \frac{L_i \delta_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} \frac{1}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned}$$

поэтому

$$|\delta_{i2}(x)| + |p_{i2}| \leq \delta_i \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (25)$$

Исходя из (15) при  $s = 3$  с учетом (16) имеем:

$$|p_{i3}| \leq \frac{L_i}{h\Gamma(\alpha_i)} \int_a^{a+h} dx \int_a^x \frac{|\delta_{i2}(t) + p_{i3} - p_{i2}|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt$$

и из неравенства (25) получаем:

$$|p_{i3}| \leq \frac{\delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \varepsilon_i \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Тогда

$$|\delta_{i3}(x)| \leq \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{|\delta_{i2}(t) + p_{i3} - p_{i2}|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq \frac{\delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \varepsilon_i,$$

поэтому  $|\delta_{i3}(x)| + |p_{i3}| \leq \delta_i \varepsilon_i^2 \quad (i=1, 2, \dots, m)$ .

Вообще, если

$$|p_{is-1}| \leq \frac{\delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \varepsilon_i^{s-3}, \quad |\delta_{is-1}(x)| \leq \frac{\delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \varepsilon_i^{s-3},$$

то

$$|\delta_{is-1}(x)| + |p_{is-1}| \leq \delta_i \varepsilon_i^{s-2},$$

и из (15) следует оценка:

$$|p_{is}| \leq \frac{\delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \varepsilon_i^{s-2} = \delta_i \frac{\varepsilon_i - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 + \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} \varepsilon_i^{s-2} \quad (i=1, 2, \dots, m; s=3, 4, \dots).$$

Тогда

$$|\delta_{is}(x)| \leq \frac{\delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 2)}} \varepsilon_i^{s-2} \quad (i=1, 2, \dots, m; s=3, 4, \dots).$$

Следовательно, в силу неравенства (23) при  $s \rightarrow +\infty$  функция  $y_{is}$  на отрезке  $[a; a+h]$  равномерно стремится к предельному значению  $y_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$ , причем  $(y_1, \dots, y_m)$  является решением системы уравнений (6). Теорема доказана.

### Оценка модуля разности точного и приближенного решения задачи Коши

**Теорема 3.** Пусть  $0 < \alpha_i < 1$ , функции  $f_i : D \rightarrow \square \quad (i=1, 2, \dots, m)$  удовлетворяют условиям теоремы 2. Тогда функции (14) приближают решение  $(y_1, \dots, y_m)$  задачи Коши (2) – (3) на отрезке  $[a; a+h]$  так, что выполняются неравенства

$$|y_i(x) - y_{is}(x)| \leq \frac{\delta_i \eta_i}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} \left( 1 - \frac{2L_i h^{\alpha_i} (1 - \eta_i^{s-1})}{\Gamma(\alpha_i + 1) + L_i h^{\alpha_i}} \right) \varepsilon_i^s,$$

где

$$\eta_i = \frac{\Gamma(\alpha_i + 2) - L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

**Доказательство.** Используя (7), (8) и неравенство (16), получим:

$$\begin{aligned} |y_i(x) - y_{i1}(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{|f_i[t, y_1, \dots, y_m] - f_i[t, p_{11}, \dots, p_{m1}]|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq \\ &\leq \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{|y_i - y_{i1}| + |y_{i1} - p_{i1}|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq \delta_i \frac{\frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (26)$$

Из (10) и (16) следует, что

$$\begin{aligned} |y_i(x) - y_{i2}(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{|f_i[t, y_1, \dots, y_m] - f_i[t, y_{11} + p_{12}, \dots, y_{m1} + p_{m2}]|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq \\ &\leq \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{|y_i - y_{i1}| + |p_{i2}|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (27)$$

В силу (24) и (27)

$$\begin{aligned} |y_i(x) - y_{i2}(x)| &\leq \left( \delta_i \frac{\frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} + \delta_i \frac{\varepsilon_i - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} \right) \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} = \\ &= \frac{\delta_i L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1) + L_i h^{\alpha_i}} \left( 1 + \frac{2L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1) - L_i h^{\alpha_i}} \eta_i \right) \varepsilon_i, \end{aligned}$$

где

$$\eta_i = \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)\varepsilon_i} = \frac{\Gamma(\alpha_i + 2) - L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)(\alpha_i + 2)} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Так как согласно (6), (14) и (16)

$$|y_i(x) - y_{is}(x)| \leq \frac{L_i}{\Gamma(\alpha_i)} \int_a^x \frac{|y_i - y_{is-1} - p_{is}|}{(x-t)^{1-\alpha_i}} dt \leq \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)} (|y_i - y_{is-1}| + |p_{is}|),$$

то из (19) и неравенства

$$|y_i(x) - y_{is-1}(x)| \leq \delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1) + L_i h^{\alpha_i}} \left( 1 + \frac{2L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1) - L_i h^{\alpha_i}} \eta_i^{s-2} \right) \varepsilon_i^{s-2}$$

следует, что

$$|y_i(x) - y_{is}(x)| \leq \delta_i \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1) + L_i h^{\alpha_i}} \left( 1 + \frac{2L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1) - L_i h^{\alpha_i}} \eta_i^{s-1} \right) \varepsilon_i^{s-1} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\delta_i \eta_i}{1 + \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} \left( 1 + \frac{2L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1) - L_i h^{\alpha_i}} \eta_i^{s-1} \right) \varepsilon_i^s = \\
 &= \frac{\delta_i \eta_i}{1 - \frac{L_i h^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i + 1)}} \left( 1 - \frac{2L_i h^{\alpha_i} (1 + \eta_i^{s-1})}{\Gamma(\alpha_i + 1) + L_i h^{\alpha_i}} \right) \varepsilon_i^s \quad (i = 1, 2, \dots, m).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Численный пример.** Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \left( {}^c D_{0+}^{\frac{1}{2}} y_1 \right) (x) = y_1(x) - xy_2(x) + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}, \\ \left( {}^c D_{0+}^{\frac{1}{2}} y_2 \right) (x) = xy_1(x) - x^2 y_2(x) + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad x \in \left[ 0, \frac{1}{100} \right], \quad (28)$$

точное решение которой  $y_1(x) = x^2$ ,  $y_2(x) = x$ .

