УДК 539.171.11

А.И. Серый

К ВОПРОСУ О СИНГЛЕТНОМ СОСТОЯНИИ СИСТЕМЫ «НЕЙТРОН-ПРОТОН» В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

По аналогии с задачей Ю.А. Бычкова о связывании электрона мелкой потенциальной ямой в присутствии внешнего магнитного поля обсуждается возможность образования связанного синглетного дейтрона во внешнем магнитном поле в рамках теории эффективного радиуса без учёта пионного обмена. В рамках адиабатического приближения с использованием «вторичного опрямоугольивания» эффективного потенциала показано, что такое образование возможно, однако результаты могут рассматриваться лишь как оценочные.

Как известно, у дейтрона в отсутствие внешних полей связанным является только триплетное состояние ($S = 1$). При рассмотрении ядерного взаимодействия в приближении прямоугольной потенциальной ямы и теории эффективного радиуса без учёта пионного обмена на больших расстояниях волновая функция в пределах ямы не зависит от углов и, как известно, имеет вид [3, с. 11]:

$$\Psi_{\text{внутр}} = C' \sin(\hbar^{-1}(2M^*_{\text{np}}(|V_{0t}| - |\varepsilon|))^{1/2} r)/r. \quad (1)$$

Здесь $|V_{0t}| \approx 48.1$ МэВ [4, с. 115] – глубина потенциальной ямы, $|\varepsilon| \approx 2.224$ МэВ – энергия связи, M^*_{np} – приведённая масса нейтрона и протона. При этом легко проверить, что условия «сшиваемости» с внешней функцией (при $r = r_{0t} = 1.76 \cdot 10^{-13}$ см [3, с. 20] – эффективном триплетном радиусе) и отсутствия нулей у внутренней волновой функции выполняются:

$$\pi/2 < K_{0t} r_{0t} < \pi, \; K_{0t} = \hbar^{-1}(2M^*_{\text{np}}(|V_{0t}| - |\varepsilon|))^{1/2}. \quad (2)$$

Синглетное состояние системы «нейтрон-протон» ($S = 0$) не является связанным, однако имеется т. н. мелкий виртуальный уровень ($\varepsilon_{\text{вирт}} \approx 0.07$ МэВ). «Говорят, что в поле имеется виртуальный уровень, имея в виду, что хотя в действительности никакого близкого к нулю уровня нет, но уже небольшого изменения поля было бы достаточно для того, чтобы такой уровень появился» [1, с. 668]. В самом деле, если взять параметры синглетного состояния $r_{0s} = 2.70 \cdot 10^{-13}$ см [3, с. 20], $|V_{0t}| \approx 12.7$ МэВ (это значение несложно получить геометрически по данным о длине рассеяния – см., напр., [3, с. 17]) и положить в K_{0s} $|\varepsilon| = 0$, то видно, что (2) не выполняется, однако если представить, что для синглетного состояния $\Psi_{\text{внутр}}$ выглядит аналогично (1), то для достижения фазы $\pi/2$ при $r = r_{0s}$ синусоиде не хватает

$$(\pi/2 - K_{0s} r_{0s})/2\pi \approx 0.011 \quad (3а)$$

длины волны, т. е. фазу нужно увеличить всего лишь на

$$(\pi/2 - K_{0s} r_{0s})/(K_{0s} r_{0s}) \approx 0.045 = 4.5\%. \quad (3б)$$

В [4, с. 184] на примере задачи о наложении на ядерную протон-протонную яму отталкивающего кулоновского взаимодействия показывается, как существенно при мелком виртуальном уровне уже при небольшом изменении потенциала меняется длина рассеяния. Мы же будем налагать на ядерную нейтрон-протонную яму магнитное поле в пренебрежении возможным влиянием последнего на зависимость параметров низкоэнергетического нуклон-нуклонного рассеяния от углов. В литературе имеются решения задач (см., напр., [1, с. 557, 558; 2, с. 180, 181, 240 – 245]), где показывается, что при наличии в пространстве однородного магнитного поля у заряжённой частицы в произвольном потенциале притяжения, удовлетворяющем условиям $U(r) \leq 0$, $U(r) \to 0$ при $r \to \infty$, всегда имеются стационарные состояния, в которых она локализована в ограниченной области пространства (причём не только в поперечном направлении), так что при наличии магнитного поля любая яма может «связать» частицу. Образование связанных состояний частицы даже в случае мелкой ямы допускает простое объяснение: в поперечном направлении частица «связывается» уже одним магнитным полем, а наличие последней приводит к связыванию и в продольном направлении, как это всегда имеет место при одномерном движении (см., напр., [2, с. 31]).

