УДК 524.3+539.171

А. И. СЕРЫЙ
Брест, БрГУ

О ПОПРАВКАХ К УРАВНЕНИЮ БЕТА-РАВНОВЕСИЯ ЭЛЕКТРОННО-ПРОТОННО-НЕЙТРОННОЙ СИСТЕМЫ

Электронно-протонно-нейтронная (*enp*-) система широко исследуется в астрофизике, т. к. встречается в жидких ядрах нейтронных звезд [1, с. 281] и при взрывах Сверхновых II типа (где нейтроны образуются при поглощении антинейтрино протонами [2]; наличие последних подтверждается линией водорода в спектрах). Частный случай – *ep*-система, т. е. водород ниже порога нейтронизации (например, в оболочках белых карликов).

Таблица 1 – Различные подходы к исследованию enp-системы

Плотности	Порядка ядерных	На 2 порядка ниже ядерных
Подход	Ферми-жидкостный	Ферми-газовый (данная работа)
Математический аппарат	Более сложный [3]	Более простой
Это актуально при исследовании процессов	В жидких ядрах нейтронных звезд	Идущих в первые секунды после взрывов Сверхновых II типа

Замечания: 1) нуклоны взаимодействуют контактно [4, с. 23; 5, с. 187]; 2) кулоновское *pp*-, а также *ee*- и *ep*-взаимодействие рассмотрены в рамках диаграммной техники Мацубары–Галицкого–Мигдала в виде обменного и корреляционного слагаемых (в работах [7, 8] они не учитывались, а в [6] отмечена важность обменного слагаемого Фока); в функциях Грина спектры частиц линеаризованы вблизи поверхности Ферми [5, с. 8], что допустимо при малых степенях поляризации [9, с. 59]; 3) *en*-взаимодействие не учтено из-за малости длины *en*-рассеяния [1, с. 268]; 4) Т ≈ 0 К.

Обозначим концентрации n_i, $i = e, n, p$; $n_p = n_e$; p_{0i} – степени спиновой поляризации через концентрации частиц с определенной проекцией спина (из-за наличия магнитного поля сонаправлены магнитные моменты всех 3 подсистем, поэтому у нейтронов спиновая поляризация отрицательна):

$$p_{0i} = (n_{i\uparrow} - n_{i\downarrow})/n_i \Rightarrow n_{i(\uparrow,\downarrow)} = n_i(1 \pm p_{0i})/2. \quad (1)$$

Таблица 2 – Стратегии в газовом подходе ($i = p,e,n$)

Что исследуется (совместно 1-е и 2-е условие либо только 2-е)	Вид уравнения ($\vec{p} = (p_{0p}, p_{0e}, p_{0n})$)
1) Уравнение бета-равновесия enp-системы	$X_n(\vec{p}) = X_p(\vec{p}) + X_e(\vec{p})$
2) а) Условие энергетической выгодности спиновой поляризации нуклонов и электронов; б) критерий Стонера	$X_i(-\vec{p}) = X_i(\vec{p})$

Таблица 3 – Учитываемые взаимодействия в enp-системе. А. Плотность энергии. Б. Слагаемые в хим. потенциале после дифференцирования (А) по концентрациям $n_{i\uparrow}$

Взаимодействие	А	Б
Обменное кулоновское $\Omega_{обм} = \Omega_p + \Omega_e$	$\Omega_i = -\frac{e^2}{8\pi^3}(6\pi^2)^{4/3}(n_{i\uparrow}^{4/3} + n_{i\downarrow}^{4/3})$ (на основе [5, с. 202])	$E_{обм} = E_p^{обм} + E_e^{обм}, E_i^{обм} = -\frac{e^2}{\pi}(6\pi^2 n_{i\uparrow})^{1/3}$
Корреляционная $\Omega_{кор} = F_e + F_p$ (логарифмическая оценка на основе [5, с. 206])	$F_i = A_{1i} n_i (G_i^+ + G_i^- + 2\sqrt{1-p_{0i}^2}\, ln(A_{2i} n_i^{1/3}(1-p_{0i}^2)^{1/6}))$, $A_{1i} = -\frac{(1-ln\,2)e^4 m_i}{4\pi^2\hbar^2}, A_{2i} = \frac{(3\pi^2)^{1/3}\hbar^2\pi}{2e^2 m_i}$, $G_i^{\pm} = (1 \pm p_{0i}) ln(A_{2i} n_i^{1/3}(1 \pm p_{0i})^{1/3})$	$E_{кор} = E_p^{кор} + E_e^{кор}, E_i^{кор} = 2A_{1i}(\frac{1}{3}(1 + \sqrt{\frac{1-p_{0i}}{1+p_{0i}}}) + ln(A_{2i} n_i^{1/3}(1+p_{0i})^{1/3}) + \sqrt{\frac{1-p_{0i}}{1+p_{0i}}} \times ln(A_{2i} n_i^{1/3}(1-p_{0i}^2)^{1/6}))$
Ядерная межнуклонная (см. [4, с. 23; 5, с. 187; 7, с. 31–33])	$V_{NN} = g_{np}^{\uparrow\uparrow}(n_{p\uparrow} n_{n\uparrow} + n_{p\downarrow} n_{n\downarrow}) + g_{np}^{\uparrow\downarrow}(n_{p\uparrow} n_{n\downarrow} + n_{p\downarrow} n_{n\uparrow}) + g_{pp} n_{p\uparrow} n_{p\downarrow} + g_{nn} n_{n\uparrow} n_{n\downarrow}, g_{np}^{\uparrow\uparrow} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{np}^*} a_t, g_{ii} = \frac{\pi\hbar^2}{m_{ii}^*} a_i$, $g_{np}^{\uparrow\downarrow} = \frac{\pi\hbar^2}{m_{np}^*}(a_t + a_s)$	$U_p = g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{n\uparrow} + g_{np}^{\uparrow\downarrow} n_{n\downarrow} + g_{pp} n_{p\downarrow}, U_n = g_{np}^{\uparrow\uparrow} n_{p\uparrow} + g_{np}^{\uparrow\downarrow} n_{p\downarrow} + g_{nn} n_{n\downarrow}$