В результате реализации рассмотренного выше метода посредством программного пакета Mathematica, уже во втором приближении получим приближенное решение  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  задачи (28):

$$\begin{aligned}
 \tilde{y}_1(x) &= \left( \sqrt{x} \left( 3150\sqrt{\pi}x^2 + 120x^{\frac{5}{2}}(8x^2 - 21) - 70x^2(45\sqrt{\pi} + 4\sqrt{x}(4x^2 - 15)) \right) + \right. \\
 &\left. + 9x^{\frac{3}{2}}(525\pi - 64x^3 + 20\sqrt{\pi}x(8x^2 - 35)) \right) : \left( 9(525\pi - 64x^3 + 20\sqrt{\pi}x(8x^2 - 35)) \right), \\
 \tilde{y}_2(x) &= \left( x \left( -56x^{\frac{5}{2}}(45\sqrt{\pi} + 4\sqrt{x}(4x^2 - 15)) + 9(525\pi - 64x^2 + 20\sqrt{\pi}x(8x^2 - 35)) \right) + \right. \\
 &\left. + 20x^{\frac{5}{2}}(105\sqrt{\pi} + 4\sqrt{x}(8x^2 - 21)) \right) : \left( 9(525\pi - 64x^3 + 20\sqrt{\pi}x(8x^2 - 35)) \right).
 \end{aligned}$$

В таблице 1 и таблице 2 приведены значения точных и приближенных решений, а также их разности в отдельных точках отрезка  $\left[ 0, \frac{1}{100} \right]$ .

Таблица 1

$x$	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y_1(x)$	0	$4 \cdot 10^{-6}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	$6,4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$
$\tilde{y}_1(x)$	0	$4,000094 \cdot 10^{-6}$	$1,60076 \cdot 10^{-5}$	$3,6026 \cdot 10^{-5}$	$6,40621 \cdot 10^{-5}$	$1,00122 \cdot 10^{-4}$
$y_1(x) - \tilde{y}_1(x)$	0	$-9,3694 \cdot 10^{-10}$	$-7,6051 \cdot 10^{-9}$	$-2,5959 \cdot 10^{-8}$	$-6,2126 \cdot 10^{-8}$	$-1,2238 \cdot 10^{-7}$

Таблица 2

$x$	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$y_2(x)$	0	0,002	0,004	0,006	0,008	0,01
$\tilde{y}_2(x)$	0	$1,9999 \cdot 10^{-3}$	$3,9999 \cdot 10^{-3}$	$5,9999 \cdot 10^{-3}$	$7,9999 \cdot 10^{-3}$	$9,9999 \cdot 10^{-3}$
$y_2(x) - \tilde{y}_2(x)$	0	$1,6693 \cdot 10^{-11}$	$1,8271 \cdot 10^{-10}$	$7,3524 \cdot 10^{-10}$	$1,9653 \cdot 10^{-9}$	$4,19914 \cdot 10^{-9}$

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Килбас, А. А. Задача типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка в весовом пространстве непрерывных функций / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 5. – С. 20–24.
3. Марзан, С. А. Системы нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка в весовых пространствах непрерывных функций / С. А. Марзан // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика, математика, информатика. – 2004. – № 1. – С. 63–68.
4. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophys. J. Astronom. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.
5. Килбас, А. А. Нелинейное дифференциальное уравнение с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 1. – С. 82–86.
6. Марзан, С. А. Существование и единственность решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка / С. А. Марзан // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2010. – № 2. – С. 87–93.
7. Марзан, С. А. Разрешимость задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка / С. А. Марзан // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2020. – № 1. – С. 65–73.
8. Килбас, А. А. Аппроксимационный метод решения одного класса дифференциальных уравнений дробного порядка / А. А. Килбас, С. А. Марзан // Вестн. Акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 3. – С. 5–9.
9. Марзан, С. А. Итеративный метод приближенного решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто / С. А. Марзан // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2015. – № 2. – С. 79–87.
10. Лучка, А. Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок / А. Ю. Лучка. – Киев : Наук. думка, 1969. – 315 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 04.03.2021*



УДК 519.6 + 517.983.54

**Олег Викторович Матысик**

канд. физ.-мат. наук, доц.,

доц. каф. прикладной математики и информатики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Oleg Matysik**

PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,

Assistant Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science

at the Brest State A. S. Pushkin University

e-mail: matysikoleg@mail.ru

## МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В гильбертовом пространстве для решения операторных уравнений первого рода с неограниченным линейным и самосопряженным оператором предлагается неявный итерационный метод. Изучен случай неединственного решения уравнения. Показано, что в этом случае метод сходится к решению с минимальной нормой. Для предложенного метода доказана сходимость в энергетической норме гильбертова пространства, получены априорные оценки погрешности. Использование энергетической нормы позволяет сделать метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения уравнения.

### Iteration Method for Approximate Solution of Linear Equations with Unbounded Operator in the Hilbert Space

In the Hilbert space for the solution of operator equations of the first kind with unlimited linear and self-adjoint operators to offer an implicit iterative method. The case of nonunique solutions of the equation. It is shown that in this case the method converges to the solution with a minimum norm. To prove the convergence of the proposed method in the energy norm of the Hilbert space, apriori error estimates. The use of the energy norm can make the method effective and when there is no information about sourcewise representation of the exact solution of the equation.

#### 1. Постановка задачи

Будем рассматривать в гильбертовом пространстве  $H$  операторное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с неограниченным линейным и самосопряженным линейным и самосопряженным оператором  $A$ , для которого нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , но не является его собственным значением. При сделанных предположениях задача о разрешимости уравнения (1) является некорректной. Если точное решение уравнения (1) все же существует, то для его отыскания естественно пытаться применить различные итерационные схемы [1–6]. В настоящей работе предлагается неявный итерационный метод

$$(A^4 + B)x_{n+1} = Bx_n + A^3y, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь  $B$  – ограниченный вспомогательный положительный и самосопряженный оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве  $B$  возьмем оператор  $B = bE, b > 0$ ,  $E$  – тождественный оператор. Обычно правая часть уравнения (1) известна с некоторой точностью  $\delta$ , т. е. известен  $y_\delta$ , для которого  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ . Поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$(A^4 + B)x_{n+1,\delta} = Bx_{n,\delta} + A^3y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

## 2. Сходимость метода в энергетической норме

Сходимость методов (2) и (3) в исходной норме пространства  $H$  была изучена в работе [7]. Там показано, что метод (3) сходится при условии  $b > 0$ , если число итераций  $n$  выбирать в зависимости от уровня погрешности  $\delta$  так, чтобы  $n^{\frac{1}{4}}\delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . В предположении, что точное решение уравнения (1) истокообразно представимо, в [7] получены априорные оценки погрешности метода и априорный момент останова. В случае, когда нет сведений об истокообразной представимости точного решения, затруднительно получить априорные оценки погрешности и априорный момент останова. И тем не менее метод (3) можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться энергетической нормой гильбертова пространства  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ , где  $x \in H$  [9–10]. Покажем сходимость метода (3) в энергетической норме и получим для него априорные оценки погрешности в энергетической норме гильбертова пространства.

Рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

Запишем первое слагаемое в виде  $x - x_n = A^{-1}B^n(A^4 + B)^{-n}y = B^n(A^4 + B)^{-n}x$ .

