Л. В. ФЁДОРОВА
Брест, БрГУ имени А. С. Пушкина

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ

Методологические знания в систематическом курсе геометрии включают в себя знания о методах и способах действий, используемых для получения геометрических знаний.

При обучении геометрии базу для формирования у учащихся умений применять такие методы научного познания, как анализ и синтез, составляют геометрические задачи. В процессе анализа текста геометрической задачи учащиеся выделяют ее условия и требования. Выполнение краткой записи и чертежа к задаче основывается на методе синтеза. Ошибки в краткой записи и чертеже к задаче указывают на плохо проведенный анализ ее текста и требуют его коррекции.

Поиск решения задачи осуществляется либо путем анализа, либо путем синтеза, при этом направляется специальными вопросами. Так, если задача решается посредством анализа, поиск решения задачи можно проводить с помощью вопроса «Что достаточно знать (доказать), чтобы найти (доказать)..?». Так, поиск решения задачи 1 может быть представлен следующим образом.

Задача 1. На рисунке 1 в треугольнике ABC $AB = BC$, отрезок OK – биссектриса треугольника AOB. Докажите, что отрезок BO – биссектриса треугольника ABC, если $\angle KOC = 135°$.

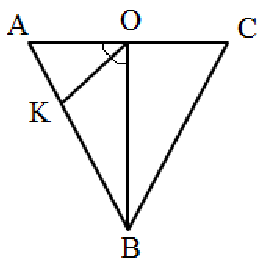

Рисунок 1 – Чертеж к задаче 1

1) Что достаточно доказать, чтобы доказать, что BO – биссектриса ΔABC? (Так как ΔABC – равнобедренный, то достаточно доказать, что BO – высота или медиана ΔABC.)

2) Что достаточно доказать, чтобы доказать, что BO – высота ΔABC? ($\angle BOA = 90°$.)

3) Что достаточно доказать, чтобы доказать, что $\angle BOA = 90°$? ($\angle BOK = \angle KOA = 45°$.)

4) Что достаточно доказать, чтобы доказать, что $\angle BOK = \angle KOA = 45°$? ($\angle BOK = \angle KOA$, т. к. *OK* – биссектриса ΔAOB, а $\angle KOA = 45°$, т. к. $\angle KOA = 180 - \angle KOC = 180° - 135°$.)

Учащимся можно показать, что направление поиска решения задачи обусловливает различные варианты ее решения.

Например, при изучении параллелограмма в 8 классе учащимся можно предложить следующую задачу:

Задача 2. Докажите, что если у параллелограмма все стороны равны, то равны его высоты, проведенные из одной вершины (рисунок 2).

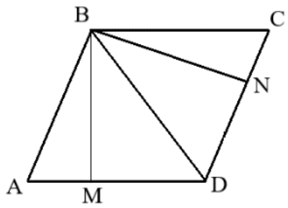

Рисунок 2 – Чертеж к задаче 2

Поиск решения задачи можно осуществлять, исходя из равенства треугольников *AMB* и *CNB*. Эти треугольники прямоугольные, у них равны гипотенузы и соответственные острые углы. Отсюда следует равенство высот *BM* и *BN*.

При решении этой задачи можно воспользоваться свойством биссектрисы угла (точки биссектрисы *BD* угла *B* равноудалены от его сторон), что приведет к новому способу решения задачи.

Рассматриваемую задачу также можно решить исходя из того, что *BD* является осью симметрии для треугольников *ABD* и *CBD*. В таком случае *BM* и *BN* – отрезки, симметричные относительно *BD*, а значит, равны между собой.

Помимо этого, решить задачу еще одним способом позволит нахождение площади параллелограмма.

Для наглядности поиск решения задачи можно представлять с помощью графов. Граф демонстрирует направление рассуждений в процессе поиска решения задачи от требования к условию (анализ) или от условия к требованию (синтез). Применение графа делает решение задачи или доказательство теоремы кратким, емким и наглядно просматриваемым со всеми взаимосвязями. Символом «+» можно отмечать те элементы, которые заданы в условии задачи или уже вычислены. Например:

Задача 3. В равнобедренной трапеции *ABCK* длины оснований равны 10 см и 2 см, длина боковой стороны – 6 см. Через вершину *B* проведена прямая, которая делит диагональ *AC* на равные части и пересекает при этом *AK* в точке *M*. Найдите площадь треугольника *BKM*.

Решение задачи начинается с построения ее модели. Правильный чертеж к задаче определяет поиск ее решения. При моделировании условия указанной задачи учащиеся, как правило, получают два результата (рисунок 3, *а*, *б*).

