УДК 536+537.6

А. И. СЕРЫЙ

ХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ КРАЙНЕ ВЫРОЖДЕННОГО ИДЕАЛЬНОГО НЕРЕЛЯТИВИСТСКОГО ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Электронный газ в квантующем магнитном поле относится, в частности, к объектам исследования астрофизики. В ряде задач допустимо использование его модели, в которой он считается идеальным, вырожденным и поляризованным по спину.

Уравнение, связывающее химический потенциал $\zeta_e(B)$ идеального вырожденного электронного газа с концентрацией n_e в магнитном поле с индукцией B (где m_e – масса электрона, μ_B – магнетон Бора) может быть записано на основе сведений из [1, с. 19] (без учета аномального магнитного момента электрона) следующим образом:

$$n_e = A\left(\sqrt{\zeta_e(B)} + 2\sum_{j=1}^{k}\sqrt{\zeta_e(B) - \mu_B B \cdot 2j}\right), \qquad (1)$$

$$A = \frac{(2m_e)^{3/2}\,\mu_B B}{2\pi^2\hbar^3}. \qquad (2)$$

Суммирование ведется до тех пор, пока подкоренное выражение, соответствующее следующему слагаемому, не станет отрицательным. При $k=0$ сумма в правой части (1) пропадает, поэтому величина $\zeta_e(B)$ с учетом (2) легко выражается через остальные:

$$\zeta_e(B)=\frac{n_e^2\pi^4\hbar^6}{2m_e^3(\mu_B B)^2}. \qquad (3)$$

При $k=1$ для $\zeta_e(B)$ получается квадратное уравнение, которое для удобства анализа корней после несложных преобразований перепишем следующим образом:

$$9\zeta_e^2(B)-\left(48\mu_B B+10\frac{n_e^2}{A^2}\right)\zeta_e(B)+\left(8\mu_B B+\frac{n_e^2}{A^2}\right)^2=0. \qquad (4)$$

Общее выражение для обоих корней уравнения (4) выглядит следующим образом:

$$\zeta_{e(\pm)}(B)=\frac{48\mu_B B+10\dfrac{n_e^2}{A^2}\pm\sqrt{384\mu_B B\dfrac{n_e^2}{A^2}+64\dfrac{n_e^4}{A^4}}}{18}. \qquad (5)$$

Поскольку $\zeta_e(B)$ определяется однозначно, следует оставить только один корень.

Из (1) при $k=1$ легко сделать оценки:

$$\zeta_e(B)>\frac{n_e^2}{9A^2}, \qquad (6)$$

$$\zeta_e(B)<\frac{n_e^2}{9A^2}+2\mu_B B. \qquad (7)$$

Для установления границ корней (5) можно либо пренебрегать слагаемым, зависящим от B, под радикалом, либо дополнять подкоренное выражение до полного квадрата.

В результате получим:

$$\zeta_{e(-)}(B) > \frac{n_e^2}{9A^2} + \frac{4}{3}\mu_B B, \tag{8}$$

$$\zeta_{e(-)}(B) < \frac{n_e^2}{9A^2} + \frac{8}{3}\mu_B B. \tag{9}$$

$$\zeta_{e(+)}(B) > \frac{n_e^2}{A^2} + \frac{8}{3}\mu_B B, \tag{10}$$

$$\zeta_{e(+)}(B) < \frac{n_e^2}{A^2} + 4\mu_B B. \tag{11}$$

Неравенства (8), (9) и (11) не противоречат неравенствам (6) и (7), а неравенство (10) противоречит неравенству (7). Поэтому в (5) оставляем только корень $\zeta_{e(-)}(B)$.

С дальнейшим ростом k получаются уравнения, сводимые к уравнениям четвертой и более высоких степеней.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.