Как было показано в [7],  $x - x_n$  бесконечно мало в исходной норме гильбертова пространства  $H$  при  $n \rightarrow \infty$ , но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки требовалось дополнительное предположение об истокообразной представимости точного решения. При использовании энергетической нормы нам это предположение не понадобится. Действительно, с помощью интегрального представления самосопряженного оператора  $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$ , где  $E_\lambda$  – соответствующая спектральная функция, имеем

$$\|x - x_n\|_A^2 = (AB^n(A^4 + B)^{-n}x, B^n(A^4 + B)^{-n}x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left( \frac{b}{\lambda^4 + b} \right)^{2n} d(E_\lambda x, x).$$

Для оценки интересующей нас нормы найдем максимум подинтегральной функции  $f(\lambda) = \lambda \left( \frac{b}{\lambda^4 + b} \right)^{2n}$  при  $\lambda \in (-\infty; +\infty)$ . Функция  $f(\lambda)$  – частный случай при  $2s = 1$  функций, оцененных в [7]. Там показано, что при условии  $b > 0$   $\max_{\lambda \in (-\infty; +\infty)} f(\lambda) \leq \left( \frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{4}}$ . Следовательно, справедлива оценка  $\|x - x_n\|_A^2 \leq \left( \frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{4}} \|x\|^2$ . Отсюда  $\|x - x_n\|_A \leq \left( \frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{8}} \|x\|$ . Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокопредставимости порядка  $2s = \frac{1}{2}$  для точного решения.

Оценим второе слагаемое в (4). Как показано в [7], справедливо равенство

$$x_n - x_{n,\delta} = A^{-1} [E - B^n(A^4 + B)^{-n}] (y - y_\delta).$$

Воспользовавшись интегральным представлением самосопряженного оператора, полу-

чим  $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]^2 d(E_\lambda(y - y_\delta), y - y_\delta)$ . Обозначим через

$g(\lambda) = \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]^2$  подынтегральную функцию, а через  $g_1(x) = \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]$ ,

тогда  $g(\lambda) = g_1(\lambda) \left[ 1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \right]$ . Функция  $g_1(\lambda)$  была оценена в [7], где показано,

что при условии  $b > 0$   $g_1(\lambda) \leq 4 \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{4}}$ . При  $b > 0$  имеем  $\frac{b}{\lambda^4 + b} \leq 1$  для  $\forall \lambda \in (-\infty; +\infty)$ ,

поэтому  $1 - \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} \leq 1$ . Отсюда  $g(\lambda) \leq 4 \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{4}}$ . Таким образом,

$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 \leq 4 \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{4}} \delta^2$ , следовательно,  $\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq 2 \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{8}} \delta$ ,  $n \geq 1$ . Поскольку

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + 2 \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{8}} \delta$$

и  $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то для сходимости  $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  достаточно,

чтобы  $n^{\frac{1}{8}} \delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

Итак, доказана

**Теорема 1.** При условии  $b > 0$  итерационный метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций  $n$  выбирать из условия  $n^{\frac{1}{8}} \delta \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ .

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3) в энергетической норме

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left( \frac{b}{16n} \right)^{\frac{1}{8}} \|x\| + 2 \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1}{8}} \delta. \quad (5)$$

Оптимизируем оценку (5) по  $n$ . Для этого при заданном  $\delta$  найдем такое значение числа итераций  $n$ , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по  $n$  от правой части неравенства (5), получим

$$n_{\text{опт}} = b 2^{-\frac{7}{2}} 2^{-\frac{5}{2}} \|x\|^4 \delta^{-4}. \quad (6)$$

Подставив  $n_{\text{опт}}$  в оценку (5), найдем ее оптимальное значение

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{\frac{5}{4}} \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}}. \quad (7)$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** *Оптимальная оценка погрешности для метода (3) при условии  $b > 0$  в энергетической норме имеет вид (7) и получается при  $n_{opt}$  из (6).*

**Замечание 1.** *Оптимальная оценка погрешности не зависит от параметра  $b$ . Но  $n_{opt}$  зависит от  $b$ , и поскольку  $b > 0$ , то за счет его выбора можно получить  $n_{opt} = 1$ , т. е. оптимальная оценка погрешности будет достигаться уже на первом шаге итераций. Для этого достаточно взять  $b_{opt} = 2^{\frac{7}{2}} k^{\frac{5}{2}} \|x\|^{-4} \delta^4$ .*

Рассмотрим вопрос о том, когда из сходимости в энергетической норме следует сходимость в обычной норме гильбертова пространства  $H$ . Очевидно, для этого достаточно, чтобы при некотором фиксированном  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < \|A\|$ ) было  $P_\varepsilon x = 0$ ,

$P_\varepsilon x_{n,\delta} = 0$ , где  $P_\varepsilon = \int_0^\varepsilon \lambda dE_\lambda$ . Так как  $x_{n,\delta} = A^{-1} \left[ E - B^n (A^4 + B)^{-n} \right] y_\delta$ , то для выполнения

последнего из указанных условий должно выполняться условие  $P_\varepsilon y_\delta = 0$ . Таким образом, если решение  $x$  и приближенная правая часть  $y_\delta$  таковы, что  $P_\varepsilon x = 0$  и  $P_\varepsilon y_\delta = 0$ , то из сходимости  $x_{n,\delta}$  к  $x$  в энергетической норме вытекает сходимость в исходной норме гильбертова пространства  $H$  и, следовательно, для сходимости в исходной норме гильбертова пространства  $H$  не требуется истокообразной представимости точного решения.

Для решения уравнений с несамосопряженным или неположительным, но ограниченным оператором  $A$  следует перейти к уравнению  $A^* Ax = A^* y$ . Тогда при приближенном элементе  $y_\delta$  метод (3) примет вид

$$\left( (A^* A)^4 + B \right) x_{n+1,\delta} = B x_{n,\delta} + (A^* A)^3 A^* y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0.$$

### 3. Сходимость метода в случае неединственного решения

Ниже считаем, что нуль является собственным значением оператора  $A$ , следовательно, уравнение (1) имеет неединственное решение.