Формулы в таблице 3 выведены на основе соответствующих алгоритмов, а не взяты в готовом виде. Корреляционные поправки требуют уточнения. Они должны быть меньше обменных, поскольку содержат множитель e^4, т. е. описываются диаграммами 2-го порядка, а обменные содержат множитель e^2, т. е. описываются диаграммами 1-го порядка. При этом m^* – приведённая масса, a – длина рассеяния. Их значения (в 10^{-13} см [4, с. 20, 30, 31]): $a_s = -23.71$, $a_t = 5.42$, $a_p = -7.83$, $a_n = -17.2$; a_p получается из a_n с кулоновской поправкой, что при отсутствии компенсирующего фона электронов правомерно при $E > 0.6$ МэВ [4, с. 26]. Распишем хим. потенциалы:

$$X_n(\vec{p}) = m_n c^2 + H_n^+ + U_n(p_{0p}, p_{0n}), H_i^{\pm} = \frac{(3\pi^2\hbar^3 n_i(1 \pm p_{0i}))^{2/3}}{2m_i}$$

$$X_p(\vec{p}) = m_p c^2 + H_p^+ + U_p(p_{0p}, p_{0n}) + E_p^{обм}(p_{0p}) + E_p^{кор}(p_{0p}),$$

$$X_e(\vec{p}) = (m_e^2 c^4 + (3\pi^2\hbar^3 n_e(1+p_{0e})^{2/3} c^2)^{1/2} + E_e^{обм}(p_{0e}) + E_e^{кор}(p_{0e}). \qquad (2)$$

Из уравнений таблицы 2 имеем систему из 4 уравнений с 5 неизвестными: n_p, n_n, p_{0e}, p_{0p}, p_{0n}. При этом $n_p = n_e$ можно выбрать как свободный параметр. С учетом таблиц 2 и 3 распишем условия термодинамической выгодности спиновой поляризации для каждой компоненты в отдельности (без учета влияния магнитного поля, в т. ч. на квантование Ландау):

$$Z_{1n} = Z_{2p}, Z_{1i} = H_i^+ - H_i^- - g_{ii} p_{0i} n_i, Z_{2i} = (g_{np}^{\uparrow\downarrow} - g_{np}^{\uparrow\uparrow}) p_{0i} n_i, \tag{3}$$

$$Z_{1p} - \frac{e^2 (3\pi^2 n_p)^{1/3}}{\pi}((1+p_{0p})^{1/3} - (1-p_{0p})^{1/3}) + 2A_{1p}(\frac{1}{3} ln \frac{1+p_{0p}}{1-p_{0p}} +$$
$$+(\sqrt{\frac{1-p_{0p}}{1+p_{0p}}} - \sqrt{\frac{1+p_{0p}}{1-p_{0p}}})(1 + ln(A_{2p} n_p^{1/3} (1-p_{0p}^2)^{1/6}))) = Z_{2n}, \tag{4}$$

$$H_e^+ - H_e^- - \frac{e^2 (3\pi^2 n_p)^{1/3}}{\pi}((1+p_{0e})^{1/3} - (1-p_{0e})^{1/3}) + 2A_{1e}(\frac{1}{3} ln \frac{1+p_{0e}}{1-p_{0e}} +$$
$$+(\sqrt{\frac{1-p_{0e}}{1+p_{0e}}} - \sqrt{\frac{1+p_{0e}}{1-p_{0e}}})(1 + ln(A_{2e} n_p^{1/3} (1-p_{0e}^2)^{1/6}))) = 0. \tag{5}$$

Формулы (3)–(5) записаны в несколько ином виде по сравнению с полученными в [8, с. 37]. При этом в (3) нет изменений, поскольку обменно-корреляционные поправки для нейтронов не рассматривались; уравнения (4), (5) после этих поправок изменились: видно, что вследствие корреляционных поправок не может быть $p_{0e} = \pm 1, p_{0p} = \pm 1$ (в отличие от p_{0n}). Но это может и не иметь глубокого физического смысла, а может быть связано с тем, что корреляционные поправки – это оценки по порядку величины.

