

# Веснік

Брэсцкага ўніверсітэта

*Рэдакцыйная калегія*

*Галоўны рэдактар*  
А. М. Сендзер

*Намеснік галоўнага рэдактара*  
А. Я. Будзько

*Адкажны рэдактар*  
М. М. Сендзер

А. Б. Антаневіч (Беларусь)  
А. І. Басік (Беларусь)  
М. А. Громаў (Расія)  
М. І. Ляўчук (Беларусь)  
В. С. Манахаў (Беларусь)  
І. П. Мартынаў (Беларусь)  
А. І. Мелькер (Расія)  
У. А. Плецохоў (Беларусь)  
В. М. Радзькоў (Беларусь)  
В. Г. Самойленка (Украіна)  
У. С. Секяржыцкі (Беларусь)  
А. А. Трафімук (Беларусь)  
Л. Уба (Польшча)

Пасведчанне аб рэгістрацыі  
ў Міністэрстве інфармацыі  
Рэспублікі Беларусь  
№ 1338 ад 28 красавіка 2010 г.

Адрас рэдакцыі:  
224016, г. Брэст,  
бульвар Касманаўтаў, 21  
тэл.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Часопіс «Веснік Брэсцкага  
ўніверсітэта» выдаецца  
са снежня 1997 года

**Серыя 4**

**ФІЗІКА**

**МАТЭМАТЫКА**

**НАВУКОВА-ТЭАРЭТЫЧНЫ ЧАСОПІС**

Выходзіць два разы ў год

Заснавальнік – Установа адукацыі  
«Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна»

**№ 2 / 2020**

У адпаведнасці з Дадаткам да заада  
Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь  
ад 01.04.2014 № 94 у рэдакцыі заада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі  
Рэспублікі Беларусь ад 30.01.2020 № 22  
(са змяненнямі, унесенымі заадам ВАК ад 20.11.2020 № 271)  
часопіс «Веснік Брэсцкага ўніверсітэта. Серыя 4. Фізіка. Матэматыка»  
ўключаны ў Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь  
для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў  
па фізіка-матэматычных навуках (Фізіка)

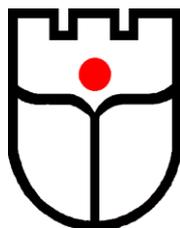
# ЗМЕСТ

## ФІЗІКА

<b>Демидчик А. В.</b> Стабильность микротвердости фольг тройных сплавов на основе $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ .....	5
<b>Лиопо В. А., Лявшук И. А., Секержицкий С. С.</b> Точечная симметрия прямой и обратной кристаллических решеток в представлении групп подстановок .....	11
<b>Sánchez-Bernabe F. J.</b> Construction of Classical and Nonclassical Fullerenes with Tetrahedral Structure .....	24
<b>Секержицкий В. С., Свирепа А. А.</b> Сверхплотный водород в астрофизических объектах и пикноядерные реакции синтеза .....	33
<b>Серый А. И.</b> Влияние резонансного комптоновского рассеяния в магнитном поле на вращение плоскости поляризации фотонов .....	40

## МАТЭМАТЫКА

<b>Грицук Д. В.</b> Влияние строения холловой подгруппы конечной $\pi$ -разрешимой группы на производную $\pi$ -длины .....	50
<b>Матысик О. В., Гавва Д. В., Сирисько Е. А.</b> Останов по поправкам в неявном методе итераций решения линейных операторных уравнений первого рода .....	56
<b>Мельникова И. Н., Войтович В. В.</b> Компьютерное построение модели конкурирующих видов .....	66
<b>Морозов В. В.</b> Метод второго порядка решения операторных уравнений .....	72
<b>Юдов А. А., Кисилук Е. В.</b> Дифференциальная геометрия однородных пространств со структурной группой – группой Ли движений пространства ${}^1R_6$ .....	90



# *Vesnik*

*of Brest University*

*Editorial Board*

*Editor-in-chief*  
A. M. Sender

*Deputy Editor-in-chief*  
A. Ya. Budzko

*Managing editor*  
M. M. Sender

A. B. Antanevich (Belarus)  
A. I. Basik (Belarus)  
M. A. Gromau (Расія)  
M. I. Liauchuk (Belarus)  
V. S. Manakhau (Belarus)  
I. P. Martynau (Belarus)  
A. I. Melker (Russia)  
U. A. Pletsukhou (Belarus)  
V. M. Radzkou (Belarus)  
V. R. Samoilenka (Ukraine)  
U. S. Sekyarczhytski (Belarus)  
A. A. Trafimuk (Belarus)  
L. Uba (Poland)

Registration Certificate  
by Ministry of Information  
of the Republic of Belarus  
nr 1338 from April 28, 2010

Editorial Office:  
224016, Brest,  
21, Kosmonavtov Boulevard  
tel.: +375-(162)-21-72-07  
e-mail: vesnik@brsu.brest.by

Published since December 1997

## Series 4

### PHYSICS

### MATHEMATICS

**SCIENTIFIC-THEORETICAL JOURNAL**

Issued twice a year

Founder – Educational Establishment  
«Brest State A. S. Pushkin University»

*№ 2 / 2020*

According to the Supplement to the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from April 01, 2014 nr 94 as revised by the order of Supreme Certification Commission of the Republic of Belarus from January 30, 2020 nr 22 (with the amendments made by the orders of Supreme Certification Commission from November, 20, 2020 nr 271) the journal «Vesnik of Brest University. Series 4. Physics. Mathematics» was included to the List of scientific editions of the Republic of Belarus for publication of the results of scientific research in physics-mathematical sciences (Physics)

# INDEX

## PHYSICS

<b>Demidchik A. V.</b> Stability of Microhardness Foil of Triple Alloys Based on $\text{Bi}_{0.89}\text{Sb}_{0.11}$ .....	5
<b>Liopo V. A., Liaushuk I. A., Sekerzhitsky S. S.</b> Point Symmetry of the Forward and Reverse Crystal Lattices in the Representation of Permutation Groups .....	11
<b>Sánchez-Bernabe F. J.</b> Construction of Classical and Nonclassical Fullerenes with Tetrahedral Structure .....	24
<b>Sekerzhitsky V. S., Svirepa A. A.</b> Superdense Hydrogeu Iu Astrophysical Objects and Picnonuclear Reactions of Synthesis .....	33
<b>Sery A. I.</b> The Influence of Resonance Compton Scattering in Magnetic Field on the Rotation of the Plane of Polarization of Photons .....	40

## MATHEMATICS

<b>Gritsuk D. V.</b> Influence of the Structure of the Hall Subgroup of the Finite $\pi$ -Solvable Group on the Derivative $\pi$ -Length .....	50
<b>Matysik O. V., Gavva D. V., Sirisko Ye. A.</b> Stopping by the Correction in the Implicite Method of Iterations of the Solution of Linear Operator Equations of the First Kind .....	56
<b>Melnikova I. N., Voitovich V. V.</b> Computer Construction of a Model of Competing Species .....	66
<b>Morozov V. V.</b> Second-Order Method for Solving Operator Equations .....	72
<b>Yudov A. A., Kisilyuk Ye. V.</b> Differential Geometry of Homogeneous Spaces with Structure Group – the Lie Group of Motions of the Space ${}^1R_6$ .....	90

# ФІЗІКА

УДК 620.17:669.76

**А. В. Демидчик**

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
e-mail: [otf@brsu.brest.by](mailto:otf@brsu.brest.by)

## СТАБИЛЬНОСТЬ МИКРОТВЕРДОСТИ ФОЛЬГ ТРОЙНЫХ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$

*Микротвердость фольг зависит от их химического состава: легирование висмута сурьмой от 8 до 15 ат. %, а также легирование бинарного сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  третьим компонентом (германий, индий, олово, сера, теллур, галлий) приводят к увеличению микротвердости. Термическая обработка фольг вследствие распада пересыщенного твердого раствора и собирательной рекристаллизации приводят во всех вышеперечисленных сплавах к уменьшению микротвердости.*

DEMIDCHIK A. V.

### STABILITY OF MICROHARDNESS FOIL OF TRIPLE ALLOYS BASED ON $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$

*The microhardness of the foils depends on their chemical composition: doping of bismuth antimony from 8 to 15 at. %, as well as doping of the binary  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  alloy with the third component (germanium, indium, tin, sulfur, tellurium, gallium) lead to an increase in microhardness. The thermal treatment of the foils due to the decomposition of the supersaturated solid solution and collective recrystallization in all of the above alloys leads to a decrease in microhardness.*

#### Введение

Сплавы висмут-сурьма с содержанием последней от 7 до 22 ат. %, являются полупроводниками с максимальным энергетическим зазором вблизи состава  $\text{Bi}_{0,88}\text{Sb}_{0,12}$ .

Сверхбыстрое охлаждение из расплава (скорость затвердевания жидкой фазы по некоторым оценкам составляет порядка  $10^6$  К/с) висмут-сурьмянистых сплавов исследуемого состава позволяет получать фольги с неустойчивой микрокристаллической структурой, которые обладают однородным распределением компонентов, что в свою очередь приводит к увеличению прочностных характеристик и улучшению термоэлектрических свойств. Термическая обработка (отжиг) фольг сохраняет однородность распределения компонентов [1], однако размер зерен увеличивается, что влечет за собой изменение ряда свойств и характеристик, в том числе и микротвердости.

Цель работы – исследовать влияние легирования третьим компонентом на микротвердость фольг сплава на основе  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ . В качестве третьего компонента выбирались химические элементы, показанные в таблице 1. Чтобы лучше понять процессы, влияющие на формирование структуры, а следовательно, и свойств, в таблице 2 приведены некоторые необходимые характеристики элементов.

Таблица 1. – Химические элементы, взятые в качестве объектов исследования

Период	Ряд	Группы элементов			
		III	IV	V	VI
3	3				16 S
4	5	31 Ga	32 Ge		
5	7	49 In	50 Sn	<b>51 Sb</b>	52 Te
6	9			<b>83 Bi</b>	

Таблица 2. – Некоторые характеристики объектов исследования

Химический элемент	Атомный радиус, $10^{-12}$ м	Температура плавления, °С
висмут	143	272
галлий	136	30
германий	125	936
индий	156	157
олово	145	232
сера	88	115
сурьма	133	630
теллур	123	450

### Методика получения и исследования

Фольги получались путем затвердевания капли расплава на внешней отполированной поверхности вращающегося медного цилиндра (спиннингование). Толщина фольг варьировалась в пределах 10...60 мкм. Было установлено, что микротвердость фольг, пусть и несущественно, зависит от их толщины, поэтому в качестве объекта исследования выбирались фольги толщиной 20...40 мкм. Измерение микротвердости проводилось на приборе ПМТ-3 с использованием нагрузки 10 г.

Изохронный отжиг быстрозатвердевших фольг проводился в интервале температур 20...270 °С с выдержкой по 10 мин через каждые 20 °С, изотермический отжиг – при температурах 120 °С, 180 °С и 220 °С в течение 30 мин., 1 часа, 2 часов и 4 часов.

*Примечание.* Полученные в ходе сверхбыстрого охлаждения фольги имеют две поверхности: одна контактировала при охлаждении с воздухом, другая – с медным диском. Результаты расчетов среднего размера зерна на обеих поверхностях несколько отличаются друг от друга, что, наверное, скажется и на измерении микротвердости. Поэтому в качестве исследуемой поверхности выбиралась та, которая контактировала с диском-кристаллизатором.

### Результаты измерения микротвердости фольг бинарного сплава

Измерение микротвердости бинарных сплавов проводилось для концентраций сурьмы от 8 до 15 ат. %. С увеличением концентрации сурьмы в сплаве микротвердость монотонно возрастает (рисунок 1). Это обусловлено возникновением упругих деформаций, связанных с различием атомных размеров Вi и Sb. При легировании висмута сурьмой происходит усиление ковалентных сил связи между атомами, а также измельчение зеренной структуры в сплаве висмут-сурьма (рисунок 2).

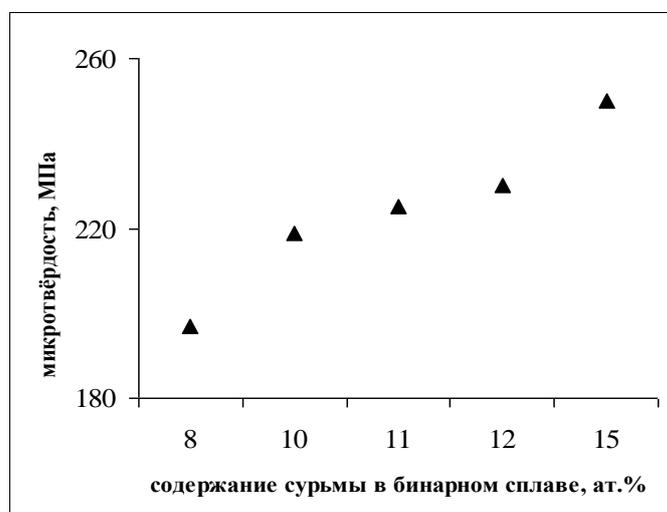


Рисунок 1. – Зависимость микротвердости фольги бинарного сплава от концентрации сурьмы

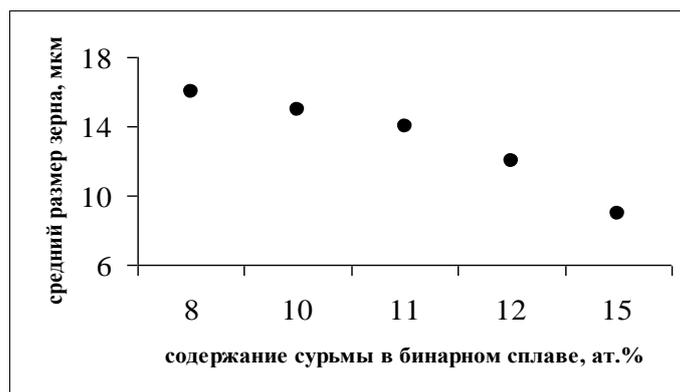


Рисунок 2. – Зависимость среднего размера зерна от концентрации сурьмы в бинарном сплаве

Результаты измерения микротвердости для тройных сплавов, легированных элементами III и IV группы периодической системы химических элементов

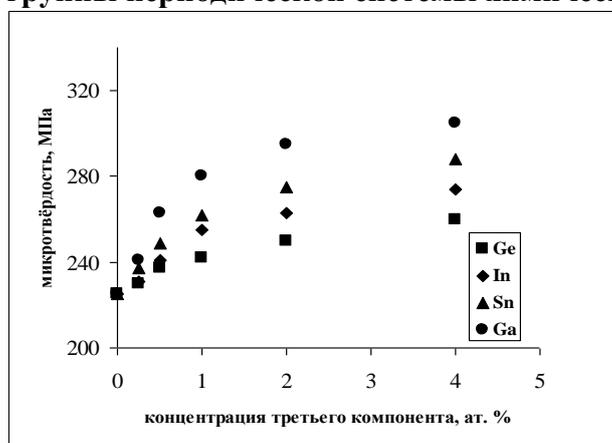


Рисунок 3. – Зависимость микротвердости фольги тройного сплава на основе  $Bi_{0,89}Sb_{0,11}$  от концентрации легирующего элемента

Результаты измерения микротвердости для тройных сплавов, легированных элементами VI группы

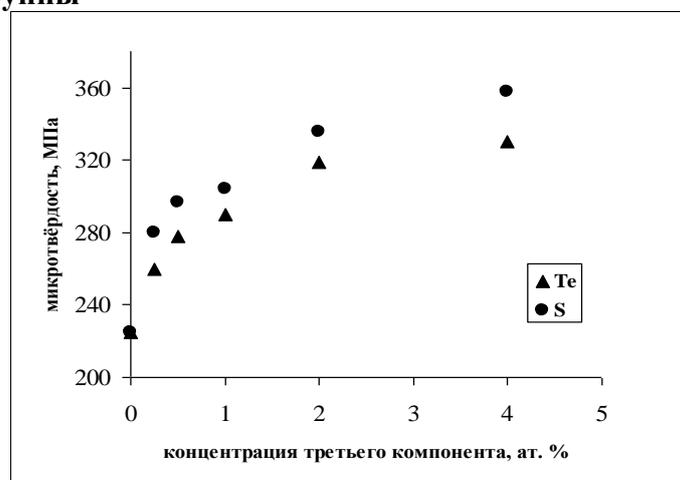


Рисунок 4. – Зависимость микротвердости фольги тройного сплава на основе  $Bi_{0,89}Sb_{0,11}$  от концентрации легирующего элемента

Легирование третьим компонентом приводит к увеличению микротвердости, особенно заметному при малых концентрациях третьего элемента. Увеличение микротвердости при легировании разными элементами различно: в одних случаях она увеличивается более сильно с увеличением концентрации третьего компонента (с серой и теллуrom), чем в других (олово). Элементы VI группы периодической системы проявляют в сплаве висмут-сурьма донорные свойства, а элементы III и IV – акцепторные. Легирование «донорным» элементом приводит к росту электронной концентрации и усилению металлической связи между атомами, в то время как легирование «акцепторным» элементом приводит к тому, что имеется одна или несколько незавершенных ковалентных связей между атомами, что ведет к ослаблению ковалентного «мостика».

#### Результаты измерения микротвердости отожженных фольг бинарного сплава

Изохронный отжиг до температуры 170 °C не оказывал влияние на микротвердость. Начиная с указанной температуры вплоть до 220 °C наблюдается уменьшение микротвердости (рисунок 5). В интервале 220...270 °C микротвердость практически не изменяется. Уменьшение микротвердости в интервале температур 170...220 °C связано с протеканием собирательной рекристаллизации, при которой происходит, как было отмечено выше, увеличение среднего размера зерна [2].

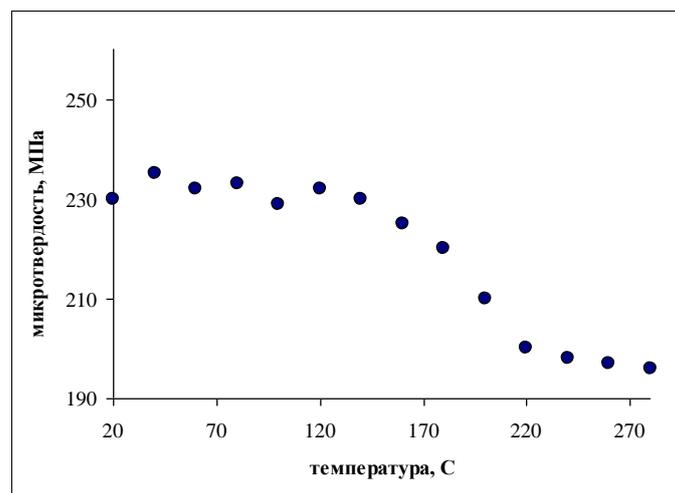


Рисунок 5. – Зависимость микротвердости бинарного сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  от температуры изохронного отжига

На рисунке 6 представлены графики зависимостей микротвердости от времени изотермического отжига при различных температурах. Как видно из указанного рисунка, при температуре 120 °C уменьшение микротвердости незначительное (в пределах погрешности измерения).

Повышение температуры изотермического отжига (особенно при температурах начала или протекания процесса собирательной рекристаллизации) способствует более быстрому уменьшению микротвердости. Длительный отжиг при фиксированной температуре свыше 2 часов незначительно уменьшает микротвердость.

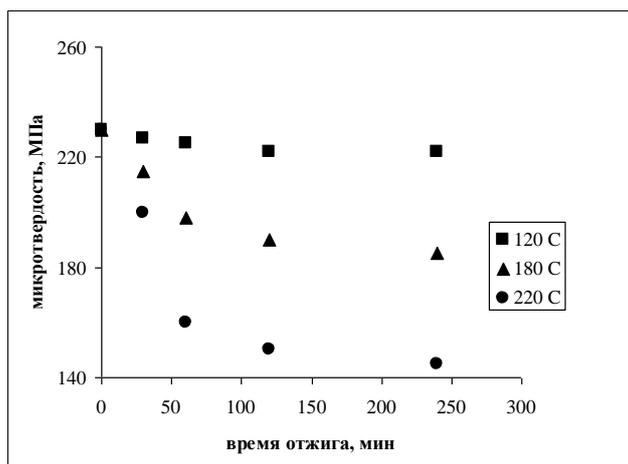


Рисунок 6. – Зависимость микротвердости бинарного сплава  $Bi_{0,89}Sb_{0,11}$  от времени изотермического отжига

Результаты измерения микротвердости отожженных фольг тройного сплава на основе  $Bi_{0,89}Sb_{0,11}$ , легированного серой

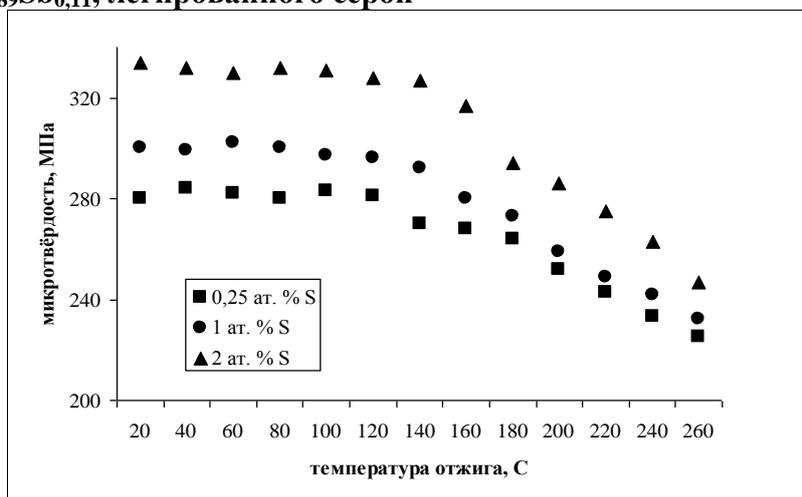


Рисунок 7. – Зависимость микротвердости от температуры изохронного отжига для фольг тройного сплава с серой

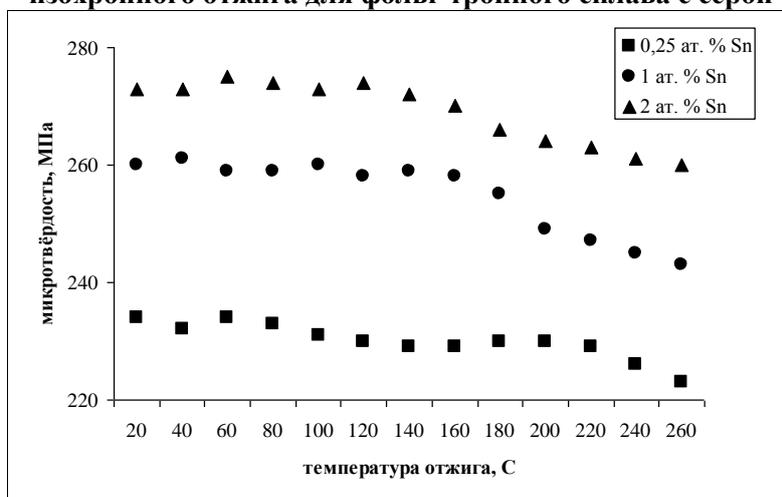


Рисунок 8. – Зависимость микротвердости от температуры изохронного отжига для фольг тройного сплава с оловом

На рисунках 7 и 8 приведены зависимости микротвердости от температуры изохронного отжига для одного «донорного» (сера) и одного «акцепторного» (олово) элемента. Как видно из указанных рисунков, термическая обработка фольг тройных сплавов с оловом и серой приводит к уменьшению микротвердости. Если сплав образует пересыщенный твердый раствор, то уменьшение микротвердости обусловлено его распадом и собирательной рекристаллизацией, если пересыщенный твердый раствор не образовывался, то только рекристаллизацией. При этом сначала происходит распад пересыщенного твердого раствора, затем – собирательная рекристаллизация. Отметим, что чем меньше концентрация третьего компонента, тем при более низких температурах происходит распад раствора. При больших значениях концентрации третьего компонента распад смещается в сторону начала рекристаллизации.

### Заклучение

1. Сверхбыстрая закалка из расплава позволяет получать фольги, микротвердость которых зависит от химического состава легирующих компонентов: чем больше концентрация сурьмы в бинарном сплаве, тем меньше средний размер зерна и больше значение микротвердости; легирование третьим компонентом (галлием, германием, оловом, индием, серой, теллуrom) приводит к уменьшению размеров зерен и увеличению микротвердости.

2. Отжиг фольг бинарного сплава при температурах более 170 °С приводит к уменьшению микротвердости. Отжиг фольг тройных сплавов на основе  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  с галлием, германием, оловом, индием, серой или теллуrom при температурах более 120 °С также приводит к уменьшению микротвердости.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидчик, А. В. Структура быстрозатвердевших фольг сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$ , полученных спиннингованием / А. В. Демидчик // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2019. – № 2. – С. 5–11.

2. Демидчик, А. В. Влияние отжига на микротвердость фольг сплава  $\text{Bi}_{0,89}\text{Sb}_{0,11}$  / А. В. Демидчик // Современные научные проблемы и вопросы преподавания теоретической и математической физики, физики конденсированных сред и астрономии : сб. материалов VII Респ. науч.-практ. конф., Брест, 23–24 окт. 2019 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. В. С. Секержицкого. – Брест : БрГУ, 2019. – С. 15–16.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 10.02.2020*

УДК 538.9

**В. А. Лионо<sup>1</sup>, И. А. Лявшук<sup>2</sup>, С. С. Секержицкий<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>д-р физ.-мат. наук, проф., проф. каф. теоретической физики и теплотехники  
Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>2</sup>магистр естеств. наук, ст. преподаватель каф. информационных систем  
и технологий Гродненского государственного университета имени Янки Купалы

<sup>3</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: [sekerzhitsky@rambler.ru](mailto:sekerzhitsky@rambler.ru)

## ТОЧЕЧНАЯ СИММЕТРИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

*Построены таблицы групп подстановок точечных симметрий кристаллов. Разработана методика перехода от матричного представления точечных симметрий кристалла к представлению группами подстановок. Проанализирована применимость представления точечных симметрий кристаллов для R-тригональной решетки, а также тождественность представлений точечных групп в кристаллическом и обратном пространствах.*

**LIORO V. A., LIAUSHUK I. A., SEKERZHITSKY S. S.**

## POINT SYMMETRY OF THE FORWARD AND REVERSE CRYSTAL LATTICES IN THE REPRESENTATION OF PERMUTATION GROUPS

*The tables of groups of substitutions of point symmetries of crystals are constructed. A technique has been developed for the transition from the matrix representation of the point symmetries of the crystal to the representation by permutation groups. The applicability of the representation of point symmetries of crystals for the R-trigonal lattice, as well as the identity of the representations of point groups in crystalline and inverse spaces, is analyzed.*

### Введение

Точечная симметрия описывает объекты (например, различные геометрические фигуры), которые при изменении своего положения относительно исходного (начального) совпадают с этим начальным состоянием. При этом, обязательно хотя бы одна точка этого объекта при его движении остается неподвижной. С этой точкой совмещается начало координат декартовой системы, оси которой фиксируются с положением объекта. Для кристаллов такая система называется кристаллофизической (КФ), и ее оси при точечном движении займут положение  $(x', y', z')$ , которое относительно начального положения  $(x, y, z)$  описывается матрицей Эйлера:

$$[M] = [C_{jk}], \quad (1)$$

где  $C_{jk} = \cos(x_j, x'_k)$ , при этом  $x$  и  $x'$  определяются по одному правилу, например, против (или по) часовой стрелке. Если выполняется несколько движений, описываемых матрицами  $M_{V(1,2,\dots,n)}$ , то результат определяется матрицей:

$$M_R = \Pi_V M_V. \quad (2)$$

При этом условие коммутативности может не выполняться, а может и выполняться.

Матричное представление совокупности всех возможных точечных движений формирует точечную группу объекта (кристалла, его решетки и структуры).

### Кристаллографический и кристаллофизический базисы

В кристаллах, наряду с точечной симметрией, имеется симметрия пространственная, когда объект совмещается с первоначальным положением при движении всех его точек [1]. Такое симметричное преобразование называется трансляцией и описывается условием:

$$\hat{T}\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r} + \vec{R}) \equiv \varphi(\vec{r}), \quad (3)$$

где  $\varphi(\vec{r})$  – структурно-химические параметры,  $(\vec{R})$  – вектор трансляции, равный:

$$\vec{R} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}, \quad (4)$$

здесь  $m, n, p$  – целые числа.

Векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – некопланарные, связывают три гомологичные точки с такой же в начале координат и называются базисными векторами в кристаллографической координатной системе.

На векторах базиса строится параллелепипед с ребрами  $a, b, c$ , который в общем случае косоугольный и который называется ячейкой кристалла. Ячейка описывается шестью параметрами:  $a, b, c$  (линейные) и  $\alpha, \beta, \gamma$  (угловые) параметры. Если координатные оси совпадают с ребрами ячейки и координаты точек приведены в единицах базиса, то условие (3) в этой системе координат, называемой кристаллографической (КГ), примет вид:

$$\hat{T}\varphi(x, y, z)_{КГ} = \varphi(x_{КГ} + m, y_{КГ} + n, z_{КГ} + p) \equiv \varphi(x, y, z)_{КГ}. \quad (5)$$

Дифракционный эксперимент определяет положение атомов в КГ-системе, но эта система не позволяет определять межатомные ориентации. Если КГ- и КФ-системы имеют общее начало координат и определенную взаимориентацию координатных осей, то переход от координат точки в КГ-системе к ее координатам в КФ-системе определяется условием:

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{КФ} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{КГ} \quad (6)$$

или  $|x|_{КФ} = |M||x|_{КГ}$ , где  $|M|$  – метрический тензор решетки кристалла.

Для перехода от КФ-системы к КГ-системе координат требуется условие:

$$|x|_{КГ} = |M|^{-1}|x|_{КФ}, \quad (7)$$

где  $|M|^{-1}$  – обратный метрический тензор.

Очевидно, что

$$|M||M|^{-1} = |M|^{-1}|M| = |I|, \quad (8)$$

здесь  $|I|$  – единичная матрица.

Метрические тензоры  $|M|$  и  $|M|^{-1}$  в том случае, когда  $x_{КГ}$  совпадает с  $x_{КФ}$ ,  $y_{КГ}$  – лежит в плоскости  $(xy)_{КФ}$ , имеют вид [2]:

$$M = \begin{vmatrix} a & b \cos \gamma & c \cos \beta \\ 0 & b \sin \gamma & c \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \gamma} \\ 0 & 0 & \frac{c \cdot r}{\sin \gamma} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{\operatorname{ctg} \gamma}{a} & \frac{\cos \gamma \cos \alpha - \cos \beta}{a \cdot r \sin \gamma} \\ 0 & \frac{1}{b \sin \gamma} & \frac{\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha}{b \cdot r \sin \gamma} \\ 0 & 0 & \frac{\sin \gamma}{c \cdot r} \end{vmatrix}. \quad (9^*)$$

Если необходимо построить систему связанных точечной симметрией гомологичных точек (орбиту), то матрица-генератор точечной ( $C$ ) группы требует записи координат атомов начальной точки в КФ-базисе:

$$|x|_{\text{КФ}}^{\text{ОРБ}} = C|x|_{\text{КФ}}^1. \quad (10)$$

Если же начальная точка записана в КГ-базисе, а точечная симметрия приведена в матричном представлении КФ-базиса, то  $|x|_{\text{КГ}}$  необходимо перевести в КФ-базис, подействовать на эту точку группой  $C$  (КФ-базис) и совершить обратный переход от КФ- к КГ-базису.

Т. е. КГ-базис при  $|x|_{\text{КГ}}^1$  определяется условием:

$$|x|_{\text{КГ}}^{\text{ОРБ}} = |M|^{-1} C_{\text{КФ}} |M| |x|_{\text{КГ}}^1 \quad (11)$$

или

$$|x|_{\text{КГ}}^{\text{ОРБ}} = |K| |x|_{\text{КГ}}^1, \quad (12)$$

где  $K$  – матричное представление точечной группы в КГ-базисе.

В литературе [3] показано, что если в матрицах  $C$  имеются элементы  $0, \pm 1$ , причем  $\pm 1$  встречается в каждой строке и в каждом столбце только по одному разу, то группы  $C$  и  $K$  совпадают. Именно это свойство матриц точечных групп позволяет записать их в терминах групп подстановок.

Из анализа групп подстановок следует, что для построения кристаллографических орбит в КГ-базисе или в КФ-базисе необходимо записать координаты исходной точки в виде  $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  и перемножить элементы группы на эту матрицу. Другими словами, необходимо взять группу в представлении групп подстановок и во всех ее элементах в верхней строке заменить  $1 \rightarrow x$ ,  $2 \rightarrow y$ ,  $3 \rightarrow z$ . Если исходная (начальная) точка взята в КГ-базисе, то получим орбиту в КГ-базисе, то же самое и для КФ-базиса.

### Группы подстановок точечных симметрий кристаллов

Матрица с элементами  $0, \pm 1$  ( $\pm 1$  не повторяется ни в строке, ни в столбце) описывается выражением:

$$\begin{pmatrix} u \bar{v} w \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Это означает, что под номером  $u$  стоит  $(+1)$ , под номером  $v$  стоит  $(-1)$ ,  $(+1)$  имеет номер  $w$  ( $u \neq v, u \neq w, v \neq w$ ). Очевидно, что запись (11) легко трансформируется в матрицу Эйлера.

Правило взаимодействия (бинарной операции) элементов групп подстановок иллюстрирует пример:

$$\begin{pmatrix} 3 \bar{1} 2 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{2} \bar{3} 1 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Элемент над цифрой 1 результата определяется следующим образом: над 1 в первом «множителе» стоит 3, а над 3 во втором – 1, т. е. в результате над 1 надо поставить 1. Таким же образом определяются элементы результата над цифрами 2 и 3. Если знак «минус» (над числом) встречается дважды, то это число берется со знаком «плюс», который не указывается. Если же один раз, то со знаком «минус». Единичным элементом в группе подстановок является элемент  $\begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 3 \ 3 \end{pmatrix} = e$ .

Порождающие элементы групп подстановок для сингоний, кроме гекса- и тригональной, имеют одинаковую запись как в кристаллографическом, так и в кристаллофизическом базисах и в прямой, и в обратной решетках.

Генераторы групп и сами группы подстановок приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Сингонии ( $C$ ), точечные группы ( $TГ$ ), генераторы ( $ГЕН$ ) и группы подстановок ( $ГП$ ) для простейших точечных симметрий в  $KГ$ - и  $KФ$ -базисах прямой и обратной решеток

$C$	№	$TГ$	$ГЕН$	$ГП$
Триклинная	1	1	$\begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$
	2	$\bar{1}$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$
Моноклинная	3	2	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$
	4	$m$	$\begin{pmatrix} 1 \ 2 \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \ 2 \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$
	5	$2/m$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$
Ромбическая	6	222	$\begin{pmatrix} 1 \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$
	7	$mm2$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \bar{1} \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ \bar{2} \ \bar{3} \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{pmatrix}$





	20	$m\bar{3}m^*$	$\begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2\bar{3} & 1 \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{3} & 1 \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{3} & 1 \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{3} & 1 \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{3}\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{1}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2\bar{1}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{1}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2\bar{1}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{3}\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2\bar{1}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{1}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{1}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{3}\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1\bar{3}\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{3}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{3}\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{3}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\bar{2}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{3}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2\bar{3}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\bar{3}\bar{1} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1\bar{2} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\bar{3} \\ 1 & 2\bar{3} \end{pmatrix}$
--	----	---------------	--	---

Тригональные и гексагональные решетки в качестве таксона (определяющий признак) описываются матрицей-генератором групп 3 и 6 :

$$|M| = \begin{vmatrix} S \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & S \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{15}$$

где  $S = +1$  для гексагональной и  $S = -1$  для тригональной ячеек.

Параметры ячеек этих решеток следующие:  $a = b$ ,  $c$   $\alpha = \beta = 90^\circ$ ,  $\gamma = 120^\circ$  (для гексагональной часто берут  $\gamma = 60^\circ$ ).

Расчет метрических тензоров (9) и переход к кристаллографической системе (12) приводят к значениям:

$$|3| = \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, |6_{120}| = \begin{vmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, |6_{60}| = \begin{vmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{16}$$

т. е. для этих решеток в трехмерном пространстве представление их симметрий группами подстановок неприемлемо. Это означает, что, строго говоря, эти решетки не соответствуют самому понятию решетка и ее ячейка в виде параллелепипеда, так как полиэдр с осями 6 и 3 при указанных  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$  построить невозможно. Но для тригональной решетки возможен так называемый ромбический базис ( $R$ -решетка) с параметрами:  $a = b = c$ ,  $\alpha = \beta = \gamma$ . Ячейка в этом случае представляет собой ромбоэдр. Биссектриса трехгранного угла, ограниченного плоскостями (001), (010) и (100), определяет направление оси 3.

Очевидно, эта ось в КГ-системе имеет вид:

$$3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Плоскости  $m_{xz}$  и  $2_y$  имеют вид:

$$m_{xz} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2_y = \begin{vmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{vmatrix}.$$

Точечные группы тригональной сингонии для  $R$ -базиса (КГ-базис) и гексагональной сингонии рассмотрены в [4].

В таблице 2 приведена матрица Кэли, которая является таблицей взаимодействия («перемножения») для группы 23.

Каждая строка, как и каждый столбец, представляют собой элемент группы подстановок точечной группы 23. Легко убедиться, что для 12 подстановок совокупность 12 строк (или 12 столбцов) таблицы Кэли представляет группу подстановок 12-го порядка, так как требование групповых постулатов полностью выполняется.

Подчеркнем, что точечная симметрия решетки кристалла всегда такая же, как и точечная группа симметрии обратной решетки.