Обозначим через  $N(A) = \{x \in H \mid Ax = 0\}$ ,  $M(A)$  – ортогональное дополнение ядра  $N(A)$  до  $H$ . Пусть  $P(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $N(A)$ , а  $\Pi(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $M(A)$ . Справедлива

**Теорема 3.** *Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$ ,  $y \in H$ ,  $b > 0$ , тогда для итерационного метода (2) верны следующие утверждения:*

а)  $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ ,  $\|Ax_n - y\| \rightarrow I(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$ ;

б) *итерационный метод (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. В последующем случае  $x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$ , где  $x^*$  – минимальное решение.*

**Доказательство.** Применим оператор  $A$  к (2), получим  $A(A^4 + B)x_n = ABx_{n-1} + A^4 y$ , где  $y = P(A)y + \Pi(A)y$ . Так как  $AP(A)y = 0$ , то получим  $(A^4 + B)(Ax_n - \Pi(A)y) = B(Ax_{n-1} - \Pi(A)y)$ . Обозначим  $Ax_n - \Pi(A)y = v_n$ ,  $v_n \in M(A)$ , тогда  $(A^4 + B)v_n = Bv_{n-1}$ . Отсюда  $v_n = B(A^4 + B)^{-1} v_{n-1}$ , следовательно,

$v_n = B^n (A^4 + B)^{-n} v_0$ . Имеем  $A \geq 0$  и  $A$  – положительно определен в  $M(A)$ , т. е.  $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$ . Так как  $b > 0$ , то  $\|B(A^4 + B)^{-1}\| \leq 1$ , поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|B^n (A^4 + B)^{-n} v_0\| = \left\| \int_0^{\|A\|} \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \\ &\leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} \frac{b^n}{(\lambda^4 + b)^n} dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} dE_\lambda v_0 \right\| + \\ &+ q^n(\varepsilon_0) \left\| \int_{\varepsilon_0}^{\|A\|} dE_\lambda v_0 \right\| = \|E_{\varepsilon_0} v_0\| + q^n(\varepsilon_0) \|v_0\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty, \varepsilon_0 \rightarrow 0$ . Здесь  $\frac{b}{\lambda^4 + b} \leq q(\varepsilon_0) < 1$  при  $\lambda \in [\varepsilon_0, \|A\|]$ . Следовательно,  $v_n \rightarrow 0$ , откуда  $Av_n \rightarrow \Pi(A)y$  и  $\Pi(A)y \in A(H)$ . Отсюда  $\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = I(A, y)$  см. [8]. Итак, утверждение а) доказано.

Докажем утверждение б). Пусть процесс (2) сходится. Покажем, что уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. Из сходимости  $\{x_n\} \in H$  к  $z \in H$  и из а) следует, что  $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$ , следовательно,  $\Pi(A)y \in A(H)$ , и уравнение  $\Pi(A)y = Ax$  разрешимо.

Пусть теперь  $\Pi(A)y \in A(H)$  (уравнение  $\Pi(A)y = Ax$  разрешимо), следовательно,  $\Pi(A)y = Ax^*$ , где  $x^*$  – минимальное решение уравнения  $Ax = y$  (оно единственно в  $M(A)$ ). Тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned} (A^4 + B)x_n &= Bx_{n-1} + A^3 \Pi(A)y = Bx_{n-1} + A^4 x^* = \\ &= (A^4 + B)x_{n-1} - A^4 x_{n-1} + A^4 x^* = (A^4 + B)x_{n-1} - A^4 (x_{n-1} - x^*). \end{aligned}$$

Отсюда  $x_n = x_{n-1} + A^4 (A^4 + B)^{-1} (x^* - x_{n-1})$ . Последнее равенство разобьем на два:

$$\begin{aligned} P(A)x_n &= P(A)x_{n-1} + (A^4 + B)^{-1} A^4 P(A)(x^* - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0, \\ \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} + (A^4 + B)^{-1} A^4 \Pi(A)(x^* - x_{n-1}) = \Pi(A)x_{n-1} + \\ &+ (A^4 + B)^{-1} A^4 [\Pi(A)x^* - \Pi(A)x_{n-1}] = \Pi(A)x_{n-1} + (A^4 + B)^{-1} A^4 [x^* - \Pi(A)x_{n-1}], \end{aligned}$$

т. к.  $x^* \in M(A)$ . Обозначим  $\omega_n = \Pi(A)x_n - x^*$ , тогда из равенства  $\Pi(A)x_n - x^* = \Pi(A)x_{n-1} - x^* + (A^4 + B)^{-1} A^4 [x^* - \Pi(A)x_{n-1}]$  получим  $\omega_n = \omega_{n-1} - (A^4 + B)^{-1} A^4 \omega_{n-1} = B(A^4 + B)^{-1} \omega_{n-1}$ , и, аналогично  $v_n$ , можно показать, что  $\omega_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом,  $\Pi(A)x_n \rightarrow x^*$ . Отсюда  $x_n = P(A)x_n + \Pi(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + x^*$ . Теорема 3 доказана.

**Замечание 2.** Так как  $x_0 = 0$ , то  $x_n \rightarrow x^*$ , т. е. итерационный процесс (2) сходится к нормальному решению, т. е. к решению с минимальной нормой.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. О некоторых некорректных задач математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М. : Наука, 1986. – 178 с.
3. Самарский, А. А. Численные методы решения обратных задач математической физики / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
4. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М. : Изд-во МГУ, 1994. – 207 с.
5. Бакушинский, А. Б. О решении некоторых интегральных уравнений I-го рода методом последовательных приближений / А. Б. Бакушинский, В. Н. Страхов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1968. – Т. 8, № 1. – С. 181–185.
6. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
7. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
8. Bialy, H. Iterative Behandlung linearer Funktionsgleichungen / H. Bialy // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – Vol. 4, nr 2. – P. 166–176.
9. Лисковец, О. А. Сходимость в энергетической норме итеративного метода для уравнений I-го рода / О. А. Лисковец, В. Ф. Савчук // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1976. – № 2. – С. 19–23.
10. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : Брест. гос. ун-т, 2014. – 213 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 15.03.2021*

УДК 513.82

**Александр Андреевич Юдов<sup>1</sup>, Елена Валерьяновна Арабчик<sup>2</sup>,  
Дмитрий Станиславович Арабчик<sup>3</sup>, Елена Вячеславовна Кисилюк<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>учитель математики и информатики гимназии г. Пружаны

<sup>3</sup>учитель математики и информатики СШ № 5 г. Пружаны

<sup>4</sup>преподаватель-стажер каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

**Aleksandr Yudov<sup>1</sup>, Yelena Arabchik<sup>2</sup>, Dmitriy Arabchik<sup>3</sup>, Yelena Kisilyuk<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>PhD in Physics and Mathematics, Assistant Professor,

Assistant Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling  
at the Brest State A. S. Pushkin University

<sup>2</sup>Teacher of Mathematics and Computer Science of the Gymnasium of Pruzhany

<sup>3</sup>Teacher of Mathematics and Computer Science of the Secondary School nr 5 of Pruzhany

<sup>4</sup>Rainee Teacher of the Department of Applied Mathematics and Computer Science  
at the Brest State A. S. Pushkin University

[e-mail:modelmath@brsu.brest.by](mailto:modelmath@brsu.brest.by)

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА $L_5$

Целью исследования является классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства  $L_5$  и всех их редуктивных дополнений, вычисление тензоров кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей, найденных редуктивных однородных пространств.

### *Differential Geometry of Homogeneous Spaces with Structure Group – the Lie Group of Motions of the Space $L_5$*

The aim of the study is to classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the space  $L_5$  and all their reductive complements, to calculate the curvature and torsion tensors of invariant affine connections, found reductive homogeneous spaces.