Условие β-равновесия проверяется подстановкой (2) в 1-е уравнение Таблицы 2. Отсутствие совместимости с (3)–(5) или с критерием Стонера может означать, что или, поляризация становится менее устойчивой, или при больших n_i поддерживается за счет мезонных механизмов.

В случае критерия Стонера проверяется условие расходимости магнитной восприимчивости. На основе задачи для однокомпонентной системы [5, с. 187, 198] в [7, с. 31 – 38] была рассмотрена задача для np-системы. Дополним ее обменно-корреляционными поправками. При этом

$$\nu_{0i}^{\pm} = m_i q_{0i} (1 \pm p_{0i})(2\pi^2 \hbar^3)^{-1}, q_{0i} = (3\pi^2 n_i)^{1/3} \hbar, \tag{6}$$

где q_{0i} – импульсы Ферми при отсутствии поляризации, $\nu_{0i}^{\pm}$ – плотности числа состояний на уровне Ферми для соответствующей поляризации. Магнитное поле как фактор, способствующий нарушению спиновой симметрии, считаем достаточно слабым ($\hbar\omega_B << E_{Fi}$, $i = n, p$). Рассуждая по аналогии с [7, с. 32, 34], но добавляя $E_p^{обм}(p_{0p}) + E_p^{кор}(p_{0p})$, получаем:

$$q_{0n} \delta q_{n\uparrow,\downarrow} / m_n = \mp |\gamma_n| \hbar\omega_B - g_{nn} \delta n_{n\downarrow,\uparrow} - g_{np}^{\uparrow\downarrow} \delta n_{p\downarrow,\uparrow} - g_{np}^{\uparrow\uparrow} \delta n_{p\uparrow,\downarrow}, \tag{7}$$

$$q_{0p}\delta q_{p\uparrow,\downarrow}/m_p = \pm|\gamma_p|\hbar\omega_B - g_{pp}\delta n_{p\downarrow,\uparrow} - g_{np}^{\uparrow\downarrow}\delta n_{n\downarrow,\uparrow} - g_{np}^{\uparrow\uparrow}\delta n_{n\uparrow,\downarrow} +$$
$$+\frac{e^2}{\pi}(6\pi^2)^{1/3}(\frac{n_p}{2}+\delta n_{p\uparrow,\downarrow}) + A_{1p}((1+\sqrt{\frac{1+2\delta n_{p\downarrow,\uparrow}/n_p}{1+2\delta n_{p\uparrow,\downarrow}/n_p}})(\frac{1}{3}+ln(A_{2p}n_p^{1/3}))+$$
$$+\frac{1}{3}ln(1+\frac{2\delta n_{p\uparrow,\downarrow}}{n_p})+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1+2\delta n_{p\downarrow,\uparrow}/n_p}{1+2\delta n_{p\uparrow,\downarrow}/n_p}}(ln(1+\frac{2\delta n_{p\uparrow}}{n_p})+ln(1+\frac{2\delta n_{p\downarrow}}{n_p}))). \qquad (8)$$

Здесь $\pm|\gamma_i|\hbar\omega_B = \pm|\gamma_i|\mu_Я B$ – зеемановская энергия, $\gamma_i = \mu_i/\mu_Я$; $i = n, p$. С учётом $\delta n_{i\uparrow} = -\delta n_{i\downarrow}$ из (6)–(8) делаем вывод, что все дальнейшие формулы отличаются от полученных в [7, с. 34–36] заменой:

$$g_{pp} \mapsto \tilde{g}_{pp} = g_{pp} - \frac{2\pi e^2}{(3\pi^2 n_p)^{2/3}} - \frac{4A_{1p}}{n_p} ln((2n_p)^{1/3}A_{2p}). \qquad (9)$$

Расходимость (9) при $n_p \to 0$ объясняется тем, что мацубаровская теория возмущений не применятся при малых n_p, если имеется 2 сорта частиц с противоположными зарядами, взаимодействующих по закону Кулона. Для короткодействующих потенциалов ситуация иная. См. таблицу 4.