Таблица 2. – Матрица Кэли для группы 23

	1 ( $e$ )	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$	$e$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\begin{pmatrix} 312 \\ 123 \end{pmatrix}$	2	3	$e$	10	8	11	4	12	6	7	9	5
$\begin{pmatrix} 231 \\ 123 \end{pmatrix}$	3	$e$	2	7	12	9	10	5	11	4	6	8
$\begin{pmatrix} 3\bar{1}2 \\ 123 \end{pmatrix}$	4	6	8	5	$e$	7	2	9	3	11	12	10
$\begin{pmatrix} 2\bar{3}1 \\ 123 \end{pmatrix}$	5	7	9	$e$	4	2	6	3	8	12	10	11

$\begin{pmatrix} \bar{2}3\bar{1} \\ 123 \end{pmatrix}$	6	8	4	11	9	12	5	10	7	2	3	$e$
$\begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 123 \end{pmatrix}$	7	9	5	12	3	10	$e$	11	2	6	8	4
$\begin{pmatrix} \bar{1}\bar{2}\bar{3} \\ 123 \end{pmatrix}$	8	4	6	2	10	3	11	$e$	12	5	7	9
$\begin{pmatrix} \bar{3}1\bar{2} \\ 123 \end{pmatrix}$	9	5	7	6	11	8	12	4	10	$e$	2	3
$\begin{pmatrix} 2\bar{3}\bar{1} \\ 123 \end{pmatrix}$	10	11	12	8	2	4	3	6	$e$	9	5	7
$\begin{pmatrix} 1\bar{2}\bar{3} \\ 123 \end{pmatrix}$	11	12	10	9	6	5	8	7	4	3	$e$	2
$\begin{pmatrix} \bar{3}1\bar{2} \\ 123 \end{pmatrix}$	12	10	11	3	7	$e$	9	2	5	8	4	6

**Примеры использования групп подстановок для решения некоторых задач**

Физические свойства кристаллов, как и любых объектов, определяются откликом объекта на внешнее воздействие. При этом всегда выполняется принцип Ле-Шателье – Брауна: «На внешнее воздействие любая система откликается так, чтобы это воздействие максимально ослабить». Если воздействие носит векторный характер, то и отклик будет иметь смысл вектора. Каждая компонента вектора воздействия ( $\vec{A}$ ) действует на каждую компоненту вектора отклика ( $\vec{B}$ ).

Связь между ними имеет вид:

$$\vec{B} = [T]\vec{A}, \tag{17}$$

где  $[T]$  – тензор физического свойства.

В кристаллах точечная симметрия отражается в записи тензора  $[T]$ , так как его компоненты должны быть инвариантны по отношению к точечному преобразованию [5; 6]. Если в исходной (начальной) позиции кристалл описывается тензором физических свойств  $[T] = [t_{ij}]$ , то после точечного преобразования группой ( $C_{mn}$ ) компоненты тензора примут значения  $[T'] = [t'_{ij}]$ :

$$[t'_{pq}] \equiv [t_{pq}], \tag{18}$$

в противном случае точечное преобразование не будет инвариантным.

Очевидно, что:

$$t'_{pq} = f(C, T_{pq}), \tag{19}$$

где  $C$  – точечная группа кристалла,  $T$  – тензор физического свойства кристалла до выполнения точечного движения симметрии.

Если векторы  $\vec{A}, \vec{B}$  (17) имеют одинаковую полярность, то (19) примет вид:

$$t'_{pq} = \sum_{i,j} C_{pi} C_{qj} t_{ij}. \quad (20)$$

Если  $\bar{A}, \bar{B}$  разнополярные (один полярный, другой аксиальный), то для операций симметрии первого рода выполняется условие (20). Если же анализируется связь между  $[T']$  и  $[T]$  для операций симметрии второго рода, то выполняется условие:

$$t'_{pq} = -\sum_{i,j} C_{pi} C_{qj} t_{ij}. \quad (21)$$

Естественно, при использовании формул (20, 21) не надо рассматривать влияние на  $[t'_{ij}]$  всей группы точечной симметрии. Достаточно взять только матрицу(ы)-генератор(ы). Для примера рассмотрим группу 4. Генератор этой группы в представлении групп подстановок может также иметь вид  $\begin{pmatrix} \bar{2}13 \\ 123 \end{pmatrix}$ .

Поэтому, для определения элементов тензора  $[T']$  надо использовать условие:  $t'_{11} = C_{12} C_{12} t_{22}$ ,  $t'_{12} = C_{12} C_{21} t_{21}$ ,  $t'_{13} = C_{12} C_{33} t_{23}$ ,  $t'_{22} = C_{21} C_{21} t_{11}$ ,  $t'_{21} = C_{21} C_{12} t_{12}$ ,  $t'_{23} = C_{21} C_{33} t_{13}$ .

Из этого следует:  $t'_{11} = t_{22} = t_{11}$ ,  $t'_{22} = t_{11} = t_{22}$ ,  $t'_{12} = t_{21} = t_{12}$ ,  $t'_{21} = -t_{12} = t_{23}$ ,  $t'_{13} = -t_{23} = t_{13}$ . Из двух приведенных условий следует, что  $t_{13} = -t_{13}$  или  $t_{23} = -t_{23}$ , т. е. эти компоненты тензора  $[T]$  равны нулю.

Т. е. тензор физического свойства представлен в виде:

$$[T] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Если точечная группа в матрицах-генераторах имеет дополнительную матрицу, то ее надо учесть. Взяв за исходный тензор, например, для группы  $4mm$  плоскости, проходящие через ось 4 с матрицей  $\begin{pmatrix} \bar{1}23 \\ 123 \end{pmatrix}$ , получаем условие  $t_{12} = -t_{21}$ , т. е. равны нулю соответствующие компоненты.

Тензор  $[T]$  для  $4mm$  имеет вид:

$$[T_{4mm}] = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 \\ & t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Эффективность использования точечных симметрий кристаллов в представлении групп подстановок существенно повышается по сравнению с матричным представлением, если анализируются тензоры третьего или четвертого ранга.

### Представление точечных симметрий прямой и обратной решеток группами подстановок

Представленные в таблице 1 подстановки для групп точечной симметрии, как и элементы-генераторы этих групп, проанализированы для решеток кристаллов (или прямых решеток). Вопрос применения этих представлений для обратных решеток требует дополнительного анализа. Сингония прямой решетки определяется не только

точечной симметрией, но и соотношениями между параметрами ячейки. У трех ортогональных сингоний  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ . Если  $(a = b = c)$ , то решетка кубическая,  $(a = b, c)$  – тетрагональная,  $(a, b, c)$  – ромбическая. Но основным фактором отнесения решетки к определенной сингонии является точечная симметрия ее свойств.

В литературе, например, для ромбических кристаллов, указано  $a \neq b \neq c$ , но это относится к кристалло-химической нетождественности, для ромбической сингонии надо указывать не  $a \neq b \neq c$ , а  $(a, b, c)$  – произвольные параметры. Если в кубическом ферромагнитном кристалле ось намагниченности идет вдоль  $[111]$ , то это не кубическая, а  $R$ -ромбическая ячейка при сохранении геометрического равенства параметров  $(a, b, c)$ . Ячейка  $R$ -тригональной решетки имеет параметры  $(a = b = c)$ ,  $(\alpha = \beta = \gamma)$ , гексагональной и  $H$ -тригональной  $(a = b, c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ)$ . У моноклинных  $(a, b, c, \alpha = \beta = 90^\circ, \gamma)$ . У триклинных решеток  $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$ , т. е. параметры не связаны друг с другом.

Связи между параметрами прямой и обратной (\*) решеток определяются условиями (учитываются только геометрические размеры) и имеют вид:

$$a_j^* = \frac{\sin \alpha_j}{a_j r}, \tag{24}$$

$$\sin \alpha_j^* = \frac{r}{\sin \alpha_{j+1} \sin \alpha_{j+2}}, \tag{25}$$

где  $r = (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)^{\frac{1}{2}}$ .

Параметры, необходимые для расчета  $(a^* \alpha^*)_j$  для различных сингоний, приведены в таблице 3.

На основании данных таблицы 3 с учетом (25) проанализированы связи между  $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$  и  $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)^*$  для всех сингоний. В результате анализа установлено, что связи между параметрами в кристаллической и обратной решетках идентичны. Следовательно, точечные группы в прямом и обратном пространствах одинаковы для решеток определенной сингонии.

Но точечная симметрия в решетке кристалла связывает тождественные в структурно-химическом отношении точки, например, с электронной плотностью  $\rho(\vec{r})$ , и в этой решетке имеется трансляция. В обратной решетке точечная симметрия связывает узлы решетки, так как точки обратной решетки с нецелочисленными кристаллографическими координатами имеют нулевой «вес».

Трансляция в обратной решетке относится только к геометрическому распределению точек. Узлы  $(hkl)$  и  $(\vec{h} + m\vec{a}^*, \vec{k} + n\vec{b}^*, \vec{l} + p\vec{c}^*)$  в общем случае нетождественны в структурно-химическом отношении. Закону трансляции «подчиняются» только их радиусы-векторы.

Таблица 3. – Параметры для расчета  $(a^* \alpha^*)_j$  для различных сингоний

Сингонии	$R$	$a^*$	$b^*$	$c^*$
		$\sin \alpha^*$	$\sin \beta^*$	$\sin \gamma^*$
Кубическая	1	$1/a$	$1/a$	$1/a$
		1	1	1

Тетрагональная	1	$1/a$	$1/a$	$1/c$
		1	1	1
Ромбическая	1	$1/a$	$1/b$	$1/c$
		1	1	1
R-тригональная	$(1 - 3\cos^2 \alpha + 2\cos^2 \beta)^{1/2}$	$\frac{\sin \alpha}{r}$	$a^*$	$b^*$
		$\frac{r}{\sin^2 \alpha}$	$\frac{r}{\sin^2 \alpha}$	$\frac{r}{\sin^2 \alpha}$
H-решетка	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3a}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3a}$	$1/c$
		1	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Моноклинная	$\sin \gamma$	$\frac{1}{a \sin \gamma}$	$\frac{1}{b \sin \gamma}$	$1/c$
		1	1	$\sin \gamma$
Триклинная	$r = \left( \begin{matrix} 1 - \cos^2 \alpha - \\ \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + \\ 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{matrix} \right)^{1/2}$	$\frac{\sin \alpha}{ar}$	$\frac{\sin \beta}{br}$	$\frac{\sin \gamma}{cr}$
		$\frac{r}{\sin \beta \sin \gamma}$	$\frac{r}{\sin \gamma \sin \alpha}$	$\frac{r}{\sin \alpha \sin \beta}$

Для гексагональных кристаллов (H-решетка) описанная методика представления точечных симметрий группами подстановок неприемлема.

Действительно, ось  $b$  при переходе от кристаллографического базиса к кристаллофизическому рассчитывается по формуле:

$$[6]_{KT} = [M]^{-1} [6]_{K\Phi} [M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -\frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Вся группа  $[6]_{KT}$  в матричном представлении имеет вид:

$$[6]_{KT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \\ 1 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{1} & 1 & 0 \\ \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Т. е. точечные группы H-решеток нельзя представить подстановками по описанной выше методике, так как решетки H-типа, строго говоря, не соответствуют требованию решеток. Построить ромб (ячейки), у которого есть ось  $b$ , невозможно.

### Заклучение

Точечные группы кристаллов кубической, тетрагональной, ромбической, моноклинной, триклинной сингоний в матричном представлении описываются матрицами с элементами  $0, \pm 1$ , причем (1) в каждой строке и в каждом столбце встречается только один раз. При переходе от декартовой (кристаллофизической) системы координат к реперу Браве (кристаллографическая система) таким свойством описываются точечные группы  $R$ -тригональной решетки. Приведена методика описания указанных точечных симметрий в представлении групп подстановок. Построены таблицы групп подстановок. Гексагональная решетка в строгом смысле решеткой не является, так как построить ячейку (параллелепипед) с осью шестого порядка невозможно. Если шесть ромбов с углами  $60^\circ$  имеют общую вершину, то такой «модуль» имеет ось 6, но он не может выполнить плоскость, то есть не формирует решетку.

Представление точечных симметрий группами подстановок существенно облегчает расчет тензоров физических свойств, особенно в случаях тензоров третьего и четвертого рангов. Построение точечной группы при заданном элементе-генераторе группы подстановок значительно проще, чем при использовании матричных представлений. Показано, что представление точечной симметрии кристаллов группами подстановок одинаковое для решетки кристалла и его обратной решетки. Предложена методика перемножения элементов групп подстановок с учетом знака элемента в матрице преобразований.

Материал может представлять интерес для специалистов, работающих в различных областях кристаллофизики.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Конвей, Дж. Упаковки шаров, решетки и группы : в 2 т. / Дж. Конвей, Н. Слоэн. – М. : Мир, 1990. – Т. 2. – 376 с.
2. Лиопо, В. А. Матричная кристаллография / В. А. Лиопо. – Гродно : Изд-во ГрГУ, 1998. – 78 с.
3. Вайнштейн, В. Б. Современная кристаллография / В. Б. Вайнштейн. – М. : Наука, 1979–1980. – Т. 1. – 1979. – 384 с.
4. Андреев, А. И. Фундаментальная теория классов симметрии кристаллов / А. И. Андреев // Мир соврем. науки. – 2015. – № 1 (29). – С. 10–16.
5. Палистрант, А. Ф. Исследование пятимерных точечных групп симметрии с инвариантной трехмерной плоскостью и неподвижной точкой на ней / А. Ф. Палистрант // Кристаллография. – 2013. – Т. 58, № 3. – С. 357–365.
6. Желудев, И. С. Физика кристаллов и симметрия / И. С. Желудев – М. : Наука, 1987. – 192 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 09.06.2020*

***F. J. Sánchez-Bernabe***

*Department of Mathematics Metropolitan Autonomous University*

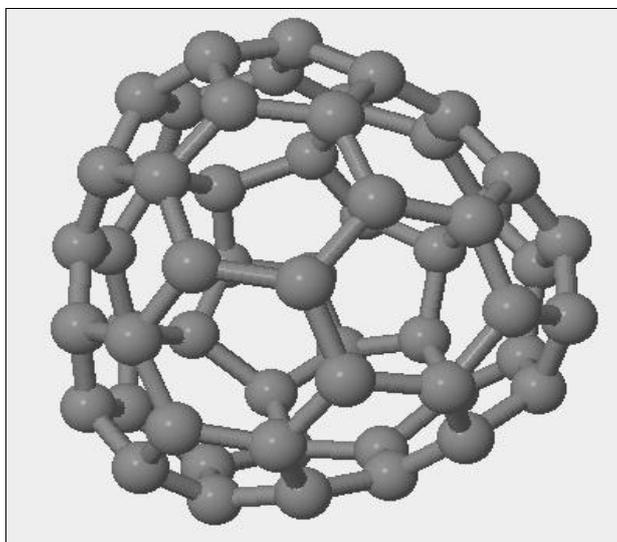
*e-mail: fjsb@xanum.uam.mx*

## **CONSTRUCTION OF CLASSICAL AND NONCLASSICAL FULLERENES WITH TETRAHEDRAL STRUCTURE**

*Classical fullerenes are molecules with pentagons and hexagons. On the other hand, nonclassical fullerenes contain also, squared, heptagonal, or octagonal faces.*

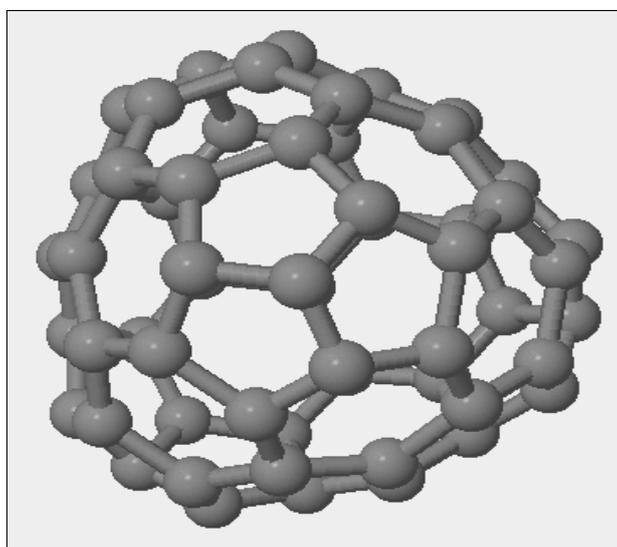
### **Calculations**

The first example that we consider is a classical fullerene that contains 56 carbons. We observe in Figure 1, that at the upper part of the molecule, there are two pentagons next to each (actually there is another one behind them). This means that our fullerene, does not satisfy the Isolated pentagon Rule, IPR.



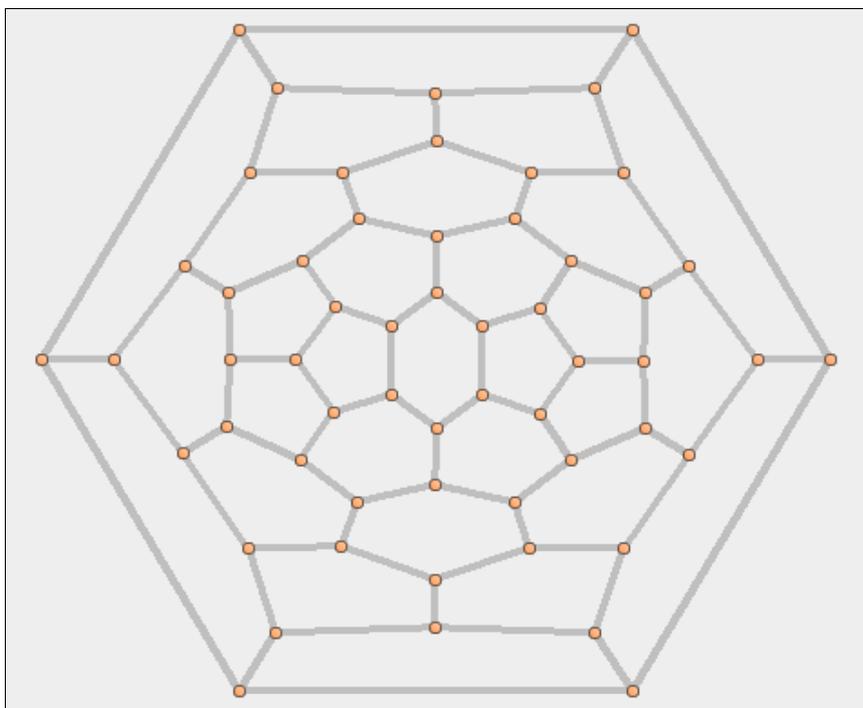
**Figure 1. – Classical fullerene with 56 carbons**

We observe in Figure 2 three pentagons located next to each other.



**Figure 2. – View from the top of fullerene C<sub>56</sub>**

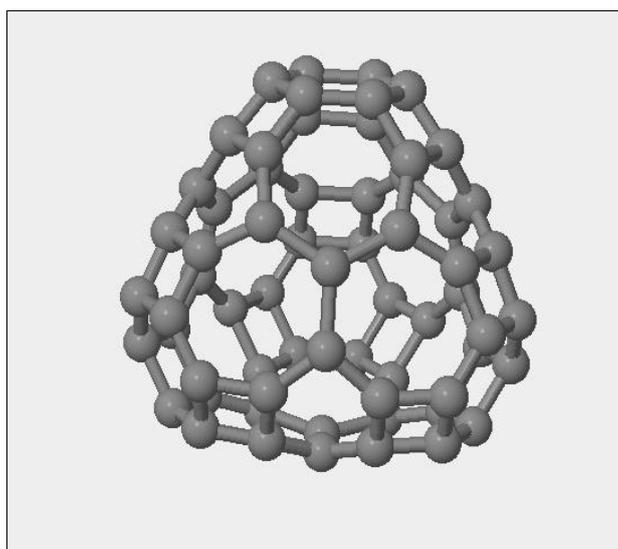
Schlegel diagram of fullerene  $C_{56}$  showing one face composed by three hexagons, that is located above the equator of the graph, and another face, below that horizontal zone.



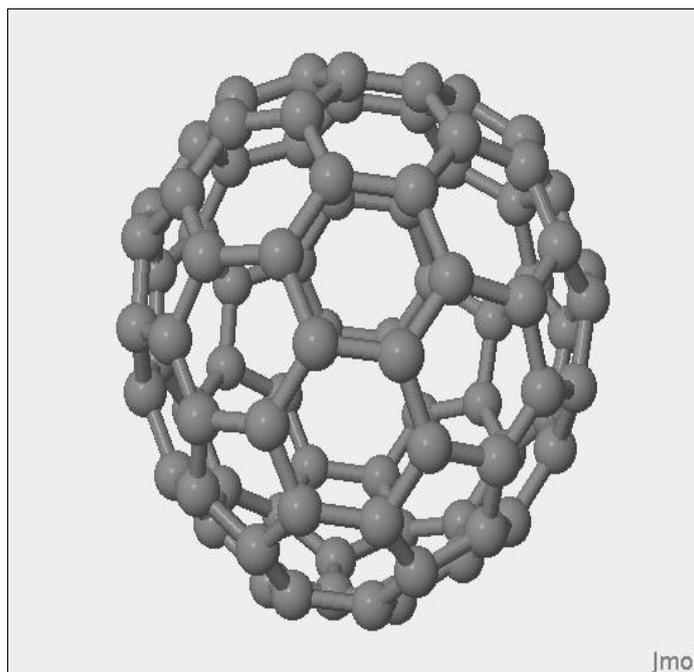
**Figure 3. – Schlegel diagram of fullerene  $C_{56}$  showing two of the four faces with three hexagons**

At our Schlegel diagram, we observe four groups with 3 hexagons, each of them. Next, we add, six hexagons that separate a couple of three pentagons, and two faces with three hexagons. Thus, 4 times 3 plus 6 is equal to 18 hexagons, and 12 pentagons.

Our next molecule contains heptagons. Thus, it is an example of a nonclassical fullerene. We have 64 carbons, 12 pentagons, 10 hexagons, and 12 squares.

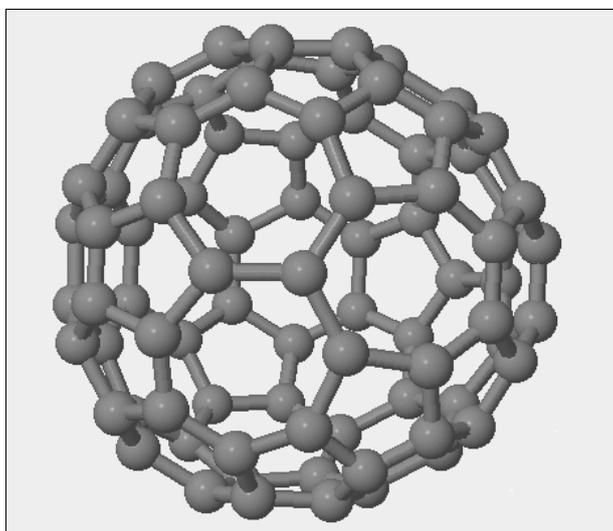


**Figure 4. – One of the four faces of  $C_{64}$  is constituted by four heptagons**



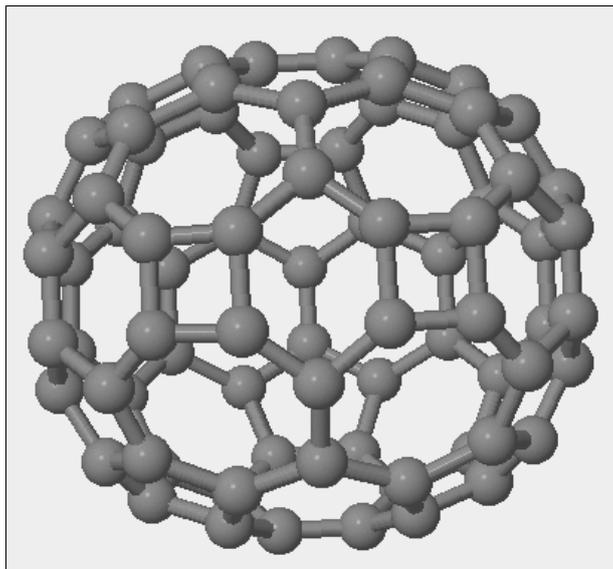
**Figure 5. – Classical fullerene  $C_{84}$   
with tetrahedral symmetry**

In order to obtain the nonclassical fullerene  $C_{64}$ , we consider the  $C_{84}$  classical isomer with tetrahedral structure, and we replace the seven hexagons located next to each other (that form a face) by three heptagons. The original face has 12 inner carbons, and the new face contains 10 inner carbons. Therefore, after this first step, a nonclassical fullerene with 82 carbons is generated, which is shown in Figure 6.



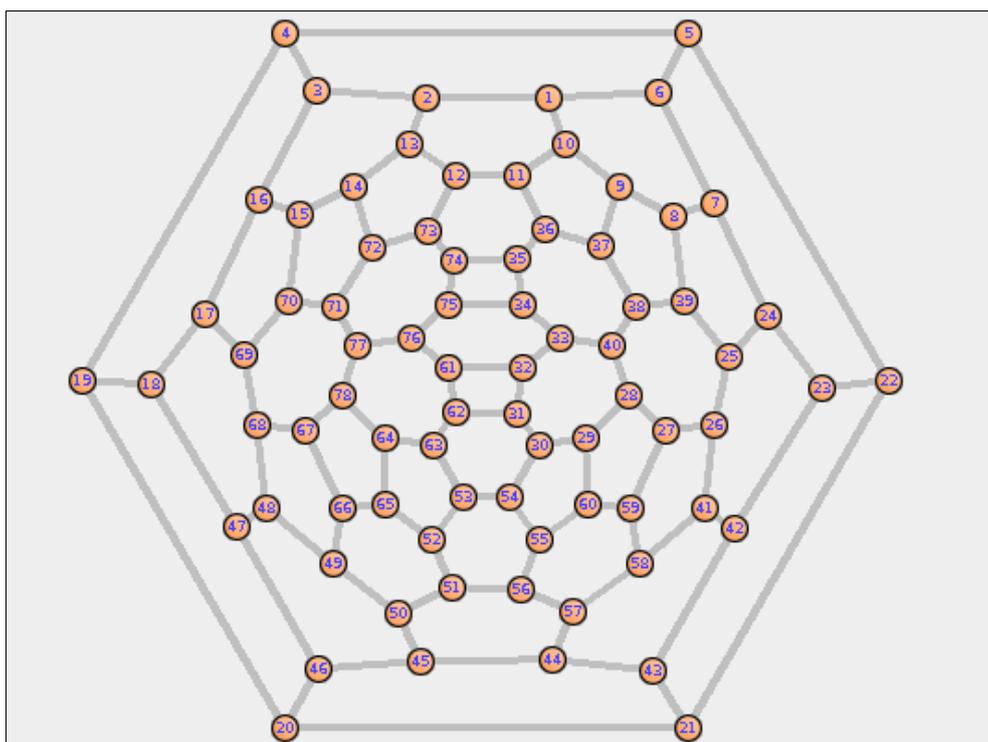
**Figure 6. – Nonclassical fullerene with 82 carbons**

Moreover, on Figure 6, we can observe that between the new face and the original ones, a pentagon takes the place of a previous hexagon. After we replace another face of seven hexagons by three heptagons we obtain a nonclassical fullerene with 78 carbons, see Figure 7.



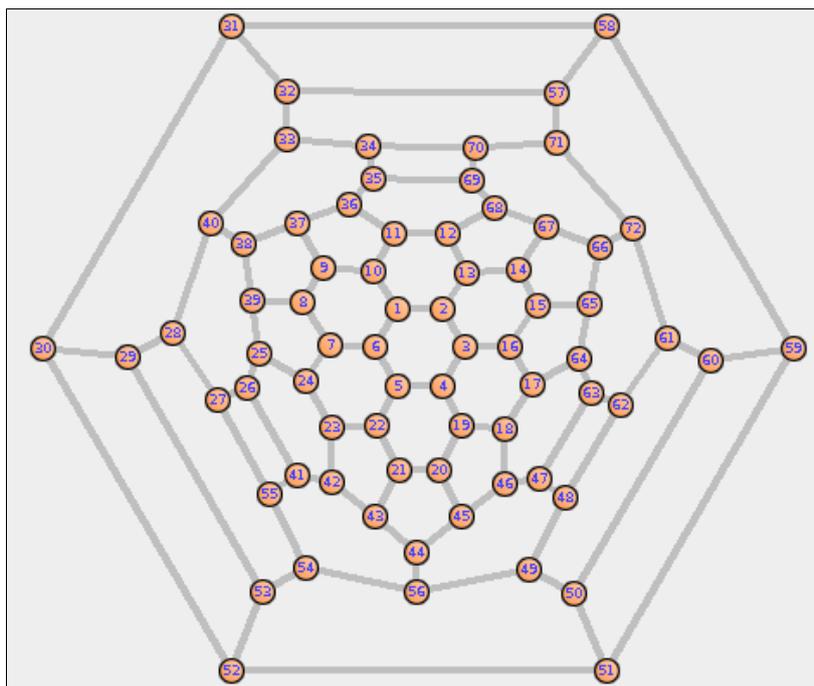
**Figure 7. – Nonclassical fullerene with 78 carbons**

Meanwhile, on Schlegel diagram of Figure 8, we have a couple of squares.

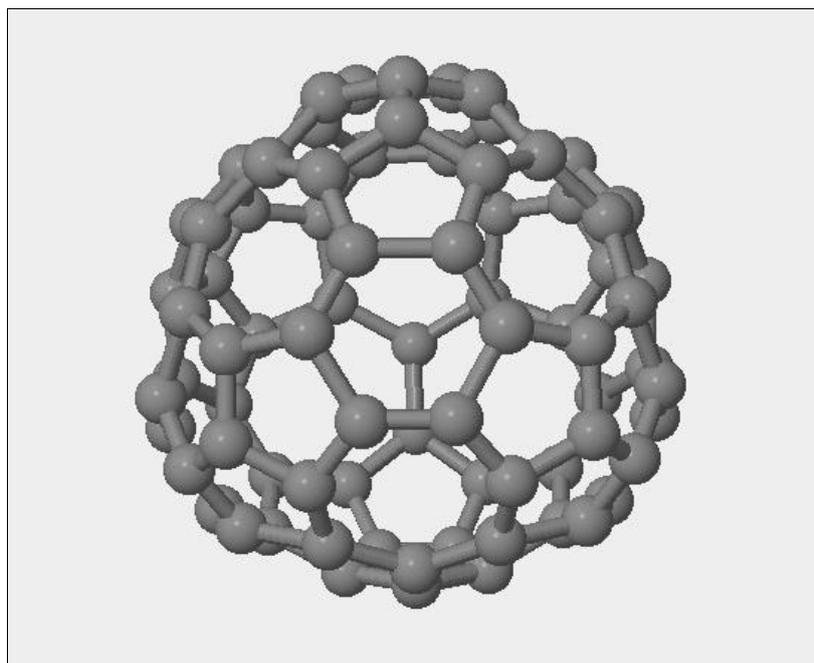


**Figure 8. – Schlegel diagram of nonclassical fullerene with 78 carbons**

Next, we repeat this procedure for the third time to obtain a nonclassical fullerene with 72 carbons, which is shown in Figure 9. Finally, after a last iteration, we have the nonclassical fullerene with 64 carbons of Figure 4.

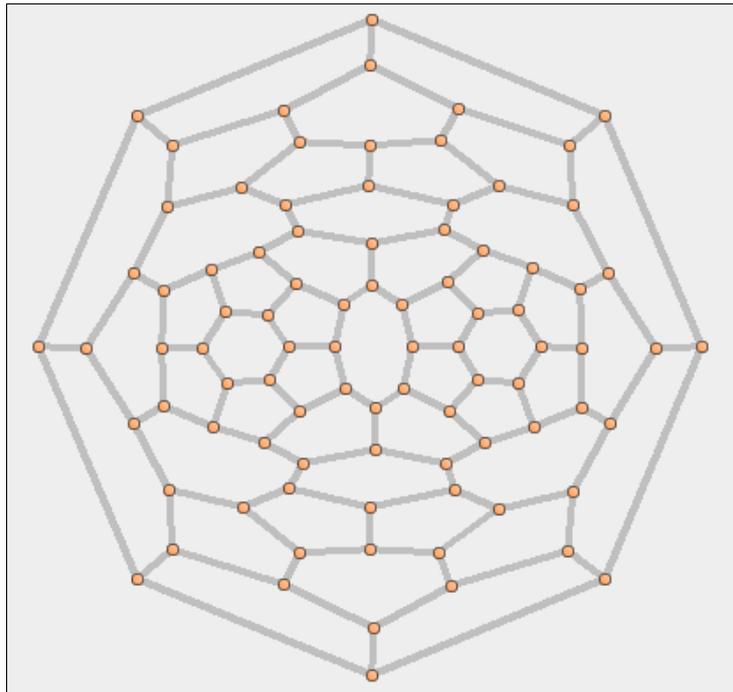


**Figure 9.** – Schlegel diagram of nonclassical fullerene with 72 carbons



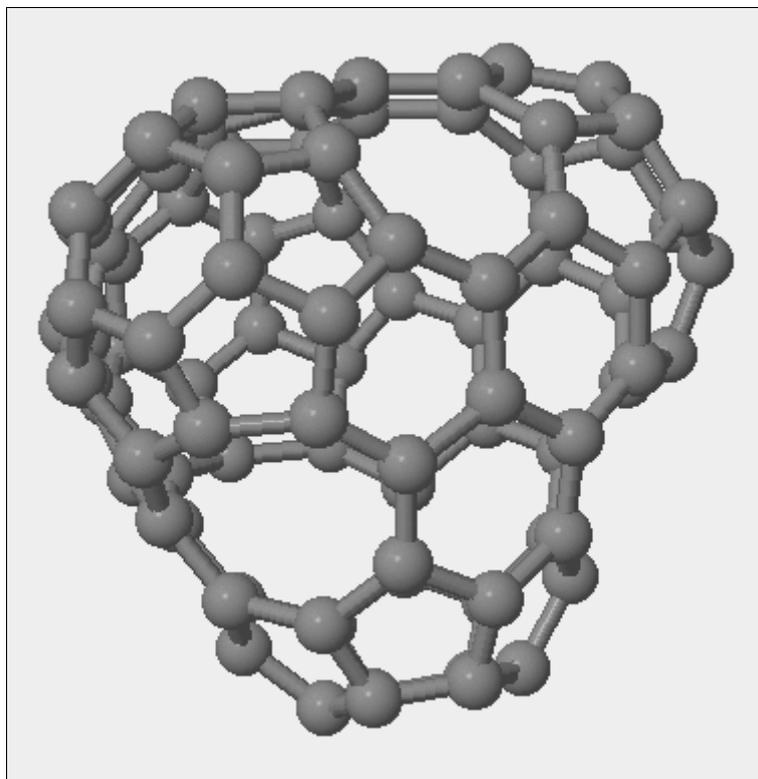
**Figure 10.** – Nonclassical fullerene with 76 carbons

In our previous construction, the faces formed by three heptagons, have hexagons as vertexes, and between two hexagons there is a boundary filled out with one hexagon and two squares. But, if this boundary consists of four pentagons, instead of squares and the hexagon, for each one of the six boundaries, we have two additional carbons, which give 12 more carbons. Therefore, we obtain a new nonclassical fullerene with 64 plus 12 equal to 76 carbons, which is shown in Fig. 10.



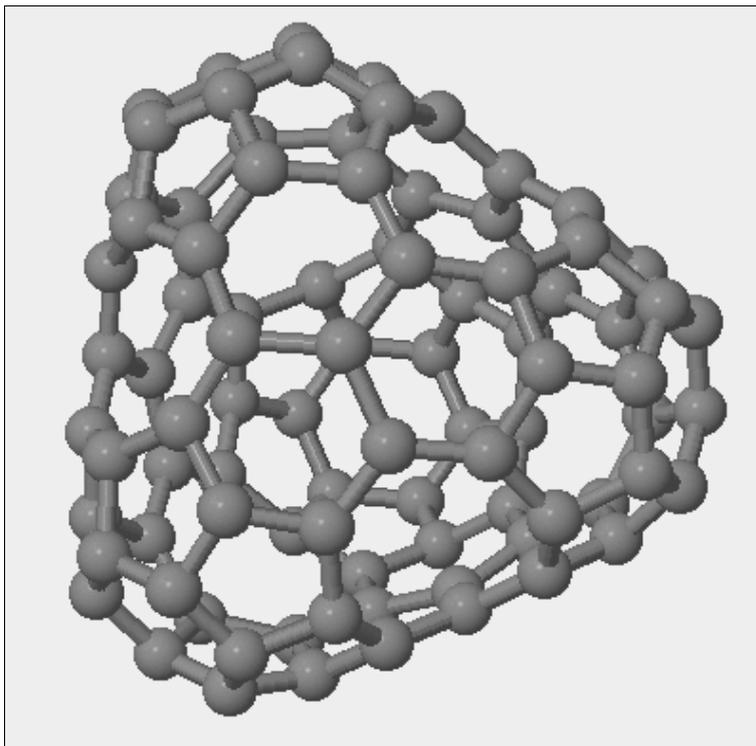
**Figure 11. – Nonclassical fullerene with 88 carbons, containing 6 octagons**

Now, we consider a fullerene with 88 carbons, containing 6 octagons



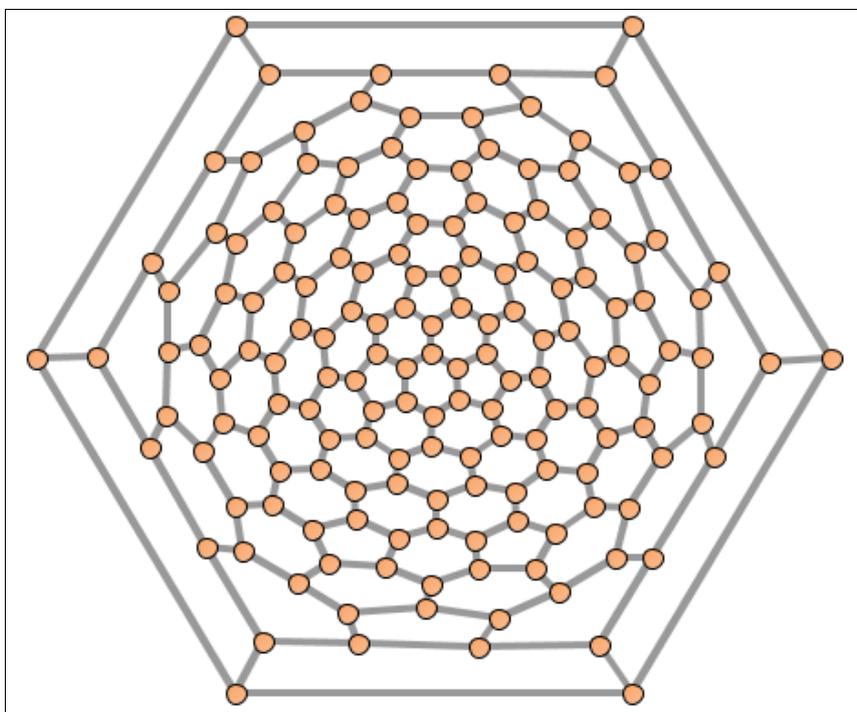
**Figure 12. – One of the four corners of a nonclassical fullerene with 88 carbons**

We observe four corners constituted by one hexagon surrounded by six hexagons.



