**А. И. БАСИК, З. Н. СЕРАЯ, А. А. ТРОФИМУК**
Брест, Беларусь, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

## СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ БрГУ ИМЕНИ А. С. ПУШКИНА (АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ)

В статье приводятся условия и решения задач по алгебре и геометрии студенческой олимпиады по математике (нумерация задач сохранена).

***Задача 1.*** Найти количество пятизначных натуральных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 1000.

*Решение.* Так как $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, то цифрами рассматриваемых в задаче чисел могут быть наборы $\{2,4,5,5,5\}$, $\{1,8,5,5,5\}$. Как в первом, так и во втором случае количество чисел с заданным набором цифр равно $\dfrac{5!}{3!} = 20$.

*Ответ:* 40.

***Задача 3.*** Имеются три квадратные вещественные матрицы одинакового порядка $A, B, C,$ причем матрица $A$ обратима и $(A-B)C = BA^{-1}$. Доказать, что $C(A-B) = A^{-1}B$.

*Решение.* Так как $(A-B)C = BA^{-1}$, то $(A-B)C - BA^{-1} + AA^{-1} = E$ и $(A-B)(C+A^{-1}) = E.$ Значит, матрица $A-B$ обратима. Тогда

$$(A-B)(C+A^{-1}) = E = (C+A^{-1})(A-B)$$

и $C(A-B) - A^{-1}B + AA^{-1} = E$. Таким образом, $C(A-B) = A^{-1}B$, что и требовалось доказать.

***Задача 4.*** Пусть $A(z)$, $B(2z-1)$, $C(z^2)$ – вершины треугольника $ABC$, расположенного на комплексной плоскости $\mathbf{C}$. При каких $z \in \mathbf{C}$ площадь треугольника $ABC$ является наибольшей, если $|z-1| = 2$?

*Решение.* Пусть $\overrightarrow{BA} = x_1 + iy_1$ и $\overrightarrow{BC} = x_2 + iy_2$, тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|x_2y_1 - x_1y_2\right| = \frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\left(x_1 + iy_1\right)\overline{\left(x_2 + iy_2\right)}\right|.$$

Так как $|z-1| = 2$, то $z = 1 + 2e^{i\varphi}$ при $\varphi \in (-\pi; \pi]$. Имеем

$$\overrightarrow{BA} = z - (2z-1) = 1 - z = -2e^{i\varphi},\ \overrightarrow{BC} = z^2 - (2z-1) = (z-1)^2 = 4e^{2i\varphi},$$

$$S_{\Delta ABC} = 4\left|\mathrm{Im}(e^{i\varphi} \cdot \overline{e^{2i\varphi}})\right| = 4\left|\mathrm{Im}(e^{-i\varphi})\right| = 4|\sin\varphi|.$$

Из последней формулы следует, что $S_{\Delta ABC}$ является наибольшей, если $|\sin\varphi| = 1$, т. е. при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $(z = 1+2i)$ или при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $(z = 1-2i)$.

Приведем решение этой задачи, предложенное студенткой третьего курса специальности «Прикладная математика» Татьяной Яцук.

Так как $AB = |1-z| = 2, CB = |(1-z)^2| = 4$ и $AC = |z^2 - z| = 2|z|,$ то полупериметр треугольника $ABC$ равен $3+|z|$, и по формуле Герона имеем

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{(3+|z|)(1+|z|)(|z|-1)(3-|z|)} =$$

$$= \sqrt{-9+10|z|^2 - |z|^4} = \sqrt{16-(|z|^2-5)^2}.$$

Из последней формулы следует, что $S_{\Delta ABC} \le 4,$ при этом $S_{\Delta ABC} = 4$ тогда и только тогда, когда $|z| = \sqrt{5}.$ Значения $z = x+iy$ теперь нетрудно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{5}, \\ |z-1| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y^2 = 4. \end{cases}$$

*Ответ:* $1+2i$, $1-2i$.

***Задача 6.*** Даны две скрещивающиеся прямые $l_1$ и $l_2$. Отрезок AB «скользит» своими вершинами вдоль $l_1$, отрезок CD – вдоль прямой $l_2$. Докажите, что объем тетраэдра ABCD – величина постоянная. Длины отрезков фиксированы.

