

В.А. ПЛЕТЮХОВ, В.С. СЕКЕРЖИЦКИЙ, А.И. СЕРЫЙ
 УО «БрГУ имени А.С. Пушкина» (Брест, Беларусь)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КИНЕМАТИКИ

Приведем текст одной известной задачи по специальной теории относительности (СТО) (см., например, [1, с. 4]).

Собственное время жизни мюона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Определите, с какой скоростью относительно Земли должен лететь мюон, чтобы пролететь расстояние $l = 30$ км.

Применяя соответствующие формулы релятивистской кинематики, несложно получить следующий ответ [1, с. 18]:

$$v = l / \sqrt{\tau_0^2 + l^2 / c^2} = c / \sqrt{1 + c^2 \tau_0^2 / l^2} = (l / \tau_0) / \sqrt{1 + l^2 / (c^2 \tau_0^2)}. \quad (1)$$

Подстановка численных данных в (1) показывает, что $c \tau_0 / l \ll 1$, что соответствует ультрарелятивистскому случаю, когда $v/c \rightarrow 1$.

При решении этой задачи у студентов могут возникать следующие замечания.

1. Если мы хотим представить ответ в форме, отличной от $v \rightarrow c$, то получим $v \approx 0,99976c \approx 0,9998c$, т.е. потребуются выписать как минимум четыре знака после запятой, а это, на первый взгляд, противоречит правилам приближенных вычислений, поскольку исходные данные в условии приводятся с меньшей точностью. Даже может возникнуть желание в качестве подтверждающего аргумента привести пример обоснования нецелесообразности учета релятивистских поправок при скоростях $v \approx 8$ км/с [2, с. 15, 71], поскольку это обоснование основано на том, что величина v^2/c^2 значительно меньше погрешности, с которой определены значения исходных данных. Нельзя ли для решения проблемы выбрать меньшее значение l ?

2. Само справочное значение скорости света не является точным, что вносит дополнительную погрешность в значение скорости v .

Разберем возможные ответы на указанные замечания. Начнем со второго из них. Значение v в ответе отличается от c на $0,00024c$, а погрешность, с которой определено значение c , равно $1,2$ м/с [3, с. 632], что по порядку величины не превосходит $10^{-8}c$. Следовательно, указанное замечание несущественно, хотя допустимо для большей строгости искать не величину v , а величину $\beta = v/c$, и в этом случае второе замечание устраняется автоматически. Целесообразность такой замены может быть аргументирована еще и тем обстоятельством, что некоторые студенты по невнимательности воспринимают запись « $0,9998c$ » как $0,9998$ секунды, совершая грубую ошибку, а в случае записи « $\beta = 0,9998$ » вероятность подобных ошибок существенно снижается.

Что касается первого замечания, то, учитывая изложенный выше ответ на второе замечание, из второго варианта формулы (1) получаем:

$$\beta = \left(1 + c^2 \tau_0^2 / l^2\right)^{-1/2} \approx \left(1 + c^2 \tau_0^2 / (2l^2)\right)^{-1} \approx 1 - c^2 \tau_0^2 / (2l^2). \quad (2)$$

С учетом точности исходных данных получаем, что $c^2 \tau_0^2 / (2l^2) \approx 2,4 \cdot 10^{-4}$. Здесь следует подчеркнуть, что единица в разложении (2) является точной, а не приближенной, поэтому можно записать $1,00000 - 0,00024 = 0,99976$, поэтому противоречия с правилами приближенных вычислений нет. Вместе с тем, для облегчения восприятия этого результата можно предложить следующие альтернативные варианты.

А. Находить величину $1 - \beta$ вместо β . Недостатком этого подхода является то обстоятельство, что величина $1 - \beta$ не находит широкого практического применения.

Б. Находить величину $y = 0,5 \ln((1 + \beta)/(1 - \beta))$ (быстроту). Недостатком такого подхода является потеря взаимосвязи с формулами классической кинематики, а также невозможность применения на школьном уровне.

В. Находить величину $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, что допустимо и на школьном уровне, а также широко применяется в физике ускорителей, поскольку величина γ в ультрарелятивистском режиме, как и y , довольно чувствительна к малейшим изменениям β .