**Figure 13.** – One of the four faces integrated by three hexagons

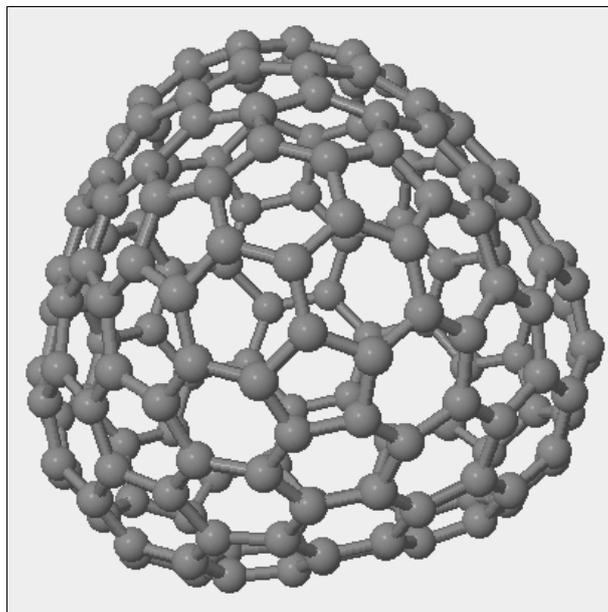
Then, we have 12 hexagons coming from the four faces, plus 4 more hexagons from the corners, giving a total of 16 hexagons. Now, we take into account 24 pentagons from the four corners, and 6 octagons.



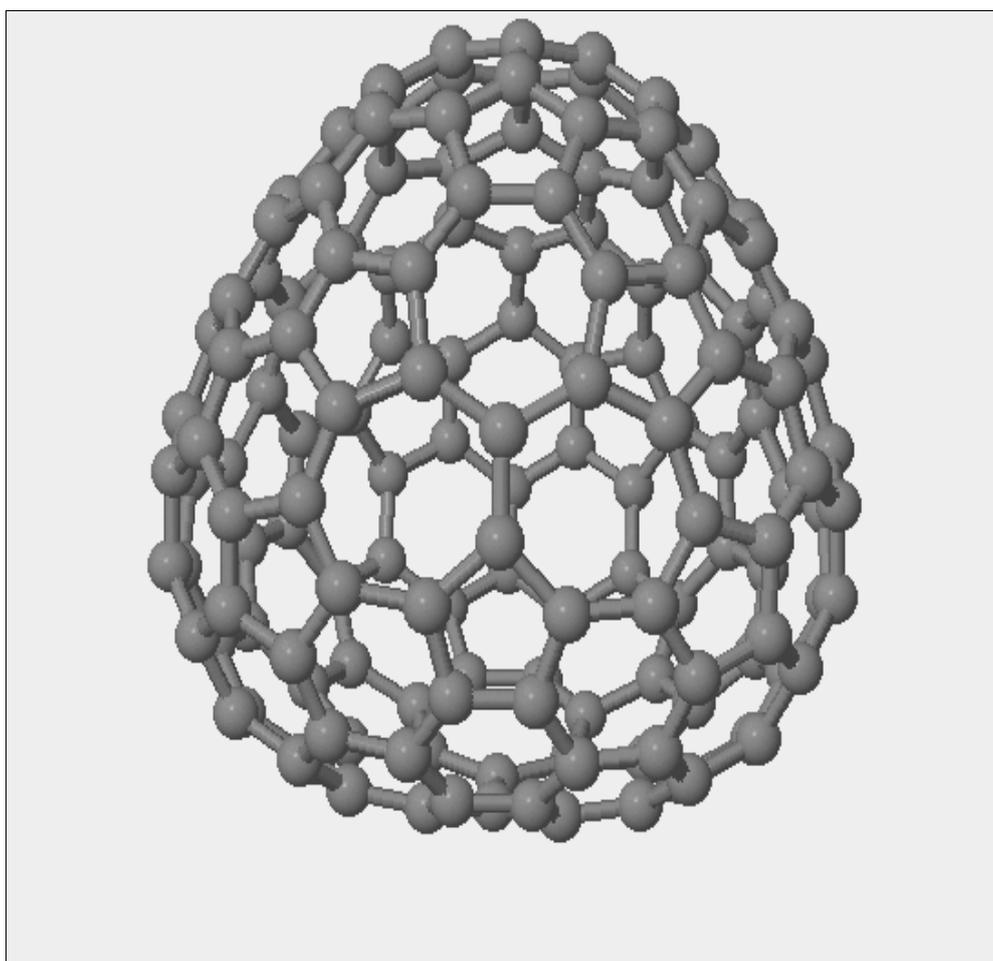
**Figure 14.** – Schlegel diagram of a classical fullerene with 160 carbons

In order to generate another nonclassical fullerene, we consider the  $C_{160}$  classical isomer with tetrahedral structure, with Schlegel diagram shown on Figure 14 and, we replace

the three hexagons located next to each other (that form a face) by three heptagons, see Figure 15



**Figure 15. – Intermediate step to obtain a 152 carbons fullerene from C<sub>160</sub>**



**Figure 16. – Face of a nonclassical fullerene with 152 carbons**

Each face of this fullerene includes three heptagons, six pentagons, and six hexagons. Between two faces we have one hexagon, and there are six of those hexagons. At each of the four vertex of the fullerene, we find a group of three hexagons. Thus, coming

from the four faces, we take into account 12 heptagons, 24 pentagons, and 24 hexagons. From the boundaries of the faces, we have 6 hexagons, and 12 hexagons from the vertex. Therefore, we have a total number of 12 heptagons, 24 pentagons, and 42 hexagons for this nonclassical fullerene  $C_{152}$ .

### Discussion

The first fullerene that we presented contains 56 carbons, with 18 hexagons, and 12 pentagons, or a total number of 30 faces.

Our next fullerene it not classical because contains 12 squares, besides 10 hexagons, and 12 pentagons. The number of carbons is 64 with 32 faces.

Now, we consider a fullerene with 76 carbons. In this case, we have 4 hexagons, 24 pentagons, and 12 heptagons, that is, 40 faces.

The fourth fullerene is not classical with 16 hexagons, 24 pentagons, and 6 pentagons. The number of carbons is 88, with 46 faces.

Finally, we consider a fullerene with 152 carbons. In this case, we have 42 hexagons, 24 pentagons, and 12 heptagons, that is, 78 faces.

### REFERENCES

1.  $C_{62}$ : Theroretical Evidence for a Nonclassical Fullerene with a heptagon ring / P. W. Ayuela [et al.] // *J. Phys. Chem.* – 1996. – Vol. 100. – P. 15 634–15 636.
2. Gaito, S. A Theroretical study of the smallest tetrahedral carbon schwarzites / S. Gaito, L. Colombo, G. Benedek // *Europhysics Letters.* – 1998. – Vol. 44, nr 4. – P. 525–530.
3. Optical and Vibrational Properties of Toroidal Carbon Nanotubes / F. Beuerle [et al.] // *Chem. Eur. J.* – 2011. – Vol. 17. – P. 3868–3875.
4. Melker, A. I. Tetrahedral Mini- and Midi- Fullerenes / A. I. Melker, S. A. Starovoi-tov, R. M. Zarafutdinov // *Materials Phys. and Mech.* – 2019. – Vol. 41. – P. 52–61.
5. Sánchez-Bernabe, F. J. Three Examples of Non-classical Fullerenes with Tetrahedral Structure / F. J. Sánchez-Bernabe // *Informat, Electron and Microsyst.* – 2017. – P. 5–7.
6. Sánchez-Bernabe, F. J. Nonclassical Fullerenes with Cubic and Octahedral Structure / F. J. Sánchez-Bernabe // *Informat, Electron and Microsyst.* – 2017. – P. 12–14.
7.  $C_{60}$ : Buckminsterfullerene / H. W. Kroto [et al.] // *Nature.* – 1985. – Vol. 318. – P. 162–163.
8. CaGe – a Virtual Environment for Studying Some Special Classes of Plane Graphsan update, MATCH Commun. / G. Brinkmann [et al.] // *Math. Comp. Chem.* – 2010. – Vol. 63 (3). – P. 533–552.
9. Zhu, H-Y. Tetrahedral-symmetry tetrahydrofullerenes / H-Y. Zhu, D. J. Klein // *J. of Molecular Structure (Theochem.)*. – 1995. – Vol. 338. – P. 11–23.
10. Decoratiom of the truncated Tetrahedron – An Archimedean Polyhedron – to produce a New Class of Convex equilateral Polyhedra with Tetrahedral Symmetry / S. Schein [et al.] // *Symmetry.* – 2016. – Vol. 8. – P. 82.
11. Circulene covered fullerenes / M. V. Diudea [et al.] // *TheoChem.* – 2009. – Vol. 904. – P. 28–34.

УДК 524+539

**В. С. Секержицкий<sup>1</sup>, А. А. Свирена<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц.,

доц. каф. общей и теоретической физики

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>студент 3 курса физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: [svs@brsu.brest.by](mailto:svs@brsu.brest.by)**СВЕРХПЛОТНЫЙ ВОДОРОД В АСТРОФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ  
И ПИКНОЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ СИНТЕЗА**

*Проведен расчет вероятности пикноядерной реакции синтеза с использованием различных теоретических моделей холодного электронно-протонного вещества в отсутствие и при наличии сильного магнитного поля. Отмечена возможность существования протонов в веществе сверхплотной магнитной звезды в течение времени, достаточного для протекания реакций нейтронизации.*

**SEKERZHITSKY V. S., SVIREPA A. A.****SUPERDENSE HYDROGEN IN ASTROPHYSICAL OBJECTS  
AND PICNONUCLEAR REACTIONS OF SYNTHESIS**

*Calculation by probability picnonuclear reaction of synthesis from employment different theoretical models of cold electron-proton matter without and by availability strong magnetic field. Draw attention to possibility existence protons in matter of superdense magnetic star in time, when go on neutronization reactions.*

Как известно, водород является основным «строительным материалом» большинства звезд, и его исследование имеет важное значение для астрофизики. Плотность звездного вещества в ряде случаев весьма значительна (на несколько порядков превышает плотность воды).

Согласно [43], при плотностях  $\rho > 0,05 \text{ г/см}^3$  происходит полная ионизация водорода. При этом совокупность электронов представляет собой свободный ферми-газ, который в определенных диапазонах плотностей и температур можно считать крайне вырожденным и идеальным, а протоны (в зависимости от значений плотности и температуры) образуют либо некоторым образом упорядоченную структуру со свойствами твердого тела, либо также ферми-газ. В последнем случае речь идет об электронейтральной электронно-протонной плазме, для теоретического описания свойств которой наиболее часто применяется модель идеальных ферми-газов [1].

С повышением плотности электронно-протонного вещества возрастают кинетические энергии его компонентов, причем энергии электронов могут достигнуть релятивистских значений, и электронно-протонное вещество при этом становится нестабильным в отношении рождения нейтронов – начинается процесс нейтронизации вещества [1]. В модели упорядоченной структуры (решетки) вещества с повышением плотности уменьшаются равновесные расстояния между протонами, что ведет к росту вероятности их столкновений и синтеза, т. е. в веществе за счет туннельного эффекта протекают пикноядерные реакции, причем тем интенсивнее, чем больше плотность вещества [1].

В [2] было отмечено, что при плотностях, превышающих  $10^5 \text{ г/см}^3$ , скорость вероятности пикноядерных реакций синтеза водорода (протонов) достаточна для того, чтобы водород астрофизического объекта полностью «выгорел» за время  $\sim 10^8$  лет. На этом основании был сделан вывод о том, что при постепенном сжатии звезды водород превращается в другие элементы (гелий или более тяжелые) раньше, чем электроны приобретут релятивистские энергии и начнется нейтронизация.

Заметим, что работа [2] была опубликована в 1957 г., когда возможность быстрого коллапса массивной звезды, приводящего к вспышке Сверхновой и образованию пульсара, была еще детально не изучена. При катастрофически быстром сжатии плотности, превышающие  $10^6$  г/см<sup>3</sup>, достигаются сравнительно быстро и реакции нейтронизации, характерное время которых исчисляется минутами, должны происходить раньше, чем медленные подбарьерные пикноядерные реакции синтеза. Проведем обоснование последнего утверждения.

Для расчета скорости пикноядерной реакции рассмотрим простейшую модель. Предположим, что протон совершает колебания в узле решетки при условии «неподвижности» протонов в других узлах. Учитываем взаимодействие этого протона только с двумя соседними, расположенными на прямой, вдоль которой происходят колебания первого протона. Энергия такого взаимодействия дается выражением:

$$U(r) = \frac{e^2}{R_0 - r} + \frac{e^2}{R_0 + r} = \frac{2e^2 R_0}{R_0^2 - r^2}, \quad (1)$$

где  $e$  – заряд протона,  $r$  – смещение протона от положения равновесия,  $R_0$  – равновесное расстояние между протонами:

$$R_0 = 2R = 2 \left( \frac{3m_p}{4\pi\rho} \right)^{1/3}, \quad (2)$$

$\rho$  – плотность вещества,  $m_p$  – масса протона.

Начальная энергия протона

$$E = E_0 + \frac{2e^2}{R_0} = \frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{2e^2}{R_0}, \quad (3)$$

где частота колебаний

$$\omega = \frac{2e}{m_p^{1/2} R_0^{3/2}}. \quad (4)$$

Известно, что кулоновское отталкивание ядер, препятствующее ядерной реакции, может преодолеваться за счет туннельного эффекта. Экспонента прохождения под потенциальный барьер

$$D = \exp \left( - \frac{2\sqrt{2m_p}}{\hbar} \int_a^{R_0-r_0} \sqrt{U(r) - E} dr \right), \quad (5)$$

где  $r_0 = 2,4 \cdot 10^{-13}$  см – величина порядка суммы радиусов двух протонов (минимально возможное расстояние между протонами),  $a$  находится из условия  $U(a) = E$ .

Несколько сложнее (с учетом взаимных колебаний пары протонов) вычисляется подбарьерная экспонента в [1].

Согласно [2], плотность вероятности нахождения двух протонов в одной точке в отсутствие ядерного взаимодействия

$$|\Psi|^2 = DE_0 \left( \frac{m_p}{2} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar^4}. \quad (6)$$

При  $\rho = 7 \cdot 10^5 \text{ г/см}^3$  получаем  $D = 6,5 \cdot 10^{-9}$ ,  $|\Psi|^2 = 2,5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$ ; при  $\rho = 2 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$  –  $D = 1,4 \cdot 10^{-7}$ ,  $|\Psi|^2 = 7,7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ; при  $\rho = 6 \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$  –  $D = 4,3 \cdot 10^{-6}$ ,  $|\Psi|^2 = 3,5 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ .  
Скорость реакции

$$W = w|\Psi|^2, \quad (7)$$

где  $w = 5 \cdot 10^{-40} \text{ см}^3/\text{с}$  [2].

Численные расчеты показывают, что зависимости скорости реакции от плотности вещества, вычисленные по приведенным выше формулам и по данным [2], довольно близки друг к другу, что говорит о правомерности применения предлагаемой упрощенной модели для таких оценок. Даже при плотностях, превышающих  $10^8 \text{ г/см}^3$ , скорость вероятности пикноядерной реакции менее  $10^{-8} \text{ с}^{-1}$ , т. е. характерное время пикноядерной реакции много больше времени, необходимого для реакции нейтронизации.

В рассмотренной выше модели (как и в модели, используемой в [2]) не учитывается влияние электронов вещества на вероятность подбарьерного перехода протона. Попытка такого учета была сделана в [3]. При этом использовалась модель электронно-протонного вещества, предложенная в [4] для оценочных расчетов критериев устойчивости фазы твердого тела (решетки из протонов). Согласно этой модели среда разделена на нейтральные сферические ячейки, которые упакованы максимально плотно. Каждая ячейка состоит из электронного облака и ядра (протона), совершающего нулевые колебания относительно ее центра. Радиус  $R$  такой ячейки определяется из условия ее нейтральности. Энергия взаимодействия протона с электронным облаком своей ячейки

$$U(r) = -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3} r^2, \quad (8)$$

где  $r$  – расстояние ядра от центра ячейки. Взаимодействием с другими ячейками можно пренебречь. Потенциал (8) осцилляторного типа, и частота колебаний протона

$$\omega = \frac{e}{m_p^{1/2} R^{3/2}} = \frac{e}{m_p} \sqrt{\frac{4}{3} \pi \rho}. \quad (9)$$

В формуле (8) предполагается, что заряд электронного облака распределен по ячейке равномерно. Строго говоря, это неверно, но отклонения от равномерного распределения несут незначительные [4].

Не повторяя здесь всех выкладок [3], остановимся на основных моментах этой работы. В [3] была сделана попытка вычислить вероятность перехода ядра из одной ячейки в фиксированную точку соседней ячейки и встречи в этой точке с соседним ядром. При этом полагалось, что электронные ячейки сохраняют первоначальную сферическую симметрию. Приближение, вообще говоря, нельзя считать корректным, поскольку электроны должны увлекаться движущимся ядром. Более корректной была бы модель одной эллипсоидальной ячейки с двумя ядрами, находящимися первоначально в фокусах эллипсоида. По мере сближения ядер такая ячейка изменяла бы эллипсоидальную форму на сферическую с двумя слившимися ядрами в центре. Однако нахождение волновых функций и вероятности в этом случае довольно затруднительно и пока не проделано. Поэтому ограничимся здесь рассмотрением результатов использования модели [3] (осознавая ее некорректность).

В [3] рассматривались разные ядра и, соответственно, разные ячейки (в нашем случае ядра – протоны, ячейки одинаковы) и было показано, что энергия взаимодействия первого ядра (в нашем случае протона), движущегося в соседнюю ячейку, с со-

седним ядром и электронами обеих ячеек может быть приближенно вычислена следующим образом:

$$U(r) = \begin{cases} -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3} r^2, r < \frac{R}{\cos \theta}, \\ -\frac{3e^2}{2R} + \frac{e^2}{2R^3} \langle |\vec{r} - \vec{l}| \rangle^2 - \frac{e^2}{\langle r \rangle} - \frac{e^2}{s-r}, r \geq \frac{R}{\cos \theta}. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $r$  – расстояние первого протона от центра своей ячейки,  $s$  – расстояние от центра первой ячейки до места встречи ядер (во второй ячейке),  $l$  – расстояние между центрами ячеек,  $\theta$  – угол между направлением движения первого протона и прямой, проходящей через центры ячеек. При усреднении в [3] принималось  $\langle r \rangle = R + R/2 = 3R/2$  и  $\langle |\vec{r} - \vec{l}| \rangle = R/2$ .

Вероятность прохождения протона в соседнюю ячейку внутри элементарного телесного угла, соответствующего плоскому углу  $\theta$ , равна:

$$dW_1 = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot d\theta \cdot \frac{\omega_1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_p} I(s, \theta)\right), \quad (11)$$

где

$$I(s, \theta) = \exp \int_{r_1}^{s-r_0} \sqrt{U(r) - E_1} dr, \quad (12)$$

$$E_1 = \frac{3}{2} \hbar \omega_1 - \frac{3e^2}{2R_0} - \quad (13)$$

энергия основного состояния первого осциллятора, которая отсчитывается не со дна потенциальной ямы, а от нуля,  $r_1$  – расстояние от центра первой ячейки до точки, где уровень энергии пересекает барьер (находится из условия  $U(r_1) = E_1$ ),  $r_0 = 2,4 \cdot 10^{-13}$  см.

Вероятность попадания второго протона в элемент объема в окрестностях точки встречи с первым протоном:

$$dW_2 = \frac{1}{a_2^3 \pi^{3/3}} \exp\left(-\frac{r'^2}{a_2^2}\right) r'^2 dr' \sin \alpha \cdot d\alpha, \quad (14)$$

где  $r'$  – смещение второго протона от центра своей ячейки,  $a_2 = \sqrt{\frac{3\hbar}{m_p \omega_2}}$  – амплитуда

колебаний второго осциллятора,  $\omega_2$  – его частота,  $\alpha$  – угол между направлением движения второго протона и прямой, проходящей через центры ячеек.

Тогда для вероятности встречи двух ядер в произвольной точке второй ячейки можно записать:

$$W = n \int dW_1 dW_2 = \frac{n \omega_1}{4\pi^{5/2} a_2^3} \int \exp\left(-\frac{r'^2}{a_2^2} - \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_p} I(s, \theta)\right) \times$$

$$\times \delta \left( \theta - \frac{r' \sin \alpha}{\sqrt{l^2 + r'^2 + 2lr' \cos \alpha}} \right) r'^2 dr' \sin \alpha \sin \theta \cdot d\alpha \cdot d\theta. \quad (15)$$

$\delta$ -функция введена для того, чтобы  $\alpha$  и  $\theta$  можно было считать независимыми,  $n$  – число ячеек, соседних с первой при их максимально плотной упаковке. Умножая  $W$  на вероятность слияния ядер при столкновении (величина, близкая к единице), получим искомого скорость вероятности пикноядерной реакции синтеза.

Интегрируя в (15) по  $\theta$ , находим:

$$W = \frac{n\omega_1}{4\pi^{5/2}a_2^3} \int \exp \left( -\frac{r'^2}{a_2^2} - \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_p} I(s, \theta_0) \right) \frac{r'^3 dr' \sin \alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{l^2 + r'^2 + 2lr' \cos \alpha}}, \quad (16)$$

где

$$\theta_0 = \arcsin \frac{r' \sin \alpha}{\sqrt{l^2 + r'^2 + 2lr' \cos \alpha}}. \quad (17)$$

При численных расчетах в данной работе мы использовали приближения [3] ( $\alpha = 0$ ,  $r' = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $s = l$ ). Расчетная формула скорости вероятности пикноядерной реакции синтеза имеет вид, аналогичный приведенной в [3]:

$$W = \frac{n\omega_1 a_2}{16\pi^{3/2}} \int \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_p} I(l, 0) \right). \quad (18)$$

Заметим, что в [3] интеграл  $I(s, \theta_0)$  представлен в алгебраическом виде, однако прямая подстановка разумных численных значений в соответствующую формулу [3] приводит к физически бессмысленным результатам. Поэтому, в отличие от [3], интеграл  $I(s, \theta_0) \approx I(l, 0)$  мы брали численно.

Как показывают расчеты, скорость вероятности реакции достигает величины  $1 \text{ с}^{-1}$  при плотности вещества  $\rho < 10^6 \text{ г/см}^3$ , т. е. меньшей, чем необходимо для нейтронизации электронно-протонного вещества. Однако следует учесть, что модель [3] – это также предельный случай, учитывающий максимальное взаимодействие протонов с электронами (в альтернативной модели [2] и приведенной в выше упрощенной модели взаимодействие протонов с электронами не учитывается вовсе). Имеются все основания полагать, что в рамках модели, более корректно отражающей реальную физическую ситуацию в сверхплотном водороде, будет иметь место промежуточный результат: при плотностях  $\sim (10^6 \div 10^8) \text{ г/см}^3$  протоны могут существовать некоторое время (очевидно, меньшее, чем дают оценки [2], но достаточное для того, чтобы релятивистские электроны обеспечили протекание реакций нейтронизации).

Рассмотрим некоторые особенности влияния сильных магнитных полей на пикноядерные реакции синтеза. В рамках модели [2] и [5] была проведена оценка скорости пикноядерной реакции синтеза в холодном плотном водороде в присутствии магнитного поля с индукцией  $\sim (10^{13} - 10^{14}) \text{ Гс}$ . При этом не учитывалось изменение потенциальной энергии колеблющегося в узле кристаллической решетки ядра магнитным полем, вследствие чего результаты [5] соответствуют лишь частному случаю движения ядер вдоль магнитных силовых линий. В [6; 7] была проведена предварительная оценка вероятности столкновения двух ядер в плотном замагниченном водороде с учетом их взаимодействия с постоянным и однородным магнитным полем. Мы уточним и дополним результаты [6; 7], используя описанную выше упрощенную модель.

Если индукция магнитного поля превышает  $10^{13}$  Гс, а плотность вещества  $\rho \sim (10^4 - 10^6)$  г/см<sup>3</sup>, то энергия взаимодействия частицы с магнитным полем определяется, в основном, выражением, квадратичным по полю. Тогда потенциальная энергия протона, колеблющегося относительно узла кристаллической решетки замагниченного вещества, равна

$$U(r) = \frac{2e^2 R_0}{R_0^2 - r^2} + \frac{e^2 B^2}{8m_p c^2} r^2 \sin^2 \varphi, \quad (19)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы с массой  $m_p$  и зарядом  $e$ ,  $R_0$  – равновесное расстояние между ядрами,  $\varphi$  – угол между направлениями движения ядра и вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . В (19), как и в [6; 7], учитывается электростатическое взаимодействие данного протона с соседними и предполагается экранировка более далеких ядер. Начальная энергия протона в этом случае

$$E = E_0 + \frac{2e^2}{R_0} = \frac{\hbar}{3} \left( \sqrt{\omega_B^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{2} \omega_0 \right) + \frac{2e^2}{R_0}, \quad (20)$$

где  $\omega_0$  – частота нулевых колебаний (см. (4)),  $\omega_B = eB/(2m_p c)$  – гиромагнитная частота.

Экспонента прохождения под потенциальный барьер, плотность вероятности нахождения двух протонов в одной точке и скорость реакции даются выражениями (5), (6) и (7) соответственно.

При  $\varphi = 0$  с увеличением  $B$  скорость вероятности реакции возрастает. Этот результат хорошо согласуется с выводами работы [6]. При  $\varphi \neq 0$  с ростом  $B$  величина  $W$ , как показывают расчеты, сначала несколько возрастает (тем меньше, чем больше  $\varphi$ ), а затем убывает. Зависимость  $W$  от угла  $\varphi$  при фиксированном значении  $B$  достаточно ярко выражена.

Таким образом, в сверхсильных магнитных полях при  $\varphi \neq 0$  скорость вероятности столкновения и синтеза двух ядер холодного водорода может существенно (на несколько порядков) уменьшаться. Очевидно, аналогичная ситуация имеет место и для других легких ядер холодного сверхплотного вещества (при соответствующих значениях  $B$  и  $\rho$ ). Этот вывод качественно совпадает с результатами [8], полученными в рамках весьма грубой модели потенциального барьера [3].

Отметим, что процессы «замораживания» сверхсильным магнитным полем реакций нейтронизации и смещения порога нейтронизации в сторону более высоких плотностей (см., например, [7]) менее интенсивны, чем отмеченное здесь уменьшение скорости вероятности синтеза ядер. Поэтому сделанный выше вывод о возможности существования протонов в течение времени, достаточного для протекания реакций нейтронизации, справедлив и для сильно замагниченного вещества.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саакян, Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс / Г. С. Саакян. – М. : Наука, 1972. – 344 с.
2. Зельдович, Я. Б. О ядерных реакциях в сверхплотном холодном водороде / Я. Б. Зельдович // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1957. – Т. 33, № 4 (10). – С. 991–993.
3. Чубарян, Э. В. Некоторые свойства вещества при плотностях ниже ядерной / Э. В. Чубарян // Докл. АН Арм. ССР. – 1964. – Т. 38, № 1. – С. 17–21.

4. Киржниц, Д. А. О внутреннем строении сверхплотных звезд / Д. А. Киржниц // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1960. – Т. 38, № 2. – С. 503–508.
5. Шульман, Г. А. О ядерных реакциях в сверхплотном замагниченном холодном водороде / Г. А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1976. – № 12. – С. 66–70.
6. Секержицкий, В. С. К расчету вероятности пикноядерной реакции в замагниченном водороде / В. С. Секержицкий, С. С. Секержицкий, Г. А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1982. – № 9. – С. 109–110.
7. Секержицкий, В. С. Сверхплотное вещество в магнитном поле / В. С. Секержицкий. – Брест : БрГУ им. А. С. Пушкина, 2002. – 180 с.
8. Секержицкий, В. С. О ядерных реакциях в плотном холодном замагниченном веществе / В. С. Секержицкий, Г. А. Шульман // Изв. вузов. Физика. – 1980. – № 3. – С. 22–27.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 14.02.2020*

УДК 535.3+537.6

**А. И. Серый**

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
e-mail: alexey\_sery@mail.ru

## ВЛИЯНИЕ РЕЗОНАНСНОГО КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА ВРАЩЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ФОТОНОВ

*Получено приближенное решение задачи о величине вращения плоскости поляризации фотонов в полностью поляризованном по спину электронном газе в квантующем магнитном поле. Рассмотрен второй порядок теории возмущений по электромагнитной константе связи с использованием модифицированного дисперсионного соотношения Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга и оптической теоремы. Использована приближенная формула, полученная Фоминым и Холодовым для резонансного сечения эффекта Комптона. Для магнитных полей с индукцией порядка швингеровского значения полученная зависимость величины вращения от энергии фотонов качественно и по порядку величины согласуется с результатами, полученными в первом порядке теории возмущений. Величина вращения меняет знак для фотонов с энергией порядка 100 кэВ, максимальные значения вращения по обе стороны от соответствующей частоты различаются гораздо заметнее, чем в первом порядке теории возмущений.*

**SERY A. I.**

## THE INFLUENCE OF RESONANCE COMPTON SCATTERING IN MAGNETIC FIELD ON THE ROTATION OF THE PLANE OF POLARIZATION OF PHOTONS

*The approximate solution of the problem of the value of rotation of photon polarization plane in totally spin-polarized electron gas in quantizing magnetic field is obtained. The second order perturbation theory on electromagnetic coupling is considered using modified Gell-Mann–Goldberger–Thirring dispersion relationship and optical theorem. Approximate formula obtained by Fomin and Kholodov for resonance Compton effect cross-section is used. For magnetic fields with strength of the order of Schwinger value the obtained dependence of the value of rotation on the energy of photons is consistent with the results obtained in the first order perturbation theory qualitatively and by the order of magnitude. The value of rotation changes sign for photons with energy of the order of 100 keV, the maximum value of rotation at either side of the corresponding frequency differ much significantly than in the first order perturbation theory.*

### Введение

Вращение плоскости поляризации фотонов в веществе возможно вследствие эффектов Фарадея или Барышевского – Любшица, причем во втором случае необходимо наличие спиновой поляризации электронов, присутствующих в веществе [1, с. 88–89].

В экспериментах по наблюдению вращения плоскости поляризации, выполненных в земных лабораториях, внешнее магнитное поле отсутствовало либо оказывало влияние на структуру уровней энергии электрона в атоме, не приводившее к нарушению целостности атома, т. е. движение электронов оставалось финитным по всем 3 пространственным направлениям. При этом выяснилось, что указанные эффекты наблюдаются в разных частях спектра: эффект Фарадея преобладает в видимом диапазоне, а эффект Барышевского – Любшица – в жестком рентгеновском.

В последнем случае эффект возникает во втором порядке теории возмущений по электромагнитной константе связи  $\alpha = e^2/(\hbar c)$ , где  $e$  – элементарный заряд,  $\hbar$  – постоянная Планка,  $c$  – скорость света [1, с. 88–94].

При магнитных полях, реализуемых в астрофизических условиях (например, вблизи замагниченных нейтронных звезд), ситуация кардинально меняется, поскольку существенную роль начинает играть квантование Ландау. При этом привычная структура вещества нарушается, а движение электронов теряет финитность в направлении

силовых линий магнитного поля. При таких обстоятельствах появляется возможность резонансного комптоновского рассеяния, когда промежуточный (виртуальный) электрон попадает на какой-либо уровень Ландау [2, с. 321]. Если частота фотона далека от резонанса, то преобладает эффект Барышевского – Любошица, который возникает уже не во втором, а в первом порядке теории возмущений по  $\alpha$  (результаты исследований изложены в [3, р. 420–422; 4, с. 30–36; 5, с. 36–43]). Если же частота близка к резонансной, то возникает сложное взаимодействие (суперпозиция) двух эффектов, а также эффекта Макалюзо – Корбино [6, с. 582].

**Постановка задачи и ее место среди аналогичных задач, исследованных ранее**

Таким образом, требуется рассчитать угол поворота плоскости поляризации на единицу пройденного фотоном пути  $d\varphi/dx$  в среде с поляризованными по спину электронами вдоль направления вектора поляризации. Будем учитывать также следующие требования:

- 1) спиновая поляризация электронов близка к полной;
- 2) внешнее магнитное поле является квантующим;
- 3) исследуется вклад второго порядка теории возмущений по  $\alpha$  ;
- 4) исследуются частоты порядка резонансных.

Исследование задачи с перечисленным набором требований представляет интерес по следующим причинам.

1. Ранее при вычислении амплитуды комптоновского рассеяния вперед в пренебрежении магнитным полем использовались дисперсионное соотношение Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга, оптическая теорема и формула Гандельмана для разности комптоновских сечений при параллельных и антипараллельных спинах электрона и фотона (т. е. общий алгоритм, на который можно опираться, известен) [1, с. 88–94].

2. В случае квантующего магнитного поля можно, сохраняя прежнюю структуру алгоритма, вместо формулы Гандельмана использовать приближенную дифференциальную формулу Фомина – Холодова для резонансного комптоновского сечения [2, с. 323]. Указанную формулу легко проинтегрировать по углам, особенно в пределе полной спиновой поляризации электронов, когда необходимо вычислить только одну разновидность сечения взаимодействия фотона и электрона, а не разность двух сечений. Указанное обстоятельство обусловлено тем, что при взаимодействии фотона, движущегося параллельно силовым линиям магнитного поля, с любым электроном получается одно и то же соотношение направлений спинов фотона и электрона (при полной поляризации не существует электронов, которые находились бы на нижнем уровне Ландау с магнитными моментами, направленными против магнитного поля).

Основные сведения, относящиеся к разновидностям поставленной задачи, приведены в таблице 1.

Таблица 1. – Разновидности задачи о расчете угла поворота плоскости поляризации фотона в эффекте Барышевского – Любошица

A1. Порядок теории возмущения по $\alpha$	Первый	Второй
A2. Метод расчета основан на	непосредственном вычислении разности амплитуд комптоновского рассеяния вперед	вычислении разности сечений комптоновского рассеяния вперед с последующим применением дисперсионного соотношения
Б1. В земных условиях при $\hbar\omega \gg \mu_B V$	эффекта нет, т. к. разность амплитуд равна нулю	исследован в 1960–70-е гг. (теоретически и экспериментально)

## Окончание таблицы 1

Б2. В астрофизических условиях (квантующие магнитные поля) при $\hbar\omega \sim \mu_B V$	исследован в 2000–2010-е гг. (теоретически, вдали от резонансов, где влияние эффектов Фарадея и Макалусо – Корбино должно быть ослаблено) [3, р. 420–422; 4, с. 30–36; 5, с. 36–43]	является предметом исследования в данной работе вблизи резонансов промежуточного электрона на уровне Ландау (ожидается совместное проявление разных эффектов)
---	---	---

Также следует отметить, что дисперсионное соотношение Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга применено в [1, с. 93] в модифицированном виде во избежание расходимости интеграла. В случае квантующего магнитного поля представляется целесообразным поступить аналогично, учитывая, что целочисленная степень энергии (или частоты) в известных дисперсионных соотношениях может варьироваться [7, с. 642–643]. При этом для квантующего магнитного поля возможны 2 варианта целочисленной степени частоты, при которой интеграл не расходится.