Частный случай задачи о связывании заряжённой частицы потенциальной ямой в магнитном поле рассмотрел ещё в 1960 г. Ю.А. Бычков. Им была решена задача (в рамках адиабатического приближения) на определение нижнего уровня энергии, отвечающего связанному состоянию электрона (у нас вместо электрона – протон) в потенциальной яме $U(r)$ малой глубины

$$|U| << \hbar^2/mr_0^2, \tag{4}$$

где r_0 – радиус действия сил в яме. При этом на яму наложено также и однородное магнитное поле вдоль оси z (эта задача приведена после §112 в 3-м томе курса Ландау-Лифшица [1, с. 557, 558], а также в [2, с. 181]). Поставленное для поля $U(r)$ условие обеспечивает (в отсутствие магнитного поля) применимость к нему теории возмущений. При этом связанные состояния в яме отсутствуют (при отсутствии магнитного поля). При наличии также и магнитного поля поле $U(r)$ можно рассматривать как возмущение лишь для движения в поперечной к **B** плоскости, дискретный характер энергетического спектра которого не меняется. Характер же движения в направлении **B** меняется: оно становится финитным, т. е. спектр из непрерывного дискретным; поэтому для этого движения поле ямы уже нельзя рассматривать по теории возмущений.

Существенным отличием от задачи Бычкова является тот факт, что в нашем случае обе части (4) оказываются одного порядка, что легко проверить. Т. е. ядерная яма оказывается гораздо более глубокой. С качественной точки зрения это более благоприятно, однако с математической точки зрения применение адиабатического приближения к поперечному движению носит уже лишь оценочный характер, поскольку при (4) яма не может сильно исказить поперечные волновые функции (6), чего нельзя гарантировать в нашем случае. Кроме того, у Бычкова яма сугубо притягивающая. И хотя у нас в рамках теории эффективного радиуса она также притягивающая, но до известных пределов: на больших расстояниях существенную роль играет пионный обмен, из-за чего потенциал оказывается вообще отталкивающим (на это автору указал научный руководитель В.В. Тихомиров). Это может сделать ситуацию в целом менее благоприятной по сравнению с задачей Бычкова. Однако учёт пионного обмена заслуживает отдельной работы.

В адиабатическом приближении волновые функции предполагаются сепарабельными: $\Psi_{внутр} = R_{внутр}(\rho)\chi_{внутр}(z)$, $\Psi_{внеш} = R_{внеш}(\rho)\chi_{внеш}(z)$. Возьмём за основу уравнение Шрёдингера для заряжённой частицы без энергии спина в магнитном поле [1, с. 556] (она не влияет на финитность-инфинитность движения частицы) с калибровкой векторного потенциала $A_\varphi = B\rho/2$, $A_\rho = A_z = 0$. Предполагая, что виртуальный уровень смог превратиться в реальный, и заменяя массу электрона ан приведённую массу нейтрона и протона, запишем для области действия ядерных сил и для внешней области соответственно (с учётом наинизшей циклотронной энергии протона во внешем магнитном поле):

$$-\hbar^2(2M^*_{\text{пр}})^{-1}[\rho^{-1}\partial/\partial\rho(\rho\partial\Psi_{\text{внутр}}/\partial\rho) + \partial^2\Psi_{\text{внутр}}/\partial z^2] + (M_p\mu_{\text{я}}B/\hbar)^2(2M^*_{\text{пр}})^{-1}\rho^2\Psi_{\text{внутр}} - \\ - |V_{0s}|\Psi_{\text{внутр}} = (M_p\mu_{\text{я}}B/M^*_{\text{пр}} - |\varepsilon|)\Psi_{\text{внутр}}, \quad (5а)$$

$$-\hbar^2(2M^*_{\text{пр}})^{-1}[\rho^{-1}\partial/\partial\rho(\rho\partial\Psi_{\text{внеш}}/\partial\rho) + \partial^2\Psi_{\text{внеш}}/\partial z^2] + (M_p\mu_{\text{я}}B/\hbar)^2(2M^*_{\text{пр}})^{-1}\rho^2\Psi_{\text{внеш}} = \\ = (M_p\mu_{\text{я}}B/M^*_{\text{пр}} - |\varepsilon|)\Psi_{\text{внеш}}. \quad (5б)$$

Можно убедиться, что если положить $|V_{0s}| = 0$, $|\varepsilon| = 0$, т. е. оставить только магнитное поле, но сохранить приведённую массу, то основному состоянию протона будет соответствовать именно энергия $M_p\mu_{\text{я}}B/M^*_{\text{пр}}$, а не $\mu_{\text{я}}B$.