#### **Введение**

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности, с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пространства  $L_5$ .

#### **1. Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства $L_5$**

**Определение 1.** Однородное пространство  $H / G_i$  называется редуктивным, если алгебра Ли  $\overline{H}$  группы Ли  $H$  распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G}_i, \quad (1)$$

причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $ad\overline{G_i}$ , где  $ad\overline{G_i}$  – присоединенное представление алгебры Ли  $\overline{G_i}$ .

Рассмотрим однородное пространство  $H/S_1$ , где  $S_1$  – подгруппа Ли группы Ли  $H$  вращений пятимерного лоренцева пространства, имеющая алгебру Ли  $\overline{S_1} = \{i_{13}\}$ , где

$$i_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы инвариантности по способу, описанному выше, будем сводить задачу к рассмотрению 10 случаев:

$$1^0. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{17}, \\ X_2 &= i_9 + \mu i_{17}, \\ X_3 &= i_{12} + \varrho i_{17}, \\ X_4 &= i_{16} + \sigma i_{17}, \\ X_5 &= i_{14} + s i_{17}, \\ X_6 &= i_{19} + t i_{17}, \\ X_7 &= i_8 + p i_{17}, \\ X_8 &= i_{10} + q i_{17}, \\ X_9 &= i_{13} + r i_{17}. \end{aligned} \tag{2}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_{13}$ , получим



$$\begin{aligned}
[a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{17}] = -i_9, \\
[a, X_2] &= [a, i_9] + \mu[a, i_{17}] = i_7, \\
[a, X_3] &= [a, i_{12}] + \vartheta[a, i_{17}] = i_{16}, \\
[a, X_4] &= [a, i_{16}] + \sigma[a, i_{17}] = -i_{12}, \\
[a, X_5] &= [a, i_{14}] + s[a, i_{17}] = -i_{19}, \\
[a, X_6] &= [a, i_{19}] + t[a, i_{17}] = i_{14}, \\
[a, X_7] &= [a, i_8] + p[a, i_{17}] = 0, \\
[a, X_8] &= [a, i_{10}] + q[a, i_{17}] = 0, \\
[a, X_9] &= [a, i_{13}] + r[a, i_{17}] = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_9$ :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(i_7 + \lambda i_{17}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{17}) + \gamma_1(i_{12} + \vartheta i_{17}) + \delta_1(i_{16} + \sigma i_{17}) + \omega_1(i_{14} + s i_{17}) + \varepsilon_1(i_{19} + t i_{17}) + \\
&+ \phi_1(i_8 + p i_{17}) + \eta_1(i_{10} + q i_{17}) + \psi_1(i_{13} + r i_{17}) = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{16} + \omega_1 i_{14} + \\
&+ \varepsilon_1 i_{19} + \phi_1 i_8 + \eta_1 i_{10} + \psi_1 i_{13} + i_{17}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \vartheta + \delta_1 \sigma + \omega_1 s + \varepsilon_1 t + \phi_1 p + \eta_1 q + \psi_1 r).
\end{aligned} \tag{4}$$

Сравнивая формулу (4) с первой формулой (3), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \phi_1 = 0, \eta_1 = 0, \psi_1 = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (4) со второй формулой (3) получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \varepsilon_2 = 0, \phi_2 = 0, \eta_2 = 0, \psi_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с третьей формулой (3), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 1, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 0, \phi_3 = 0, \eta_3 = 0, \psi_3 = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с четвертой формулой (3), получим:

$$\alpha_4 = 0, \beta_4 = 0, \gamma_4 = -1, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \phi_4 = 0, \eta_4 = 0, \psi_4 = 0, \vartheta = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с пятой формулой (3), получим:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 0, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = -1, \phi_5 = 0, \eta_5 = 0, \psi_5 = 0, t = 0.$$

Сравнивая формулу (4) с шестой формулой (3), получим:

$$\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 0, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \phi_6 = 0, \eta_6 = 0, \psi_6 = 0, s = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям.

Таким образом, в случае  $1^0$  система инвариантности имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы  $X_1, \dots, X_9$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
X_1 &= i_7, \\
X_2 &= i_9, \\
X_3 &= i_{12}, \\
X_4 &= i_{16}, \\
X_5 &= i_{14}, \\
X_6 &= i_{19}, \\
X_7 &= i_8 + pi_{17}, \\
X_8 &= i_{10} + qi_{17}, \\
X_9 &= i_{13} + ri_{17}.
\end{aligned}$$

Из условия линейной независимости следует, что  $r \neq 0$ . Таким образом, получаем редуцированное дополнение в виде

$$\begin{aligned}
X_1 &= i_7, \\
X_2 &= i_9, \\
X_3 &= i_{12}, \\
X_4 &= i_{16}, \\
X_5 &= i_{14}, \\
X_6 &= i_{19}, \\
X_7 &= i_8 + pi_{17}, \\
X_8 &= i_{10} + qi_{17}, \\
X_9 &= i_{13} + ri_{17}.
\end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются случаи  $2^0 - 10^0$ :

$$2^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуцированное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned}
X_1 &= i_7 + \lambda i_{13}, \\
X_2 &= i_9 + \mu i_{13}, \\
X_3 &= i_{12} + \mathcal{G}i_{13}, \\
X_4 &= i_{16} + \sigma i_{13}, \\
X_5 &= i_{14} + s i_{13}, \\
X_6 &= i_{19} + t i_{13}, \\
X_7 &= i_8 + p i_{13}, \\
X_8 &= i_{10} + q i_{13}, \\
X_9 &= i_{17}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_{13}$ , получим

$$\begin{aligned}
[a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{13}] = -i_9, \\
[a, X_2] &= [a, i_9] + \mu[a, i_{13}] = i_7, \\
[a, X_3] &= [a, i_{12}] + \mathcal{G}[a, i_{13}] = i_{16}, \\
[a, X_4] &= [a, i_{16}] + \sigma[a, i_{13}] = -i_{12}, \\
[a, X_5] &= [a, i_{14}] + s[a, i_{13}] = -i_{19}, \\
[a, X_6] &= [a, i_{19}] + t[a, i_{13}] = i_{14}, \\
[a, X_7] &= [a, i_8] + p[a, i_{13}] = 0, \\
[a, X_8] &= [a, i_{10}] + q[a, i_{13}] = 0, \\
[a, X_9] &= [a, i_{17}] = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_9$ :

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(i_7 + \lambda i_{13}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{13}) + \gamma_1(i_{12} + \mathcal{G}i_{13}) + \delta_1(i_{16} + \sigma i_{13}) + \omega_1(i_{14} + s i_{13}) + \varepsilon_1(i_{19} + t i_{13}) + \\
&+ \phi_1(i_8 + p i_{13}) + \eta_1(i_{10} + q i_{13}) + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{16} + \omega_1 i_{14} + \\
&+ \varepsilon_1 i_{19} + \phi_1 i_8 + \eta_1 i_{10} + \psi_1 i_{17} + i_{13}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \mathcal{G} + \delta_1 \sigma + \omega_1 s + \varepsilon_1 t + \phi_1 p + \eta_1 q).
\end{aligned} \tag{7}$$