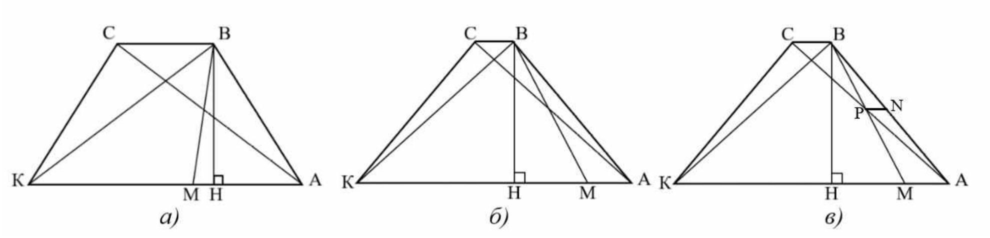

Рисунок 3 – Варианты чертежа к задаче 3

На основании анализа чертежей учащиеся должны прийти к выводу, что правильный чертеж к задаче изображен на рисунке 3, *б*. После этого можно организовывать поиск решения задачи, например с помощью анализа:

1) Чтобы вычислить S_{BKM}, достаточно знать *KM* и *BH* (они неизвестны).

2) Чтобы вычислить *KM*, достаточно знать *KH* и *HM* (они неизвестны).

3) Чтобы вычислить *BH*, достаточно знать *AB* (известно) и *AH* (неизвестно).

4) Чтобы вычислить *KH*, достаточно знать *AH* (неизвестно) и *AK* (известно).

5) Чтобы вычислить *HM*, достаточно знать *AH* (неизвестно) и *AM* (неизвестно).

6) Чтобы вычислить *AH*, достаточно знать *AK* и *BC* (они известны из условия).

7) Чтобы вычислить *AM*, достаточно знать *PN* (рисунок 3, *в*) (неизвестно), где *PN* – средняя линия треугольника *MBA*, т. к. $AP = PC$ (по условию) и $PN \parallel AK$ (по построению).

8) Чтобы вычислить *PN*, достаточно знать *BC* (известно из условия), т. к. *PN* – средняя линия треугольника *BAC*, т. к. $AP = PC$ (по условию) и $PN \parallel AK$ (по построению).

Результат построения соответствующего графа представлен на рисунке 4.

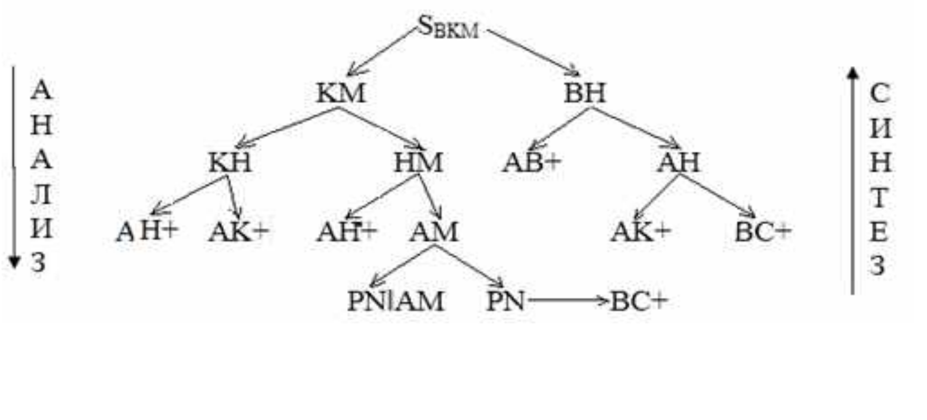

Рисунок 4 – Граф

Формирование умений использовать графы целесообразно осуществлять от класса к классу, повышая степень самостоятельности в их построении.

Помимо этого, учащимся можно предлагать задания, предусматривающие заполнение графов с пропусками.

Пример. Заполните пропуски в поиске решения задачи (рисунок 5): докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны. Определите, путем анализа или синтеза проведен поиск решения задачи.

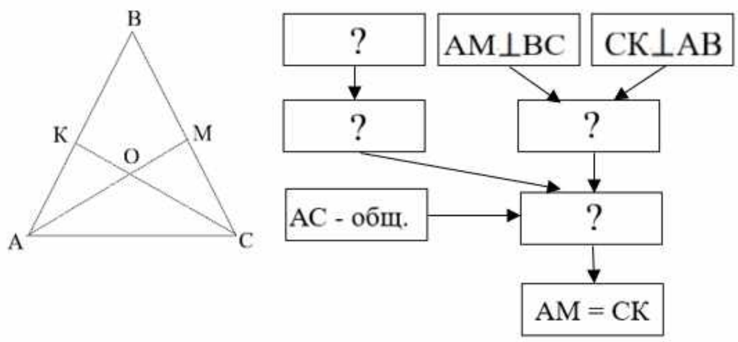

Рисунок 5 – Граф с пропусками

Если задача позволяет, то учащимся можно предложить сформулировать задачу, обратную данной, и на основе заполненного графа указать поиск ее решения, установив соответствующие стрелки цветным карандашом.

Геометрические задачи способствуют в полной мере формированию методологических знаний учащихся при условии обеспечения осознания учащимися используемых при решении задачи методов и способов действий.

В частности, для обеспечения результативности работы по проведению поиска решения геометрической задачи выделим требования к ее организации:

– целенаправленный организованный процесс поиска (сначала учитель сам организует, далее учащиеся организуют поиск под контролем учителя; самостоятельный поиск);

– осознание анализа и синтеза как общего действия для поиска решения задачи;

– осознание сущности аналитического и синтетического методов поиска решения задачи.