**Замечания по алгоритму расчета в отсутствие внешнего магнитного поля**

Если фотон прошел расстояние  $dx$ , а плоскость его линейной поляризации повернулась на угол  $d\varphi$ , то при расчете  $d\varphi/dx$  будем использовать следующие обозначения (помимо тех, которые уже были перечислены ранее):  $n_e$  – число электронов в единице объема,  $\omega$  – частота фотона,  $\vec{p}$  – средний вектор спиновой поляризации электронов в атомах вещества,  $\vec{n}$  – единичный вектор в направлении распространения фотонов,  $f_2(\omega)$  – функция, отвечающая за вклад в амплитуду комптоновского рассеяния вперед фотона на электроне, зависящая от соотношений между направлениями спинов фотона и электрона,  $\text{Re } f_2(\omega)$  – действительная часть этой функции. Тогда из [1, с. 91] следует, что

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{2\pi n_e c}{\omega} (\vec{p} \cdot \vec{n}) \text{Re } f_2(\omega). \quad (1)$$

Для возможности вычисления  $d\varphi/dx$  требуется найти функцию  $\text{Re } f_2(\omega)$ , входящую в правую часть (1). Для этого можно воспользоваться дисперсионным соотношением Гелл-Мана – Голдбергера – Тирринга (оно приводится здесь в несколько измененном виде по сравнению с [1, с. 93], т. е. в той системе единиц, где  $\hbar \neq c \neq 1$ ):

$$\text{Re } f_2(\omega) = \frac{\omega}{\hbar c^2} (\Delta\mu)^2 + \frac{2\omega^3}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im } f_2(\xi) d\xi}{\xi^2 (\xi^2 - \omega^2)}. \quad (2)$$

Первое слагаемое в правой части (2) содержит аномальный магнитный момент электрона (где  $m_e$  – масса электрона) [8, с. 510]:

$$\Delta\mu = \frac{e\hbar}{2m_e c} \cdot \left( \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right). \quad (3)$$

В свою очередь, для возможности вычисления  $\text{Re } f_2(\omega)$  требуется знать выражение для  $\text{Im } f_2(\omega)$  под интегралом в правой части (2). Для этого можно воспользоваться соотношением, которое следует из оптической теоремы [1, с. 92]:

$$\text{Im } f_2(\omega) = \frac{\omega}{4\pi c} \cdot \frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega) - \sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega)}{2}. \quad (4)$$

В правой части (4)  $\sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega)$  и  $\sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega)$  – полные сечения комптоновского рассеяния фотона на электроне, соответственно, для случаев антипараллельной и параллельной ориентации спинов фотона и электрона. Эти сечения должны вычисляться в первом порядке по  $\alpha$  без учета радиационных поправок. В соответствии с [8, с. 378] можно записать

$$\sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega) = \sigma + \sigma', \quad \sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega) = \sigma - \sigma', \quad (5)$$

где  $\sigma$  – сечение рассеяния неполяризованных фотонов (которое не зависит от того, являются ли электроны поляризованными), а  $\sigma'$  – вклад в сечение, обусловленный наличием поляризации одновременно у фотона и электрона [8, с. 378]:

$$\sigma' = \pi r_0^2 \left( \frac{1 + 4\kappa + 5\kappa^2}{\kappa(1 + 2\kappa)^2} - \frac{(1 + \kappa)\ln(1 + 2\kappa)}{2\kappa^2} \right). \quad (6)$$

При этом в (6)  $r_0 = e^2/(m_e c^2)$  – электромагнитный радиус электрона, а вместо частоты  $\omega$  введен безразмерный параметр

$$\kappa = \frac{\hbar\omega}{m_e c^2}. \quad (7)$$

Из (5) – (7) следует, что

$$\frac{\sigma_{\uparrow\downarrow}(\omega) - \sigma_{\uparrow\uparrow}(\omega)}{2} = -\sigma' = -\frac{\pi r_0^2}{2\kappa^2} \left( 2\kappa - (1 + \kappa)\ln(1 + 2\kappa) + \frac{2\kappa^3}{(1 + 2\kappa)^2} \right). \quad (8)$$

Результат, аналогичный (8), был ранее получен Г. М. Гандельманом в 1953 г. [1, с. 92]. Правая часть (8) в 2 раза меньше результата, приведенного в [1, с. 92], что, однако, не приводит к разногласиям последующих формул с экспериментальными результатами [1, с. 95] по порядку величины. Более существенным замечанием является следующее. Если подставить правую часть (8) в правую часть (4), а затем полученный результат – в (2), то получим (с учетом перехода от переменной  $\omega$  к переменной  $\kappa$ )

$$\text{Re } f_2(\kappa) = \frac{\kappa m_e}{\hbar^2} (\Delta\mu)^2 - \frac{\kappa^3 r_0^2 m_e c}{4\pi\hbar} (I_{11} + I_{12}), \quad (9)$$

где

$$y = \frac{\hbar\xi}{m_e c^2}, \quad (10)$$

$$I_{11} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^3(y^2 - \kappa^2)} (2y - (1 + y)\ln(1 + 2y)), \quad (11)$$

$$I_{12} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^3(y^2 - \kappa^2)} \cdot \frac{2y^3}{(1 + 2y)^2}. \quad (12)$$

При этом оказывается, что  $I_{11}$  расходится на нижнем пределе, а  $I_{12}$  можно вычислить аналитически (несмотря на наличие полюса при  $y = \kappa$ ), причем результат равен

$$I_{12} = \frac{4 \ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + \frac{4}{1-4\kappa^2} = 4 \left( \frac{\ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + 1 + \frac{4\kappa^2}{1-4\kappa^2} \right). \quad (13)$$

В точности результат (13) не совпадает с результатами в [1, с. 93, 94], хотя по внешнему виду хорошо с ними согласуется.

Для устранения расходимости в (11) дисперсионное соотношение (2) были применено в [1, с. 93] в модифицированном виде:

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) = \frac{\omega}{\hbar c^2} (\Delta\mu)^2 + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f_2(\xi) d\xi}{\xi^2 - \omega^2}. \quad (14)$$

Тогда с учетом (4) и (8) получаем:

$$\operatorname{Re} f_2(\kappa) = \frac{\kappa m_e}{\hbar^2} (\Delta\mu)^2 - \frac{\kappa r_0^2 m_e c}{4\pi\hbar} (I_{21} + I_{22}), \quad (15)$$

где

$$I_{21} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{y(y^2 - \kappa^2)} (2y - (1+y)\ln(1+2y)), \quad (16)$$

$$I_{22} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 dy}{(y^2 - \kappa^2)(1+2y)^2}. \quad (17)$$

При этом оказывается, что  $I_{21}$  уже берется численно, а  $I_{22}$  можно, как и  $I_{12}$ , вычислить аналитически (несмотря на наличие полюса при  $y = \kappa$ ), причем результат равен

$$I_{22} = \frac{4\kappa^2 \ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + \frac{1}{1-4\kappa^2} = 1 + 4\kappa^2 \left( \frac{\ln 4\kappa^2}{(1-4\kappa^2)^2} + \frac{1}{1-4\kappa^2} \right). \quad (18)$$

В точности результат (18), как и (13), не совпадает с результатами, приведенными в [1, с. 93, 94], хотя по внешнему виду, как и (13), хорошо с ними согласуется.

Таким образом, применение дисперсионного соотношения в виде (14) приводит к гораздо лучшим результатам по сравнению с (2). Численные расчеты показывают, что первым слагаемым в правой части (15) можно пренебречь, поэтому с учетом (7) можно переписать (15) в виде

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) \approx -\frac{\omega r_0^2}{4\pi c} (I_{21} + I_{22}). \quad (19)$$

Вместе с тем с учетом замечания, сделанного после (8), в [1, с. 93] приводится формула, похожая (с учетом замечания после (18)) на

$$\operatorname{Re} f_2(\omega) \approx -\frac{\omega r_0^2}{2\pi c} (I_{21} + I_{22}). \quad (20)$$

Численное согласие с экспериментом выглядит лучше в случае применения (20), а не (19) [1, с. 94, 95], что составляет определенную трудность. Вместе с тем расходимость в (11) в случае применения (2) позволяет утверждать, что формула (14) более правильная.

Следовательно, и при наличии квантующего магнитного поля допустимо использовать (14) (или еще какой-либо вариант дисперсионного соотношения, в котором

из-под интеграла в знаменатель выносится частота в положительной степени, меньшей, чем 2) в том случае, если использование (2) приводит к расходимости.

**Особенности алгоритма расчета при наличии внешнего магнитного поля**

Теперь рассмотрим модель полностью поляризованного по спину электронного газа в квантующем магнитном поле. Приведенный выше алгоритм расчета  $d\varphi/dx$  требует существенного пересмотра, т. к. по сравнению со случаем, когда внешнее магнитное поле отсутствует, происходит кардинальная перестройка уровней энергии электронов и их волновых функций. Изменения в алгоритме расчета заключаются в следующем.

1. При полной поляризации спины всех электронов направлены в одну сторону, и одно из сечений в (4) обращается в ноль, т. к. не существует электронов, которые находились бы на нижнем уровне Ландау с магнитными моментами, направленными против магнитного поля. При этом формулу (2) (для (14) рассуждения аналогичны) с учетом (4) можно упростить на основе следующих рассуждений (таблица 2).

Таблица 2. – Преобразования формулы (2) при движении фотона в полностью поляризованном по спину электронном газе параллельно и антипараллельно линиям индукции магнитного поля

Случай	$\vec{p} \cdot \vec{n}$	При этом не равно нулю сечение $\sigma$	И тогда $\frac{d\varphi}{dx}$ с учетом (4)
1) $\vec{n} \uparrow \uparrow \vec{B}$	$= -1$	это $\sigma_{\downarrow}$	$= -2\pi n_e \left( \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right)$
2) $\vec{n} \uparrow \downarrow \vec{B}$	$= +1$	это $\sigma_{\uparrow}$	$= 2\pi n_e \left( \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} - \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right)$

В ходе рассуждений учитывалось, что под сечением  $\sigma$  будет пониматься сечение, которое выражается формулой (24) (см. ниже), а также то обстоятельство, что у электрона спин и собственный магнитный момент направлены противоположно [9, с. 550]. Таким образом, если все собственный магнитные моменты электронов выстроены по направлению вектора  $\vec{B}$ , то для вектора спиновой поляризации электронов  $\vec{p}$  получаем

$$|\vec{p}| = 1, \text{sign}(\vec{p} \cdot \vec{B}) = -1. \tag{21}$$

Объединяя результаты, полученные в таблице 2, можно обобщенно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= 2\pi n_e \text{sign}(\vec{p} \cdot \vec{n}) \left( \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} - \text{sign}(\vec{p} \cdot \vec{n}) \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right) = \\ &= -2\pi n_e \left( \mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\omega^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)} \right). \end{aligned} \tag{22}$$

Если пренебречь первым слагаемым в скобках (22), то получим результат, который уже не зависит от знака произведения  $\vec{p} \cdot \vec{n}$  (это характерно и для эффекта Фарадея [10, с. 276]):

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\omega^2 n_e}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2)}. \tag{23}$$

Следует также отметить, что резонансное сечение эффекта Комптона хотя и является преобладающим, но не может считаться полным (что требуется в оптической теории) из-за наличия, например, поглощения и магнитотормозного излучения [2, с. 323]. Поэтому дальнейшие результаты будут носить оценочный характер (в т. ч. по причине, которая будет указана перед формулой (26)).

2. Для нахождения оставшегося в формулах (22) и (23) сечения вблизи резонанса (когда промежуточный электрон попадает на какой-либо уровень Ландау) воспользуемся дифференциальной формулой, предложенной П. И. Фоминым и Р. И. Холодовым [2, с. 322–323]. Пусть электрон в начальном и конечном состояниях находится на нулевом уровне Ландау со спином, направленным против вектора  $\vec{B}$  (в соответствии с условием поставленной задачи), а промежуточный электрон находится на уровне Ландау с номером  $n$ . Тогда, используя общие соотношения, приведенные в [2, с. 322–323], для соответствующего дифференциального сечения можно записать:

$$\frac{d\sigma_n}{du} = \pi r_0^2 m_e^2 c^4 b^{2n} \cdot \frac{n^{4n}}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{(1+v^2)(1-v^2)^{n-1}(1+u^2)(1-u^2)^{n-1}}{(\hbar\omega - bm_e c^2 n)^2 + \Gamma_n^2/4}, \quad (24)$$

где использованы, помимо введенных выше, обозначения:

$$b = \frac{B}{B_0}, \quad B_0 = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar}, \quad \Gamma_n = \frac{4}{3} (2n-1) \alpha m_e c^2 b^2, \quad v = \cos \theta, \quad u = \cos \theta'. \quad (25)$$

При этом  $B_0$  – швингеровское значение индукции магнитного поля,  $\Gamma_n$  – ширина соответствующего резонанса,  $\theta$  – угол, под которым движется начальный фотон по отношению к вектору  $\vec{B}$ ,  $\theta'$  – аналогичный угол для конечного фотона. На основе результатов, полученных в [4, с. 30–36; 5, с. 36–43] можно показать, что в первом порядке теории возмущений по  $\alpha$  основной вклад во вращение вносит уровень с  $n = 1$ . Ограничиваясь аналогичным приближением для второго порядка, на основе (24) запишем:

$$\frac{d\sigma_1(u, v)}{du} = \frac{\pi r_0^2 m_e^2 c^4 b^2}{4} \cdot \frac{(1+v^2)(1+u^2)}{(\hbar\omega - bm_e c^2)^2 + \Gamma_1^2/4}. \quad (26)$$

Интегрируя (26) по углам рассеяния конечного фотона от 0 до  $\pi$  (т. е. по переменной  $u$  от  $-1$  до  $+1$ ), получаем:

$$\sigma_1(v) = \frac{2\pi r_0^2 m_e^2 c^4 b^2 (1+v^2)}{3((\hbar\omega - bm_e c^2)^2 + \Gamma_1^2/4)}. \quad (27)$$

Если фотон движется вдоль линий индукции магнитного поля, то в (27) следует положить  $v = 1$ , что соответствует  $\theta = 0$ , и тогда получаем:

$$\sigma(\kappa, B) = \frac{4\pi r_0^2 b^2}{3((\kappa - b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4)}. \quad (28)$$

Таким образом, сечение зависит не только от частоты фотона  $\omega$ , но и от индукции магнитного поля  $B$ . По структуре формула (28) похожа на формулу Брейта-Вигнера, где ширина резонанса зависит от индукции магнитного поля.

3. При устранении расходимости в формулах (22) и (23) с учетом подстановки (28) следует иметь в виду, что при использовании (28) вместо (8) необязательно выносить

из-под знака интеграла в знаменатель вторую степень частоты, поскольку первая степень для этого тоже достаточна. Следовательно, можно попробовать 2 варианта (с первой и второй степенью частоты) и сравнить полученные результаты.

**Результаты расчетов**

Подставляя (28) в (22), с учетом (7) и (10) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= -2\pi n_e \left( \mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(y, B) dy}{y(y^2 - \kappa^2)} \right) = -2\pi n_e \left( \mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sigma(y, B) y dy}{y^2(y^2 - \kappa^2)} \right) = \\ &= -2\pi n_e \left( \mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{r_0^2 b^2 \kappa^2}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y dy}{y^2(y^2 - \kappa^2)((y-b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4)} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку интеграл в (29) расходится, необходимо модифицировать полученную формулу. Одним из способов может быть тот же самый, который был использован при переходе от (2) к (14). Тогда вместо (29) получаем:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\pi n_e \left( \mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{r_0^2 b^2}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{y dy}{(y^2 - \kappa^2)((y-b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4)} \right). \quad (30)$$

Оказывается, что преобразование (29) можно модифицировать и другим способом, когда из-под интеграла выносятся только первая степень  $y$  в знаменателе, что влечет за собой уменьшение степени множителя  $\kappa$  перед интегралом также только на единицу. В результате получаем:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -2\pi n_e \left( \mp \frac{(\Delta\mu)^2}{\hbar c} + \frac{r_0^2 b^2 \kappa}{3\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(y^2 - \kappa^2)((y-b)^2 + (4\alpha/3)^2 b^4)} \right). \quad (31)$$

Вычисляя интегралы в (30) и (31) (путем разбиения отрезка интегрирования на 2 части – от 0 до  $\kappa - \varepsilon$  и от  $\kappa + \varepsilon$  до  $+\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ ), получаем результаты, которые обобщенно можно записать в виде:

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{2\pi n_e r_0^2}{\alpha} \left( \mp \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha}{2\pi} - 0,328 \frac{\alpha^2}{\pi^2} \right)^2 + \frac{F_1 F_2(b, \kappa)}{(b^2 - \kappa^2)^2 + b^4 \left( \frac{4}{3} \alpha \right)^2 (b^2 + F_3(b) + 2\kappa^2)} \right), \quad (32)$$

где конкретный вид  $F_1$  и  $F_2(b, \kappa)$  различен для (30) и (31) (таблица 3).

Таблица 3. – Конкретный вид  $F_1$  и  $F_2(b, \kappa)$  в (32) в соответствии с (30) и (31)

Интеграл в	$F_1$ в (32)	$F_2(b, \kappa)$ в (32)
(30)	$\frac{b}{4\pi}$	$\frac{2}{3} \alpha b (4b\kappa \ln \kappa + (F_3(b) + \kappa^2) \ln(F_3(b))) + (F_3(b) - \kappa^2) F_4(b)$
(31)	$\frac{1}{8\pi}$	$\frac{8}{3} (F_3(b) + \kappa^2) \alpha b^2 \ln \kappa + \frac{8}{3} \kappa \alpha b^3 \ln(F_3(b)) + (F_3(b) + \kappa^2 + 2b\kappa - 4\kappa b^2) F_4(b)$

Выражения для  $F_3(b)$  и  $F_4(b)$  одинаковы и равны:

$$F_3(b) = b^2 + \left(\frac{4}{3}\alpha\right)^2 b^4, F_4 = \frac{\pi}{2} + \arctg\left(\frac{3}{4\alpha b}\right). \quad (33)$$

Результаты при  $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$  и  $B = 10^{13} \text{ Гс}$  (полная поляризация при таких значениях  $n_e$  и  $B$  реализуется [11, с. 20, 41, 42]) для формулы (30) представлены графически на рисунке 1 (обычная шкала), а для формулы (31) – на рисунке 2 (логарифмическая шкала,  $\varphi_0 = 1 \text{ рад/см}$ ). При этом влияние первого слагаемого в скобках (30) и (31) ничтожно мало, поэтому не имеет значения, с каким знаком оно берется.

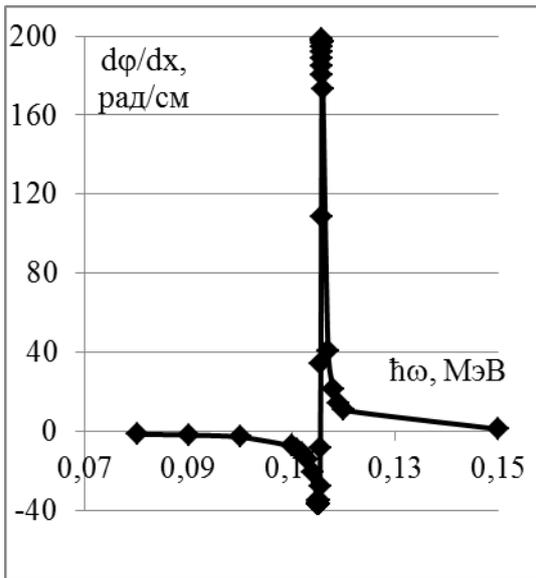


Рисунок 1. – Значение  $d\varphi/dx$ , вычисленное по формуле (30) при  $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$  и  $B = 10^{13} \text{ Гс}$

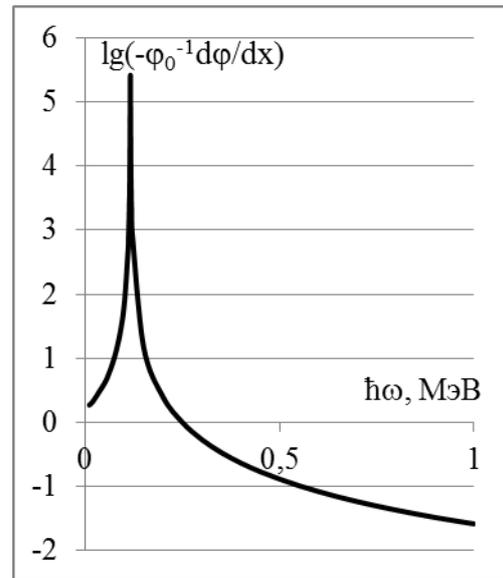


Рисунок 2. – Значение  $\lg(-\varphi_0^{-1}d\varphi/dx)$ , вычисленное по формуле (31) при  $n_e = 10^{22} \text{ см}^{-3}$  и  $B = 10^{13} \text{ Гс}$

Таким образом, для магнитных полей с индукцией порядка швингеровского значения полученная зависимость величины вращения от энергии фотонов в случае формулы (30) качественно и по порядку величины согласуется с результатами, полученными в первом порядке теории возмущений при тех же значениях индукции магнитного поля и частоты фотона. Величина вращения меняет знак для фотонов с энергией порядка 100 кэВ, максимальные значения вращения по обе стороны от соответствующей частоты различаются между собой гораздо заметнее, чем в случае первого порядка теории возмущений, т. е. наблюдается более заметная асимметрия максимумов абсолютной величины вращения со стороны положительных и отрицательных значений. В случае формулы (31) величина вращения не меняет знак, а в максимуме достигает по абсолютной величине  $10^5 \text{ рад/см}$ , что на 3 порядка больше по сравнению с результатами, полученными на основе (30). Таким образом, формула (30), которая согласуется с алгоритмом, примененным в [1, с. 93], является более правдоподобной по сравнению с (31).

### Заключение. Основные результаты

Во втором порядке теории возмущений по электромагнитной константе связи с использованием модифицированного дисперсионного соотношения Гелл-Мана –

Голдбергера – Тирринга и оптической теоремы получено решение задачи о величине вращения плоскости поляризации фотонов в полностью поляризованном электронном газе в магнитном поле со значениями индукции, при которых существенно квантование Ландау. Использована приближенная формула, полученная Фоминым и Холодовым для резонансного сечения эффекта Комптона. Для магнитных полей с индукцией порядка швингеровского значения полученная зависимость величины вращения от энергии фотонов качественно и по порядку величины согласуется с результатами, полученными в первом порядке теории возмущений при тех же значениях индукции магнитного поля и частоты фотона. Величина вращения меняет знак для фотонов с энергией порядка 100 кэВ, максимальные значения вращения по обе стороны от соответствующей частоты различаются между собой гораздо заметнее, чем в случае первого порядка теории возмущений, т. е. наблюдается более заметная асимметрия максимумов абсолютной величины вращения со стороны положительных и отрицательных значений.

Часть идей, лежащих в основе данной статьи, принадлежит В. Г. Барышевскому и В. В. Тихомирову.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышевский, В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред / В. Г. Барышевский. – М. : Энергоатомиздат, 1995. – 320 с.
2. Фомин, П. И. Резонансное комптоновское рассеяние во внешнем магнитном поле / П. И. Фомин, Р. И. Холодов // ЖЭТФ. – 2000. – Т. 117, вып. 2. – С. 319–325.
3. Sery, A. I. To the Problem of Compton Rotation of Photons in a Strong Magnetic Field: Limit of Total Spin Polarization of Electrons / A. I. Sery // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2014. – Vol. 17, nr 4. – P. 420–422.
4. Серый, А. И. О комптоновском вращении в магнитном поле с учетом ширины резонанса / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2012. – № 2. – С. 30–36.
5. О некоторых поляризационных эффектах в астрофизической плазме / А. И. Серый // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2014. – № 1. – С. 30–43.
6. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1980. – Т. 4 : Оптика. – 752 с.
7. Физическая энциклопедия : в 5 т. / А. М. Прохоров (гл. ред.) [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1988–1998. – Т. 1. : Ааронова – Бома эффект – Длинные линии. – 1988. – 704 с.
8. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – М. : Наука, 1969. – 624 с.
9. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика : учеб. пособие для вузов : в X т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 5-е изд., стер. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. III : Квантовая механика (нерелятивистская теория). – 808 с.
10. Физическая энциклопедия : в 5 т. / А. М. Прохоров (гл. ред.) [и др.]. – М. : Совет. энцикл., 1988–1998. – Т. 5 : Стробоскопические приборы – Яркость. – 1988. – 691 с.
11. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 13.03.2020*

УДК 512.542

**Д. В. Грицук**

канд. физ.-мат. наук, доц., зав. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
e-mail: [dmitry.gritsuk@gmail.com](mailto:dmitry.gritsuk@gmail.com)

## ВЛИЯНИЕ СТРОЕНИЯ ХОЛЛОВЫЙ ПОДГРУППЫ КОНЕЧНОЙ $\pi$ -РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ НА ПРОИЗВОДНУЮ $\pi$ -ДЛИНЫ

*Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$ , факторы  $G_{i+1}/G_i$  которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди всех таких субнормальных рядов  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы. Приводится обзор оценок производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы с заданной  $\pi$ -холловой подгруппой.*

**GRITSUK D. V.**

### INFLUENCE OF THE STRUCTURE OF THE HALL SUBGROUP OF THE FINITE $\pi$ -SOLVABLE GROUP ON THE DERIVATIVE $\pi$ -LENGTH

*Let  $G$  is a  $\pi$ -solvable group. Then it has a subnormal series  $1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G$  whose factors  $G_{i+1}/G_i$  are either  $\pi'$ -groups or abelian  $\pi$ -groups. The smallest number of Abelian  $\pi$ -factors among all such subnormal series of a  $\pi$ -solvable group  $G$  is called the derivative of the  $\pi$ -length of the  $\pi$ -solvable group. This article provides an overview of estimates for the derivative of the  $\pi$ -length of a finite  $\pi$ -solvable group with a given  $\pi$ -Hall subgroup.*

#### Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

Пусть  $\pi$  – некоторое подмножество множества простых чисел  $\mathbb{P}$ . Дополнение к  $\pi$  во множестве  $\mathbb{P}$  обозначается через  $\pi'$ . Символом  $\pi$  обозначается также функция, определенная на множестве всех натуральных чисел  $\mathbb{N}$  следующим образом:  $\pi(a)$  – множество простых чисел, делящих натуральное число  $a$ . Для группы  $G$  и ее подгруппы  $H$  считаем, что  $\pi(G) = \pi(|G|)$  и  $\pi(G:H) = \pi(|G:H|)$ . Зафиксируем множество простых чисел  $\pi$ . Если  $\pi(m) \subseteq \pi$ , то натуральное число  $m$  называется  $\pi$ -числом. Группа  $G$  называется  $\pi$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi$ , и  $\pi'$ -группой, если  $\pi(G) \subseteq \pi'$ . В этом случае  $\pi(G) \cap \pi' = \emptyset$ .

Напомним, что субнормальным рядом группы  $G$  называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{m-1} \subset G_m = G, \quad (1)$$

такая, что  $G_i$  нормальна в  $G_{i+1}$  для любого  $i$ . Фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются факторами субнормального ряда (1).

Группа называется  $\pi$ -разрешимой, если она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо разрешимыми  $\pi$ -группами, либо  $\pi'$ -группами.

Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа. Тогда она обладает субнормальным рядом (1), факторы которого являются либо  $\pi'$ -группами, либо абелевыми  $\pi$ -группами. Наименьшее число абелевых  $\pi$ -факторов среди таких субнормальных рядов группы  $G$  называется производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  и обозначается через  $l_\pi^a(G)$ . Если  $\pi(G) = \pi$ , то значение  $l_\pi^a(G)$  совпадает со значением производной длины группы  $G$ . Данное понятие было предложено в 2006 г. В. С. Монаховым [3].

Начальные свойства производной  $\pi$ -длиной  $\pi$ -разрешимой группы были получены Д. В. Грицуком, В. С. Монаховым и О. А. Шпырко в работе [4]. В частности, в данной работе доказано, что

$$l_{\pi}(G) \leq l_{\pi}^n(G) \leq l_{\pi}^a(G),$$

где  $l_{\pi}(G)$  и  $l_{\pi}^n(G)$  –  $\pi$ -длина и нильпотентной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  соответственно.

В данной статье приводится обзор оценок производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  в зависимости от строения ее  $\pi$ -холловой подгруппы.

### Производная $\pi$ -длина $\pi$ -разрешимой группы с заданной $\pi$ -холловой подгруппой

Первые исследования производной  $\pi$ -длины в зависимости от строения  $\pi$ -холловой подгруппы проведены в работе [4]. Как обычно,  $X'$  и  $Z(X)$  – коммутант и центр группы  $X$  соответственно.

**Теорема 1** [4]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_{\pi}$  – ее  $\pi$ -холлова подгруппа.

1. Если  $G_{\pi}$  абелева, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 1$ .
2. Если  $(G_{\pi})' \subseteq Z(G_{\pi})$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ .

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы нильпотентны. Свойства групп Шмидта перечислены, например, в [2, III.5]. Группа называется дедекиндовой, если все ее подгруппы нормальны.

**Следствие 1.1.** Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G_{\pi}$ -холлова подгруппа дедекиндова, то  $l_{\pi}(G) \leq 1$  и  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ .

**Следствие 1.2.** Если в  $\pi$ -разрешимой группе  $G$   $\pi$ -холлова подгруппа является группой Шмидта, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ .

Напомним, что метабелевой называют группу, у которой коммутант абелев.

**Теорема 2** [4]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа с метабелевой  $\pi$ -холловой подгруппой. Если  $2 \notin \pi$ , то  $l_{\pi}^a(G) \leq 3$ .

В работе [5] исследована производная  $\pi$ -длина конечной  $\pi$ -разрешимой группы со сверхразрешимой  $\pi$ -холловой подгруппой. Доказана следующая теорема.

**Теорема 3** [5]. Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой коммутант  $\pi$ -холловой подгруппы нильпотентен, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r^a(G)$ .

Дополнением к подгруппе  $H$  в группе  $G$  называется такая подгруппа  $K$ , что  $G = HK$  и  $H \cap K = 1$ . Ю. М. Горчаков [6] показал, что дополняемость всех подгрупп равносильна дополняемости подгрупп простых порядков.

Группа, у которой все подгруппы дополняемы, называется вполне факторизуемой. В 1937 г. Ф. Холл [7] установил, что конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, исчерпываются сверхразрешимыми группами с элементарными абелевыми силовскими подгруппами.

**Следствие 3.1.** Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $\pi$ -холлова подгруппа которой вполне факторизуема, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ .

**Следствие 3.2.** Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа со сверхразрешимой  $\pi$ -холловой подгруппой, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r^a(G)$ .

**Следствие 3.3.** Если  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой  $\pi$ -холлова подгруппа является группой Миллера – Морено, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ .

В 2014 г. получены оценки производной  $\pi$ -длины  $l_{\pi}^a(G)$  группы  $G$  в зависимости от строения подгруппы  $G_{\pi}$  или  $M$ , где  $M$  – максимальная подгруппа из  $G_{\pi}$  [8].

**Теорема 4** [8]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа и  $G_{\pi}$  –  $\pi$ -холлова подгруппа в  $G$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $G_{\pi}$  является группой Миллера – Морено, то  $l_{\pi}^a(G) \leq 2$ ;

2) если  $G_\pi$  является группой Шмидта, то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

**Теорема 5** [8]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа в  $G$ ,  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа и  $M$  – максимальная подгруппа в  $G_\pi$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если подгруппа  $M$  абелева, то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ ;
- 2) если подгруппа  $M$  абелева и холлова, то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ ;
- 3) если подгруппа  $M$  нильпотентна, то

$$l_\pi^a(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r) \cdot (1 + \max_{r \in \pi} l_r(G));$$

4) если подгруппа  $M$  нильпотентна и холлова, то

$$l_\pi^a(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi(M)} l_r(G) \cdot \max_{r \in \pi} d(G_r).$$

**Теорема 6** [8]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа и  $M$  – максимальная подгруппа из  $G_\pi$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $M$  – группа Миллера – Морено, то  $l_\pi^a(G) \leq 4$ ; в частности, если  $M$  холлова, то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ ;
- 2) если  $M$  – группа Шмидта, то  $l_\pi^a(G) \leq 5$ ; в частности, если  $M$  холлова, то  $l_\pi^a(G) \leq 4$ .

В работе [9] исследовано влияние 2-максимальной подгруппы  $\pi$ -холловой подгруппы  $\pi$ -разрешимой группы на оценки производной  $\pi$ -длины.

**Теорема 7** [9]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа и  $M$  – 2-максимальная подгруппа в  $G_\pi$ . Справедливы следующие утверждения.

1. Если подгруппа  $M$  абелева, то

$$l_\pi^n(G) \leq 3 \text{ и } l_\pi^a(G) \leq 4.$$

2. Если подгруппа  $M$  нильпотентна, то

$$l_\pi^n(G) \leq 1 + \max_{r \in \pi} l_r(G) \text{ и } l_\pi^a(G) \leq \max_{r \in \pi} d(G_r)(1 + \max_{r \in \pi} l_r(G)).$$

Напомним, что число  $n$  свободно от  $m$ -х степеней, если  $p^m$  не делит  $n$  для всех простых  $p$ . При  $m = 2$  говорят, что  $n$  свободно от квадратов, при  $m = 3$  – от кубов. В работе [10] исследовались оценки производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от  $n$ -ых степеней.

**Теорема 8** [10]. Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа.

1) Если порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от кубов, то справедливы следующие утверждения:

- a) если  $2 \notin \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ ;
- b) если  $2 \in \pi$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

2) Если порядок  $\pi$ -холловой подгруппы свободен от квадратов, то  $G$  разрешима и  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .

**Теорема 9.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, а  $G_\pi$  –  $\pi$ -холлова подгруппа.

1. Если  $G_\pi$  изоморфна симметрической группе  $S_3$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .
2. Если  $G_\pi$  изоморфна знакопеременной группе  $A_4$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .
3. Если  $G_\pi$  изоморфна симметрической группе  $S_4$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

Доказательство. Очевидно, что фактор-группа  $G_\pi N/N$  является  $\pi$ -холловой подгруппой фактор-группы  $G/N$ . По теореме 2.4 [1]

$$G_\pi N/N \cong G_\pi / (G_\pi \cap N).$$

Если  $F(G) = 1$ , то  $O_\pi(G) \neq 1$ . По индукции  $l_\pi(G/O_\pi(G)) \leq 1$ . Так как

$$l_\pi(G/O_\pi(G)) = l_\pi(G) \leq 1,$$

то  $l_\pi(G) \leq 1$ . Поэтому можно считать, что  $F(G) \neq 1$ .

Пусть  $K = G_\pi \cap F(G)$ . Так как  $K \subseteq F(G)$ , то  $K$  является нильпотентной группой. Тогда возможны шесть случаев.

Случай, когда  $G_\pi \cong S_3$  и  $K = 1$ . Тогда

$$G_\pi F(G)/F(G) \cong S_3,$$

и по индукции  $l_\pi^a(G/F(G)) \leq 1$ . Так  $F(G)$  является  $\pi'$ -группой, то  $l_\pi^a(G/F(G)) = l_\pi^a(G)$  и  $l_\pi(G) \leq 1$ . Случаи, когда  $K = 1$ , а  $\pi$ -холлова подгруппа  $G_\pi$  изоморфна либо  $A_4$ , либо  $S_4$  доказываются аналогично.

Если  $G_\pi \cong S_3$  и  $K \cong Z_3$ , то  $K = O_3(G) = G_3$ . Причем  $G_3$  циклическая, поэтому  $C_G(K) = K$ . По теореме 2.8 [1] фактор-группа  $G/K$  изоморфна подгруппе группы автоморфизмов  $K$ , являющейся циклической группой порядка 2. Значит,  $G$  является  $\{2,3\}$ -подгруппой и  $G = G_\pi$ . Следовательно,  $l_\pi(G) = 1$ .

Если  $G_\pi \cong A_4$  и  $K = E_4$ , то  $K = O_2(G) = E_4$  и  $C_G(K) = K$ . Так как фактор-группа  $G/K$  изоморфна подгруппе автоморфизмов группы  $GL(2,2)$ , то  $G/K \cong Z_3$ . Из того, что  $G/K \cong Z_3$  получаем, что  $G \cong A_4$ . Значит,  $l_\pi(G) = 1$ .

Если  $G_\pi \cong S_4$  и  $K = E_4$ , то  $K = O_2(G) = E_4$ . Так как фактор-группа  $G/K$  изоморфна подгруппе группы  $GL(2,2)$ , то  $G/K \cong S_3$ . Из того, что  $G/K \cong S_3$ , получаем, что  $G \cong S_4$ . Поэтому  $l_\pi(G) = 1$ .

Для  $l_\pi^a(G) = 1$  известно, что

$$d(G_\pi) \leq l_\pi^a(G) \leq l_\pi(G) \cdot d(G_\pi).$$

Поэтому, если  $G_\pi \cong S_3$  или  $G_\pi \cong A_4$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 2$ . Если  $G_\pi \cong S_4$ , то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

Теорема доказана.

Напомним, что  $t$ -группой называют группу, в которой каждая субнормальная подгруппа нормальна. Строение разрешимых  $t$ -групп описал В. Гашоц [11]. В частности, разрешимая  $t$ -группа сверхразрешима.  $\mathfrak{N}$  – класс всех нильпотентных групп,  $G^{\mathfrak{N}}$  –  $\mathfrak{N}$ -корадикал группы  $G$ , т. е. пересечение всех нормальных подгрупп группы  $G$ , фактор-группы по которым принадлежат  $\mathfrak{N}$ . Известно, что если  $G$  является  $t$ -группой, то  $G^{\mathfrak{N}}$  – абелева холлова подгруппа нечетного порядка, все подгруппы из  $G^{\mathfrak{N}}$  – нормальны в  $G$ ,  $G^{\mathfrak{N}}$  – дедекиндова.

**Теорема 10.** *Если  $\pi$ -холлова подгруппа  $\pi$ -разрешимой группы является  $t$ -группой, то  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .*

Доказательство. Так как  $G_\pi$  является разрешимой  $t$ -группой, то  $G_\pi = [A]B$ , где  $A = G_\pi^{\mathfrak{N}}$  – абелева холлова подгруппа нечетного порядка,  $B$  – дедекиндова группа.

Если  $A = 1$ , то  $G_\pi$  дедекиндова и, следовательно,  $l_\pi^a(G) \leq 2$ .

Рассмотрим случай, когда  $A \neq 1$ . Так как фактор-группа  $G/N$  является  $t$ -группой для произвольной неединичной нормальной подгруппы группы  $G$  [11], то для доказательства теоремы можем воспользоваться индукцией по порядку группы  $G$ . Поэтому для  $l_\pi(G)$  можно считать, что

$$\Phi(G) = O_\pi(G) = 1,$$

а подгруппа Фиттинга  $F(G) = O_\pi(G)$  является единственной минимальной нормальной  $\pi$ -подгруппой в  $G$  и  $C_G(F(G)) = F(G)$ . Так как  $G_\pi^{\mathfrak{N}}$  – абелева холлова подгруппа, то  $F(G) = G_\pi^{\mathfrak{N}}$ . Из того, что  $\pi$ -холлова подгруппа группы  $G/F(G)$  является дедекиндовой, получаем, что  $l_\pi(G/F(G)) \leq 1$ . Так как  $F(G) = O_\pi(G)$ , то

$$l_\pi(G/F(G)) = l_\pi(G) - 1.$$

Поэтому  $l_\pi(G) \leq 2$ .

