А.И. Серый, Н.В. Силаев, З.Н. Серая
Беларусь, Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

О КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ТИПА ГАУССА

В виде таблиц, которые можно использовать в учебном процессе, дано сравнение формул типа Гаусса [1, с. 150–157] для сумм вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{m} A_k f(x_k). \tag{1}$$

Таблица 1 – Пределы интегрирования, весовые функции и полиномы

Случай	a	b	$p(x)$	Узлы $\{x_k\}$ – корни полинома	
А	–1	+1	$\equiv 1$	Лежандра	$P_n(x)=\left(2^n n!\right)^{-1} d^n\left(x^2-1\right)^n / dx^n$
Б	–1	+1	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha>-1, \beta>-1$	Якоби	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\times$ $\times\left(2^n n!\right)^{-1} d^n\left((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right)/dx^n$
В (ф-ла Мелера)	–1	+1	$\left(1-x^2\right)^{-1/2}$	Чебышева	$T_n(x)=\cos(n\arccos(x))$
Г	–∞	+∞	$\exp\left(-x^2\right)$	Чебышева–Эрмита	$H_n(x)=(-1)^n\exp\left(x^2\right)\dfrac{d^n}{dx^n}\exp\left(-x^2\right)$
Д	0	+∞	$x^{\alpha}e^{-x}, \alpha>-1$	Чебышева–Лягерра	$L_n^{(\alpha)}(x)=(-1)^n x^{-\alpha}e^{x}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^{\alpha+n}e^{-x}\right)$

Таблица 2 – Узлы, коэффициенты и погрешности

<table>
<tr><th>Сл.</th><th>Выраж. для $\{x_k\}$</th><th>Выражение для $\{A_k\}$</th><th>Остаток $R_n(f)=Nf^{(2n)}(\xi)$</th></tr>
<tr><td>А</td><td rowspan="2">нет общей формулы, зависящей от k</td><td>$2\left(1-x_k^2\right)^{-1}\left(P_n'(x_k)\right)^{-2}$</td><td>$N=2^{2n+1}(n!)^4/\left((2n+1)((2n)!)^3\right)$</td></tr>
<tr><td>Б</td><td>$2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)\times$ $\times\left(1-x_k^2\right)^{-1}\left(P_n'^{(\alpha,\beta)}(x_k)\right)^{-2}(n!)^{-1}\div$ $\div\Gamma(\alpha+\beta+n+1)$</td><td>слишком сложная формула</td></tr>
<tr><td>В</td><td>$\cos(\pi(2k-1)/(2n))$</td><td>π/n</td><td>$N=\pi/\left(2^{2n-1}(2n)!\right)$</td></tr>
<tr><td>Г</td><td rowspan="2">нет общей формулы, зависящей от k</td><td>$2^{n+1}n!\sqrt{\pi}\left(H_n'(x_k)\right)^{-2}$</td><td>$N=n!\sqrt{\pi}/\left(2^n(2n)!\right)$</td></tr>
<tr><td>Д</td><td>$n!\Gamma(\alpha+n+1)x_k^{-1}\left(L_n'^{(\alpha)}(x_k)\right)^{-2}$</td><td>$N=n!\Gamma(\alpha+n+1)/(2n)!$</td></tr>
</table>

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по методам вычислений / П. И. Монастырный [и др.]. – Минск : БГУ, 1983. – 287 с.