Сравнивая формулу (7) с первой формулой (6), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \varphi_1 = 0, \eta_1 = 0, \psi_1 = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (7) со второй формулой (6), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \varepsilon_2 = 0, \varphi_2 = 0, \eta_2 = 0, \psi_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с третьей формулой (6), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 1, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 0, \varphi_3 = 0, \eta_3 = 0, \psi_3 = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с четвертой формулой (6), получим:

$$\alpha_4 = 0, \beta_4 = 0, \gamma_4 = -1, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \varphi_4 = 0, \eta_4 = 0, \psi_4 = 0, \mathcal{G} = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с пятой формулой (6), получим:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 0, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = -1, \varphi_5 = 0, \eta_5 = 0, \psi_5 = 0, t = 0.$$

Сравнивая формулу (7) с шестой формулой (6), получим:

$$\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 0, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \varphi_6 = 0, \eta_6 = 0, \psi_6 = 0, s = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям. Таким образом, в случае  $2^0$  система инвариантности имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \varrho = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы  $X_1, \dots, X_9$  имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8 + pi_{13}, \\ X_8 &= i_{10} + qi_{13}, \\ X_9 &= i_{17} + ri_{13}. \end{aligned}$$

Из условия линейной независимости следует, что  $r \neq 0$ . Таким образом, получаем редуктивное дополнение в виде

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8 + pi_{13}, \\ X_8 &= i_{10} + qi_{13}, \\ X_9 &= i_{17} + ri_{13}. \end{aligned}$$

$$3^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= i_7 + \lambda i_{10}, \\
 X_2 &= i_9 + \mu i_{10}, \\
 X_3 &= i_{12} + \vartheta i_{10}, \\
 X_4 &= i_{16} + \sigma i_{10}, \\
 X_5 &= i_{14} + s i_{10}, \\
 X_6 &= i_{19} + t i_{10}, \\
 X_7 &= i_8 + p i_{10}, \\
 X_8 &= i_{13}, \\
 X_9 &= i_{17}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_{13}$ , получим

$$\begin{aligned}
 [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{10}] = -i_9, \\
 [a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_{10}] = i_7, \\
 [a, X_3] &= [a, i_{12}] + \vartheta [a, i_{10}] = i_{16}, \\
 [a, X_4] &= [a, i_{16}] + \sigma [a, i_{10}] = -i_{12}, \\
 [a, X_5] &= [a, i_{14}] + s [a, i_{10}] = -i_{19}, \\
 [a, X_6] &= [a, i_{19}] + t [a, i_{10}] = i_{14}, \\
 [a, X_7] &= [a, i_8] + p [a, i_{10}] = 0, \\
 [a, X_8] &= [a, i_{13}] = 0, \\
 [a, X_9] &= [a, i_{17}] = 0.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_9$ :

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 (i_7 + \lambda i_{10}) + \beta_1 (i_9 + \mu i_{10}) + \gamma_1 (i_{12} + \vartheta i_{10}) + \delta_1 (i_{16} + \sigma i_{10}) + \omega_1 (i_{14} + s i_{10}) + \varepsilon_1 (i_{19} + t i_{10}) + \\
 + \phi_1 (i_8 + p i_{10}) + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{16} + \omega_1 i_{14} + \\
 + \varepsilon_1 i_{19} + \phi_1 i_8 + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} + i_{10} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \vartheta + \delta_1 \sigma + \omega_1 s + \varepsilon_1 t + \phi_1 p).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Сравнивая формулу (10) с первой формулой (9), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = 0, \delta_1 = 0, \omega_1 = 0, \varepsilon_1 = 0, \phi_1 = 0, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (10) со второй формулой (9), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \delta_2 = 0, \omega_2 = 0, \varepsilon_2 = 0, \phi_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с третьей формулой (9), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, \delta_3 = 1, \omega_3 = 0, \varepsilon_3 = 0, \phi_3 = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с четвертой формулой (9), получим:

$$\alpha_4 = 0, \beta_4 = 0, \gamma_4 = -1, \delta_4 = 0, \omega_4 = 0, \varepsilon_4 = 0, \phi_4 = 0, \vartheta = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с пятой формулой (9), получим:

$$\alpha_5 = 0, \beta_5 = 0, \gamma_5 = 0, \delta_5 = 0, \omega_5 = 0, \varepsilon_5 = -1, \phi_5 = 0, t = 0.$$

Сравнивая формулу (10) с шестой формулой (9), получим:

$$\alpha_6 = 0, \beta_6 = 0, \gamma_6 = 0, \delta_6 = 0, \omega_6 = 1, \varepsilon_6 = 0, \varphi_6 = 0, s = 0.$$

Отметим, что остальные формулы не приводят к дополнительным условиям. Таким образом, в случае  $3^0$  система инвариантности имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \varrho = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы  $X_1, \dots, X_9$  имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8 + \rho i_{10}, \\ X_8 &= i_{10}, \\ X_9 &= i_{13}. \end{aligned}$$

$$4^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \varrho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_8, \\ X_2 &= i_9 + \mu i_8, \\ X_3 &= i_{12} + \varrho i_8, \\ X_4 &= i_{16} + \sigma i_8, \\ X_5 &= i_{14} + s i_8, \\ X_6 &= i_{19} + t i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{11}$$

Сравнивая соответствующие формулы из таблицы коммутаторов с рассматри-

ваемой линейной комбинацией векторов  $\{X_1, \dots, X_9\}$ , получаем систему инвариантности, которая имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы  $X_1, \dots, X_9$  имеют вид:

$$X_1 = i_7,$$

$$X_2 = i_9,$$

$$X_3 = i_{12},$$

$$X_4 = i_{16},$$

$$X_5 = i_{14},$$

$$X_6 = i_{19},$$

$$X_7 = i_8,$$

$$X_8 = i_{10},$$

$$X_9 = i_{13}.$$

$$5^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_{19},$$

$$X_2 = i_9 + \mu i_{19},$$

$$X_3 = i_{12} + \vartheta i_{19},$$

$$X_4 = i_{16} + \sigma i_{19},$$

$$X_5 = i_{14} + s i_{19},$$

$$X_6 = i_8,$$

$$X_7 = i_{10},$$

$$X_8 = i_{13},$$

$$X_9 = i_{17}.$$

(12)

Сравнивая соответствующие формулы из таблицы коммутаторов с рассматриваемой линейной комбинацией векторов  $\{X_1, \dots, X_9\}$ , получаем систему инвариантности,