Для  $l_\pi^a(G/F(G))$  можно считать, что в  $G$  только одна минимальная нормальная подгруппа,  $O_{\pi'}(G) = 1$ ,

$$F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$$

для некоторого простого  $p \in \pi$  и  $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ . Так как  $G_\pi^{\mathfrak{N}}$  – абелева и холлова подгруппа, то  $G_\pi^{\mathfrak{N}} = F(G)$ . Так как  $G/F(G)$  имеет дедекиндову холлову подгруппу  $G_\pi/F(G)$ , то  $l_\pi^a(G/F(G)) \leq 2$ .  $F(G) = G_\pi^{\mathfrak{N}}$  – абелева холлова подгруппа нечетного порядка, поэтому  $d(F(G)) \leq 1$ . Следовательно,  $l_\pi^a(G) \leq 3$ .

Теорема доказана.

Обобщенным коммутантом группы  $G$  называется наименьшая нормальная подгруппа  $N$  группы  $G$ , такая, что  $G/N$  является группой с абелевыми силовскими подгруппами. Очевидно, что обобщенный коммутант совпадает с  $\mathfrak{U}$ -корадикалом группы  $G$ , где  $\mathfrak{U}$  – класс всех разрешимых групп с абелевыми силовскими подгруппами.

**Теорема 11.** Пусть  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа, у которой обобщенный коммутант  $\pi$ -холловой подгруппы нильпотентен. Тогда

$$l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| - 1 + \max_{p \in \pi} l_p^a(G).$$

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы  $G$ . Условия теоремы переносятся на фактор-группы, поэтому получаем, что

$$O_{\pi'}(G) = O_{p'}(G) = 1,$$

в  $G$  существует единственная минимальная нормальная подгруппа,

$$F(G) = O_p(G) = F(O_\pi(G))$$

для некоторого простого  $p \in \pi$  и  $C_G(F(G)) \subseteq F(G)$ .

Пусть  $N$  – обобщенный коммутант  $\pi$ -холловой подгруппы  $G_\pi$ . Так как  $N$  является нильпотентной группой, то  $p'$ -холлова подгруппа  $N_{p'}$  из  $N$  нормальна в  $G_\pi$  и, следовательно,

$$N_{p'} \subseteq C_G(F(G)) \subseteq F(G).$$

Поэтому  $N_{p'} = 1$  и  $N$  является  $p$ -группой. Так как  $N$  обобщенный коммутант  $\pi$ -холловой подгруппы  $G_\pi$ , то силовская  $q$ -подгруппа  $G_r N/N$  абелева для всех  $r \in \pi$ . По теореме 2.4 [1]  $G_q N/N \cong G_q$  для всех  $q \in \pi \setminus \{p\}$ .

Таким образом, силовские  $q$ -подгруппы в группе  $G$  абелевы для всех  $q \in \pi \setminus \{p\}$ . Из определения производной  $q$ -длины получаем, что  $l_q^a(G) \leq 1$  для всех  $q \in \pi \setminus \{p\}$ . Поэтому  $\max_{t \in \pi} l_t^a(G) = l_p^a(G)$ .

Так как в  $G_{\pi \setminus \{p\}}$  все силовские абелевы, то

$$l_{\pi \setminus \{p\}}^a(G) \leq |\pi(G_{\pi \setminus \{p\}})| = |\pi(G_\pi)| - 1.$$

Из свойств производной  $\pi$ -длины следует, что

$$l_\pi^a(G) \leq l_{\pi \setminus \{p\}}^a(G) + l_p^a(G),$$

поэтому

$$l_\pi^a(G) \leq |\pi(G_\pi)| - 1 + \max_{p \in \pi} l_p^a(G).$$

Теорема доказана.

### Заклучение

Получение новых оценок производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы имеет важное значение не только для теории конечных групп и их классов, а и в современной криптографии. В частности, полученные оценки будут полезны при получении новых шифров и новых криптосистем с высокой эффективностью и криптостойкостью.

Найденные оценки производной  $\pi$ -длины конечной  $\pi$ -разрешимой группы могут стать основой для создания новых методов современной теории защиты информации и теории кодирования.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Монахов, В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов / В. С. Монахов. – Минск : Выш. шк., 2006. – 207 с.
2. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York. – 1967. – 792 s.
3. Монахов, В. С. Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой / В. С. Монахов // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80, № 4. – С. 573–581.
4. Грицук, Д. В. О производной  $\pi$ -длине  $\pi$ -разрешимой группы / Д. В. Грицук, В. С. Монахов, О. А. Шпырко. // Вестн. БГУ. Сер. 1. – 2012. – № 3. – С. 90–95.
5. Monakhov, V. S. On derived  $\pi$ -length of a finite  $\pi$ -solvable group with supersolvable  $\pi$ -Hall subgroup / V. S. Monakhov, D. V. Gritsuk // Algebra and Discrete Mathematics. – 2013. – Vol. 16, nr 2. – P. 233–241.
6. Горчаков, Ю. М. Примитивно факторизуемые группы / Ю. М. Горчаков // Учен. зап. Перм. ун-та. – 1960. – № 17. – С. 15–31.
7. Hall, Ph. Complemented group / Ph. Hall // J. London Math. Soc. – 1937. – Vol. 12. – P. 201–204.
8. Монахов, В. С. О производной  $\pi$ -длине конечной  $\pi$ -разрешимой группы с заданной  $\pi$ -холловой подгруппой / В. С. Монахов, Д. В. Грицук // Тр. Ин-та математики и механики Урал. отд-ния РАН. – 2013. – Т. 18, № 3. – С. 215–223.
9. Грицук, Д. В. Конечные  $\pi$ -разрешимые группы с заданными свойствами 2-максимальных  $\pi$ -подгрупп / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. Физика, математика, информатика. – 2017. – № 5 (107). – С. 69–72.
10. Грицук, Д. В. Оценки производной  $\pi$ -длины  $\pi$ -разрешимой группы, у которой  $\pi$ -холловы подгруппы свободны от  $n$ -ых степеней / Д. В. Грицук, А. А. Трофимук, Т. А. Артюшеня // Вестн. Витеб. гос. ун-та им. П. М. Машерова. – 2018. – № 1 (98). – С. 11–15.
11. Gaschutz, W. Gruppen in denen das normalteilersein transitiv ist / W. Gaschutz // J. Reine Angew. Math. – 1957. – Vol. 198. – P. 87–92.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 16.10.2020*

УДК 519.6 + 517.983.54

**О. В. Матысик<sup>1</sup>, Д. В. Гавва<sup>2</sup>, Е. А. Сирисько<sup>3</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина<sup>2</sup>преподаватель-стажер каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина<sup>3</sup>преподаватель-стажер каф. алгебры, геометрии и математического моделирования  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
e-mail: matysikoleg@mail.ru<sup>1</sup>**ОСТАНОВ ПО ПОПРАВКАМ В НЕЯВНОМ МЕТОДЕ  
ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ  
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА**

В гильбертовом пространстве для решения линейных операторных уравнений первого рода с положительным ограниченным и несамосопряженным оператором предлагается неявный итерационный процесс. Для предложенного метода обосновано применение правила останова по поправкам, что делает рассматриваемый итерационный метод эффективным и тогда, когда нет сведений об истокобразности представимости точного решения. В работе доказана сходимость итерационного метода, получена оценка для момента останова.

**MATYSIK O. V., GAVVA D. V., SIRISKO Ye A.****STOPPING BY THE CORRECTION IN THE IMPLICITE METHOD OF ITERATIONS  
OF THE SOLUTION OF LINEAR OPERATOR EQUATIONS OF THE FIRST KIND**

In the Hilbert space for solving linear operator equations the first kind with affirmative limited and non self-conjugate operator the implicate iteration process is proposed. The application of a stopping rule by amendments for the offered method has been proved, which makes viewed iteration method quite effective even then when there are no data about source representability of exact solution. In work the convergence of the iteration method is proved, and estimation the moment of stop is received.

**1. Постановка задачи**В гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение рода

$$Ax = y, \quad (1)$$

где  $A$  – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый. Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ . Однако нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что  $y \in R(A)$ , т. е. при точной правой части  $y$  уравнение (1) имеет единственное решение  $x$ . Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left( E + \alpha (A^* A)^2 \right)^{-1} \left[ x_n + \alpha A^* A (A^* y) \right], \quad x_0 = 0, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближенно:  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ , метод (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left( E + \alpha (A^* A)^2 \right)^{-1} \left[ z_n + \alpha A^* A (A^* y_\delta) \right] + \left( E + \alpha (A^* A)^2 \right)^{-1} u_n, \quad z_0 = 0, \quad \alpha > 0, \quad (3)$$

где  $u_n$  – ошибки в вычислении итераций, причем  $\|u_n\| \leq \beta$ .

Обозначим  $C = \left(E + \alpha(A^*A)^2\right)^{-1}$ ,  $B = \left(E + \alpha(A^*A)^2\right)^{-1} \alpha(A^*A)A^*$ . Тогда метод (3)

примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n. \quad (4)$$

Ранее [1] была изучена сходимость метода (3) с априорным выбором числа итераций для самосопряженного оператора  $A$ . Там показано, что при условии  $\alpha > 0$  итерационный метод (3) сходится, если число итераций  $n$  выбирать из условия  $\sqrt{n}\delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ . В предположении, что точное решение  $x$  уравнения (1) истокообразно представимо, получены априорная оценка погрешности и априорный момент останова.

## 2. Правило останова по поправкам (соседним приближениям)

В том случае, когда истокообразная представимость точного решения неизвестна, метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [2–5]. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент останова  $m$  определим условиями:

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Покажем, что метод (3) с правилом останова (5) сходится. Справедлива

Лемма 1. Пусть приближение  $w_n$  определяется условиями

$$w_0 = z_0, w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n, n \geq 0. \quad (6)$$

Тогда справедливо неравенство  $\sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2$ .

Доказательство. Из (6) имеем при  $n = k$   $Cu_k = w_{k+1} - Cw_k - By$ . Отсюда, используя равенство  $A^*Ax = A^*y$ , получим

$$\begin{aligned} u_k &= C^{-1}w_{k+1} - w_k - C^{-1}By = C^{-1}w_{k+1} - w_k - \\ &- \left(E + \alpha(A^*A)^2\right) \left(E + \alpha(A^*A)^2\right)^{-1} \alpha(A^*A)A^*y = \\ &= C^{-1}w_{k+1} - w_k - \alpha(A^*A)A^*y = C^{-1}w_{k+1} - w_k - \alpha(A^*A)^2x = C^{-1}w_{k+1} - \\ &- w_k - C^{-1}(E - C)x = C^{-1}(w_{k+1} - x) - (w_k - x). \end{aligned}$$

Обозначим  $\Delta_k = w_k - x$ , тогда  $u_k = C^{-1}\Delta_{k+1} - \Delta_k$ , откуда  $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ .

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1} - C\Delta_k, \Delta_{k+1} - C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) -$$

$$-2 \sum_{k=0}^{n-1} (\Delta_{k+1}, C\Delta_k) = \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left( C^{\frac{1}{2}} \Delta_{k+1}, C^{\frac{1}{2}} \Delta_k \right). \quad (7)$$

Оценивая абсолютную величину последнего слагаемого правой части (7) по неравенству Коши – Буняковского, приходим к неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2}, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

Покажем, что  $(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k$ ,  $k \geq 0$ . Имеем  $Cu_k = \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ ,  $\Delta_k + Cu_k = \Delta_k + \Delta_{k+1} - C\Delta_k$ , тогда  $\Delta_k + Cu_k = (E - C)\Delta_k + \Delta_{k+1}$ ,  $w_k - x + Cu_k = (E - C)\Delta_k + w_{k+1} - x$ , отсюда следует, что

$$(E - C)\Delta_k = w_k - w_{k+1} + Cu_k, \quad k \geq 0. \quad (9)$$

Используя равенство (9), запишем неравенство (7) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 &\geq \sum_{k=1}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, C\Delta_k) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} = \\ &= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n (\Delta_k, \Delta_k) + \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, C\Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) + 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - \\ &- 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} = -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k) + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} = \\ &= -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k) + \gamma_n, \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma_n = 2 \sum_{k=0}^n (C\Delta_k, \Delta_k) - (C\Delta_n, C\Delta_n) - 2 \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=1}^n (C\Delta_k, \Delta_k) \right\}^{1/2}.$$

Нетрудно показать, что  $\gamma_n \geq 0$  при любых  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ .

$$\text{Тогда } \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n ((E - C)\Delta_k, (E - C)\Delta_k). \text{ Используя равенство (9),}$$

$$\text{получим } \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \geq -(\Delta_0, \Delta_0) + \sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2, \text{ откуда выполняется}$$

$$\sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. При  $\forall w_0 \in H$  и произвольной последовательности ошибок  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих условию  $\|u_n\| \leq \beta$ , выполнено неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta. \quad (10)$$

Доказательство.

Для доказательства леммы 2 воспользуемся теоремой:

Теорема 1 (Тёплица). Пусть выполняются условия:

- 1)  $P_{n_k} \geq 0$ ;
- 2)  $\sum_{k=1}^n P_{n_k} = 1$ ;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = 0$  для любого фиксированного  $k$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тогда  $(t_n) = \left( \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k \right)$ ,  $n \in N$  сходится и  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = a$ .

Доказательство.

Из (4) имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , поэтому  $(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in N), (\forall n \in N, n > n_0)$ , что  $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Так как любая сходящаяся последовательность ограничена, то  $(\exists M > 0), (\forall n \in N)$ , что  $|x_n| \leq M$ , поэтому получим  $|x_n - a| \leq |x_n| + |a| \leq 2M$ , значит,  $|x_n - a| \leq 2M$ .

Из (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = 0$  для любого фиксированного  $k$ , поэтому  $\exists n'_0 > n_0$ ,

что  $P_{n_k} < \frac{\varepsilon}{4n_0 M}, k = \overline{1, n_0}$  для  $\forall n > n'_0$ .

Таким образом, справедливо записать:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k - a \right| &= \left| \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k - \sum_{k=1}^n P_{n_k} a \right| = \left| \sum_{k=1}^n P_{n_k} (x_k - a) \right| \leq \sum_{k=1}^n P_{n_k} |x_k - a| = \\ &= P_{n_1} |x_1 - a| + \dots + P_{n_{n_0}} |x_{n_0} - a| + P_{n_{n_0+1}} |x_{n_0+1} - a| + \dots + P_{n_n} |x_n - a| \leq \\ &\leq n_0 \frac{\varepsilon}{4n_0 M} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} (P_{n_{n_0+1}} + \dots + P_{n_n}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, для  $(\forall n > n'_0) \lim t_n = a$ .

Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, рассмотрим и докажем следующие примеры:

Пример 1. Дано:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = a$ .

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 1, имеем  $P_{n_k} = \frac{1}{n}$ ,  $k = \overline{1, n}$ ,  $n \in N$ .

Тогда 1)  $P_{n_k} \geq 0$ ; 2)  $\sum_{k=1}^n P_{n_k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Следовательно, получим

$$t_n = \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \text{ поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Пример 2. Дано:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $x_n > 0$ . Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = a$ .

Доказательство. Из теоремы 1 имеем  $P_{n_k} = \frac{x_k}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$ . Тогда справедливо

записать 1)  $P_{n_k} \geq 0$ ; 2)  $\sum_{k=1}^n P_{n_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = 1$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x_k}}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = 0$ . Следо-

вательно,  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P_{n_k} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = a$ .

Пример 3. Дано:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} = a$ .

Доказательство. Поскольку  $\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ , следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = a.$$

Опираясь на пример 3, получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} \|a_k\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{\prod_{k=0}^{n-1} \|a_k\|^2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} \|a_k\|^2} \right\}^{1/2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \|a_k\|^2}{n} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (11)$$

А теперь вернёмся непосредственно к доказательству леммы 2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1} + Cu_n\| + \|C\|\beta \leq (\text{см. (11)}) \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|C\|\beta + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 + \frac{1}{n} n \|C\|^2 \beta^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \|C\|\beta = 2\|C\|\beta, \text{ так как } \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|w_0 - x\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует (10), и, значит, лемма 2 доказана.

Обе леммы будут использованы при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть уровень останова  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$  выбирается как функция от уровней  $\delta$  и  $\beta$  норм погрешностей  $y - y_\delta$  и  $u_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- а) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ , то момент останова  $m$  определён при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta$  и  $u_n$ , удовлетворяющих условиям  $\|y - y_\delta\|, \|u_n\| \leq \beta$ ;
- б) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$ , то справедлива следующая оценка:

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

- в) если, кроме того,  $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0, \delta, \beta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$ , где  $d > 1, p \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ .

**Доказательство.**

- а) По индукции покажем, что

$$z_n = C^n z_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{n-k-1}). \quad (12)$$

При  $n = 1$  из  $z_n = C z_{n-1} + B y_\delta + C u_{n-1}$  имеем  $z_1 = C z_0 + B y_\delta + C u_0$ , из (12) получим то же самое, т. е. при  $n = 1$  формула (12) верна. Предположим, что (12) верна

при  $n = p$ , т. е.  $z_p = C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1})$  и докажем ее справедливость

при  $n = p + 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} z_{p+1} &= C z_p + B y_\delta + C u_p = C \left( C^p z_0 + C \sum_{k=0}^{p-1} C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k-1}) \right) + B y_\delta + C u_p = C^{p+1} z_0 + \\ &+ C^2 (C^{-1} B y_\delta + u_{p-1} + B y_\delta + C u_{p-2} + C B y_\delta + C^2 u_{p-3} + \dots + C^{p-2} B y_\delta + C^{p-1}) + B y_\delta + C u_p = \\ &= C^{p+1} z_0 + C (B y_\delta + C u_{p-1} + C B y_\delta + C^2 u_{p-2} + \dots + C^{p-1} B y_\delta + C^p u_0 + C^{-1} B y_\delta + u_p) = \\ &= C^{p+1} z_0 + C \sum_{k=0}^p C^k (C^{-1} B y_\delta + u_{p-k}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливость (12) доказана.

Отсюда получим

$$\begin{aligned} w_n &= C^n w_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (C^{-1} B y + u_{n-k-1}) = C^n w_0 + (E + C + C^2 + \dots + C^{n-1}) B y + \\ &+ C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = C^n w_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1} (A^* A)^{-1} (E - C) A^* y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} = \\ &= C^n w_0 + A^{-1} (E - C^n) y + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $z_0 = w_0$ , получим

$$\begin{aligned} z_n - z_{n+1} &= C^n z_0 + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} z_0 - A^{-1} [E - C^{n+1}] y_\delta - \\ &- C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = C^n w_0 + A^{-1} (E - C^n) y - A^{-1} (E - C^n) y + A^{-1} (E - C^n) y_\delta + \\ &+ C \sum_{k=0}^{n-1} C^k u_{n-k-1} - C^{n+1} w_0 - A^{-1} (E - C^{n+1}) y + A^{-1} (E - C^{n+1}) y - A^{-1} (E - C^{n+1}) y_\delta - \\ &- C \sum_{k=0}^n C^k u_{n-k} = w_n - w_{n+1} + A^{-1} C^n (E - C) (y_\delta - y) = w_n - w_{n+1} + C^n B (y - y_\delta). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|z_n - z_{n+1}\| \leq \|w_n - w_{n+1}\| + \|C^n B (y - y_\delta)\|. \quad (13)$$

Обозначим  $\sigma = B(y - y_\delta)$ , тогда

$$\begin{aligned} \|C^n B (y - y_\delta)\| &= \|C^n \sigma\| = \left\| \int_0^M \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \left\| \int_0^{\varepsilon_0} \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda \sigma \right\| + \left\| \int_{\varepsilon_0}^M \frac{1}{(1 + \alpha \lambda^2)^n} dE_\lambda \sigma \right\| \leq \\ &\leq \|E_{\varepsilon_0} \sigma\| + q^n \|\sigma\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \varepsilon_0 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как при  $\alpha > 0, \lambda \in (0, M]$  имеем  $\frac{1}{1 + \alpha \lambda^2} \leq q < 1$ . Поэтому (см. лемму 2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z_{n+1}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta.$$

Следовательно, условием  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$  момент останова  $m$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$  и  $u_n, \|u_n\| \leq \beta$ .

б) Рассмотрим последовательность (6) и определим момент останова  $m'$  условием

$$\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta, (n < m'), \|w_{m'} - w_{m'+1}\| \leq \varepsilon - \|B\|\delta. \quad (14)$$

Из (13) следует, что  $m \leq m'$ . Из леммы 1 при  $n = m'$  получим

$$\sum_{k=0}^{m'} \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Отсюда справедливо записать

$$\sum_{k=0}^{m'-1} (\|w_k - w_{k+1}\| - \|C\|\beta)^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{m'-1} \|Cu_k\|^2.$$

Так как по (14) при  $n < m'$  имеем

$$\|w_n - w_{n+1}\| > \varepsilon - \|B\|\delta,$$

то

$$m'(\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta)^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + m'\|C\|^2\beta^2.$$

Учитывая, что  $w_0 = z_0$  и  $m \leq m'$ , из последнего неравенства получим оценку для момента останова  $m \leq m' \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}$ .

в) Докажем, что

$$x = C^n x + \sum_{k=0}^{n-1} BC^k y. \quad (15)$$

Предположим, что (15) верно, тогда

$$\begin{aligned} x - C^n x &= B(E + C + C^2 + \dots + C^{n-1})y, \\ (E - C^n)x &= B(E - C^n)(E - C)^{-1}y, \\ (E - C^n)x &= A^{-1}(E - C)(E - C^n)(E - C)^{-1}Ax, \\ (E - C^n)x &= (E - C^n)x. \end{aligned}$$

Следовательно, предположение верно и справедливость формулы (15) доказана.

Из (12) вычтем (15), получим

$$z_n - x = C^n(z_0 - x) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y - y_\delta) + u_{n-k-1}]. \quad (16)$$

Отсюда  $\Delta_n = C^n \Delta_0 + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k [C^{-1}B(y - y_\delta) + u_{n-k-1}]$ , где  $\Delta_n = z_n - x$

и  $\Delta_0 = z_0 - x$ . Следовательно,

$$\|\Delta_n\| \leq \|C^n \Delta_0\| + (\|B\|\delta + \|C\|\beta)n. \quad (17)$$

В частности, (17) справедливо и при  $n = m$ . Если  $m \rightarrow \infty$  при  $\varepsilon, \delta, \beta \rightarrow 0$ , тогда, как показано ранее,  $\|C^m \Delta_0\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$ . Поэтому для доказательства  $\|z_m - x\| \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$  достаточно показать, что  $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ .

Из (16) получим

$$z_n - z_{n+1} = C^n (E - C)(z_0 - x) - Cu_n - C^n B(y_\delta - y) + C \sum_{k=0}^{n-1} C^k (E - C)u_{n-k-1}. \quad (18)$$

Так как спектр оператора  $C = (E + \alpha(A^* A)^2)^{-1}$  принадлежит  $[0, 1]$ , то нетрудно показать, что

$$\|C^n (E - C)\| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (19)$$

Поэтому из (18) получим при  $n = m - 1$

$$\begin{aligned} \|z_{m-1} - z_m\| &\leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} C^{\frac{m-1}{2}} (E - C)(z_0 - x) \right\| + \|C^{m-1} B(y_\delta - y)\| + \|Cu_{m-1}\| + \\ &+ \left\| C \sum_{k=0}^{m-2} C^k (E - C)u_{m-k-2} \right\| \leq \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (E - C) \right\| \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|C\|\beta + \|B\|\delta + \|C\|\beta \sum_{k=0}^{m-2} \frac{1}{k+1} \leq \\ &\leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|\beta(2 + \ln m), \end{aligned}$$

так как  $\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln m$  [6].

Так как по условию теоремы  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$ ,  $d > 1$ ,  $p \in (0, 1)$ , то при всех достаточно малых  $\delta, \beta$  выполняется неравенство  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$ , поэтому из б)

$$\text{получим } m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta + 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)}.$$

$$\text{Поскольку } \|z_{m-1} - z_m\| > \varepsilon, \text{ то } \varepsilon \leq \frac{2}{m} \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| + \|B\|\delta + \|C\|(2 + \ln m)\beta.$$

Отсюда получим, что  $m \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\|}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta(2 + \ln m)}$ . Умножим обе части последнего

неравенства на  $\|B\|\delta + \|C\|\beta$ , получим

$$m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \leq \frac{2 \left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| (\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}.$$

При  $m \rightarrow \infty$  множитель  $\left\| C^{\frac{m-1}{2}} (z_0 - x) \right\| \rightarrow 0$ , а дробь

$$\frac{2(\|B\|\delta + \|C\|\beta)}{\varepsilon - \|B\|\delta - \|C\|\beta \left[ 2 + \ln \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)} \right]}$$

ограничена при  $\delta, \beta \rightarrow 0$ .

Поэтому  $m(\|B\|\delta + \|C\|\beta) \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ ,  $\delta, \beta \rightarrow 0$ . Отсюда и из неравенства (17) при  $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|\Delta_m\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = \lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} (\|C^m \Delta_0\| + m(\|B\|\delta + \|C\|\beta)) = 0.$$

Теорема 2 доказана.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Матысик, О. В. Априорный выбор параметра регуляризации в неявном итерационном методе решения линейных некорректных уравнений / О. В. Матысик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. 4, Фізика. Матэматыка. – 2019. – № 1. – С. 72–78.
2. Емелин, И. В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И. В. Емелин, М. А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
3. Савчук, В. Ф. Неявная итерационная процедура решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В. Ф. Савчук, О. В. Матысик // Докл. НАН Беларуси. – 2006. – Т. 50, № 5. – С. 37–42.
4. Матысик, О. В. Итерационная регуляризация некорректных задач / О. В. Матысик. – Saarbrücken : LAP LAMBERT Acad. Publ., 2015. – 188 с.
5. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест : БрГУ, 2014. – 213 с.
6. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М. : Наука, 1971. – 1108 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 19.09.2020*

УДК 517.925

**И. Н. Мельникова<sup>1</sup>, В. В. Войтович<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,  
дифференциальных уравнений и их приложений

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: [375298029207@mail.ru](mailto:375298029207@mail.ru)**КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ КОНКУРИРУЮЩИХ ВИДОВ**

*Проводится исследование биологической модели хемостата для конкурирующих видов микроорганизмов. Эта модель описывается системой двух дифференциальных уравнений первого порядка. Проводится компьютерная реализация методов решения этих систем, а также визуализация и анимация получающихся решений.*

**MELNIKOVA I. N., VOITOVICH V. V.****COMPUTER CONSTRUCTION OF A MODEL OF COMPETING SPECIES**

*This article investigates the biological model of a chemostat for competing species of microorganisms. This model is described by a system of two differential equations first order. The computer implementation of methods for solving these systems, as well as visualization and animation of the resulting solutions.*

В настоящее время весьма актуальной является проблема возможности продления жизни микробной культуры при помощи непрерывной подачи свежей среды, а также постоянного отбора образовавшихся продуктов. Существует два типа непрерывной культуры: культура полного вытеснения и хемостат. При движении культуры через трубу или канал в данной идеальной культуре полного вытеснения не будет происходить перемешивания. Хемостатная культура, наоборот, представляется как полностью перемешанная суспензия биомассы. В данную суспензию биомассы с постоянной скоростью подается среда и из биомассы с такой же скоростью обрабатывается культура. Общий объем культуры будет неизменным.

Система с полным вытеснением моделирует периодическую культуру, а также не дает других, более широких по сравнению с периодической культурой возможностей контроля за окружающей средой. Очевидности фундаментальному значению хемостата способствовало создание Моно, Новиком, Сцилардом основной теории хемостата. Одно из предсказаний данной теории говорит о том, что возможно фиксировать удельную скорость роста биомассы абсолютно на любом значении, а именно от нуля до максимума. Именно данное заключение опрокинуло некоторый барьер традиционного мышления, утверждение того факта, что для бактерий возможна единственная постоянная скорость роста, а именно максимальная скорость, которая соответствует времени удвоения простой периодической культуры. С помощью хемостатной культуры открылись новые горизонты в физиологии микроорганизмов. История метода показывает, как крайне важно, чтобы появление теории предшествовало эксперименту. Данный метод можно применить ко всем типам микроорганизмов, а также к клеткам различных тканей животных или растений, которые растут в гомогенной перемешиваемой культуре.

Хемостат – это культура, в которую с постоянной скоростью непрерывно подается свежая среда. При этом объем культуры поддерживается на постоянном уровне при помощи непрерывного отлива части культуры. Перемешивание в хемостате должно быть полным, а именно: капли поступающей в сосуд среды должны сразу и однородно распределяться по всей культуре. С точки зрения практики это означает, что время,

которое необходимо для перемешивания небольшого объема среды в культуре, должно быть меньше, чем время замещения  $t_r$ , равное  $V / F$ , где  $V$  – объем, а  $F$  является скоростью течения среды.

Существуют три уникальных и единственных в своем роде предназначения хемостатной культуры в деле осуществления контроля за ростом и поведением микроорганизмов.

1. Хемостат дает хорошую возможность изменять скорость роста биомассы, при этом не производя в окружающей среде совершенно никаких изменений, кроме изменений концентрации лимитирующего (ограничивающего) рост субстрата. В простой периодической культуре изменения скорости роста вызываются только качественными изменениями в составе питательной среды, а также количественными изменениями физико-химических условий, например, таких, как температура или pH. Данные методы изменения скорости роста вносят побочные эффекты, которые маскируют действие самой скорости роста. Например, изменение температуры будет независимо действовать и на скорость роста и на содержание РНК у бактерий.

2. Хемостат можно использовать также и с другой целью: фиксировать скорость роста при изменении окружающих условий. Это имеет очень важное значение тогда, когда необходимо отдифференцировать какое-либо влияние изменения условий окружающей среды и влияние изменения скорости роста.

3. Хемостат используется для поддержания постоянной скорости роста при лимитирующей концентрации субстрата. В то время в периодической культуре рост, который является лимитированный субстратом (питательная среда для микроорганизмов), можно получить только лишь кратковременно, причем все это сопровождается изменением скорости роста. Именно эта функция хемостата расширяет возможный диапазон постоянных окружающих условий, а также дает возможность изучать не только избыток и истощение лимитирующего роста субстрата, но и все промежуточные состояния [1].

Хемостатный метод упрощает системы культуры. Из этого следует, что данный метод облегчает как изучение реакций организма на его окружение, так и управление процессами, которые происходят в самих микроорганизмах. Это упрощение имеет огромное преимущество тогда, когда возникает необходимость в изучении или управлении взаимодействием двух или более видов [2].

Развитие хемостатного метода существенно увеличило возможности управления культурой. Особенно это актуально в экстремальных условиях, в частности, при скорости роста, которая является близкой к максимальной, или при сильно разбавленном субстрате. Сначала Брайсон изобрел турбидостат. Данное изобретение представляет собой тот же хемостат, только уже снабженный фотоэлектрическим элементом, который является чувствительным к мутности культуры. В том случае, когда плотность биомассы поднимается выше выбранного уровня, фотоэлемент запускает подачу среды. Сами изменения мутности по методу турбидостата имеют лимитирующую область применения (только для культур одноклеточных организмов). Наличие в наше время иных методов определения биомассы существенно расширило применимость метода, но общий термин «турбидостатный контроль» до сих пор остается правомочным для всех методов. Существует такой термин, как «возврат биомассы» – концентрирование биомассы в культуре. Данный возврат дает возможность повысить концентрацию биомассы выше максимума ( $\approx Y_{s_r}$ ), который возможен без возврата. Использование батареи хемостатов существенно увеличивает возможности хемостата, а в случае определенных систем имеет огромное преимущество перед одиночным хемостатом. Также были разработаны теоретические модели для таких систем, правда, они пока еще как

следует не проверены из-за того, что экспериментальная работа по реализации этих систем сдерживалась развитием оборудования для культуры [3].

Поведение смешанных культур, а именно самой смеси организмов разных типов имеет огромное значение для экологии микроорганизмов в почве, воде, а также при изучении болезней и иных продуктов. Смешанные культуры имеют существенное значение при приготовлении пищевых продуктов брожения и изготовления микробных продуктов (например, аспарагиновой кислоты). Исследуя принципы роста смешанной культуры, возможно предсказать результат загрязнения культуры, а также селекции какого-либо типа мутанта. Поведение смешанных культур весьма сложное, именно из-за этого использование математических моделей разных систем для описания и предсказания поведения культуры имеет очень важное значение. Сосуществование хищников и жертвы можно проиллюстрировать на примере простейших, которые питаются бактериями. Смоделируем систему с помощью дифференциальных уравнений:

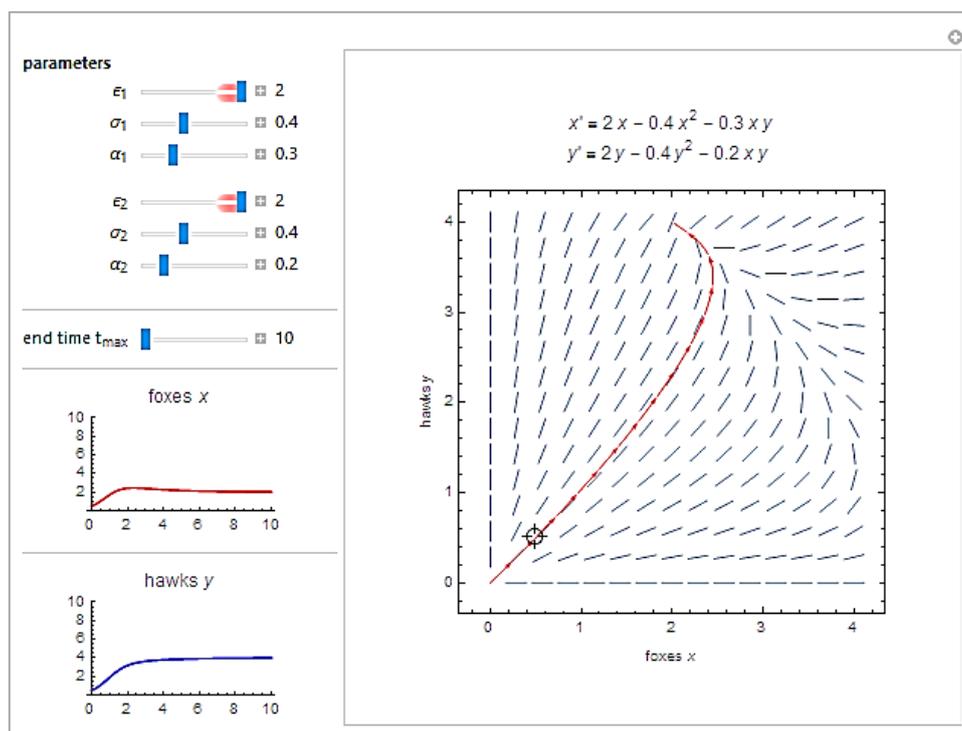
$$x' = 2x - 0,4x^2 - 0,3xy, \quad y' = 2y - 0,4y^2 - 0,2xy. \quad (1)$$

Рассмотрим возможности, а также инструментарий системы компьютерной алгебры Mathematica – это программное средство для символьных вычислений, которое позволяет проводить аналитические и численные расчеты.

При помощи пакета Mathematica полученные результаты можно наглядно отобразить на экране, пользуясь мощной двух- или трехмерной графикой. Система Mathematica имеет язык программирования, поддерживающий традиционные стили программирования, а именно процедурный и функциональный [4].

Покажем анимацию графиков решений уравнений (1) в зависимости от изменяющихся параметров  $\varepsilon_1, \sigma_1, \alpha_1, \varepsilon_2, \sigma_2, \alpha_2, t_{\max}$  (рисунок 1).

```
Manipulate[Module[{pic,sol},
pic = VectorPlot[{eps1*x - s1*x^2 - alpha1*y*x, eps2*y - s2*y^2 - alpha2*y*x},
{x,0,4},{y,0,4},StreamPoints -> {{p[[1]],p[[2]]}},
StreamStyle -> {Red,Thick}, VectorScale -> {Tiny,Tiny,None},
VectorStyle -> Segment, ImageSize -> {350,350},
PlotLabel -> Column[{Row[{Style["x", Italic], "", " = ", eps1*x, "-", s1*x^2, "-", alpha1*y*x}],
Row[{Style["y", Italic], "", " = ", eps2*y, "-", s2*y^2, "-", alpha2*y*x}], Spacer[12]}],
FrameLabel -> {Row[{"foxes", Style["x", Italic]}],
Row[{"hawks", Style["y", Italic]}]};
sol = NDSolve[{x1'[t] == eps1*x1[t] - s1*(x1[t])^2 - alpha1*y1[t]*x1[t],
y1'[t] == eps2*y1[t] - s2*(y1[t])^2 - alpha2*y1[t]*x1[t]},
{x1[t], y1[t]}, {t, 0, tend}];
```



**Рисунок 1.** – Эскиз графика решения уравнений  $x' = 2x - 0,4x^2 - 0,3xy$  и  $y' = 2y - 0,4y^2 - 0,2xy$

При помощи пакета Mathematica проиллюстрируем динамику процесса паразитод – хозяин.

