

УДК 536

В. С. СЕКЕРЖИЦКИЙ, А. И. СЕРЫЙ

Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

**О РЕЖИМАХ ОПИСАНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ФЕРМИ-ГАЗА
ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ**

При произвольном соотношении между энергией покоя отдельной частицы mc^2 (m – масса фермиона, c – скорость света в вакууме), энергией Ферми (или произведением $p_F c$, где p_F – импульс Ферми) и тепловой энергией kT (k – постоянна Больцмана) точное аналитическое описание характеристик ферми-газа, вообще говоря, невозможно даже в приближении его идеальности. В связи с этим для удобства описания применяются разные модельные приближения, в рамках которых благодаря математическим упрощениям удается получить точные или приближенные аналитические выражения для тех или иных величин [1, с. 7–9, 47–50; 2, с. 277–284].

В связи с этим представляет интерес классификация случаев, соответствующих различным соотношениям между тремя указанными выше видами энергии (с точки зрения равенства или существенного различия по порядку величины). Соответствующие таблицы приведены ниже. При этом оказывается, что при некоторых сочетаниях соответствующие модели некорректны с точки зрения устойчивости по отношению к образованию пар «частица-античастица». Данная классификация может быть усложнена учетом потенциальной энергии взаимодействия фермионов и их энергией во внешних полях (например, в постоянном магнитном).

Таблица 1 – Сочетания условий, при которых ферми-газ релятивистский

Соотношения	$kT \ll mc^2$	$kT \sim mc^2$	$kT \gg mc^2$
$p_F c \ll mc^2$	нет	да	да (ультрарелятивистский предел)
$p_F c \sim mc^2$	да	да	
$p_F c \gg mc^2$	да (ультрарелятивистский предел)		

Таким образом, к необходимости считать газ релятивистским приводят, по крайней мере, два фактора, в связи с чем некоторые сведения из таблицы 1 можно представить в другой форме и дополнить (таблица 2).

В связи с тем, что мы анализируем соотношения между тремя разновидностями энергии, получается 3 типа соотношений между ними, сравнительная характеристика которых приведена в таблице 3.

Таблица 2 – Сравнение условий, при которых ферми-газ релятивистский

Условие	$p_F c \sim mc^2$ или $p_F c \gg mc^2$	$kT \sim mc^2$ или $kT \gg mc^2$
Газ релятивистский, потому что у большинства частиц	кинетическая энергия не мала по сравнению с энергией покоя независимо от того, какова температура	кинетическая энергия не мала по сравнению с энергией покоя независимо от того, какова концентрация
Является ли условие достаточным для рождения пар в общем случае	да, но с оговоркой относительно предельного случая (см. ниже)	да, но с оговоркой относительно предельного случая (см. ниже)
Доля античастиц по сравнению с частицами уменьшается по мере	стремления температуры к нулю (в крайнем вырожденном случае в фазовом пространстве нет свободных ячеек для новых частиц, поэтому пары не рождаются)	роста концентрации частиц (при очень больших концентрациях исходных частиц сложнее приблизить концентрацию античастиц к такому же значению, как у частиц)
Достигнем ли предельный случай	нет (в соответствии с третьим началом термодинамики)	нет (так как концентрация не может быть бесконечной)

Таблица 3 – Сравнительная характеристика основных соотношений для ферми-газа

Соотношение		А. $x = kT/(mc^2)$	Б. $x = p_F c/(mc^2)$	В. $x = kT/(p_F c)$
1. Смысл		необходимость применения релятивистских формул и учета рождения пар	необходимость применения релятивистских формул	степень вырождения
2.1. Случай $x \ll 1$	как называется газ	газ нерелятивистский, если случай 2.1 одновременно реализуется и для соотношения А, то газ реализуется и для соотношения Б	если случай 2.1 одновременно реализуется и для соотношения А, то газ нерелятивистский	газ вырожденный

Продолжение таблицы 3

	математические упрощения	рождением пар можно пренебречь	если газ нерелятивистский, то в формуле для энергии отдельной частицы нет радикала	функция распределения частиц по энергии близка к «ступеньке»
2.2. Случай $x \gg 1$	как называется газ	газ ультрарелятивистский	газ ультрарелятивистский	газ невырожденный
	математические упрощения	если случай 2.2 не реализуется для соотношения Б, то количество частиц и античастиц практически одинаково	в формуле для энергии отдельной частицы нет радикала	можно пренебречь единицей в знаменателе распределения по сравнению с единицей

Самым общим случаем является ситуация, когда

$$mc^2 \sim kT \sim p_F c. \quad (1)$$

В этом случае какие-либо математические упрощения, упомянутые выше, невозможны. Классификацию остальных сочетаний рассмотрим ниже (таблицы 4–6).

Таблица 4 – Сочетание условий, при котором $x \sim y \ll z$

z	x, y	Газ с точки зрения характера описания
mc^2	$kT, p_F c$	невырожденный нерелятивистский
kT	$mc^2, p_F c$	невырожденный ультрарелятивистский
$p_F c$	mc^2, kT	вырожденный ультрарелятивистский

Таблица 5 – Сочетание условий, при котором $x \ll y \sim z$

x	y, z	Газ с точки зрения характера описания
mc^2	$kT, p_F c$	невырожденный ультрарелятивистский
kT	$mc^2, p_F c$	вырожденный релятивистский
$p_F c$	mc^2, kT	невырожденный релятивистский

Таблица 6 – Сочетание условий, при котором $x \ll y \ll z$

x	y	z	Газ с точки зрения характера описания
mc^2	kT	$p_F c$	вырожденный ультррелятивистский
mc^2	$p_F c$	kT	невырожденный ультррелятивистский
kT	$p_F c$	mc^2	вырожденный нерелятивистский
kT	mc^2	$p_F c$	вырожденный ультррелятивистский
$p_F c$	mc^2	kT	невырожденный ультррелятивистский
$p_F c$	kT	mc^2	невырожденный нерелятивистский

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

2. Румер, Ю.Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика: учеб. пособие. / Ю.Б. Румер, М.Ш. Рывкин. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. ун-та, 2000. – 608 с.