которая имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$

В итоге получили, что векторы  $X_1, \dots, X_9$  имеют вид:

$$X_1 = i_7,$$

$$X_2 = i_9,$$

$$X_3 = i_{12},$$

$$X_4 = i_{16},$$

$$X_5 = i_{14},$$

$$X_6 = i_{19},$$

$$X_7 = i_8,$$

$$X_8 = i_{10},$$

$$X_9 = i_{13}.$$

$$6^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$X_1 = i_7 + \lambda i_{14},$$

$$X_2 = i_9 + \mu i_{14},$$

$$X_3 = i_{12} + \vartheta i_{14},$$

$$X_4 = i_{16} + \sigma i_{14},$$

$$X_5 = i_{19},$$

$$X_6 = i_8,$$

$$X_7 = i_{10},$$

$$X_8 = i_{13},$$

$$X_9 = i_{17}.$$

(13)

Сравнивая соответствующие формулы из таблицы коммутаторов с рассматриваемой линейной комбинацией векторов  $\{X_1, \dots, X_9\}$ , получаем систему инвариантности, которая имеет вид:

$$\mu = 0, \lambda = 0, \sigma = 0, \vartheta = 0, t = 0, s = 0.$$



В итоге получили, что векторы  $X_1, \dots, X_9$  имеют вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7, \\ X_2 &= i_9, \\ X_3 &= i_{12}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{14}, \\ X_6 &= i_{19}, \\ X_7 &= i_8, \\ X_8 &= i_{10}, \\ X_9 &= i_{13}. \end{aligned}$$

$$7^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vartheta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуktивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{16}, \\ X_2 &= i_9 + \mu i_{16}, \\ X_3 &= i_{12} + \vartheta i_{16}, \\ X_4 &= i_{16}, \\ X_5 &= i_{19}, \\ X_6 &= i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{14}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_{13}$ , получим

$$\begin{aligned}
[a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{16}] = -i_9 - \lambda i_{12}, \\
[a, X_2] &= [a, i_9] + \mu[a, i_{16}] = i_7 - \mu i_{12}, \\
[a, X_3] &= [a, i_{12}] + \vartheta[a, i_{16}] = i_{16} - \vartheta i_{12}, \\
[a, X_4] &= [a, i_{16}] = -i_{12}, \\
[a, X_5] &= [a, i_{14}] = -i_{19}, \\
[a, X_6] &= [a, i_{19}] = i_{14}, \\
[a, X_7] &= [a, i_8] = 0, \\
[a, X_8] &= [a, i_{10}] = 0, \\
[a, X_9] &= [a, i_{13}] = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_9$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_1(i_7 + \lambda i_{16}) + \beta_1(i_9 + \mu i_{16}) + \gamma_1(i_{12} + \vartheta i_{16}) + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \\
+ \beta_1 i_9 + \gamma_1 i_{12} + \delta_1 i_{14} + \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} + i_{16}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu + \gamma_1 \vartheta).
\end{aligned} \tag{16}$$

Сравнивая формулу (23) с первой формулой (22), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \gamma_1 = -\lambda, -\mu - \lambda \vartheta = 0.$$

Сравнивая формулу (23) со второй формулой (22), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \gamma_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (23) с третьей формулой (22), получим:

$$\alpha_3 = 0, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 0, -\vartheta^2 = 1.$$

Система инвариантности противоречива.

$$8^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}$$

Таким образом, редуцированное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned}
X_1 &= i_7 + \lambda i_{12}, \\
X_2 &= i_9 + \mu i_{12}, \\
X_3 &= i_{16}, \\
X_4 &= i_{14}, \\
X_5 &= i_{19}, \\
X_6 &= i_8, \\
X_7 &= i_{10}, \\
X_8 &= i_{13}, \\
X_9 &= i_{17}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_{13}$ , получим

$$\begin{aligned}
[a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_{12}] = -i_9 + \lambda i_{16}, \\
[a, X_2] &= [a, i_9] + \mu [a, i_{12}] = i_7 + \mu i_{16}, \\
[a, X_3] &= [a, i_{16}] = -i_{12}, \\
[a, X_4] &= [a, i_{14}] = -i_{19}, \\
[a, X_5] &= [a, i_{19}] = i_{14}, \\
[a, X_6] &= [a, i_8] = 0, \\
[a, X_7] &= [a, i_{10}] = 0, \\
[a, X_8] &= [a, i_{13}] = 0, \\
[a, X_9] &= [a, i_{17}] = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_9$ :

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (i_7 + \lambda i_{12}) + \beta_1 (i_9 + \mu i_{12}) + \gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_9 + \\
+ \gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} + \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} + i_{12} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \mu).
\end{aligned} \tag{19}$$

Сравнивая формулу (26) с первой формулой (25), получим:

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = -1, \lambda = \gamma_1, \mu = 0.$$

Сравнивая формулу (26) со второй формулой (25), получим:

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \lambda = 0.$$

Сравнивая формулу (26) с третьей формулой (25), получим:

$$\alpha_3 \lambda + \beta_3 \mu = -1.$$

Система инвариантности противоречива.

$$9^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуцированное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_9, \\ X_2 &= i_{12}, \\ X_3 &= i_{16}, \\ X_4 &= i_{14}, \\ X_5 &= i_{19}, \\ X_6 &= i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{20}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_{13}$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_9] = -i_9 + \lambda i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_{12}] = i_7, \\ [a, X_3] &= [a, i_{16}] = i_{16}, \\ [a, X_4] &= [a, i_{14}] = -i_{12}, \\ [a, X_5] &= [a, i_{19}] = -i_{19}, \\ [a, X_6] &= [a, i_8] = i_{14}, \\ [a, X_7] &= [a, i_{10}] = 0, \\ [a, X_8] &= [a, i_{13}] = 0, \\ [a, X_9] &= [a, i_{17}] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_9$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 (i_7 + \lambda i_9) + \beta_1 i_{12} + \gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} &= \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_{12} + \gamma_1 i_{16} + \\ + \delta_1 i_{14} + \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \phi_1 i_{10} + \eta_1 i_8 + \psi_1 i_{17} + i_9 \alpha_1 \lambda. \end{aligned} \tag{22}$$

Сравнивая формулу (4.29) с первой формулой (4.28), получим:

$$\lambda\alpha_1 = -1, \alpha_1 = \lambda, \lambda^2 = -1.$$

Получили противоречие.