Функция `Manipulate[Module[{sol, p, l, a, b, m}, ...]` позволяет визуализировать зависимость выражения от параметров. `Module[{var1, var2, ...}, expr1; expr2; ...; exprn]` выполняет последовательность каких-либо действий `expr1; expr2; ...; exprn`, при этом считая переменные `var1, var2, ...` локальными, иначе говоря, все изменения этих переменных в процессе вычисления `expr1; expr2; ...; exprn` будут отменяться после выполнения всей последовательности действий. При помощи графической функции `Plot` построим следующие графики (рисунок 2):

```
Plot[Evaluate[{l[t], a[t], p[t]}/.sol], {t, -1, tend}, PlotStyle →
  {Darker[Green], Blue, Darker[Red]},
```

```
PlotLegends → Placed[{"uninfected larvae", "adults", "parasitoids"},
  Below], AxesLabel → {Style[t, 16]}, AxesOrigin → {0, 0},
  PlotRange → Full, ImageSize → {460, 350}]],
```

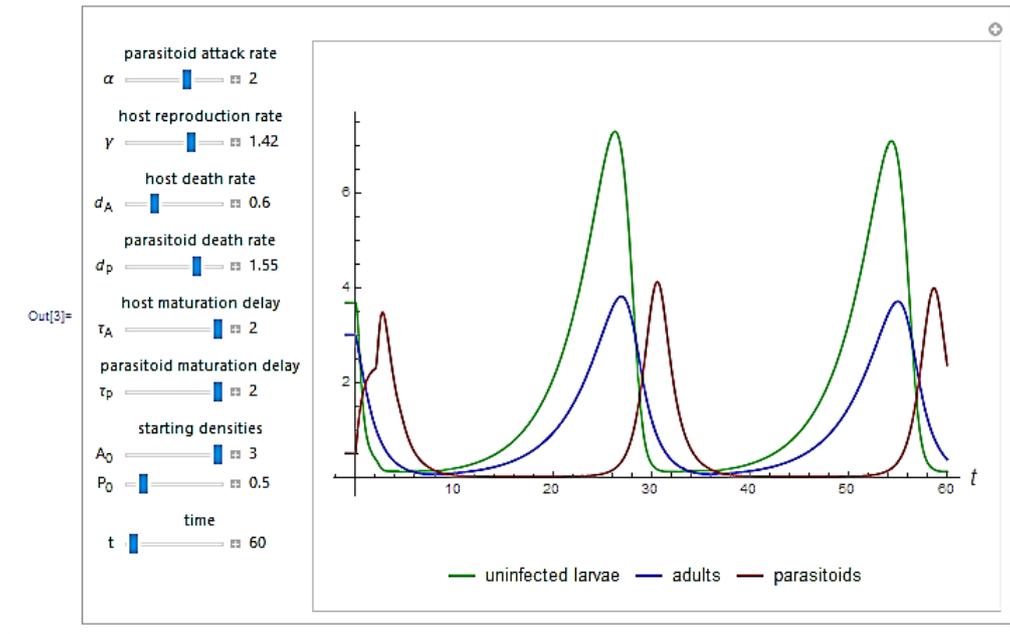


Рисунок 2. – Динамика паразитоид – хозяин

Общим условием, которое необходимо для поддержания в хемостате двух видов микробов, является требование, чтобы скорость разбавления была меньше, нежели меньшая из двух критических скоростей разбавления для каждого вида. Рассматриваются только условия стационарного состояния для смешанных культур в хемостате. Около стационарных значений могут происходить колебания, которые предсказываются моделями таких систем.

Основные условия для поддержания двух видов микробов в хемостатной культуре:

1. С одним лимитирующим субстратом, если:

- а) удельные скорости роста совпадают,
- б) вид, растущий быстрее, ингибируется (подавляется) собственным продуктом,
- в) продукт вида, который растет быстрее, активировывает рост другого вида.

2. С различными лимитирующими субстратами, если:

- а) в культуру попадают разные лимитирующие субстраты;
- б) продукт одного вида служит лимитирующим субстратом для другого вида;
- в) имеется взаимоотношение хищник – жертва.

Для обозначения разных типов взаимодействий видов иногда пользуются разными терминами: комменсализм (способ совместного существования двух различных видов живых организмов, при котором один из партнеров этой системы возлагает на другого регуляцию своих отношений с внешней средой, но при этом не вступает с ним в тесные взаимоотношения), симбиоз (форма тесных взаимоотношений между организмами различных видов, при которой хотя бы один из них получает для себя пользу), паразитизм («нахлебник» – один из типов сосуществования организмов). Но данные термины во многом перекрываются по смыслу и не способны удовлетворить некоторым типам взаимодействий.

### Заклучение

Конечный результат смешанной культуры в хемостате может сильно отличаться от конечного результата в периодической культуре. Дело в том, что в периодической культуре каждый вид может увеличить свою биомассу со скоростью, которая является некоторой функцией химических и физических условий окружающей среды.

Но для этого должны выполняться некоторые условия: один из видов не образует агентов, которые прекращают рост другого; нет взаимодействия хищник – жертва. В хемостатной же культуре все виды, удельная скорость роста которых меньше скорости разбавления, будут делать меньше свою численность и в итоге могут совсем исчезнуть из культуры.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чичурин, А. В. Применение системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений и в задачах математического моделирования : курс лекций : в 3 ч. / А. В. Чичурин, Е. Н. Швычкина. – Минск : БГУ, 2017. – Ч. 3. – С. 39–54.
2. Воскобойник, О. Н. Математическая модель функционирования хемостата с учетом управляющих воздействий / О. Н. Воскобойник, С. Н. Герасим, Н. А. Матийченко // Зб. наук. пр. Харків. нац. ун-ту Повітряних Сил. – 2010. – № 4 (26). – С. 102–106.
3. Колосов, Г. Е. Исследование установившихся колебательных процессов в хемостате / Г. Е. Колосов, Д. В. Нежеметдинова // Автоматика и телемеханика. – 2000. – №1. – С. 118–132.
4. Прокопеня, А. Н. Применение системы Mathematica к решению обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / А. Н. Прокопеня, А. В. Чичурин. – Минск : БГУ, 1999. – С. 265.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 10.09.2020*

УДК 519.6+519.81

**В. В. Морозов**

ст. преподаватель каф. прикладной математики и информатики  
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина  
e-mail: morozoffw@mail.ru

**МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Метод простой итерации, или метод последовательных приближений, – это математический алгоритм нахождения неизвестного корня операторного уравнения путем его постепенного уточнения. Выражая из начального приближения последующие, получают более точные результаты. Этот метод используется для поиска корней функциональных уравнений с интегральным оператором, решения нелинейных алгебраических уравнений и систем уравнений. Метод Ньютона – более совершенный метод решения функциональных уравнений, предназначенный для решения как интегральных, так и дифференциальных уравнений. Причем более жесткие требования, накладываемые на гладкость оператора уравнения, позволяют изолировать корень в достаточно узкой области локализации. Большим препятствием для реализации этого метода является приближение к нулю первой производной Фреше. В настоящее время разрабатываются различные методы регуляризации итерационных процессов, позволяющие и в этом случае избежать расходимости вычислительного процесса. Однако при равенстве нулю сильной производной метод Ньютона не имеет смысла по определению, в связи с чем возникает необходимость увеличения порядка дифференцируемости оператора уравнения и генерации итерационного процесса второго порядка.*

**MOROZOV V. V.****SECOND-ORDER METHOD FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS**

*The simple iteration method, or the method of successive approximations, is a mathematical algorithm for finding the unknown root of an operator equation by gradually refining it. By expressing the subsequent ones from the initial approximation, more accurate results are obtained. This method is used to find the roots of functional equations with an integral operator, to solve nonlinear algebraic equations and systems of equations. Newton's method is a more advanced method for solving functional equations, designed to solve both integral and differential equations. Moreover, more stringent requirements imposed on the smoothness of the operator of the equation make it possible to isolate the root in a rather narrow localization region. A big obstacle to the implementation of this method is the approach to zero of the first Frechet derivative. At present, various methods of regularization of iterative processes are being developed, allowing in this case to avoid the divergence of the computational process. However, when the strong derivative is equal to zero, Newton's method does not make sense by definition, and therefore it becomes necessary to increase the order of differentiability of the operator of the equation and generate a second-order iterative process.*

**Введение**

При решении нелинейных систем алгебраических уравнений методом Ньютона используется первая производная Фреше оператора системы, которую называют матрицей Якоби. Для получения оценок качества приближения корня системы применяется и вторая производная Фреше, называемая гессианом. Билинейная матрица, соответствующая второй сильной производной, представляет собой трехмерную матрицу.

Для решения интегральных, дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений используется полиномиальная аппроксимация линейных и билинейных банаховых операторов, участвующих в итерационном процессе.

Применяемый для аппроксимации элементов полиномиальный базис одновременно является базисом всюду плотного множества пространства решений и итеративным базисом вычислительного процесса, т. е. итерационный многочлен приближения корня степени  $n$  из  $P_n$ , в случае необходимости может быть представлен в виде многочлена в реорганизованном базисе  $P_{n+1}$ .

Отметим, что здесь вместо традиционного базиса множества многочленов используется лагранжевый базис, который и обеспечивает итеративность вычислительного процесса при увеличении параметра дискретизации. Логическим завершением вычислительного процесса является локализация корня функционального уравнения методом второго порядка с заданной точностью приближения.

Целью данной работы является определение условий сходимости итерационных методов второго порядка решения функциональных уравнений, а также установление и доказательство критериев локализации корней операторных уравнений.

Решаемые задачи:

- 1) разработать алгоритм итерационного метода второго порядка решения банаховых уравнений;
- 2) сформулировать и доказать критерии локализации корней банаховых уравнений методом второго порядка.

### Метод второго порядка решения операторных уравнений

Введем понятие «корень» из отображения и рассмотрим его свойства.

*Определение.* Если для отображения  $F$  существует такое отображение  $G$ , что  $G^2 = F$ , то  $G$  называется *квадратным корнем* из отображения  $F$ . Будем обозначать корень из отображения  $F$  как  $G \equiv \sqrt{F}$ .

Оператор, являющийся корнем из линейного оператора, не всегда линейный. Пусть  $A$  и  $B$  – два линейных оператора, отображающих  $B$ -пространство  $U$  в  $B$ -пространство  $V$ . Тогда если  $(A \pm B)^2 = I$ , то операторы  $A$  и  $B$  *коммукативны*, т. е.  $AB = BA$ .

Рассмотрим, например,  $A + B = I$ . Тогда  $(A - B)(A + B) = (A + B)(A - B)$ . Следовательно,  $AB - BA = BA - AB$  и т. д. Отметим, что в общем случае линейные операторы не являются коммукативными (перестановочными).

Рассмотрим частный случай линейных операторов – матрицы, отображающие  $E$ -пространство  $R^n$  в себя (порядок матрицы, осуществляющей подобное преобразование евклидова пространства, равен  $n$ ).

Для извлечения квадратного корня из матрицы  $B = I - A$  разработаем алгоритм, основанный на следующей теореме.

*Теорема 1.* Если  $s$ -грань матрицы  $[A] \leq q < 1$ , то последовательность приближенных значений корня из матрицы  $I - A$  можно построить с помощью рекуррентного соотношения

$$R_{i+1} = R_i - \frac{R_i^2 - (I - A)}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, \quad \text{где } R_0 = I - \frac{A}{2}. \quad (1)$$

Доказательство теоремы следует из сходимости метода последовательных приближений решения уравнения

$$R = F(R), \quad \text{где } F(R) \equiv R - \frac{R^2 - (I - A)}{2}.$$

Найдем  $F'(R) = I - R$  и для всех  $i \in N$  оценим  $s$ -грань  $[I - R_i]$ . С учетом преобразований (1)

$$I - R_{i+1} = I - R_i + \frac{R_i^2 - (I - A)}{2} = \frac{(I - R_i)^2}{2} + \frac{A}{2}$$

следует, что при  $i \geq 0$  справедливо неравенство  $[I - R_{i+1}] \leq q < 1$ , т. е. отображение  $F$  – сжатие. Этот факт можно доказать и по-другому:

$$\begin{aligned} R_{i+1} - R_i &= R_i - R_{i-1} - \left( \frac{R_i^2 - (I - A)}{2} - \frac{R_{i-1}^2 - (I - A)}{2} \right) = \\ &= (R_i - R_{i-1}) \left( I - \frac{R_i + R_{i-1}}{2} \right) = (R_i - R_{i-1}) \frac{I - R_i + I - R_{i-1}}{2}. \end{aligned}$$

Из условия теоремы следует, что

$$\lceil I - R \rceil \leq \lceil A \rceil \leq q < I.$$

Использованный в теореме алгоритм поиска корня с некоторыми изменениями часто применяется в прикладном анализе, например, при доказательстве сходимости модифицированного метода Ньютона при решении квадратных операторных уравнений (теорема 4) и т. п.

*Теорема 2.* Если  $s$ -грань линейного оператора  $Q$  не превосходит  $I$  ( $\lceil Q \rceil \leq I$ ), то существует линейный оператор  $R = \sqrt{I - Q}$ , равный

$$R = I - \frac{Q}{2} - \frac{Q^2}{8} - \frac{Q^3}{16} - \dots - \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} Q^m - \dots$$

Доказательство теоремы основано на том, что построенный для оператора  $\sqrt{I - Q}$  ряд Тейлора обладает абсолютной сходимостью:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(2m-3)!!}{(2m)!!} \leq 2, \text{ где } \frac{3!!}{6!!} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{16} \text{ и т. д.}$$

При решении операторного уравнения

$$F(u_0) = 0 \quad (2)$$

с дважды непрерывно дифференцируемым отображением  $F$  может быть использован метод второго порядка.

Аппроксимируя нелинейный оператор уравнения (1) многочленом второй степени (по аналогии с линейной аппроксимацией в методе Ньютона), получим квадратное уравнение относительно поправки  $\Delta u$  к нулевому приближению  $u_0$ :

$$\frac{1}{2} F''(u_0) \Delta^2 u + F'(u_0) \Delta u + F(u_0) = 0. \quad (3)$$

Чтобы найти корни этого уравнения, умножим обе его части на оператор  $[F'(u_0)]^{-1}$  (существование которого, как и в методе Ньютона, будем предполагать).

В случае  $F : R^n \rightarrow R^n$  дискретным аналогом уравнения (3) является система из  $n$  квадратных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n (a_{1j1} \Delta u_1 + a_{1j2} \Delta u_2 + \dots + a_{1jn} \Delta u_n) \Delta u_j + \Delta u_1 = -\Delta u_{1H}; \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n (a_{nj1} \Delta u_1 + a_{nj2} \Delta u_2 + \dots + a_{njn} \Delta u_n) \Delta u_j + \Delta u_n = -\Delta u_{nH}, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\{a_{ijk}, i, j, k = 1, \dots, n\}$  – дискретная (в виде кубичной матрицы) форма билинейного оператора  $0,5 \cdot [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0)$ , а  $\{\Delta u_{iH}, i = 1, \dots, n\}$  – дискретная (в виде вектора) поправка  $[F'(u_0)]^{-1} F(u_0)$  к приближению  $u_0$  корня уравнения (2), определяемая методом Ньютона.

Методы решения квадратных операторных уравнений, основанные на существовании оператора  $[F'(u_0)]^{-1}$ , обратного к  $F'(u_0)$ , называют методами Ньютона.

*Метод 1.* Применим к обеим частям квадратного операторного уравнения (3) оператор  $[F'(u_0)]^{-1}$  и обозначим полученную левую часть через  $\Phi(\Delta u)$ :

$$\Phi(\Delta u) \equiv \frac{1}{2} [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \Delta^2 u + \Delta u + \Delta u_H = 0, \quad (5)$$

где  $\Delta u_H = [F'(u_0)]^{-1} F(u_0)$ , и решим уравнение (9.5) методом Ньютона

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_n - [\Phi'(\Delta u_n)]^{-1} \Phi(\Delta u_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Для установления условий сходимости метода нулевого приближения  $\Delta u_0 = 0$  предварительно отыщем нижнюю и верхнюю оценки нормы решения  $\Delta u$ . Из определения нормы и уравнения (5) следует неравенство:

$$\|\Delta u\| \leq \sqrt{A} \cdot \|\Delta u\|^2 + \|C\|, \quad \text{где } A = \frac{1}{2} [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0), \quad C = \Delta u_H.$$

Отсюда вытекает оценка нормы сверху:

$$\|\Delta u\| \leq \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \sqrt{A} \|C\|}}{2 \sqrt{A}} = \frac{2 \|C\|}{1 + \sqrt{1 - 4 \sqrt{A} \|C\|}}, \quad (6)$$

или в исходных обозначениях:

$$\|\Delta u\| \leq \frac{2 \|\Delta u_H\|}{1 + \sqrt{1 - 2 \sqrt{[F'(u_0)]^{-1} F''(u_0)} \|\Delta u_H\|}}. \quad (7)$$

Аналогично из неравенства

$$\|\Delta u\| \geq \|C\| - \sqrt{A} \cdot \|\Delta u\|^2$$

можно получить нижнюю оценку нормы  $\|\Delta u\|$ :

$$\|\Delta u\| \geq \frac{2 \|\Delta u_H\|}{1 + \sqrt{1 + 2 \sqrt{[F'(u_0)]^{-1} F''(u_0)} \|\Delta u_H\|}}. \quad (8)$$

Тогда достаточное условие сходимости метода Ньютона решения (4) нулевого приближения  $\Delta u_0 = 0$  к корню уравнения (5) будет выполнено при

$$k = \sqrt{[\Phi'(0)]^{-1} \cdot [\Phi''(\Delta u)] \cdot [\Phi'(0)]^{-1} \Phi(0)} \leq 1/2.$$

Из соотношений

- 1)  $\Phi(\Delta u)|_0 = \Phi(0) = \Delta u_H$ ;
- 2)  $\Phi'(\Delta u)|_0 = [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \cdot 0 + I = I$ ;
- 3)  $\Phi''(\Delta u) = [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0)$ ;
- 4)  $([\Phi'(\Delta u)]^{-1} \Phi(\Delta u))|_0 = I \cdot \Delta u_H = \Delta u_H$

следует, что для сходимости метода достаточно выполнения условия

$$k = \sqrt{[\Phi'(0)]^{-1} \cdot [\Phi''(\Delta u)] \cdot [\Phi'(0)]^{-1} \Phi(0)} \leq I \cdot \sqrt{[F'(u_0)]^{-1} F''(u_0)} \cdot \|\Delta u_H\| \leq 1/2.$$

Метод 2. Преобразуем уравнение (3) к виду

$$\left(\frac{1}{2} [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \Delta u + I\right) \Delta u + \Delta u_H = 0 \quad (9)$$

и обозначим  $V = \frac{1}{2} [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \Delta u + I$ .

Тогда если  $\lfloor V \rfloor > 0$ , то решение (9) находится по формуле:

$$\Delta u = -V^{-1} \Delta u_H. \quad (10)$$

Оценим значение  $i$ -границы  $V$  снизу:

$$\lfloor V \rfloor \geq I - \lceil 0,5 \cdot [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \rceil \cdot \|\Delta u\|. \quad (11)$$

Подставив в неравенство (11) выражение оценки  $\|\Delta u\|$  из соотношения (7), получим интересующую нас оценку:

$$\lfloor V \rfloor \geq \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \lceil A \rceil \|C\|}}{2} = v \geq I/2. \quad (12)$$

Используем в выражении  $V$  из (9) значение  $\Delta u$  из (10), тогда

$$V = I - 0,5 \cdot [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \cdot V^{-1} \Delta u_H. \quad (13)$$

Достаточное условие сходимости МПП [1] основано на соблюдении в области  $\lceil V - I \rceil \leq I/2$  принципа сжимающих отображений  $\lceil \Phi'(V) \rceil < I$ , где

$$\Phi(V) = I - 0,5 \cdot [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \cdot V^{-1} \Delta u_H.$$

При  $4 \lceil A \rceil \|C\| \leq I$  уравнение (13) решается методом простой итерации нулевого приближения  $V_0 = I$ , так как оценка  $s$ -границы оператора  $\Phi(V)$  с учетом неравенства (12) имеет вид:

$$\lceil \Phi'(V) \rceil \leq 0,5 \cdot \lceil [F'(u_0)]^{-1} F''(u_0) \rceil \cdot \|\Delta u_H\| \cdot \lfloor V \rfloor^{-2} \leq I.$$

Тогда, зная  $V$ , найдем  $\Delta u = -V^{-1} \Delta u_H$ . Оценим норму  $\Delta u$ :

$$\|\Delta u\| \leq \lceil V^{-1} \rceil \cdot \|\Delta u_H\| \leq v^{-1} \|C\| \leq \frac{2 \|C\|}{1 + \sqrt{1 - 4 \lceil A \rceil \|C\|}}, \quad (14)$$

что согласуется с ранее полученными результатами (6).

Однако методы 1 и 2 имеют важный недостаток: для их реализации необходимо существование оператора, обратного к  $B = F'(u_0)$ .

Рассмотрим метод решения квадратного уравнения (3), лишь косвенно требующий это ограничение. Пусть  $A = F''(u_0)$ ,  $C = F(u_0)$  и корень (3) принадлежит шару  $Q_R = \{\|\Delta u\| \leq R\}$ , тогда значение радиуса  $R$  определим из неравенств

$$\|B \Delta u\| \geq \left\| \frac{1}{2} A \Delta^2 u \right\| - \|C\|; \quad (15)$$

$$\|B \Delta u\| \leq \left\| \frac{1}{2} A \Delta^2 u \right\| + \|C\|. \quad (16)$$

Оценка нормы  $\Delta u$ , вытекающая из неравенств (16),  $\|B \Delta u\| \geq \lfloor B \rfloor \|\Delta u\|$  и  $\|A \Delta^2 u\| \leq \lceil A \rceil \|\Delta^2 u\|$  (т. е.  $\frac{1}{2} \lceil A \rceil \|\Delta u\|^2 - \lfloor B \rfloor \|\Delta u\| + \|C\| \geq 0$ ), имеет вид

$$\|\Delta u\| \leq R = \frac{\lfloor B \rfloor - \sqrt{\lfloor B \rfloor^2 - 2\lceil A \rceil \|C\|}}{\lceil A \rceil} = \frac{2\|C\|}{\lfloor B \rfloor + \sqrt{\lfloor B \rfloor^2 - 2\lceil A \rceil \|C\|}}. \quad (17)$$

Эта оценка основана на требованиях теоремы 8.10 [2]. А именно: для вычисления  $R$  необходимо, чтобы было справедливо неравенство  $2\lceil A \rceil \|C\| \leq \lfloor B \rfloor^2$ , которое подразумевает существование обратного оператора  $B^{-1}$ , т. е. выполнения условия  $\lfloor B \rfloor \geq \rho > 0$  ( $\lceil B^{-1} \rceil \leq 1/\rho$ ).

При  $\lfloor B \rfloor = 0$  оценку нормы  $\Delta u$  можно получить из неравенства

$$\frac{1}{2}\lceil A \rceil \|\Delta u\|^2 - \lceil B \rceil \|\Delta u\| - \|C\| \leq 0, \quad (18)$$

которое следует из (15):

$$\|B\Delta u\| \leq \lceil B \rceil \|\Delta u\| \text{ и } \|A\Delta^2 u\| \geq \lceil A \rceil \|\Delta u\|^2.$$

Оценка, вытекающая из неравенства (18)

$$\|\Delta u\| \leq R = \frac{\lceil B \rceil + \sqrt{\lceil B \rceil^2 + 2\lceil A \rceil \|C\|}}{\lceil A \rceil}, \quad (19)$$

верна для любого сходящегося метода решения уравнения (3). Но так как  $R$  не стремится к нулю при  $\|C\| \rightarrow 0$ , то прежде всего данная оценка будет интересовать нас для  $\lceil B \rceil \ll 1$ .

При близкой к нулю сильной производной  $F'(u_0)$  справедлива оценка нормы  $\Delta u$  сверху  $\|\Delta u\| \leq R = \sqrt{\frac{2\|C\|}{\lceil A \rceil}}$ .

Существование матрицы, обратной к  $D = 0,5A\Delta u + B$ , обеспечивается неравенством  $\lfloor 0,5A\Delta u + B \rfloor > 0$ . Исходя из этих предположений, решим (3) итерационным методом, аналогичным изложенному в теореме 2:

$$\Delta u_{n+1} = \Delta u_n - \frac{[0,5A\Delta u_n + B]^{-1}(0,5A\Delta^2 u_n + B\Delta u_n + C)}{2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (20)$$

**Теорема 4.** Если в шаре  $\|\Delta u\| \leq R$  (19) квадратное уравнение (3) с  $\|C\| > 0$  имеет решение, то его меньший по норме корень  $\Delta^* u$  можно найти методом последовательных приближений (20) с нулевого приближения  $\Delta u_0 = 0$  при условии  $\lfloor 0,5A\Delta u_n + B \rfloor > 0$ ,  $n = 0, 1, \dots$

Если  $\|C\| > 0$ , то метод последовательных приближений (20) осуществляет поиск корня в области  $\|\Delta u\| < R$  с увеличением на каждом шаге нормы  $\Delta u_n$ . Отметим, что при  $\|C\| = 0$ , меньшим по норме корнем (3) является тривиальное решение.

### Идея и геометрическая интерпретация МВП решения функциональных уравнений

Изложим идею МВП решения операторного уравнения (2). Пусть отображение  $F$  дважды непрерывно дифференцируемо в шаре  $Q[u_0, \delta]$ , центр которого  $u_0$  (степень многочлена по умолчанию равна  $n$ ) примем за нулевое приближение искомого корня. Будем считать, что  $F''(u)$  в шаре  $Q_\delta$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $L$

$$\lceil F''(u) - F''(v) \rceil \leq L\|u - v\|, \quad \{u, v\} \subset Q_\delta. \quad (21)$$

Аппроксимируем  $F(u) = F(u_0 + \Delta u)$ , где поправка  $\Delta u$  приводит  $u_0$  к корню (2), многочленом Тейлора второй степени. Тогда при  $F(u) = 0$  получим:

$$\frac{1}{2} F''(u_0) \Delta^2 u + F'(u_0) \Delta u + F(u_0) = 0. \quad (22)$$

Для нулевого приближения  $u_0$  уравнения (2) и корня  $\Delta u$  уравнения (22) погрешность квадратичной аппроксимации формулы Тейлора равна

$$F(u_0 + \Delta u) = \omega(u_0, \Delta u), \text{ где } \|\omega(u_0, \Delta u)\| = o(\|\Delta u\|^2).$$

Таким образом, норма невязки уравнения (2) на следующем приближении  $u_0 + \Delta u$  будет на два порядка выше, чем норма приращения аргумента.

Это вытекает из теоремы о конечных приращениях:

$$\|F(u_0 + \Delta u) - F(u_0) - F'(u_0) \Delta u - \frac{1}{2} F''(u_0) \Delta^2 u\| \leq \frac{L}{6} \|\Delta u\|^3.$$

Если (22) имеет решение, то корень  $\Delta u$  с меньшей нормой обозначим  $\Delta u_0$  и примем за поправку к приближению  $u_0$  и т. д.

$$u_{k+1} = u_k + \Delta u_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

*Пример 1.* Решить нелинейное алгебраическое уравнение

$$F(x) \equiv x^3 - 3x - 2 = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (24)$$

методом второго порядка с начального приближения  $x_0 = 1$ .

Для построения графика функции  $y = F(x)$  найдем производную  $F'(x)$  ( $F'(x) = 3x^2 - 3$ ) и определим из уравнения  $F'(x) = 0$  экстремальные точки.

Абсциссы точек локальных максимума и минимума равны  $-1$  и  $+1$  соответственно. Чтобы построить график параболы  $y = ax^2 + bx + c$ , проходящей через точку  $(1; -4)$  и являющуюся приближением функции  $y = F(x)$  вблизи точки  $x_0 = 1$ , найдем вторую производную  $F(x)$  ( $F''(x) = 6x$ ) в точке  $x_0$ , т. е.  $F''(1) = 6$ .

Тогда для определения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  составим линейную систему уравнений

$$\begin{cases} y''(1) \equiv 2a = 6; \\ y'(1) \equiv 2a + b = 0; \\ y(1) \equiv a + b + c = -4. \end{cases}$$

Отсюда уравнение искомой параболы примет вид  $y = 3x^2 - 6x - 1$ . На рисунке 1 ее график изображен штриховой линией. Точки пересечения параболы с осью абсцисс являются приближениями корней исходного уравнения (24). Любое из двух значений  $x$  может рассматриваться как очередное приближение МВП.

Однако на практике вычислительный процесс по каждой ветви алгоритма проще продолжать параметрическим методом Ньютона, так как с его помощью прогнозируется существование корня в окрестности приближения, а МВП используется тогда, когда метод Ньютона применить невозможно либо он дает поправку с большой нормой.

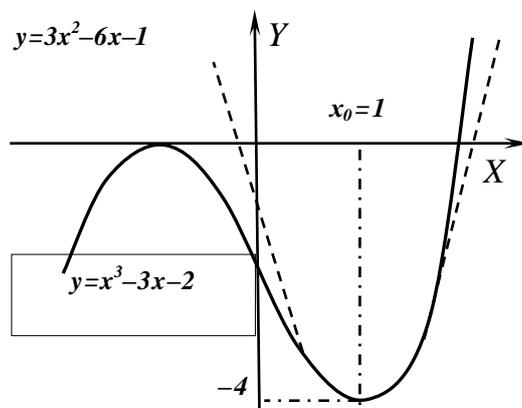


Рисунок 1

Как и в методе Ньютона [3], для получения приближения корня уравнения (24) методом второго порядка необязательно находить явный вид многочлена аппроксимации. Поправку можно найти из уравнения (22):

$$0,5F''(1)\Delta^2x + F'(1)\Delta x + F(1) = 0 \Leftrightarrow 3\Delta^2x - 4 = 0.$$

Тогда следующее приближение  $x_1 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$  (или  $x_1 = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ). Эти значения являются абсциссами точек пересечения параболы, аппроксимирующей исходное уравнение (24) в точке  $x_0$ , с осью  $OX$ , так как

$$y(x_1) \equiv 3(x_1)^2 - 6x_1 - 1 = 0.$$

*Пример 2.* Найти корни функционального уравнения с нелинейным оператором  $F : C_{[0;1]} \rightarrow C_{[0;1]}$ :

$$F(u) \equiv u^3 + 2xu^2 - x^2u - 2x^3 = 0 \quad (25)$$

в шаре  $Q_R = \{u(x) : \|u(x)\| \leq R = 2, x \in [0; 1]\}$  с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-10}$ .

Вычислим первую и вторую сильные производные оператора  $F$  на элементе  $u(x)$ :

$$F'(u) = 3u^2 + 4xu - x^2, F''(u) = 6u + 4x.$$

По условию задачи  $[F''(u)] \leq 16 = K$ . Определить глобальную оценку  $B$  невозможно, так как, кроме экстремальных функций  $u = c_-x$  и  $u = c_+x$  ( $c_-x$  и  $c_+x$  – корни уравнения  $F'(u) = 0$ ), в области  $Q_R$  находится бесконечное множество непрерывных функций  $u(x)$ , для которых не существует  $[F'(u)]^{-1}$ .

Два корня уравнения (25) можно вычислить параметрическим методом Ньютона, описанным в разделе 8.4 [2]. В качестве нулевого приближения ПМН используем непрерывную функцию, принадлежащую полосе  $-2 \leq u_0(x) \leq 2$ .

При выполнении условий

$$-2 \leq u_0(x) < c_-x \text{ или } c_+x < u_0(x) \leq 2$$

оператор  $F'(u_0)$  имеет обратный, причем с любого приближения  $u_0(x)$  из первого множества процесс сходится к одному корню уравнения (25)  $u^* = -2x$ , а из второго множества – к другому корню  $u^{**}(x) = x$ .

Однако найти с помощью параметрического процесса (22) третий корень уравнения ( $u^{***} = -x$ ) невозможно, так как к нему нельзя приблизиться функциями из  $C_{[0; 1]}$ , не пересекая линий экстремума (рисунок 2). Отметим, что этот корень (25) можно найти методом второго порядка с нулевого приближения  $u = c_- x$  (или  $u = c_+ x$ ), для которых  $F'(u) \equiv 0$  (метод второго порядка применяется также при  $\lfloor F'(u) \rfloor = 0$ ).

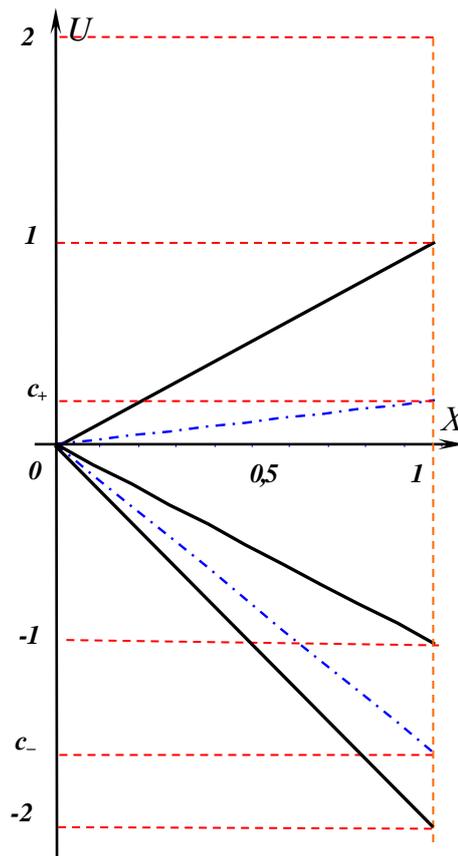


Рисунок 2

### Сходимость МВП при равенстве нулю $s$ -границ сильной производной оператора уравнения

Сформулируем некоторые необходимые и достаточные условия сходимости метода второго порядка решения операторного уравнения (2).

Необходимым условием построения вычислительного процесса является дважды непрерывная дифференцируемость отображения  $F: U \rightarrow V$  в области  $Q[u_0, \delta]$  существования корня. Но если первая производная Фреше в точке  $u_0$  имеет положительную  $i$ -грань  $\lfloor F'(u_0) \rfloor \geq q > 0$ , то для поиска корней уравнения (2) надо использовать параметрический метод Ньютона [2].

Поэтому будем полагать, что  $i$ -грань линейного оператора  $F'(u_0)$  равна 0 и его линейная регуляризация не имеет смысла. Тогда при определенных условиях решить уравнение (2) с начального приближения  $u_0$  можно, используя метод более высокого порядка точности.

В частности, для доказательства сходимости метода второго порядка требуется, чтобы вторая производная оператора  $F$  в области  $Q_\delta$ :

1) удовлетворяла условию Липшица:

$$\lceil F''(u) - F''(v) \rceil \leq L \|u - v\|; \quad (26)$$

2) имела положительную  $i$ -грань:

$$\lfloor F''(u) \rfloor \geq \rho > 0. \quad (27)$$

Пусть также  $s$ -грань производной Фреше оператора  $F$  уравнения (2) равна нулю в точках итерационного процесса, т. е.

$$F'(u_n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (28)$$

Необходимым условием сходимости метода является выполнение неравенства  $\delta \geq r$ , где  $r$  – меньший положительный корень уравнения

$$T(r) \equiv \frac{1}{6} L r^3 - \frac{1}{2} \rho r^2 + \|F(u_0)\| = 0. \quad (29)$$

*Теорема 5.* Пусть в шаре  $Q_\delta$  существует корень уравнения (2), а также выполнены условия (26)–(29).

Тогда если

$$\|F(u_0)\| \leq \frac{2\rho^3}{3L^2}, \quad (30)$$

то уравнение (2) можно решить методом второго порядка

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

где поправка  $\Delta u_n$  определяется из квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} F''(u_n) \Delta^2 u + F(u_n) = 0. \quad (32)$$

При этом корень  $u^*$  операторного уравнения (2), к которому сходится МВП (31) – (32), находится в области  $Q_r = \{u : \|u - u_0\| \leq r\}$ .

Из формул Тейлора и конечных приращений для нулевого приближения  $u_0$  корня  $u^*$  уравнения (2), по условию теоремы принадлежащего области  $Q_\delta$ , вытекает неравенство

$$\|F(u^*) - F(u_0) - \frac{1}{2} F''(u_0) \Delta^2 u\| \leq \frac{1}{6} L \|\Delta u\|^3, \quad \text{где } \Delta u = u^* - u_0. \quad (33)$$

Тогда, учитывая оценки глобальных (26)–(27) и локальных констант, можно указать точные границы области существования корня уравнения (2). Из неравенства (33) и свойств нормы следует соотношение

$$\left\| \frac{1}{2} F''(u_0) \Delta^2 u \right\| - \|F(u_0)\| \leq \frac{1}{6} L \|\Delta u\|^3. \quad (34)$$

Неравенство (34) после введения функции  $T$  примет вид:

$$T(\|\Delta u\|) \equiv \frac{1}{6} L \|\Delta u\|^3 - \frac{1}{2} \rho \|\Delta u\|^2 + \|F(u_0)\| \geq 0. \quad (35)$$

Приравняв  $T'(u)$  к нулю, найдем точки локального экстремума  $\Delta_{min}$  и  $\Delta_{max}$  функции  $T(u)$ . Так как

$$T'(\|\Delta u\|) \equiv \frac{1}{2} L \|\Delta u\|^2 - \rho \|\Delta u\| = 0,$$

то

$$\Delta_{max} = 0 \text{ и } \Delta_{min} = 2\rho L^{-1}. \quad (36)$$

Значение  $T(\Delta_{max}) > 0$ . Стало быть, при  $T(\Delta_{min}) = -\frac{2\rho^3}{3L^2} + \|F(u_n)\| \leq 0$  существует корень  $r$  уравнения (29), который в условиях теоремы расположен в интервале  $0 < r \leq \Delta_{min}$ .

При  $\|F(u_0)\|$ , стремящемся к нулю, значение  $r$  ограничивает норму  $\Delta u$  из неравенства (34), т. е.  $\|\Delta u\| \leq r$ , где  $r$  – меньший положительный корень уравнения (29).

Требование  $\delta \geq r$  означает, что на практике проверку выполнения условий (26) и (27) теоремы 5 достаточно осуществить в области  $Q_r$ , т. е. при  $\delta = r$ . Установим скорость сходимости метода второго порядка.

