А. И. СЕРЫЙ, З. Н. СЕРАЯ

УО «БрГУ имени А.С. Пушкина» (Брест, Беларусь)

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ СВЕДЕНИЙ О ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ВЕКТОРОВ

При подготовке к обзорным лекциям возникает необходимость изложить освещаемые вопросы в наиболее компактном и систематичном виде, что привело к появлению следующих методических наработок.

Таблица 1 – Некоторые общие характеристики скалярного, векторного и смешанного произведений векторов

	Природа объекта	Количество сомножителей	Определение	Условие равенства нулю при ненулевых сомножителях
Скалярное произведение	Число	2	$\bar{a}\cdot\bar{b}=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\cos\alpha$	$\bar{a}\perp\bar{b}$
Векторное произведение	Вектор	2	1) $\bar{a}\times\bar{b}\perp\bar{a}$, $\bar{a}\times\bar{b}\perp\bar{b}$; 2) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ – правая тройка векторов; 3) $\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert=\lvert\bar{a}\rvert\cdot\lvert\bar{b}\rvert\sin\alpha$	$\bar{a}\parallel\bar{b}$
Смешанное произведение	Число	3	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}\cdot\bar{c}$	$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны

Продолжение таблицы 1

	Формула для вычисления через координаты векторов-сомножителей	Геометрический смысл	Как ведет себя при перестановках сомножителей
Скалярное произведение	$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$	$\bar{a}\cdot\bar{e}=np_{\bar{e}}\bar{a}$, где $\bar{e}$ – орт	$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$
Векторное произведение	$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$	$\lvert\bar{a}\times\bar{b}\rvert=S$ параллелограмма	$\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$
Смешанное произведение	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$	$\lvert\bar{a}\bar{b}\bar{c}\rvert=V$ параллелепипеда	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}=$ $=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}$

Основные сведения о произведениях векторов, в том числе представленные в таблице 1, можно структурировать иначе. В таблице 2 представлен пример такой структуризации по следующим признакам:

а) название;

б) общая запись;

в) индексная запись (в том числе, с использованием символов Леви-Чивиты);

г) может ли меняться результат при всевозможных перестановках исходных векторов.

Таблица 2 – Общие характеристики произведений векторов

Количество векторов	2	3
Результат – скаляр	а) скалярное произведение; б) $c=(\bar{a},\bar{b})$; в) $c=a_i b_i$; г) нет	а) смешанное произведение; б) $d=([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})$; в) $d=\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$; г) может менять знак
Результат – вектор	а) векторное произведение; б) $\bar{c}=[\bar{a},\bar{b}]$; в) $c_i=\varepsilon_{ijk}a_j b_k$; г) меняет знак	а) двойное векторное произ-ведение; б) $\bar{d}=[[\bar{a},\bar{b}],\bar{c}]$; в) $d_i=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}a_l b_m c_k$; г) да
Результат – тензор	а) тензорное произведение; б) $c=(\bar{a}\cdot\bar{b})$; в) $c_{ij}=a_i b_j$; г) да	а) двойное тензорное произ-ведение; б) $c=(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})$; в) $c_{ijk}=a_i b_j c_k$; г) да

Данный материал составлен на основе [1, с. 20 – 23], [2, с. 30 – 39].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воднев, В. Т. Основные математические формулы : справочник / В. Т. Воднев, А. Ф. Наумович, Н. Ф. Наумович ; под ред. Ю. С. Богданова. – Минск : Выш. шк., 1995. – 380 с.

2. Власов, В. Г. Конспект лекций по высшей математике / В. Г. Власов. – М. : Айрис, 1996. – 228 с.