$$10^0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_9 & i_{12} & i_{16} & i_{14} & i_{19} & i_8 & i_{10} & i_{13} & i_{17} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение  $m = \{X_1, X_2, \dots, X_9\}$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_9, \\ X_2 &= i_{12}, \\ X_3 &= i_{16}, \\ X_4 &= i_{14}, \\ X_5 &= i_{19}, \\ X_6 &= i_8, \\ X_7 &= i_{10}, \\ X_8 &= i_{13}, \\ X_9 &= i_{17}. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая  $a = i_{13}$ , получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_9] = i_7, \\ [a, X_2] &= [a, i_{12}] = i_{16}, \\ [a, X_3] &= [a, i_{16}] = -i_{12}, \\ [a, X_4] &= [a, i_{14}] = -i_{19}, \\ [a, X_5] &= [a, i_{19}] = i_{14}, \\ [a, X_6] &= [a, i_8] = 0, \\ [a, X_7] &= [a, i_{10}] = 0, \\ [a, X_8] &= [a, i_{13}] = 0, \\ [a, X_9] &= [a, i_{17}] = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_9$ :

$$\alpha_1 i_9 + \beta_1 i_{12} + \gamma_1 i_{16} + \delta_1 i_{14} - \omega_1 i_{19} + \varepsilon_1 i_8 + \varphi_1 i_{10} + \eta_1 i_{13} + \psi_1 i_{17} \tag{25}$$

Сравнивая формулу (25) с первой формулой (24), получим:  $0 = 1$ . Система инвариантности противоречива.

В итоге получим следующие инвариантные подпространства:

$$\begin{array}{lll} X_1 = i_7, & X_1 = i_7, & X_1 = i_7, \\ X_2 = i_9, & X_2 = i_9, & X_2 = i_9, \\ X_3 = i_{12}, & X_3 = i_{12}, & X_3 = i_{12}, \\ X_4 = i_{16}, & X_4 = i_{16}, & X_4 = i_{16}, \\ X_5 = i_{14}, & X_5 = i_{14}, & X_5 = i_{14}, \\ X_6 = i_{19}, & X_6 = i_{19}, & X_6 = i_{19}, \\ X_7 = i_8, & X_7 = i_8 + pi_{10}, & X_7 = i_8 + pi_{13}, \\ X_8 = i_{10}, & X_8 = i_{10}, & X_8 = i_{10} + qi_{13}, \\ X_9 = i_{13}. & X_9 = i_{13}. & X_9 = i_{17} + ri_{13}. \end{array}$$

## 2. Тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуктивных однородных пространствах

Будем вычислять тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуктивных однородных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства  $L_5$ .

Свойства тензора кривизны и кручения канонической связности характеризуется следующей теоремой.

**Теорема 1** [1, с. 180, теорема 2.6]. Пусть  $P$  есть  $G$ -инвариантная структура на редуктивном однородном пространстве  $G/H$  с разложением  $\overline{G} = \overline{H} + m$ . Для тензора кручения  $T$  и тензора кривизны  $R$  канонической связности в  $P$  мы имеем:

- (1)  $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$  для  $X, Y \in m$ .
- (2)  $(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\overline{H}}, Z]$  для  $X, Y, Z \in m$ .
- (3)  $\nabla T = 0$ .
- (4)  $\nabla R = 0$ .

Тензоры кривизны и кручения играют важную роль при исследовании свойств данной связности, поскольку они определяют связность с помощью структурных формул Э. Картана. Воспользуемся теоремой 1 и получим формулы для тензоров кривизны и кручения соответствующей канонической связности в исследуемых редуктивных однородных пространствах.

Рассмотрим группу Ли  $S_1$  с алгеброй Ли  $\overline{S}_1 = \{i_{13}\}$ , которая является подгруппой Ли группы Ли  $G$  движений пятимерного пространства Лоренца.

Рассмотрим редуктивное однородное пространство  $H/S_1$ , которое имеет редуктивное разложение  $\overline{H} = \overline{S}_1 + m$ , где

$$m = \{i_7, i_9, i_{12}, i_{16}, i_8 + si_{13}, i_{10}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}.$$

Выберем в редуктивном дополнении  $m$  базис:

$$e_1 = i_7, e_2 = i_9, e_3 = i_{12}, e_4 = i_{16}, e_5 = i_8 + si_{13}, e_6 = i_{10}, e_7 = i_{14}, e_8 = i_{17}, e_9 = i_{19}.$$

Тогда согласно теореме 1 тензоры кручения получим по формуле  $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$  для  $X, Y \in m$ , а тензоры кривизны – по формуле

$(R(X,Y)Z)_0 = -[[X,Y]_{\overline{H}}, Z]$  для  $X, Y, Z \in m$ . Таким образом, координату  $T_{jk}^i$  тензора кручения получим как  $i$ -ю координату разложения вектора  $-[e_j, e_k]_m$ , по базису  $B = \{i_7, i_9, i_{12}, i_{16}, i_8 + si_{13}, i_{10}, i_{14}, i_{17}, i_{19}\}$  редуکتивного дополнения  $m$ . Координату  $R_{jk,l}^i$  тензора кривизны получим как  $i$ -ю координату разложения вектора  $-[[e_j, e_k]_{\overline{G_i}}, e_l]$  по базису  $B$  редуکتивного дополнения  $m$ .

Производя соответствующие вычисления, получаем теорему.

**Теорема 2.** Для канонической связности редуکتивного однородного пространства  $H/S_1$  тензор кручения имеет только следующие, отличные от нуля, координаты:

$$T_{1,6}^7 = -1, T_{7,5}^6 = -1, T_{2,6}^9 = -1, T_{2,9}^6 = -1, T_{3,8}^7 = -1, T_{4,8}^9 = 1, T_{4,9}^8 = -1, T_{5,6}^8 = -1, \\ T_{5,7}^9 = s, T_{5,8}^{11} = -1, T_{5,9}^7 = -s, T_{4,8}^9 = 1, T_{4,9}^8 = -1, T_{5,6}^8 = -1,$$

при этом тензор кручения кососимметричен по нижним индексам.

**Теорема 3.** Для канонической связности редуکتивного однородного пространства  $H/S_1$  тензор кривизны имеет только следующие, отличные от нуля, координаты:

$$R_{6,8,1}^2 = 1, R_{6,8,2}^1 = -1, R_{6,8,3}^4 = -1, R_{6,8,4}^3 = 1, R_{6,8,7}^9 = 1, R_{6,8,9}^7 = -1,$$

при этом тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам.

### Заклучение

В работе решены следующие задачи:

- 1) исследованы канонические связности на полученных редуکتивных однородных пространствах;
- 2) вычислены тензоры кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей найденных редуکتивных пространств.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других евклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.
4. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
5. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 60б.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);

- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;

- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруюцца падзаглаўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);

- спіс выкарыстанай літаратуры; спіс выкарыстанай літаратуры дубліруюцца ў лацінскім алфавіце (References), пры гэтым колькасць крыніц, прыведзеных у спісе, і ў References, павінна супадаць.

- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на мове артыкула і англійскай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнаасцю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, электронны адрас і кантактныя тэлефоны);

- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;

- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;

- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 11.06.2021. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,09. Ул.-выд. арк. 7,20.

Тыраж 100 экз. Заказ № 152.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы,

распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.