Таблица 4 – Сравнительная характеристика различных теорий возмущений

Частицы и взаимодействия	Отдельные в вакууме; электромагнитное	Множество в среде; кулоновское	Множество в среде; короткодействующее (нуклонные газы)
Диаграммная техника	Фейнмана	Мацубары–Галицкого–Мигдала [9, с. 44, 195]	Может отсутствовать
Параметр теории возмущений α	$\frac{e^2}{\hbar c} \equiv \alpha_0$	$\frac{e^2}{\hbar v_F}, v_F = \frac{q_{0i}}{m}$ [5, с. 189]	$\frac{q_{0i}a}{\hbar}$ [9, с. 36]
Что меняется	e	v_F (скорость Ферми)	q_{0i}
Теория возмущений неприменима ($\alpha > 1$)	На очень малых расстояниях, когда исчезает вакуумная экранировка, и e не мал	При малых n_i, когда мала v_F	При больших n_i, когда велик q_{0i}

Условие $\alpha < 1$ (применимость теории возмущений) для мацубаровской диаграммной техники, согласно (6) и таблице 4, означает:

$$n_i > n_i^* = m_i^3 e^6 (3\hbar^6\pi^2)^{-1} = \alpha_0^3 (3\pi^2(\lambda_C^{(i)})^3)^{-1}, \lambda_C^{(i)} = \hbar(m_i c)^{-1}. \qquad (10)$$

Численно $n_e^* = 2.28\cdot10^{23}$ см$^{-3}$, $n_p^* = 1.42\cdot10^{33}$ см$^{-3}$. Наибольшее ограничение на концентрацию дает a_n (в присутствии электронов это значение можно приписать и pp-взаимодействию). Тогда с учетом (6) и таблицы 4:

$$n_i < n_i^{**} = 8(3\pi^2 a_i^3)^{-1} \Rightarrow n_n^{**} = n_p^{**} = 5.31 \cdot 10^{34}\ \text{см}^{-3}. \qquad (11)$$

С учетом (10), при $\rho \sim 10^{-4}\rho_0$, $\rho_0 \sim 10^{14}$ г/см^3, обсуждаемые приближения допустимы. В [2] показано, что *np*-смесь доминирует, по крайней мере, в первые секунды после начала взрыва, в области до $R \approx 200$ км, что примерно в 20 раз больше радиуса будущей нейтронной звезды (где в жидком ядре $\rho \sim \rho_0$) [1, с. 281], а такое сжатие соответствует росту плотности в $20^3 = 0.8 \cdot 10^4$ раз. Т. е. не исключено, что начальная плотность может удовлетворить условию (11). Если она больше, то нужные значения могут быть достигнуты при дальнейшем расширении водорода (его линия наблюдается, т. к. не вся *np*-смесь коллапсирует), поглощающего антинейтрино (вспышки которых также наблюдаются) с образованием нейтронов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Физическая энциклопедия / Гл. ред. А.М. Прохоров. Ред. Кол. Д.М. Алексеев, А.М. Балдин, А.М. Бонч-Бруевич, А.С. Боровик-Романов и др. // М.: Большая Российская энциклопедия, Т. 3. Магнитоплазменный – Пойнтинга теорема. 1992. – 672 с., ил.

2 Bruenn, S.W. Recent 2D/3D Core-Collapse Supernovae Simulations Results Obtained with the CHIMERA Code / S.W. Bruenn et al. // physics.fau.edu.

3 Isayev, A A. Spin polarized states in nuclear matter with Skyrme effective interaction. / A.A. Isayev, J. Yang // article for Nova Science Publishers (NY) volume “Progress in Ferromagnetism Research” 18 p., 6 fig. (arXiv: nucl-th/0403059 v1 20 Mar 2004 (http://arxiv.org)).

4 Ситенко, А.Г. Лекции по теории ядра / А.Г. Ситенко, В.К. Тартаковский // М. : Атомиздат, 1972. – 351 с.

5 Левитов, Л.С. Функции Грина. Задачи и решения / Л.С. Левитов, А.В. Шитов // М.: Физматлит, 2003. – 392 с.

6 Maruyama T. Ferromagnetism of nuclear matter in the relativistic approach / T. Maruyama and T.Tatsumi // Nucl. Phys. A – 2001. – Vol. 693, Issues 3-4. – P. 710–730.

7 Серый, А.И. К вопросу о ферромагнетизме вырожденного нейтронно-протонного газа / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага універсітэта. Сер. Прыродазн. навук. – 2006. – № 1(25). – С. 31–38.

8 Серый, А.И. Об эффектах ядерного псевдомагнетизма в вырожденной нуклонной среде / А. И. Серый // Веснік Брэсцкага універсітэта. Сер. прыродазн. навук. – 2006. – № 2(26). – С. 33–43.

9 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. IX / Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. В 2 ч. Ч. 2. Теория конденсированного состояния / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // 3-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 496 с.