На возможность уменьшения значения l имеется следующее возражение. Главным достоинством задачи является тот факт, что наличие релятивистского эффекта (т.е. справедливости релятивистских формул) становится очевидным даже при оценочных расчетах, поскольку выбранное значение $l = 30$ км (соответствующее эксперименту) призвано как можно убедительнее показать, что применение нерелятивистской формулы

$l = v\tau_0$ не позволит преодолеть такое расстояние даже при $v \approx c$ (получится $l = 6,6 \cdot 10^2$ м \ll 30 км), а при малых l теряется смысл применения (1), так как нерелятивистская формула даст практически тот же ответ.

Возникает, однако, еще один вопрос: следует ли округлять ответ до $\beta = 0,9998$ или можно оставить его в виде $\beta = 0,99976$? Для ответа на вопрос следует найти абсолютную погрешность для β . Из (2) получаем:

$$\Delta\beta = \sqrt{\left(\frac{\partial\beta}{\partial l}\right)^2 (\Delta l)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial\tau_0}\right)^2 (\Delta\tau_0)^2} = \frac{c^2\tau_0\sqrt{\tau_0^2(\Delta l)^2/l^2 + (\Delta\tau_0)^2}}{(1 + c^2\tau_0^2/l^2)^{3/2}l^2}. \quad (3)$$

Подстановка численных данных дает $\Delta\beta \approx 1,4 \cdot 10^{-5}$, поэтому последняя цифра в ответе $\beta = 0,99976$ является неверной, и ответ следует округлить до $\beta = 0,9998$. Вместе с тем, несмотря на то что современное значение τ_0 определено еще точнее, чем в условии задачи, про l такого сказать нельзя, в том числе по той причине, что статистический разброс времен жизни отдельных мюонов (помимо прочих факторов) неизбежно приведет к разбросу значений l . Если в условии задачи дать $l = 3 \cdot 10^4$ м (т.е. увеличить Δl в 10 раз), то из (3) получим, что $\Delta\beta \approx 0,8 \cdot 10^{-4}$, т.е. даже в ответе $\beta = 0,9998$ последняя цифра становится, по крайней мере, сомнительной. Это замечание заслуживает отдельного обсуждения.

С учетом сказанного выше можно дать, по крайней мере, следующую формулировку условия задачи. *Собственное время жизни мюона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ с. Определите значение $\beta = v/c$ для мюона, если относительно Земли он успел пролететь расстояние: а) $l = 30$ м; б) $l = 25$ км; в) $l = 30$ км. Сравните результаты, которые получаются в рамках кинематики: I) нерелятивистской; II) релятивистской. Сделайте выводы о том, какие из полученных результатов имеют физический смысл и для каких расстояний нет существенного различия между результатами нерелятивистских и релятивистских расчетов.*

Получаем следующие ответы. I) а) $\beta = l/(c\tau_0) = 0,0455 \approx 0,046$; б) $\beta = 30$; в) $\beta = 46$; II) а) $\beta = 1/\sqrt{1 + c^2\tau_0^2/l^2} = 0,0454 \approx 0,045$; б) $\beta = 0,9997$; в) $\beta = 0,9998$. Имеют физический смысл те из полученных результатов, где $\beta < 1$. Для расстояния 30 м нет существенного различия между результатами нерелятивистских и релятивистских расчетов, а в ультрарелятивистском случае небольшое изменение β (примерно на 0,0001) приводит к заметному изменению l (на несколько километров).

Помимо β можно также найти значение γ , а студентам непедagogических специальностей – предложить найти еще и значение u (см. выше).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теоретическая физика. Основы теории относительности. Электро-динамика: Практикум / Сост. В. А. Плетюхов, М. А. Иванов. – Брест: БрГУ им. А.С. Пушкина, 2003. – 24 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1979. – Т. 1 : Механика. – 520 с.
3. Сивухин, Д. В. Общий курс физики : учеб. пособие для вузов : в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1980. – Т. 4 : Оптика. – 752 с.