В адиабатическом приближении поперечная волновая функция берётся из решения уравнения Шрёдингера для заряжённой частицы сугубо в магнитном поле [1, с. 557], и притом как вне, так и внутри потенциальной ямы:

$$R(\rho) = (M_p\omega_B/\hbar)^{1/2}\exp\{-M_p\omega_B(4\hbar)^{-1}\rho^2\}. \quad (6)$$

Условие нормировки выглядит следующим образом:

$$\int_0^\infty \rho R_{00}^2(\rho)d\rho = 1. \quad (7)$$

Учитывая сепарабельность волновых функций и подставляя (6) в (5а) и (5б), затем умножая (5а), (5б) слева на (6) и интегрируя по координатам поперечного движения (ρ), с учётом (7) и того обстоятельства, что потенциальная энергия равна нулю при $\rho^2 \geq r_{0s}^2 - z^2$, получаем следующие уравнения для продольных функций:

$$\chi''_{\text{внеш}} - 2M^*_{\text{пр}}\hbar^{-2}|\varepsilon|\chi_{\text{внеш}} = 0,\ \chi''_{\text{внутр}} - 2M^*_{\text{пр}}\hbar^{-2}(\tilde{U}(z) + |\varepsilon|)\chi_{\text{внутр}} = 0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{U}(z) = -|V_{0s}|(1 - \exp\{-r_{0s}^2/2a_B^2\}\exp\{z^2/2a_B^2\}). \quad (9)$$

$\tilde{U}(z)$ представляет собой эффективный одномерный потенциал, зависящий от z. Решение для $\chi_{\text{внеш}}(z)$, стремящееся к нулю при $z \to \infty$, выглядит следующим образом:

$$\chi_{\text{внеш}}(z) = C_1\exp(-\hbar^{-1}(2M^*_{\text{пр}}|\varepsilon|)^{1/2}|z|). \quad (10)$$

Для нахождения $\chi_{\text{внутр}}$ вместо поисков решения (8) можно получить иное, эквивалентное ему уравнение, точное решение которого находится легко. Поскольку первоначальное представление ядерного взаимодействия через прямоугольную потенциальную яму является довольно сильным упрощением, то мы не уйдём от истины намного дальше, если совершим усреднение эффективного потенциала (9) по координате в пределах $[-r_{0s}, r_{0s}]$. Для того чтобы интеграл был берущимся, будем усреднять выражение $|z|\tilde{U}(z)$. В результате получим:

$$<\tilde{U}(z)> = -U_0(B) = -|V_{0s}|(1 - 2(a_B/r_{0s})^2(1 - \exp\{-r_{0s}^2/2a_B^2\})). \qquad (11)$$

График (в логарифмическом масштабе) представлен на Рис. 1. Он близок к прямой линии вплоть до $B \sim 10^{18}$ Гс. Некоторые данные приведены также в табл. 1.

Итак, вместо 2-го уравнения (8) получим:

$$\chi''_{внутр} + 2M^*_{np}\hbar^{-2}(|U_0(B)| - |\varepsilon|)\chi_{внутр} = 0, \qquad (12)$$

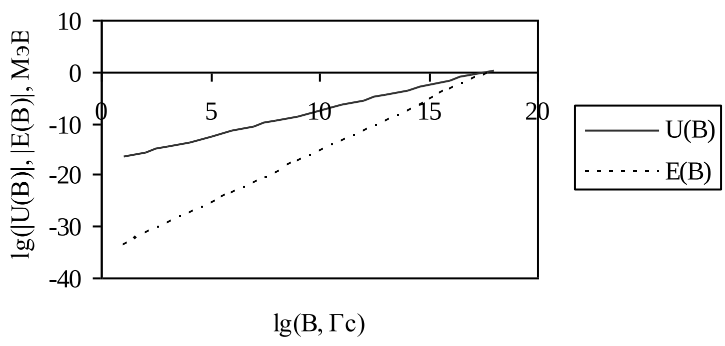
$$\chi_{внутр} = D_1\cos(\hbar^{-1}(2M^*_{np}(|U_0(B)| - |\varepsilon|))^{1/2}z) + D_2\sin(\hbar^{-1}(2M^*_{np}(|U_0(B)| - |\varepsilon|))^{1/2}|z|). \qquad (13)$$

Для того чтобы $\chi_{внутр}$ была дифференцируемой при $z = 0$, необходимо положить $D_2 = 0$. Тогда из условий «сшивания» (10) и (13) получаем трансцендентное уравнение относительно $|\varepsilon|$ для различных значений B как параметра:

$$\mathrm{ctg}(\hbar^{-1}r_{0s}(2M^*_{np}(|U_0(B)| - |\varepsilon|))^{1/2}) = (|U_0(B)|/|\varepsilon| - 1)^{1/2}. \qquad (14)$$

Это уравнение решается численно. График в логарифмическом масштабе представлен на Рис. 1. Как и для эффективного потенциала, он представляет собой прямую линию вплоть до очень сильных магнитных полей.