*Решение.* Проведем через прямую $l_1$ плоскость $\pi_1$ параллельно $l_2$, а через прямую $l_2$ – плоскость $\pi_2$ параллельно $l_1$. Ясно, что $\pi_1 \| \pi_2$, $\rho(\pi_1, \pi_2) = \rho(l_1, l_2) = const.$

Проведем через точку *C* перпендикуляр к плоскости $\pi_1$ до пересечения с $\pi_1$ в точке *E*. Рассмотрим $\overline{e_1} = \overline{AB},$ $\overline{e_2} = \overline{CD},$ $\overline{e_3} = \overline{EC}.$ Пусть $|\overline{e_1}| = a,$ $|\overline{e_2}| = b.$ Ясно, что $|\overline{e_3}| = \rho(l_1, l_2).$ Тогда

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\overline{e_1}\,\overline{e_2}\,\overline{AC}|.$$

Нетрудно заметить, что $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{EC},$ $\overline{AE} = \alpha\overline{e_1} + \beta\overline{e_2},$ где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ (так как $\overline{e_1} \nparallel \overline{e_2}$ и векторы $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$ и $\overline{AE}$ компланарны). Тогда $\overline{AC} = \alpha\overline{e_1} + \beta\overline{e_2} + \overline{e_3}$. Вычислим смешанное произведение

$$\overline{e_1}\,\overline{e_2}\,\overline{AC} = \overline{e_1}\,\overline{e_2}(\alpha\overline{e_1} + \beta\overline{e_2} + \overline{e_3}) = \alpha\overline{e_1}\,\overline{e_2}\,\overline{e_1} + \beta\overline{e_1}\,\overline{e_2}\,\overline{e_2} + \overline{e_1}\,\overline{e_2}\,\overline{e_3} = \overline{e_1}\,\overline{e_2}\,\overline{e_3}.$$

Итак, $V_{ABCD} = \frac{1}{6} | \overline{e_1} \overline{e_2} \overline{e_3} |$ не зависит от положения точек *A, B, C, D* на прямых $l_1, l_2$, что и требовалось доказать.

**В. В. БОРГАРДТ[1], М. Н. БОРГАРДТ[2]**
[1]Россия, Смоленск, МБОУ «Средняя школа № 30 имени С. А. Железнова»
[2]Россия, Санкт-Петербург, ФГБОУВО «Санкт-Петербургский государственный университет

## РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ МЕТОДА ЭВРИСТИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

В настоящее время огромное значение приобретает формирование и развитие аналитического мышления у обучающихся средних и высших учебных заведений. Качественное усвоение содержания образования предусматривает установление межпредметных связей, использование научной терминологии, систематизацию информации с опорой на аналитическое мышление. Развитые аналитические навыки могут пригодиться каждому, но новые профессии XXI в. диктуют обязательное их наличие. Наиболее значимо развитое аналитическое мышление для социологов, политологов, аналитиков, преподавателей, менеджеров, экономистов, юристов, программистов, других представителей IT-сферы.

Аналитическое мышление в общем смысле – это логический анализ поступающей информации с целью принятия того или иного решения. Вначале происходит разделение информации на составные части, всестороннее логическое осмысление частей и информации в целом, далее мы получаем недостающее путем логических умозаключений и возобновления из памяти накопленной ранее информации. Затем происходит выбор оптимального решения из возможных, получаем вывод. Итак, аналитическое мышление включает анализ, синтез, обобщение, осознанное и интуитивное осмысление окружающего мира, накопление информации для его эффективного анализа. Все это во взаимосвязи с абстрагированием, обобщением, сравнением, аналогией и другими мыслительными операциями.

Мы используем аналитические навыки при наблюдении, отборе информации, поиске закономерностей, «мозговом штурме», интерпретации данных, интеграции информации и т. д.

Рассмотрим использование метода эвристической деятельности по развитию аналитического мышления при изучении математики и информатики. Суть метода – в создании задачи-проблемы; знания и умения приобретаются обучающимися в результате исследовательской, творческой деятельности по разработке решения данной микропроблемы. Процесс обучения строится на ситуациях, организованных педагогом, направленных на эвристическую деятельность обучаемых. Наша задача – сопровождение и поддержка. Развиваем аналитическое