Из справедливого для  $n = 0, 1, \dots$  неравенства

$$\|F(u_{n+1}) - F(u_n) - \frac{1}{2} F''(u_n) \Delta^2 u_n\| \leq \frac{1}{6} L \|\Delta u_n\|^3$$

следует оценка нормы невязки уравнения (\*\*\*) на  $n+1$  приближении

$$\|F(u_{n+1})\| \leq \frac{1}{6} L \|\Delta u_n\|^3. \quad (37)$$

Пусть  $\Delta u_n$  – корень уравнения (32), тогда  $\|\Delta u_n\| \leq \sqrt{\frac{2\|F(u_n)\|}{\rho}}$  и

$$\|\Delta u_{n+1}\| \leq \sqrt{\frac{2\|F(u_{n+1})\|}{\rho}} = \sqrt{\frac{L\|\Delta u_n\|}{6\rho}} \|\Delta u_n\|. \quad (38)$$

Из неравенства (38) определим коэффициент сжатия:

$$q = \sqrt{\frac{L\|\Delta u_0\|}{6\rho}} = \sqrt{\frac{L}{6\rho}} \sqrt{\frac{2\|F(u_0)\|}{\rho}} \leq \sqrt{\frac{L}{6\rho}} \sqrt{\frac{4\rho^2}{3L^2}} = 3^{-3/4} < \frac{1}{2}.$$

Оценка  $\|\Delta u\|$ , вытекающая из (29), имеет вид:

$$r^2 \leq \frac{6\|F(u_0)\|}{3\rho - Lr}, \text{ где } r \leq \frac{2\rho}{L} \text{ или } \|\Delta u\| \leq r \leq \sqrt{\frac{6\|F(u_0)\|}{\rho}}. \quad (39)$$

Значит, в условиях теоремы вычислительный процесс (31)–(32) при  $n \rightarrow \infty$  сходится к корню уравнения (2). Однако вероятность того, что в каждой точке процесса  $F'(u_n) = 0$  мала. Поэтому итерации МВП будем применять лишь в тех случаях, когда демпфированная поправка  $\beta \Delta u_n$  параметрического метода Ньютона к приближению  $u_n$  выводит процесс (22) из области существования корня (2), т. е. вместо регуляризации линейного оператора  $F'(u_n)$  при решении уравнения  $F'(u_n) \Delta u_n = -F(u_n)$ .

**Метод  $M_i$  решения уравнения с равной нулю  $i$ -гранью сильной производной оператора**

Пусть в области  $Q[u_0, \delta]$  существования корня уравнения (2) выполнены условия (26) и (27). Рассмотрим метод решения уравнения с помощью аппроксимации отображения  $F$  на элементе  $u^* = u_0 + \Delta u$  многочленом Тейлора второй степени:

$$F(u_0 + \Delta u) \approx \frac{1}{2} F''(u_0) \Delta^2 u + F'(u_0) \Delta u + F(u_0),$$

полагая, что  $i$ -грань  $[F'(u)]$  равна 0 в точках итерационного процесса

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (40)$$

где  $\Delta u_n$  – меньший по норме корень квадратного уравнения

$$\frac{1}{2} F''(u_n) \Delta^2 u + F'(u_n) \Delta u + F(u_n) = 0. \quad (41)$$

Ранее был рассмотрен случай, когда  $F'(u_n) = 0$ . Предположим, что

$$[F'(u)] \leq M, \quad u \in Q_\delta. \quad (42)$$

*Теорема 6.* Пусть в области  $Q_\delta$  существует корень уравнения (2), выполнены условия (26), (27) и (42), а также верно неравенство  $\delta \geq r$ , где  $r$  – меньший положительный корень уравнения

$$T(r) \equiv \frac{1}{6} L r^3 - \frac{1}{2} \rho r^2 + M r + \|F(u_0)\| = 0. \quad (9.43)$$

Предположим также, что

$$T\left(\frac{1}{L}(\rho + \sqrt{\rho^2 - 2LM})\right) < 0, \quad \text{где } 2LM < \rho^2. \quad (9.44)$$

Тогда уравнение (2) решается методом второго порядка (40) – (41). Причем корень  $u^*$  уравнения (2), к которому сходится МВП, находится в области

$$Q_r = \{u : \|u - u_0\| \leq r\}.$$

Из формул Тейлора и конечных приращений для корня (2), по условию теоремы принадлежащего области  $Q_\delta$ , справедливо неравенство

$$\|F(u^*) - F(u_0) - F'(u_0) \Delta u - \frac{1}{2} F''(u_0) \Delta^2 u\| \leq \frac{1}{6} L \|\Delta u\|^3, \quad \Delta u = u^* - u_0. \quad (45)$$

Учитывая оценки глобальных (26), (27) и локальных констант,

$$T(\|\Delta u\|) \equiv \frac{1}{6} L \|\Delta u\|^3 - \frac{1}{2} \rho \|\Delta u\|^2 + M \|\Delta u\| + \|F(u_0)\| \geq 0. \quad (46)$$

Приравняв  $T(u)$  к 0, найдем точки локального экстремума  $\Delta_{min}$  и  $\Delta_{max}$  функции  $T(u)$ . Так как

$$T'(\|\Delta u\|) \equiv \frac{1}{2} L \|\Delta u\|^2 - \rho \|\Delta u\| + M = 0,$$

то при условии  $\rho^2 > 2LM$  это уравнение имеет два корня:

$$\Delta_{max} = \frac{1}{L}(\rho - \sqrt{\rho^2 - 2LM}), \quad (47)$$

$$\Delta_{min} = \frac{1}{L}(\rho + \sqrt{\rho^2 - 2LM}). \quad (48)$$

Если  $T(\Delta_{min}) < 0$ , то существует корень  $r$  уравнения (43), который в условиях теоремы расположен в интервале  $0 < r \leq \Delta_{min}$  и ограничивает при  $\|F(u_0)\|$ , стремящемся к 0, норму  $\Delta u$  из неравенства (46), т. е.  $\|\Delta u\| \leq r$ , где  $r$  – меньший положительный корень уравнения (43).

Установим скорость сходимости МВП. Из двух неравенств (19)

$$\text{и } \|F(u_{n+1}) - F(u_n) - F'(u_n)\Delta u_n - \frac{1}{2}F''(u_n)\Delta^2 u_n\| \leq \frac{1}{6}L\|\Delta u_n\|^3$$

следует, что

$$\|F(u_{n+1})\| \leq \frac{1}{6}L\|\Delta u_n\|^3$$

и

$$\|\Delta u_n\| \leq \frac{M}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho}\right)^2 + 2\frac{\|F(u_n)\|}{\rho}}. \quad (49)$$

Значит, при выполнении условий теоремы МВП сходится к корню уравнения (2) с достаточно хорошим приближением по норме  $\|F(u_0)\|$ . Как и в методе Ньютона, проблеме сходимости с удаленных от корня приближений решим параметрическим методом второго порядка, который назовем  $M_\lambda$ . Идея метода в том, что поправка  $\Delta u$  находится из уравнения

$$\frac{1}{2}F''(u_n)\Delta^2 u + \lambda(F'(u_n)\Delta u + F(u_n)) = 0, \lambda \in (0; 1]. \quad (50)$$

Тогда  $s$ -грань оператора  $\lambda F'(u_n)$  с уменьшением  $\lambda$  может быть сколь угодно приближена к 0, что позволит вместо (41) решать уравнение (9.32). Снижение же нормы  $\lambda F(u_n)$  гарантирует генерацию сходящегося в области существования корня процесса (40–50), т. к. оценка нормы приращения  $\Delta u$  из уравнения (9.50) при  $\lambda \rightarrow 0$  имеет вид:

$$\|\Delta u_n\| \leq \frac{\lambda M}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\lambda M}{\rho}\right)^2 + 2\lambda \frac{\|F(u_n)\|}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{2}{\rho} \|F(u_n)\| \lambda^{1/2}}. \quad (51)$$

### Алгоритм решения нелинейной системы алгебраических уравнений методом второго порядка

Ранее было отмечено, что метод второго порядка решения операторных уравнений вида (2) применяется тогда, когда сильная производная отображения  $F$  необратима на одном из итерационных приближений, т. е. когда определить корень уравнения методом Ньютона или его модификациями не представляется возможным.

Как и в других методах [4; 5], где поправка к приближению находится явно, основным этапом МВП является поиск приращения аргумента  $\Delta u$  по заданному приращению образа  $F(u_n)$ .

В методе второго порядка для этого требуется решить квадратное операторное уравнение

$$\frac{1}{2} F''(u_n) \Delta^2 u + F'(u_n) \Delta u + F(u_n) = 0. \quad (52)$$

Так как корень НСАУ по теории должен иметь меньшую норму, то поиск итерационным методом поправки  $\Delta u$  (в алгоритме решения обозначим ее  $X$ ) будем искать с начального приближения  $X = 0$ .

Подпрограмму решения квадратного операторного уравнения (52) МПП назовем *RKU* (рисунок 3), а входные данные к ней обозначим

$$A = \frac{1}{2} F''(u_n), B = F'(u_n), C = F(u_n).$$

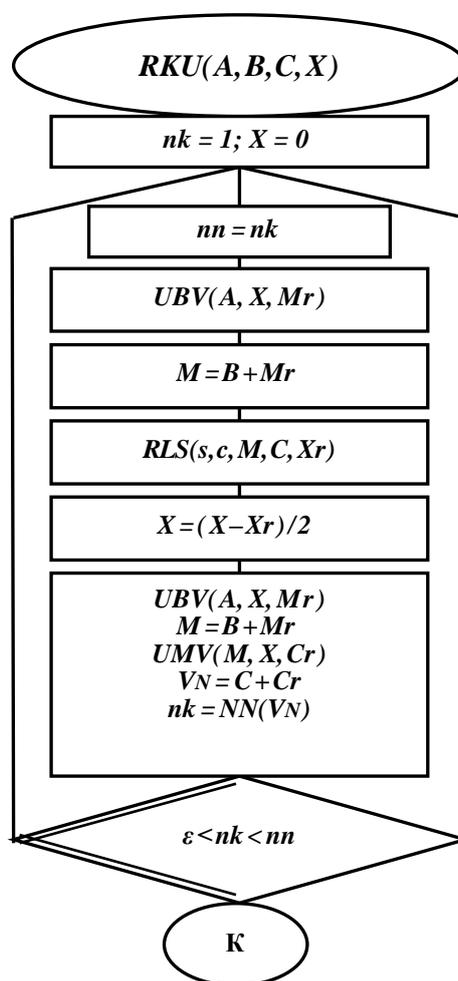


Рисунок 3

Для исполнения алгоритма данной процедуры требуется ввести две операции с массивами: умножение квадратной матрицы на вектор (*UMV*) и умножение кубической матрицы на вектор (*UBV*). В результате произведения исходных массивов этих подпрограмм получим вектор  $V$  и матрицу  $M$  соответственно (рисунок 4).

В *RKU* так же используется подпрограмма решения линейной системы *RLS* (раздел 2.6 [2]) и функция вычисления нормы невязки решения квадратного уравнения на приближении  $X$ . Уточнение поправки  $\Delta u = X$  в итерационном методе второго порядка

осуществляется до тех пор, пока норма невязки  $nk$  при решении квадратного уравнения уменьшается и превосходит  $\varepsilon$ .

Алгоритмы подпрограмм  $VVN$  (вычисление вектора невязки НСАУ) и  $YAC$  (взятие первой производной Фреше оператора НСАУ), используемые в МВП, описаны в [2] (раздел 8.5). Подпрограмма  $ITP$  находит оптимальный параметр  $\lambda$  итерационного процесса.

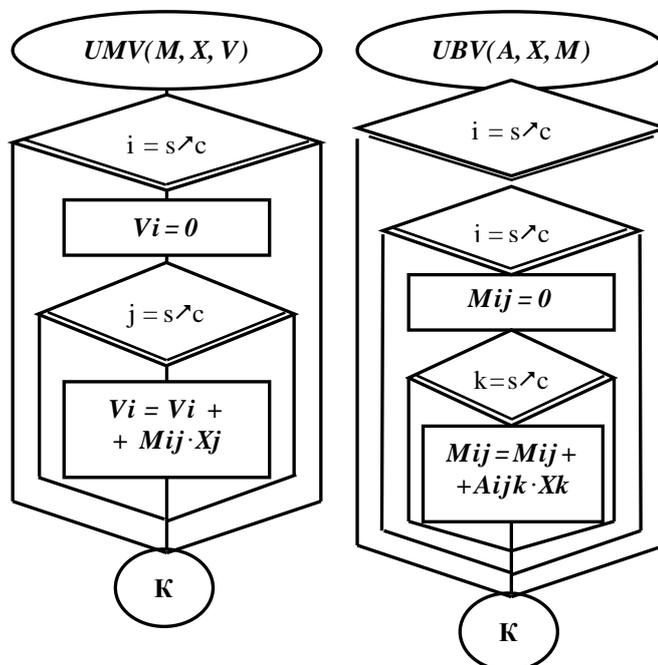


Рисунок 4

Сейчас перейдем к описанию алгоритма основного модуля программы решения нелинейной системы методом второго порядка  $MVP$ .

После ввода нулевого приближения  $U$  и вычисления вектора  $VN$  невязки найдем при помощи функции  $NN$  норму вектора невязки в  $R^n$  и сравним ее с заданной точностью. Если норма окажется меньше  $\varepsilon$ , то конструкция повторений с предусловием опускается.

Использование данного критерия Останова связано с упрощением прочтения алгоритма (более совершенные условия завершения вычислительного процесса приводятся в [2] в разделах 8.3 и 8.4). В случае продолжения итерационного процесса МВП решения НСАУ находятся приближения якобиана  $B = Y$ , гессиана  $G$  и билинейного оператора  $A = G/2$ .

Полученные массивы являются коэффициентами квадратного операторного уравнения (52), корень которого есть вектор поправки к текущему приближению. Чтобы придать целостность изложению метода второго порядка решения НСАУ, приведем описание подпрограммы  $GES(U, Y, G)$  вычисления второй сильной производной отображения на элементе  $U$ .

На рисунке 5 изображена объект-схема алгоритма построения гессиана  $G$  отображения  $F$  на элементе  $u_n$ , заданном в виде вектора  $U$  размерности  $z = c - s + 1$ , где  $s$  для нелинейных алгебраических систем обычно равно 1. Опишем алгоритм вычисления элементов  $k^{ro}$  листа гессиана НСАУ.

Входными данными в процедуру  $GES$  являются вектор  $U$  и основной якобиан  $Y$ . В счетчике изменим  $k^{y_{10}}$  координату вектора  $U$ , а затем найдем вектор невязки  $VNP$ , соответствующий измененному вектору  $U$ .

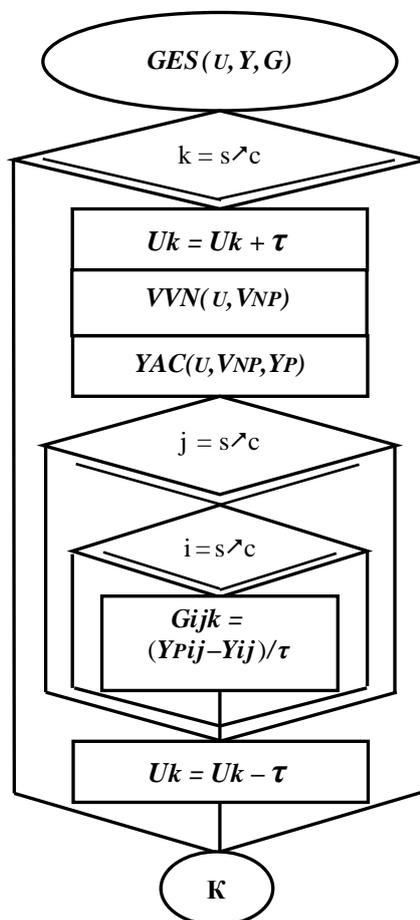


Рисунок 5

По полученным векторам приближения  $U$  и невязки  $VNP$  построим еще один якобиан  $Y_P$ . Исходный и новый якобианы входят в формулу вычисления элементов  $k^{T0}$  листа гессиана

$$G_{ijk} = (Y_{Pij} - Y_{ij})/\tau.$$

С помощью поправки  $Du$  и демпфирующего множителя  $\lambda$  находится следующее приближение. По этому приближению определяется вектор невязки  $VN$ , норма  $VN$  и проверяется выполнение условия критерия Останова (рисунок 6). Результатом исполнения алгоритма является вычисление приближения  $U$  корня  $U^*$  системы (16) с нормой невязки в  $R^n$  меньше  $\varepsilon$ .

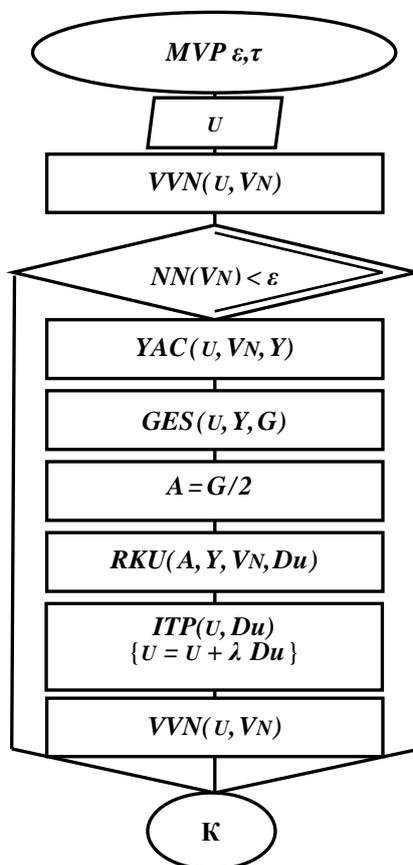


Рисунок 6

Сейчас тестовую нелинейную систему алгебраических уравнений из раздела 7.2 [2] можно решить с любого приближения (например,  $(-1; 0)$ ), обращающего определитель якобиана в нуль.

Если с этих приближений решать систему (19) методом Ньютона, то здесь даже использование регуляризации линейного оператора не приведет к сходимости процесса.

Другими словами, для нахождения ньютоновской поправки гиперплоскость, образованная производной Фреше, наклоняется от точки касания в неопределенном направлении. Очевидно, что (в отличие от МВП) точно определить оптимальное направление антиградиентного спуска методом Ньютона в данном случае маловероятно.

### Заключение

Локализация методами полиномиального анализа изолированного корня функционального уравнения (5) в определенной окрестности  $Q_r = \|u - u_0\| \leq r$  приближения из всюду плотного множества пространства решений позволяет исследователям, при достаточно малом  $r$ , использовать его в качестве искомого корня, не нарушая методологию функционального анализа. В данной работе локализация корня осуществляется методом второго порядка.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Канторович, Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 742 с.
2. Морозов, В. В. Прикладной анализ и программирование : пособие / В. В. Морозов. – Брест : БрГУ, 2012. – 246 с.
3. Красносельский, М. А. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайнко, П. П. Забрейко. – М. : Наука, 1969. – 456 с.
4. Антоневиц, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневиц, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2006. – 430 с.
5. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1989. – 624 с.

*Рукапіс наступіў у рэдакцыю 19.10.2020*

УДК 513.82

**А. А. Юдов<sup>1</sup>, Е. В. Кисилюк<sup>2</sup>**<sup>1</sup>канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии  
и математического моделирования

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

<sup>2</sup>магистрант физико-математического факультета

Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: [modelmath@brsu.brest.by](mailto:modelmath@brsu.brest.by)**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ  
СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ  
ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА  ${}^1R_6$** 

Целью исследования является нахождение образов стационарности для подгрупп Ли группы Ли вращений пространства  ${}^1R_6$ , классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства  ${}^1R_6$  и всех их редуктивных дополнений, вычисление тензоров кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей, найденных редуктивных однородных пространств.

YUDOV, A. A, KISILYUK Ye. V.

**DIFFERENTIAL GEOMETRY OF HOMOGENEOUS SPACES  
WITH STRUCTURE GROUP – THE LIE GROUP OF MOTIONS OF THE SPACE  ${}^1R_6$** 

The aim of the study is to find the images of stationarity for the Lie subgroups of the Lie group of rotations of the space  ${}^1R_6$ , the classification of homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of the space  ${}^1R_6$  and all their reductive additions, calculation of curvature and torsion tensors of invariant affine connections, found reductive homogeneous spaces.

**Введение**

Геометрия однородных пространств является объектом исследования многих отечественных и зарубежных ученых уже на протяжении более ста лет. В этой области работали Э. Картан, Г. Вейль, П. К. Рашевский, К. Номидзу, Ш. Кобаяси, В. И. Ведерников, А. С. Феденко, И. В. Белько, В. Балащенко, С. Г. Кононов, А. А. Юдов и др. Среди однородных пространств особенно важные применения находит теория редуктивных однородных пространств с различными структурными группами, в частности с группами Ли движений (псевдо)евклидовых пространств различной размерности.

В работе исследуются однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений шестимерного пространства Лоренца.

**1. Группа Ли  $G$  движений пространства  ${}^1R_6$  и её алгебра Ли**

Рассмотрим пространство  ${}^1R_6$  – шестимерное пространство Лоренца.

Выберем в пространстве  ${}^1R_6$  репер  $\mathcal{E} = (0, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ , причем  $e_1^2 = -1, e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = e_5^2 = e_6^2 = 1, (e_i, e_j) = 0, i \neq j$ .

Произвольную точку  $M$  пространства  ${}^1R_6$  в репере  $\mathcal{E}$  зададим координатами  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ , которые будем записывать в виде  $M(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \equiv (X)_{\mathcal{E}}$ .

На множестве реперов пространства  ${}^1R_6$  действует группа Ли  $G$  движений, которая при заданном репере  $\mathcal{E}$  изоморфна группе матриц вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & & & & & & \\ t_2 & & & & & & \\ t_3 & & & A & & & \\ t_4 & & & & & & \\ t_5 & & & & & & \\ t_6 & & & & & & \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & A \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $t = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T$ ,  $A - (6 \times 6)$ - матрица, причем  $A^T {}^1E_6 A = {}^1E_6$ , где знак  $T$  означает транспонирование, а матрица  ${}^1E_6$  является диагональной матрицей, в левом верхнем углу которой стоит  $-1$ , а остальные элементы на диагонали равны 1.

При движении, заданном матрицей (1), репер  $\mathcal{E}$  переходит в репер  $\mathcal{E}' = (0, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6') = (0', e')$ , где  $e' = eA, 0'(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = (T)_\mathcal{E}$ , а точка  $M$  переходит в точку  $M'$ , имеющую в репере  $\mathcal{E}'$  такие же координаты, какие точка  $M$  имеет в репере  $\mathcal{E}$ .

Пусть  $M'(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (X)_{\mathcal{E}'}, M(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (X')_\mathcal{E}$ . Тогда получим:  $\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = e(T) + e'(X) = e(T) = eA(X) = e((T) + A(X))$ . С другой стороны,  $\overline{OM'} = e(X')$ . Отсюда  $(X') = (T) + A(X)$ , т. е.

$$(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)^T + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$$

или

$$(1, x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5, x'_6)^T = \bar{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T. \quad (2)$$

Таким образом в пространстве  $R_5$  действует слева группа Ли  $G$ , которая изоморфна группе матриц вида (1), действующих на точки пространства  $R_5$  по формуле (2). Алгебру Ли  $\bar{G}$  этой группы можно отождествить с алгеброй Ли матриц вида:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & & & & & & \\ \tau_2 & & & & & & \\ \tau_3 & & & B & & & \\ \tau_4 & & & & & & \\ \tau_5 & & & & & & \\ \tau_6 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \tau & B \end{pmatrix} \right\},$$

где  $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6)^T$ , а матрица  $B$  удовлетворяет условию:  $B^T {}^1E_6 + {}^1E_6 B = 0$ .

Группа Ли  $H$  стационарности точки  $O$  и алгебра Ли  $\bar{H}$  этой группы будут задаваться матрицами вида:

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & A & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right\},$$

$$\bar{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & B & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right\}.$$

Группа Ли  $G$  является полупрямым произведением группы Ли  $H$  стационарности точки и абелевой группы  $T_6$  параллельных переносов:  $G = H \otimes T_6$ .

Алгебра Ли  $\bar{G}$  является полупрямой суммой алгебры Ли  $\bar{H}$  группы Ли  $H$  и коммутативной алгебры Ли  $\tau_6$  группы Ли:  $\bar{G} = \bar{H} \otimes \tau_6$ .

Рассмотрим в алгебре Ли  $\bar{G}$  базис:  $i_1, i_2, \dots, i_{21}$ . Соответственно

$$\begin{aligned} i_1 &= E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{61}, i_6 = E_{71}, i_7 = E_{23} + E_{32}, \\ i_8 &= E_{24} + E_{42}, i_9 = E_{25} + E_{52}, i_{10} = E_{26} + E_{62}, i_{11} = E_{27} + E_{72}, i_{12} = \\ &= E_{34} - E_{43}, i_{13} = E_{35} - E_{53}, i_{14} = E_{36} - E_{63}, i_{15} = \\ &= E_{37} - E_{73}, i_{16} = E_{45} - E_{54}, \\ i_{17} &= E_{46} - E_{64}, i_{18} = E_{47} - E_{74}, i_{19} = E_{56} - E_{65}, i_{20} = E_{57} - E_{75}, i_{21} = \\ &= E_{67} - E_{76}. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $E_{\alpha\beta}$  —  $(7 \times 7)$  — матрицы, у которых в  $i$ -ой строке,  $j$ -ом столбце стоит 1, а остальные элементы — нули. При этом вектора  $i_1, \dots, i_6$  задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора  $i_7, \dots, i_{21}$  задают базис алгебры Ли  $\bar{H}$ .

В алгебре Ли  $\bar{G}$ , определена операция коммутирования по правилу:

$$[A, B] = AB - BA,$$

где  $A, B \in \bar{G}$ .

Проводя вычисления для коммутаторов базисных векторов (3), получим следующие формулы:

$[i_7, i_8] = i_{12}$	$[i_8, i_{10}] = i_{17}$	$[i_{16}, i_{19}] = i_{17}$	$[i_9, i_{18}] = 0$
$[i_7, i_9] = i_{13}$	$[i_8, i_{17}] = i_{10}$	$[i_{10}, i_{14}] = -i_7$	$[i_9, i_{20}] = i_{11}$
$[i_7, i_{12}] = i_8$	$[i_8, i_{14}] = 0$	$[i_{10}, i_{17}] = -i_8$	$[i_9, i_{21}] = 0$
$[i_7, i_{13}] = i_9$	$[i_8, i_{19}] = 0$	$[i_{10}, i_{18}] = -i_9$	$[i_{12}, i_{11}] = 0$
$[i_7, i_{16}] = 0$	$[i_9, i_{10}] = i_{19}$	$[i_{14}, i_{17}] = -i_{12}$	$[i_{12}, i_{15}] = -i_{18}$
$[i_8, i_9] = i_{16}$	$[i_9, i_{14}] = 0$	$[i_{14}, i_{19}] = -i_{13}$	$[i_{12}, i_{18}] = i_{15}$
$[i_8, i_{12}] = -i_7$	$[i_9, i_{17}] = 0$	$[i_{17}, i_{19}] = -i_{16}$	$[i_{12}, i_{20}] = 0$
$[i_8, i_{13}] = 0$	$[i_9, i_{19}] = i_{10}$	$[i_7, i_{11}] = i_{15}$	$[i_{12}, i_{21}] = 0$
$[i_8, i_{16}] = i_9$	$[i_{12}, i_{10}] = 0$	$[i_7, i_{15}] = i_{11}$	$[i_{13}, i_{11}] = 0$
$[i_9, i_{12}] = 0$	$[i_{12}, i_{14}] = -i_{17}$	$[i_7, i_{18}] = 0$	$[i_{13}, i_{15}] = -i_{20}$
$[i_9, i_{13}] = -i_7$	$[i_{12}, i_{17}] = i_{14}$	$[i_7, i_{20}] = 0$	$[i_{13}, i_{18}] = 0$
$[i_9, i_{16}] = -i_8$	$[i_{12}, i_{19}] = 0$	$[i_7, i_{21}] = 0$	$[i_{13}, i_{20}] = i_{15}$
$[i_{12}, i_{13}] = -i_{16}$	$[i_{13}, i_{10}] = 0$	$[i_8, i_{15}] = 0$	$[i_{13}, i_{21}] = 0$
$[i_{12}, i_{16}] = i_{13}$	$[i_{13}, i_{14}] = -i_{19}$	$[i_8, i_{11}] = i_{18}$	$[i_{16}, i_{11}] = 0$
$[i_{13}, i_{16}] = -i_{12}$	$[i_{13}, i_{17}] = 0$	$[i_8, i_{18}] = i_{11}$	$[i_{16}, i_{15}] = 0$
$[i_7, i_{10}] = i_{14}$	$[i_{13}, i_{19}] = i_{14}$	$[i_8, i_{20}] = 0$	$[i_{16}, i_{18}] = -i_{20}$
$[i_7, i_{14}] = i_{10}$	$[i_{16}, i_{10}] = 0$	$[i_8, i_{21}] = 0$	$[i_{16}, i_{20}] = i_{18}$
$[i_7, i_{17}] = 0$	$[i_{16}, i_{14}] = 0$	$[i_9, i_{11}] = i_{20}$	$[i_{16}, i_{21}] = 0$
$[i_7, i_{19}] = 0$	$[i_{16}, i_{17}] = -i_{19}$	$[i_9, i_{15}] = 0$	$[i_{10}, i_{11}] = i_{21}$

$$\begin{array}{llll}
[i_{10}, i_{15}] = 0 & [i_{14}, i_{21}] = i_{15} & [i_{19}, i_{18}] = 0 & [i_{15}, i_{20}] = -i_{13} \\
[i_{10}, i_{18}] = 0 & [i_{17}, i_{11}] = 0 & [i_{19}, i_{20}] = -i_{21} & [i_{15}, i_{21}] = -i_{14} \\
[i_{10}, i_{20}] = 0 & [i_{17}, i_{15}] = 0 & [i_{11}, i_{15}] = -i_7 & [i_{18}, i_{20}] = -i_{16} \\
[i_{10}, i_{21}] = i_{11} & [i_{17}, i_{18}] = -i_{21} & [i_{19}, i_{21}] = i_{20} & [i_{18}, i_{21}] = -i_{17} \\
[i_{14}, i_{11}] = 0 & [i_{17}, i_{20}] = 0 & [i_{11}, i_{18}] = -i_8 & [i_{20}, i_{21}] = -i_{19} \\
[i_{14}, i_{15}] = -i_{21} & [i_{17}, i_{21}] = i_{18} & [i_{11}, i_{20}] = -i_9 & \\
[i_{14}, i_{18}] = 0 & [i_{19}, i_{11}] = 0 & [i_{11}, i_{21}] = -i_{10} & \\
[i_{14}, i_{20}] = 0 & [i_{19}, i_{15}] = 0 & [i_{15}, i_{18}] = -i_{12} & 
\end{array}$$

Подгруппы Ли группы Ли вращений пространства  ${}^1R_6$  классифицируются в работе [50].

Всего 63 подгруппы Ли  $G_1 \dots G_{63}$  группы Ли вращений пространства  ${}^1R_6$ , которые в базисе задаются своими алгебрами Ли  $\overline{G}_1 \dots \overline{G}_{63}$  в виде:

$$\begin{array}{l}
\overline{G}_1 = \{i_{21}\}, \\
\overline{G}_2 = \{i_7\}, \\
\overline{G}_3 = \{i_{16} + \mu i_{21}\}, \\
\overline{G}_4 = \{i_{16} + \mu i_{21} + \lambda i_7\}, \\
\overline{G}_5 = \{i_{16} + \mu i_7\}, \\
\overline{G}_6 = \{i_{13} + i_7\}, \\
\overline{G}_7 = \{i_{14} + i_9 + \mu i_{21}\}, \\
\overline{G}_8 = \{i_{21}, i_{16}\}, \\
\overline{G}_9 = \{i_{16} + \mu i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G}_{10} = \{i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G}_{11} = \{i_{16} + \mu i_7, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{12} = \{i_{13} + i_9, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{13} = \{i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G}_{14} = \{i_{13} + i_9 + \mu i_{21}, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G}_{15} = \{i_{13} + i_9, i_7\}, \\
\overline{G}_{16} = \{i_{20}, i_{18}, i_{16}\}, \\
\overline{G}_{17} = \{i_{21} + i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}\}, \\
\overline{G}_{18} = \{i_{21} + 2i_{16}, \sqrt{3}i_{14} + i_{20} + i_{17}, \sqrt{3}i_{15} - i_{18} + i_{19}\}, \\
\overline{G}_{19} = \{i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G}_{20} = \{i_{12} + i_{18}, i_{14} + i_{10}, i_7\}, \\
\overline{G}_{21} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{22} = \{i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{23} = \{i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G}_{24} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9\}, \\
\overline{G}_{25} = \{i_{13} + i_9, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G}_{26} = \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{14}\}, \\
\overline{G}_{27} = \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G}_{28} = \{i_{21}, i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}\}, \\
\overline{G}_{29} = \{i_{12}, i_8, i_7, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{30} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_7\}, \\
\overline{G}_{31} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{21}\}, \\
\overline{G}_{32} = \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\},
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\overline{G_{33}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G_{34}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{14} + i_{10}, i_7\}, \\
\overline{G_{35}} &= \{i_{21}, i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_7\}, \\
\overline{G_{36}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{37}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{38}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}\}, \\
\overline{G_{39}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G_{40}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_7\}, \\
\overline{G_{41}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}\}, \\
\overline{G_{42}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G_{43}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18} + i_{15}, i_{17} + i_{14}, i_{16} + i_{13}\}, \\
\overline{G_{44}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{18}, i_{19}, i_{17}, i_{16}\}, \\
\overline{G_{45}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{46}} &= \{i_{17}, i_{14}, i_{10}, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{47}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{11}, i_{10}, i_9\}, \\
\overline{G_{48}} &= \{i_{21}, i_{16}, i_{20}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_7\}, \\
\overline{G_{49}} &= \{i_{17}, i_{14}, i_{10}, i_{12}, i_8, i_7, i_{20}\}, \\
\overline{G_{50}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G_{51}} &= \{i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{52}} &= \{i_{21} + i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_8 + i_{12}\}, \\
\overline{G_{53}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{54}} &= \{i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{20}, i_{18}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{55}} &= \{i_{21} + i_{16}, i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{11} + i_{15}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{56}} &= \{i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}\}, \\
\overline{G_{57}} &= \{i_{20} - i_{17}, i_{18} + i_{19}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_{21}, i_{16}, i_7\}, \\
\overline{G_{58}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18}, i_{15}, i_{17}, i_{14}, i_{16}, i_{13}, i_{12}\}, \\
\overline{G_{59}} &= \{i_{19}, i_{17}, i_{14}, i_{16}, i_{13}, i_{10}, i_9, i_{12}, i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{60}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18}, i_{17}, i_{16}, i_{11}, i_{10}, i_9, i_8\}, \\
\overline{G_{61}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{18}, i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8\}, \\
\overline{G_{62}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{18}, i_{19}, i_{17}, i_{16}, i_{15} + i_{11}, i_{14} + i_{10}, i_{13} + i_9, i_{12} + i_8, i_7\}, \\
\overline{G_{63}} &= \{i_{21}, i_{20}, i_{19}, i_{18}, i_{17}, i_{16}, i_{15}, i_{14}, i_{13}, i_{12}, i_{11}, i_{10}, i_9, i_8, i_7\},
\end{aligned}$$

причем группа Ли  $G_{63}$  совпадает с группой Ли всех вращений  $H$ .

Рассматриваются однопараметрические подгруппы Ли  $G_i$  группы Ли  $H$  вращений шестимерного пространства Лоренца, соответствующие алгебрам Ли с операторами соответственно:

$$i_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} i_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} i_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
i_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{15} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{16} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{17} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{18} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{19} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
i_{20} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & i_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

## 2. Образы стационарности подгрупп Ли группы Ли движений пространства ${}^1R_6$

**Определение 1.** *Образом стационарности подгруппы  $K$  группы  $G$  называется совокупность  $D$  фигур пространства  ${}^1R_6$  и ему соответствующего векторного пространства  ${}^1E_6$  таких, что группе  $K$  принадлежат те и только те преобразования, при которых каждая из фигур совокупности  $D$  инвариантна.*

**Определение 2.** *Упорядоченная совокупность фигур пространства  ${}^1R_6$  называется *флагом*, если все фигуры этой совокупности являются  $k$ -плоскостями*

( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) пространства  ${}^1R_6$ , причем каждая последующая плоскость содержится в предыдущей.

Зафиксируем вектор  $\bar{e}_1$ . Рассмотрим вектор  $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$  и потребуем, чтобы он был инвариантен. При этом получим следующий результат:

$$(1, 0, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \omega \\ \alpha & 0 & \varepsilon & \rho & \varphi & \psi \\ \beta & -\varepsilon & 0 & k & p & q \\ \gamma & -\rho & -k & 0 & s & t \\ \delta & -\varphi & -p & -s & 0 & l \\ \omega & -\varphi & -q & -t & -l & 0 \end{pmatrix} = (0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \omega) \Rightarrow (\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0, \omega = 0).$$

Этими условиями выделяется алгебра Ли  $\overline{G_{58}} = \{i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{16}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$ . Таким образом, группа Ли  $G_{58}$  имеет в качестве образа стационарности флаг  $\{R_0, {}^1R_1\}$ .

Рассматривая аналогично другие прямые и плоскости, получаем следующие теоремы.

**Теорема 1.** Образом стационарности группы  $G_{60}$  является флаг  $\{R_0, R_1\}$ .

**Теорема 2.** Образом стационарности группы  $G_{62}$  является флаг  $\{R_0, R_1^1\}$ .

**Теорема 3.** Образом стационарности группы  $G_{49}$  является флаг  $\{R_0, R_2\}$ .

**Теорема 4.** Образом стационарности группы  $G_{48}$  является флаг  $\{R_0, {}^1R_2\}$ .

**Теорема 5.** Образом стационарности группы  $G_{54}$  является флаг  $\{R_0, R_2^1\}$ .

**Теорема 6.** Образом стационарности группы  $G_{45}$  является флаг  $\{R_0, R_3\}$  или  $\{R_0, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 7.** Образом стационарности группы  $G_{53}$  является флаг  $\{R_0, R_3^1\}$ .

**Теорема 8.** Образом стационарности группы  $G_{44}$  является флаг  $\{R_0, R_1^1, {}^1R_2\}$ , или  $\{R_0, {}^1R_1, {}^1R_2\}$ , или  $\{R_0, R_1^{o1}, {}^1R_2\}$ .

**Теорема 9.** Образом стационарности группы  $G_{50}$  является флаг  $\{R_0, R_1^{o1}, R_2^1\}$ .

**Теорема 10.** Образом стационарности группы  $\{i_7, i_8 + i_{12}, i_9 + i_{13}, i_{11} + i_{15}, i_{16}, i_{18}, i_{20}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_2^1\}$ .