Рис.1. Зависимость глубины эффективного одномерного потенциала и энергетического уровня синглетного дейтрона от магнитного поля



Можно привести значения длин рассеяния, соответствующих некоторым значениям энергии, которые являются решениями (14) при различных B. Возьмём B, характерные для белых карликов и нейтронных звёзд. В случае связанного состояния длина рассеяния, как известно, связана с энергией связи соотношением [3, с. 19]

$$a_s = 1/((2M^*_{np}|\varepsilon_s|/\hbar^2)^{1/2} - M^*_{np}|\varepsilon_s|r_{0s}/\hbar^2). \qquad (15)$$

В неполяризованном нейтрон-протонном газе синглетное сечение низкоэнергетического нейтронно-протонного рассеяния выражается так [3, с. 15]:

$$\sigma_s = 4\pi a_s^2/4 = \pi a_s^2. \quad (16)$$

Данные для синглетного состояния для некоторых магнитных полей приведены в табл. 1. С количественной точки зрения данные, особенно по длинам рассеяния и синглетным сечениям для слабых полей, вряд ли правдоподобны. Однако это всё равно говорит о важности учёта влияния магнитного поля на смещение ε_s даже при пионном обмене.

Не следует также забывать, что триплетный уровень дейтрона лежит ниже синглетного, поэтому при синглетных столкновениях нейтрона и протона возможен радиационный захват нейтрона с испусканием магнитного дипольного кванта и переходом системы в триплетное состояние (соответствующее сечение $\sigma(n, \gamma) = 3 \cdot 10^{-25}$ см^2 для тепловых нейтронов) [5, с. 403]. Но если нуклонная среда сильно вырождена, то состояние какого-либо нуклона с перевёрнутым спином может оказаться занятым или энергетически недоступным, поэтому $\sigma(n, \gamma)$ будет подавлено.

Таблица 1.

Влияние магнитного поля на некоторые параметры системы «нейтрон-протон» в адиабатическом приближении по отношению к движению в магнитном поле

B, Гс	$\lvert U_{0s}(B)\rvert$, МэВ	$\lvert\varepsilon_s\rvert$, МэВ	a_s, см	σ_s, см^2
10^4	$3.52 \cdot 10^{-14}$	$2.182 \cdot 10^{-28}$	43.6	5972
10^6	$3.52 \cdot 10^{-12}$	$2.182 \cdot 10^{-24}$	0.436	0.5972
10^8	$3.52 \cdot 10^{-10}$	$2.182 \cdot 10^{-20}$	$4.36 \cdot 10^{-3}$	$5.972 \cdot 10^{-5}$
10^{12}	$3.52 \cdot 10^{-6}$	$2.182 \cdot 10^{-12}$	$4.36 \cdot 10^{-7}$	$5.972 \cdot 10^{-13}$
10^{14}	$3.52 \cdot 10^{-4}$	$2.182 \cdot 10^{-8}$	$4.36 \cdot 10^{-9}$	$5.972 \cdot 10^{-17}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: Для вузов. В 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – 5-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2001. – 808 с. – ISBN 5-9221-0057-2 (Т. III).

2 Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике: Учебное пособие: В 2 ч. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2001. – Ч. 1. – 304 с.

3 Ситенко А. Г., Тартаковский В. К. Лекции по теории ядра. – М.: Атомиздат, 1972. – 351 с.

4 Галицкий В. М., Карнаков Б. М., Коган В. И. Задачи по квантовой механике: Учебное пособие: В 2 ч. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2001. Ч. 2. – 304 с.

5 Маляров В. В. Основы теории атомного ядра. – М.: Физматлит, 1959. – 472 с.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 21.04.2005 г.

***A.I. Sery.* On the Question of the Singlet State of «Neutron-Proton» System in Magnetic Field**

Similarly to Yu. A. Bychkov problem of electron bonding by a shallow potential well with the help of external magnetic field the possibility of bound singlet deuteron formation in external magnetic field in terms of effective radius theory ignoring pion exchange is discussed. In terms of adiabatic approximation with the help of the «secondary rectangulation» of effective potential such a formation is shown to be possible, but the results can be regarded as estimations only.