**Теорема 11.** Образом стационарности группы  $G_{46}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_2\}$ .

**Теорема 12.** Образом стационарности группы  $G_{29}$  является флаг  $\{R_0, R_2, R_3\}$  или  $\{R_0, R_1, R_3\}$ .

**Теорема 13.** Образом стационарности группы  $\{i_7, i_8, i_{12}, i_{20}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_3\}$ .

**Теорема 14.** Образом стационарности группы  $\{i_7, i_8, i_{12}, i_{19}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_3\}$ .

**Теорема 15.** Образом стационарности группы  $G_{19}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ .

**Теорема 16.** Образом стационарности группы  $\{i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, R_2^1, R_3\}$ .

**Теорема 17.** Образом стационарности группы  $\{i_8, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 18.** Образом стационарности группы  $\{i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 19.** Образом стационарности группы  $\{i_7, i_8 + i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1^1, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 20.** Образом стационарности группы  $\{i_8 + i_{12}, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1^{o1}, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 21.** Образом стационарности группы  $\{i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_2, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 22.** Образом стационарности группы  $\{i_7, i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, {}^1R_2, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 23.** Образом стационарности группы  $\{i_{19}, i_{20}, i_{21}\}$  является флаг  $\{R_0, R_1, {}^1R_2, {}^1R_3\}$ .

**Теорема 24.** Образом стационарности группы  $G_{36}$  является флаг  $\{R_0, R_2, R_3^1\}$ .

**Теорема 25.** Образом стационарности группы  $G_{41}$  является флаг  $\{R_0, R_1^{o1}, R_3^1\}$ .

**Теорема 26.** Образом стационарности группы  $G_{39}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_3^1\}$  или  $\{R_0, R_1, R_2^1, R_3^1\}$ .

**Теорема 27.** Образом стационарности группы  $G_{33}$  является флаг  $\{R_0, R_1, R_2, R_3^1\}$ .

**Теорема 28.** Образом стационарности группы  $G_{40}$  является флаг  $\{R_0, R_2^1, R_3^1\}$ .

**Теорема 29.** Образом стационарности группы  $G_{38}$  является флаг  $\{R_0, R_1^{o1}, R_2^1, R_3^1\}$ .

Используя геометрические характеристики подгрупп Ли, получаем цепочки по включению подгрупп Ли группы Ли вращений пространства  ${}^1R_6$ .

Цепочки

$H \supset G_{62}, G_{61}, G_{60}, G_{59}, G_{58}, G_{57}, G_{56}, G_{55}, G_{54}, G_{53}, G_{52}, G_{51}, G_{50}, G_{49}, G_{48}, G_{47},$   
 $G_{46}, G_{45}, G_{44}, G_{43}, G_{42}, G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{36}, G_{35}, G_{34}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30},$   
 $G_{29}, G_{28}, G_{27}, G_{26}, G_{25}, G_{24}, G_{23}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{19}, G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_{15}, G_{14}, G_{13},$   
 $G_{12}, G_{11}, G_{10}, G_9, G_8, G_7, G_6, G_5, G_4, G_3, G_2, G_1;$   
 $G_{62} \supset G_{61}, G_{57}, G_{56}, G_{55}, G_{54}, G_{53}, G_{52}, G_{51}, G_{50}, G_{44}, G_{42}, G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37},$   
 $G_{36}, G_{35}, G_{34}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{28}, G_{27}, G_{25}, G_{24}, G_{23}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{17}, G_{16}, G_{15},$   
 $G_{13}, G_{12}, G_{10}, G_8, G_6, G_2, G_1;$   
 $G_{61} \supset G_{56}, G_{52}, G_{50}, G_{44}, G_{42}, G_{41}, G_{38}, G_{32}, G_{31}, G_{28}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{17}, G_{16}, G_{13},$   
 $G_{12}, G_8, G_6, G_1;$   
 $G_{60} \supset G_{47}, G_{44}, G_{28}, G_{17}, G_{16}, G_8, G_1;$   
 $G_{59} \supset G_{46}, G_{20}, G_{19}, G_{15}, G_{13}, G_{10}, G_6, G_2;$   
 $G_{58} \supset G_{44}, G_{43}, G_{28}, G_{26}, G_{18}, G_{17}, G_{16}, G_8, G_1;$   
 $G_{57} \supset G_{56}, G_{55}, G_{53}, G_{52}, G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{36}, G_{35}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{28},$   
 $G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{17}, G_{15}, G_{13}, G_{12}, G_{10}, G_8, G_6, G_2, G_1;$   
 $G_{56} \supset G_{52}, G_{41}, G_{38}, G_{32}, G_{31}, G_{28}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{17}, G_{13}, G_{12}, G_8, G_6, G_1;$   
 $G_{55} \supset G_{37}, G_{32}, G_{30}, G_{24}, G_{20}, G_{17}, G_{15}, G_{13}, G_6, G_2;$   
 $G_{54} \supset G_{50}, G_{51}, G_{42}, G_{37}, G_{32}, G_{30}, G_{27}, G_{24}, G_{20}, G_{16}, G_{15}, G_{13}, G_{10}, G_6, G_2;$   
 $G_{53} \supset G_{41}, G_{40}, G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{36}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{25}, G_{24}, G_{23}, G_{21}, G_{20}, G_{15},$   
 $G_{13}, G_{12}, G_{10}, G_8, G_6, G_2, G_1;$   
 $G_{52} \supset G_{32}, G_{24}, G_{17}, G_{13}, G_6;$   
 $G_{51} \supset G_{42}, G_{27}, G_{16}, G_{15}, G_{13}, G_{10}, G_6, G_2;$   
 $G_{50} \supset G_{42}, G_{16}, G_{13}, G_6;$   
 $G_{49} \supset G_{46}, G_{19}, G_2;$   
 $G_{48} \supset G_{44}, G_{35}, G_{28}, G_{27}, G_{23}, G_{17}, G_{16}, G_{10}, G_8, G_2, G_1;$   
 $G_{47} \supset G_1;$

$$\begin{aligned}
G_{46} &\supset G_{19}, G_2; \\
G_{45} &\supset G_{29}, G_{19}, G_2, G_1; \\
G_{44} &\supset G_{28}, G_{17}, G_{16}, G_8, G_1; \\
G_{43} &\supset G_1; \\
G_{42} &\supset G_{16}, G_{13}, G_6; \\
G_{41} &\supset G_{38}, G_{32}, G_{31}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{13}, G_{12}, G_8, G_6, G_1; \\
G_{40} &\supset G_{39}, G_{38}, G_{37}, G_{33}, G_{32}, G_{31}, G_{30}, G_{25}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{20}, G_{15}, G_{13}, G_{12}, G_6, \\
&G_2, G_1; \\
G_{39} &\supset G_{33}, G_{31}, G_{30}, G_{25}, G_{24}, G_{21}, G_{15}, G_{12}, G_6, G_2; \\
G_{38} &\supset G_{32}, G_{31}, G_{24}, G_{22}, G_{21}, G_{13}, G_{12}, G_6, G_1; \\
G_{37} &\supset G_{32}, G_{30}, G_{24}, G_{20}, G_{15}, G_{13}, G_6, G_2; \\
G_{36} &\supset G_{33}, G_{23}, G_{21}, G_{10}, G_2, G_1; \\
G_{35} &\supset G_{28}, G_{23}, G_{17}, G_{10}, G_8, G_2, G_1; \\
G_{34} &\supset G_{27}, G_{16}, G_{10}, G_2; \\
G_{33} &\supset G_{21}, G_2, G_1; \\
G_{32} &\supset G_{24}, G_{13}, G_6; \\
G_{31} &\supset G_{24}, G_{21}, G_{12}, G_6, G_1; \\
G_{30} &\supset G_{24}, G_{15}, G_6, G_2; \\
G_{29} &\supset G_{19}, G_2, G_1; \\
G_{28} &\supset G_{17}, G_8; \\
G_{27} &\supset G_{16}, G_{10}, G_2; \\
G_{26} &\supset G_{16}; \\
G_{25} &\supset G_{15}, G_{12}, G_6, G_2, G_1; \\
G_{24} &\supset G_6; \\
G_{23} &\supset G_{10}, G_2; \\
G_{22} &\supset G_{13}, G_{12}, G_6, G_1; \\
G_{21} &\supset G_1; \\
G_{20} &\supset G_2; \\
G_{19} &\supset G_2; \\
G_{15} &\supset G_6, G_2; \\
G_{13} &\supset G_6; \\
G_{12} &\supset G_6, G_1; \\
G_{11} &\supset G_5, G_1; \\
G_{10} &\supset G_2; \\
G_9 &\supset G_4, G_3, G_2; \\
G_8 &\supset G_1.
\end{aligned}$$

Пусть  $G$  – группа Ли и  $H_1, H_2$  ее подгруппы Ли, причем  $H_1 \subset H_2$

**Определение 3.** Каноническим морфизмом однородного пространства  $G/H_1$  в однородное пространство  $G/H_2$  называется морфизм  $f$  вида:

$$f : G / H_1 \rightarrow G / H_2 : aH_1 \rightarrow aH_2, \forall a \in G.$$

Таким образом, полученная выше классификация цепочек подгрупп Ли группы вращений пространства  ${}^1R_6$  приводит к классификации всех канонических морфизмов однородных пространств со структурной группой  $H$  – группой всех вращений пространства  ${}^1R_6$ .

**3. Классификация редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства  ${}^1R_6$**

**Определение 4.** Однородное пространство  $H/G_i$  называется редуктивным, если алгебра Ли  $\bar{H}$  группы Ли  $H$  распадается в прямую сумму подпространств:

$$\bar{H} = m + G_i, \tag{4}$$

причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $ad\bar{G}_i$ , где  $ad\bar{G}_i$  – присоединенное представление алгебры Ли  $G_i$ .

Рассмотрим однородное пространство  $\frac{H}{G_8}$ , где  $G_8$  подгруппа Ли группы Ли  $H$ , вращений шестимерного Лоренцева пространства, имеющая алгебру Ли  $\bar{G}_8 = \{i_{16}, i_{21}\}$ .

Для решения системы инвариантности задача сводится к рассмотрению 105 случаев:

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & g & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m & n \end{pmatrix}$$

По строчкам в этой матрице записаны координаты базисных векторов  $X_1, \dots, X_{13}$ , определяющих инвариантные подпространства  $m$ , причем базис в алгебре  $\bar{H}$  выберем следующим образом:  $i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}, i_{16}, i_{21}$ .

Таким образом, инвариантные подпространства  $m = \{X_1, \dots, X_{13}\}$  для частного случая  $1^0$  задаются векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_{10} + \lambda i_{16} + \mu i_{21}, X_2 = i_{11} + \vartheta i_{16} + \delta i_{21}, X_3 = i_{14} + s i_{16} + t i_{21}, X_4 = i_{15} + \\ &+ p i_{16} + q i_{21}, X_5 = i_{17} + r i_{16} + \rho i_{21}, X_6 = i_{18} + \omega i_{16} + \varepsilon i_{21}, X_7 \\ &= i_{19} + \varphi i_{16} + \psi i_{21}, \\ X_8 &= i_{20} + a i_{16} + b i_{21}, X_9 = i_7 + c i_{16} + d i_{21}, X_{10} = i_8 + e i_{16} + f i_{21}, X_{11} = i_9 + \\ &+ g i_{16} + h i_{21}, X_{12} = i_{12} + k i_{16} + l i_{21}, X_{13} = i_{13} + m i_{16} + n i_{21}. \end{aligned} \tag{5}$$

Используя таблицу коммутаторов, получим:

$$\begin{aligned} ada(X_1) &= [i_{21}, X_1] = -i_{11} \\ ada(X_2) &= [i_{21}, i_{11}] = i_{10} \\ ada(X_3) &= [i_{21}, i_{14}] = -i_{15} \\ ada(X_4) &= [i_{21}, i_{15}] = i_{14} \\ ada(X_5) &= [i_{21}, i_{17}] = -i_{18} \\ ada(X_6) &= [i_{21}, i_{18}] = i_{17} \\ ada(X_7) &= [i_{21}, i_{19}] = -i_{20} \\ ada(X_8) &= [i_{21}, i_{20}] = i_{19} \\ ada(X_9) &= [i_{21}, i_7] = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}ada(X_{10}) &= [i_{21}, i_8] = 0 \\ada(X_{11}) &= [i_{21}, i_9] = 0 \\ada(X_{12}) &= [i_{21}, i_{12}] = 0 \\ada(X_{13}) &= [i_{21}, i_{13}] = 0\end{aligned}$$

Запишем линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_{13}$ :

$$\begin{aligned}\alpha_1(i_{10} + \lambda i_{16} + \mu i_{21}) + \beta_1(i_{11} + \vartheta i_{16} + \delta i_{21}) + \gamma_1(i_{14} + s i_{16} + t i_{21}) + \delta_1(i_{15} + \\+ p i_{16} + q i_{21}) + \omega_1(i_{17} + r i_{16} + \rho i_{21}) + \varepsilon_1(i_{18} + \omega i_{16} + \varepsilon i_{21}) + \rho_1(i_{19} + \varphi i_{16} + \\+ \psi i_{21}) + \sigma_1(i_{20} + a i_{16} + b i_{21}) + t_1(i_7 + c i_{16} + d i_{21}) + p_1(i_8 + e i_{16} + f i_{21}) + \\+ q_1(i_9 + g i_{16} + h i_{21}) + r_1(i_{12} + k i_{16} + l i_{21}) + s_1(i_{13} + m i_{16} + n i_{21}) = i_7 t_1 + i_8 p_1 + \quad (7) \\+ i_9 q_1 + i_{10} \alpha_1 + i_{11} \beta_1 + i_{12} r_1 + i_{13} s_1 + i_{14} \gamma_1 + i_{15} \delta_1 + i_{16} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \vartheta + \gamma_1 s + \delta_1 p + \\+ \omega_1 r + \varepsilon_1 \omega + \rho_1 \varphi + \sigma_1 a + t_1 c + p_1 e + q_1 g + r_1 k + s_1 m) + i_{17} \omega_1 + i_{18} \varepsilon_1 + i_{19} \rho_1 + \\+ i_{20} \sigma_1 + i_{21} (\alpha_1 \mu + \beta_1 \delta + \gamma_1 t + \delta_1 q + \omega_1 \rho + \varepsilon_1 \varepsilon + \rho_1 \psi + \sigma_1 b + t_1 d + p_1 f + q_1 h + \\+ r_1 l + s_1 n).\end{aligned}$$

Приравнявая эту линейную комбинацию к правой части первой формулы (6) и затем аналогично соответствующие линейные комбинации к правым частям остальных формул (6) и проведя соответствующие вычисления, получим:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -1, \vartheta = 0, \delta = 0, \\ \alpha_2 &= 1, \lambda = 0, \mu = 0, \\ \delta_3 &= -1, p = 0, q = 0, \\ \gamma_4 &= 1, s = 0, t = 0, \\ \varepsilon_5 &= -1, \omega = 0, \varepsilon = 0, \\ \omega_6 &= 1, r = 0, \rho = 0 \\ \sigma_7 &= -1, a = 0, b = 0, \\ \rho_8 &= 1, \varphi = 0, \psi = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, относительно оператора  $i_{21}$  инвариантны следующие тринадцатимерные подпространства:

$$\{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + c i_{16} + d i_{21}, i_8 + e i_{16} + f i_{21}, i_9 + g i_{16} + h i_{21}, i_{12} + \\+ k i_{16} + l i_{21}, i_{13} + m i_{16} + n i_{21}\}.$$

Для инвариантности относительно  $i_{16}$  требуется, чтобы

$$g = 0, h = 0, k = 0, l = 0, e = 0, f = 0, m = 0, n = 0.$$

Полученные инвариантные подпространства редуктивны, так как  $\Delta \neq 0$ . Таким образом, однородное пространство  $H/G_8$  является редуктивным, редуктивным дополнением для него является пространство:

$$m = \{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + c i_{16} + d i_{21}, i_8, i_9, i_{12}, i_{13}\}.$$

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vartheta & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi & 0 & \psi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & g & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай  $2^0$ .

Инвариантное подпространство  $m = \{X_1, \dots, X_{13}\}$  для частного случая  $2^0$  задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_{10} + \lambda i_{13} + \mu i_{21}, X_2 = i_{11} + \vartheta i_{13} + \delta i_{21}, X_3 = i_{14} + s i_{13} + t i_{21}, X_4 = i_{15} + \\ &+ p i_{13} + q i_{21}, X_5 = i_{17} + r i_{13} + \rho i_{21}, X_6 = i_{18} + \omega i_{13} + \varepsilon i_{21}, X_7 = i_{19} + \varphi i_{13} + \\ &+ \psi i_{21}, X_8 = i_{20} + a i_{13} + b i_{21}, X_9 = i_7 + c i_{13} + d i_{21}, X_{10} = i_8 + e i_{13} + f i_{21}, X_{11} = \\ &= i_9 + g i_{13} + h i_{21}, X_{12} = i_{12} + k i_{13} + l i_{21}, X_{13} = i_{16} + n i_{21}. \end{aligned} \quad (8)$$

Используя таблицу коммутаторов получим:

$$\begin{aligned} ada(X_1) &= [i_{21}, X_1] = -i_{11} \\ ada(X_2) &= [i_{21}, i_{11}] = i_{10} \\ ada(X_3) &= [i_{21}, i_{14}] = -i_{15} \\ ada(X_4) &= [i_{21}, i_{15}] = i_{14} \\ ada(X_5) &= [i_{21}, i_{17}] = -i_{18} \\ ada(X_6) &= [i_{21}, i_{18}] = i_{17} \\ ada(X_7) &= [i_{21}, i_{19}] = -i_{20} \\ ada(X_8) &= [i_{21}, i_{20}] = i_{19} \\ ada(X_9) &= [i_{21}, i_7] = 0 \\ ada(X_{10}) &= [i_{21}, i_8] = 0 \\ ada(X_{11}) &= [i_{21}, i_9] = 0 \\ ada(X_{12}) &= [i_{21}, i_{12}] = 0 \\ ada(X_{13}) &= [i_{21}, i_{16}] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Запишем линейную комбинацию векторов  $X_1, \dots, X_{13}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1(i_{10} + \lambda i_{13} + \mu i_{21}) + \beta_1(i_{11} + \vartheta i_{13} + \delta i_{21}) + \gamma_1(i_{14} + s i_{13} + t i_{21}) + \delta_1(i_{15} + \\ + p i_{13} + q i_{21}) + \omega_1(i_{17} + r i_{13} + \rho i_{21}) + \varepsilon_1(i_{18} + \omega i_{13} + \varepsilon i_{21}) + \rho_1(i_{19} + \varphi i_{13} + \\ + \psi i_{21}) + \sigma_1(i_{20} + a i_{13} + b i_{21}) + t_1(i_7 + c i_{13} + d i_{21}) + p_1(i_8 + e i_{13} + f i_{21}) + \\ + q_1(i_9 + g i_{13} + h i_{21}) + r_1(i_{12} + k i_{13} + l i_{21}) + s_1(i_{16} + n i_{21}) = i_7 t_1 + i_8 p_1 + i_9 q_1 + \\ + i_{10} \alpha_1 + i_{11} \beta_1 + i_{12} r_1 + i_{13} (\alpha_1 \lambda + \beta_1 \vartheta + \gamma_1 s + \delta_1 p + \omega_1 r + \varepsilon_1 \omega + \rho_1 \varphi + \sigma_1 a + \\ + t_1 c + p_1 e + q_1 g + r_1 k) + i_{14} \gamma_1 + i_{15} \delta_1 + i_{16} s_1 + i_{17} \omega_1 + i_{18} \varepsilon_1 + i_{19} \rho_1 + i_{20} \sigma_1 + \\ + i_{21} (\alpha_1 \mu + \beta_1 \delta + \gamma_1 t + \delta_1 q + \omega_1 \rho + \varepsilon_1 \varepsilon + \rho_1 \psi + \sigma_1 b + t_1 d + p_1 f + q_1 h + r_1 l + \\ + s_1 n). \end{aligned} \quad (10)$$

Приравнивая эту линейную комбинацию к правой части первой формулы (9) и затем аналогично соответствующие линейные комбинации к правым частям остальных формул (9) и проведя соответствующие вычисления, получим:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -1, \vartheta = 0, \delta = 0, \\ \alpha_2 &= 1, \lambda = 0, \mu = 0, \\ \delta_3 &= -1, p = 0, q = 0, \\ \gamma_4 &= 1, s = 0, t = 0, \\ \varepsilon_5 &= -1, \omega = 0, \varepsilon = 0, \\ \omega_6 &= 1, r = 0, \rho = 0 \\ \sigma_7 &= -1, a = 0, b = 0, \\ \rho_8 &= 1, \varphi = 0, \psi = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, относительно оператора  $i_{21}$  инвариантны следующие тринадцатимерные подпространства:

$$\{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + ci_{13} + di_{21}, i_8 + ei_{13} + fi_{21}, i_9 + gi_{13} + hi_{21}, i_{12} + ki_{13} + li_{21}, i_{16} + ni_{21}\},$$

которые редуцированными дополнениями не являются, поскольку прямой суммы нет, т. к.  $\Delta = 0$ .

В случаях  $2^0 - 21^0, 55^0, 78^0, 105^0$  аналогично полученные инвариантные подпространства редуцированными дополнениями не являются, т. к.  $\Delta = 0$ .

В случаях  $22^0 - 54^0, 56^0 - 77^0, 79^0 - 104^0$  системы инвариантности противоречивы.

**Теорема 30.** Однородное пространство  $H/G_8$  является редуцированным, редуцированным дополнением для него является пространство:

$$m = \{i_{10}, i_{11}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}, i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8 + li_{16} + fi_{21}, i_9 + gi_{16} + hi_{21}, i_{12} + ki_{16} + li_{21}, i_{13} + mi_{16} + ni_{21}\}.$$

#### 4. Тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуцированных однородных пространствах

Будем вычислять тензоры кривизны и кручения канонической связности на редуцированных однородных пространствах с фундаментальной группой – группой Ли движений пространства  ${}^1R_6$ .

Свойства тензора кривизны и кручения канонической связности характеризуется следующей теоремой.

**Теорема 31** [1, с. 180, теорема 2.6]. Пусть  $P$  есть  $G$  – инвариантная структура на редуцированном однородном пространстве  $G/H$  с разложением  $\bar{G} = \bar{H} + m$ . Для тензора кручения  $T$  и тензора кривизны  $R$  канонической связности в  $P$  мы имеем:

- (1)  $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$  для  $X, Y \in m$ .
- (2)  $(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\bar{H}}, Z]$  для  $X, Y, Z \in m$ .
- (3)  $\nabla T = 0$ .
- (4)  $\nabla R = 0$ .

Тензоры кривизны и кручения играют важную роль при исследовании свойств данной связности, поскольку они определяют связность с помощью структурных формул Э. Картана. Воспользуемся теоремой 31 и получим формулы для тензоров кривизны и кручения соответствующей канонической связности в исследуемых редуцированных однородных пространствах.

Рассмотрим редуکتивное однородное пространство  $H/G_8$ , которое имеет редуکتивное разложение

$$\bar{H} = \bar{G}_8 + m,$$

где  $m = \{i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}\}$ .

Выберем в редуکتивном дополнении  $m$  базис:

$$e_1 = i_7 + ci_{16} + di_{21}, e_2 = i_8, e_3 = i_9, e_4 = i_{10}, e_5 = i_{11}, e_6 = i_{12}, e_7 = i_{13}, e_8 = i_{14}, \\ e_9 = i_{15}, e_{10} = i_{17}, e_{11} = i_{18}, e_{12} = i_{19}, e_{13} = i_{20}.$$

Тогда, согласно теореме 31, тензоры кручения получим по формуле  $T(X, Y)_0 = -[X, Y]_m$  для  $X, Y \in m$ , а тензоры кривизны  $-(R(X, Y)Z)_0 = -[[X, Y]_{\bar{H}}, Z]$  для  $X, Y, Z \in m$ . Таким образом, координату  $T_{j,k}^i$  тензора кручения получим как  $i$ -ю координату разложения вектора  $-[e_j, e_k]_m$ , по базису  $B = \{i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}\}$  редуکتивного дополнения  $m$ .

Координату  $R_{j,k,l}^i$  тензора кривизны получим как  $i$ -ю координату разложения вектора  $-[[e_j, e_k]_{\bar{G}_8}, e_l]$  по базису  $B$  редуکتивного дополнения  $m$ . Производя соответствующие вычисления, получаем теорему.

**Теорема 32.** Тензор кручения канонической связности однородного пространства  $H/G_8$  с редуکتивным дополнением  $m = \{i_7 + ci_{16} + di_{21}, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}, i_{15}, i_{17}, i_{18}, i_{19}, i_{20}\}$  имеет следующие ненулевые координаты:

$$T_{1,2}^3 = c, T_{1,2}^6 = -1, T_{1,3}^2 = -c, T_{1,3}^7 = -1, T_{1,4}^5 = d, T_{1,4}^8 = -1, T_{1,5}^4 = -d, \\ T_{1,5}^9 = -1, T_{1,6}^2 = -1, T_{1,6}^7 = c, T_{1,7}^3 = -1, T_{1,7}^6 = -c, T_{1,8}^4 = -1, T_{1,8}^9 = d, \\ T_{1,9}^5 = -1, T_{1,9}^8 = -d, T_{1,10}^{11} = d, T_{1,10}^{12} = c, T_{1,11}^{10} = -d, T_{1,11}^{13} = c, T_{1,12}^{10} = -c, \\ T_{1,12}^{13} = d, T_{1,13}^{11} = -c, T_{1,13}^{12} = -d, T_{2,4}^3 = -1, T_{2,5}^{11} = -1, T_{2,6}^1 = 1, T_{2,10}^4 = \\ = -1, T_{2,11}^5 = -1, T_{3,4}^{12} = -1, T_{3,5}^{13} = -1, T_{3,7}^1 = 1, T_{3,12}^4 = -1, T_{3,13}^5 = -1, \\ T_{4,8}^1 = 1, T_{4,10}^2 = 1, T_{4,11}^3 = 1, T_{4,12}^3 = 1, T_{5,9}^1 = 1, T_{5,11}^2 = 1, T_{5,13}^3 = 1, T_{6,8}^{10} = 1, \\ T_{6,9}^{11} = 1, T_{6,10}^8 = -1, T_{6,11}^9 = -1, T_{7,8}^{12} = 1, T_{7,9}^{13} = 1, T_{7,12}^8 = -1, T_{7,13}^9 = -1, \\ T_{8,10}^6 = 1, T_{8,12}^7 = 1, T_{9,11}^6 = 1, T_{9,13}^7 = 1.$$

При этом ненулевыми координатами этого тензора кручения будут также координаты, отличающиеся от данных только перестановкой двух нижних индексов, поскольку  $T_{i,j}^k = -T_{j,i}^k$ , т. е. тензор кручения кососимметричен по нижним индексам. Других ненулевых координат у тензора кручения нет.

**Теорема 33.** Тензор кривизны имеет только следующие, отличные от нуля координаты:

$$R_{1,2,6}^7 = -1, R_{2,3,2}^3 = 1, R_{2,3,3}^2 = -1, R_{2,3,6}^7 = 1, R_{2,3,7}^6 = -1, R_{2,3,10}^{12} = 1, \\ R_{2,3,11}^{13} = 1, R_{2,3,12}^{10} = -1, R_{2,3,13}^{11} = -1, R_{2,6,2}^3 = c, R_{2,6,3}^2 = -c, R_{2,6,4}^5 = d, \\ R_{2,6,5}^4 = -d, R_{2,6,6}^7 = c, R_{2,6,7}^6 = -c, R_{2,6,8}^9 = d, R_{2,6,9}^8 = -d, R_{2,6,10}^{11} = d, \\ R_{2,6,10}^{12} = c, R_{2,6,11}^{10} = -d, R_{2,6,11}^{13} = c, R_{2,6,12}^{10} = -c, R_{2,6,12}^{13} = d, R_{2,6,13}^{11} = -c, \\ R_{4,5,13}^{12} = -d, R_{4,5,4}^5 = 1, R_{4,5,5}^4 = -1, R_{4,5,8}^9 = 1, R_{4,5,9}^8 = -1, R_{4,5,10}^{11} = 1, \\ R_{4,5,11}^{10} = -1, R_{4,5,12}^{13} = 1, R_{4,5,13}^{12} = -1, R_{4,8,2}^3 = c, R_{4,8,3}^2 = -c, R_{4,8,4}^5 = d, \\ R_{4,8,5}^4 = -d, R_{4,8,6}^7 = c, R_{4,8,7}^6 = -c, R_{4,8,8}^9 = d, R_{4,8,9}^8 = -d, R_{4,8,10}^{11} = d, \\ R_{4,8,10}^{12} = c, R_{4,8,11}^{10} = -d, R_{4,8,11}^{13} = c, R_{4,8,12}^{10} = -c, R_{4,8,12}^{13} = d, R_{4,8,13}^{11} = -c, \\ R_{4,8,13}^{12} = -d, R_{5,9,2}^3 = c, R_{5,9,3}^2 = -c, R_{5,9,4}^5 = d, R_{5,9,5}^4 = -d, R_{5,9,6}^7 = c, \\ R_{5,9,7}^6 = -c, R_{5,9,8}^9 = d, R_{5,9,9}^8 = -d, R_{5,9,10}^{11} = d, R_{5,9,10}^{12} = c, R_{5,9,11}^{10} = -d, \\ R_{5,9,11}^{13} = c, R_{5,9,12}^{10} = -c, R_{5,9,12}^{13} = d, R_{5,9,13}^{11} = -c, R_{5,9,13}^{12} = -d, R_{8,9,4}^5 =$$

$$\begin{aligned}
&= -1, R_{8,9,5}^4 = 1, R_{8,9,8}^9 = -1, R_{8,9,9}^8 = 1, R_{8,9,10}^{11} = -1, R_{8,9,11}^{10} = 1, R_{8,9,12}^{13} = \\
&= -1, R_{8,9,13}^{12} = 1, R_{10,11,4}^5 = -1, R_{10,11,5}^4 = 1, R_{10,11,8}^9 = -1, R_{10,11,9}^8 = 1, \\
&R_{10,11,10}^{11} = -1, R_{10,11,11}^{10} = 1, R_{10,11,12}^{13} = -1, R_{10,11,13}^{12} = 1, R_{10,12,2}^3 = -1, \\
&R_{10,12,3}^2 = 1, R_{10,12,6}^7 = -1, R_{10,12,7}^6 = 1, R_{10,12,10}^{12} = -1, R_{10,12,11}^{13} = -1, \\
&R_{10,12,12}^{10} = 1, R_{10,12,13}^{11} = 1, R_{11,13,2}^3 = -1, R_{11,13,3}^2 = 1, R_{11,13,6}^7 = -1, \\
&R_{11,13,7}^6 = 1, R_{11,13,10}^{12} = -1, R_{11,13,11}^{13} = -1, R_{11,13,12}^{10} = 1, R_{11,13,13}^{11} = 1, \\
&R_{12,13,4}^5 = -1, R_{12,13,5}^4 = 1, R_{12,13,8}^9 = -1, R_{12,13,9}^8 = 1, R_{12,13,10}^{11} = -1, \\
&R_{12,13,11}^{10} = 1, R_{12,13,12}^{13} = -1, R_{12,13,13}^{12} = 1.
\end{aligned}$$

При этом тензор кривизны кососимметричен по первым двум нижним индексам.

### Заклучение

В работе решены следующие задачи:

1. Найлены образы стационарности подгрупп Ли группы Ли вращений пространства  $L_6$ .
2. Построены цепочки подгрупп Ли вращений пространства  $L_6$  по включению, тем самым классифицированы канонические морфизмы однородных пространств.
3. Исследованы канонические связности на полученных редуктивных однородных пространствах.
4. Вычислены тензоры кривизны и кручения инвариантных аффинных связностей найденных редуктивных пространств.

Результаты работы могут быть применены для решения аналогичных задач в других псевдоевклидовых пространствах, а также в научно-исследовательской работе по дифференциальной геометрии и в теоретической физике.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.
2. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцевых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1 (126). – С. 13–22.
3. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.
4. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Весн. Брєсц. ун-та. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 18.10.2020

## Да ведама аўтараў

Рэдкалегія часопіса разглядае рукапісы толькі тых артыкулаў, якія адпавядаюць навуковаму профілю выдання, нідзе не апублікаваныя і не перададзеныя ў іншыя рэдакцыі.

Матэрыялы прадстаўляюцца на беларускай, рускай ці англійскай мове ў двух экзэмплярах аб'ёмам ад 0,35 да 0,5 друкаванага аркуша, у электронным варыянце – у фармаце Microsoft Word for Windows (\*.doc; \*.rtf) і павінны быць аформлены ў адпаведнасці з наступнымі патрабаваннямі:

- папера фармата А4 (21×29,7 см);
- палі: зверху – 2,8 см, справа, знізу, злева – 2,5 см;
- шрыфт – гарнітура Times New Roman;
- кегль – 12 pt.;
- міжрадкавы інтэрвал – адзінарны;
- двукоссе парнае «...»;
- абзац: водступ першага радка 1,25 см;
- выраўноўванне тэксту па шырыні.

Максімальныя лінейныя памеры табліц і малюнкаў не павінны перавышаць 15×23 або 23×15 см. Усе графічныя аб'екты, якія ўваходзяць у склад аднаго малюнка, павінны быць згрупаваны паміж сабой. Фатаграфіі ў друк не прымаюцца. Размернасць усіх велічынь, якія выкарыстоўваюцца ў тэксце, павінна адпавядаць Міжнароднай сістэме адзінак вымярэння (СВ). Пажадана пазбягаць скарачэнняў слоў, акрамя агульнапрынятых. Спіс літаратуры павінен быць аформлены паводле Узораў афармлення бібліяграфічнага апісання ў спісе крыніц, якія прыводзяцца ў дысертацыі і аўтарэфераце, зацверджаных загадам Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 25.06.2014 № 159 у рэдакцыі загада Вышэйшай атэстацыйнай камісіі Рэспублікі Беларусь ад 08.09.2016 № 206. Спасылкі на крыніцы ў артыкуле нумаруюцца адпаведна парадку цытавання. Парадкавыя нумары спасылак падаюцца ў квадратных дужках ([1–4], [1; 3], [1, с. 32], [2, с. 52–54], [3, л. 5], [4, л. 60б.]). Не дапускаецца выкарыстанне канцавых зносаў.

Матэрыял уключае наступныя элементы па парадку:

- індэкс УДК (выраўноўванне па левым краі);
- ініцыялы і прозвішча аўтара (аўтараў) (выдзяляюцца паўтлустым шрыфтам і курсівам; выраўноўванне па цэнтры);
- звесткі пра аўтара/аўтараў (навуковая ступень, званне, пасада);
- назва артыкула (друкуецца вялікімі літарамі без пераносаў; выраўноўванне па цэнтры);
- анатацыя ў аб'ёме ад 100 да 150 слоў на мове артыкула (курсіў, кегль – 10 pt.);
- звесткі аб навуковым кіраўніку (для аспірантаў і саіскальнікаў) указваюцца на першай старонцы артыкула ўнізе;
- асноўны тэкст, структураваны ў адпаведнасці з патрабаваннямі ВАКа да навуковых артыкулаў, якія друкуюцца ў выданнях, уключаных у Пералік навуковых выданняў Рэспублікі Беларусь для апублікавання вынікаў дысертацыйных даследаванняў (Уводзіны з пастаўленымі мэтай і задачамі; Асноўная частка, тэкст якой структуруюцца падзаглаўкамі (назва раздзела «Асноўная частка» не друкуецца); Заключэнне, у якім сцісла сфармуляваны асноўныя вынікі даследавання, указана іх навізна);
- спіс выкарыстанай літаратуры; спіс выкарыстанай літаратуры дубліруюцца ў лацінскім алфавіце (References), пры гэтым колькасць крыніц, прыведзеных у спісе, і ў References, павінна супадаць.
- рэзюмэ на англійскай мове (курсіў; да 10 радкоў, кегль – 10 pt.): назва артыкула, прозвішча і ініцыялы аўтара/аўтараў, тэзісны пераказ зместу артыкула; у выпадку калі аўтар падае матэрыял на англійскай мове, рэзюмэ – на рускай ці беларускай.

Да рукапісу артыкула абавязкова дадаюцца:

- звесткі пра аўтара на мове артыкула і англійскай мове (прозвішча, імя, імя па бацьку поўнацю, вучоная ступень і званне, месца працы (вучобы) і пасада, электронны адрас і кантактныя тэлефоны);
- выписка з пратакола пасяджэння кафедры, навуковай лабараторыі ці ўстановы адукацыі, дзе працуе/вучыцца аўтар, завераная пячаткаю, з рэкамендацыяй артыкула да друку;
- рэцэнзія знешняга ў адносінах да аўтара профільнага спецыяліста з вучонай ступенню, завераная пячаткаю;
- экспертнае заключэнне (для аспірантаў і дактарантаў).

Рукапісы, аформленыя не ў адпаведнасці з выкладзенымі правіламі, рэдкалегіяй не разглядаюцца.

Аўтары нясуць адказнасць за змест прадстаўленага матэрыялу.

Карэктары *А. А. Іванюк, Л. М. Калілец*

Камп'ютарнае макетаванне *С. М. Мініч, Г. Ю. Пархац*

Падпісана ў друк 01.12.2020. Фармат 60×84/8. Папера афсетная.

Гарнітура Таймс. Рызаграфія. Ум. друк. арк. 12,32. Ул.-выд. арк. 9,21.

Тыраж 100 экз. Заказ № 344.

Выдавец і паліграфічнае выкананне: УА «Брэсцкі дзяржаўны ўніверсітэт імя А. С. Пушкіна».

Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў

№ 1/55 ад 14.10.2013.

ЛП № 02330/454 ад 30.12.2013.

224016, г. Брэст, вул. Міцкевіча, 28.