УДК 539.143.3, 372.853

***Петр Борисович Кац*[1], *София Михайловна Удовенко*[2]**
[1]*канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. общей и теоретической физики*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
[2]*студент 4-го курса физико-математического факультета*
Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина
***Pyotr Kats*[1], *Sofiya Udovenko*[2]**
[1]*Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,*
Associate Professor of the Department of General and Theoretical Physics
of the Brest State A. S. Pushkin University
[2]*4th Year Student of the Faculty of Physics and Mathematics*
of Brest State A. S. Pushkin University
e-mail: katspyotr@yandex.ru

ФОРМУЛА БЕТЕ – ВАЙЦЗЕККЕРА. ОБЗОР И ПОДБОР КОЭФФИЦИЕНТОВ

Выполнен обзор различных наборов коэффициентов в формуле Бете – Вайцзеккера как в традиционной форме (с пятью слагаемыми), так и расширенных вариантов. Определены коэффициенты, обеспечивающие самую высокую точность в традиционном и расширенных вариантах формулы. Произведены расчеты коэффициентов традиционной формулы с различными вариантами кулоновской поправки и поправки спаривания как с помощью метода наименьших квадратов, так и с помощью методов наименьших квадратов удельной энергии связи, наименьших квадратов относительных отклонений и комбинированным методом. Наибольшую точность по выбранному в работе критерию обеспечивают метод наименьших квадратов удельной энергии связи и метод наименьших квадратов относительных отклонений.

Ключевые слова: *энергия связи, формула Бете – Вайцзеккера, коэффициенты, метод наименьших квадратов.*

The Bethe – Weizsäcker Formula. Review and Selection of Coefficients

Various sets of coefficients in the Bethe – Weizsäcker formula are reviewed, both in the traditional form (with five terms) and in extended variants. The coefficients that provide the highest accuracy in the traditional and extended versions of the formula are highlighted. The coefficients of the traditional formula with various variants of the Coulomb correction and the pairing correction are calculated using the least squares method, as well as the least squares of the specific binding energy, least squares of relative deviations, and the combined method. The method of least squares of the specific binding energy and the method of least squares of relative deviations provide the highest accuracy according to the criterion chosen in the work.

Key words: *binding energy, Bethe – Weizsäcker formula, coefficients, least squares method.*

Введение

Полуэмпирическая формула Бете – Вайцзеккера позволяет вычислять с небольшой погрешностью энергию связи и массу атомного ядра в основном состоянии по массовому и зарядовому числу. Эта формула основывается на капельной модели ядра [1]. Впервые она была предложена Вайцзеккером [2] и модифицирована Бете [3] и другими физиками. Формула опирается частично на теорию, частично – на эмпирические измерения, поэтому ее называют полуэмпирической. В своей традиционной форме формула Бете – Вайцзеккера содержит пять слагаемых: объемную, поверхностную, кулоновскую энергию, энергию асимметрии и энергию спаривания. Выражение для трех из этих энергий в традиционной формуле:

$$E_V = a_V A, E_S = -a_s A^{2/3}, E_{sym} = -a_{sym}\frac{(A-2Z)^2}{A}. \qquad (1)$$

Для кулоновской энергии обычно используют одно из двух выражений:

$$E_C = -a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}}, \text{ или } E_C = -a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}, \qquad (2)$$

первый случай соответствует непрерывному распределению заряда, второй – распределению заряда в форме точечных протонов.

Для энергии спаривания обычно используется одно из двух выражений с разными показателями степени A:

$$E_p = a_p \delta \cdot A^{-1/2} \text{ или } E_p = a_p \delta \cdot A^{-3/4}, \qquad (3)$$

где

δ = {1, N – четное, Z – четное; 0, A – нечетное; –1, N – нечетное, Z – нечетное}. (4)

В соответствии с этим будем выделять 4 варианта традиционной формулы Бете – Вайцзеккера:

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-1/2}, \qquad (5)$$

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-1/2}, \qquad (6)$$

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-3/4}, \qquad (7)$$

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-3/4}. \qquad (8)$$

Позже разные авторы предлагали расширенные варианты формулы Бете – Вайцзеккера, дополненные дополнительными членами либо с измененной зависимостью различных слагаемых от A и Z для повышения точности.

Целями представленной работы являются проверка точности предсказаний традиционной формулы Бете – Вайцзеккера и расширенной формулы Бете – Вайцзеккера для различных наборов коэффициентов, предлагаемых в литературе, а также расчет коэффициентов для четырех вариантов традиционной формулы различными способами и определение самого точного набора коэффициентов и варианта традиционной формулы Бете – Вайцзеккера для данного массива нуклидов.

Анализ существующих наборов коэффициентов в традиционной формуле Бете – Вайцзеккера

Для проверки точности предсказаний формулы Бете – Вайцзеккера вычислялась относительная погрешность энергии связи, рассчитанной по формуле Бете – Вайцзеккера в сравнении со значением, вычисленным из экспериментальных значений массы атома для 79 нуклидов с не слишком малым значением массового числа, что является условием применимости капельной модели, на которой основана формула: от Ne^{20} до Cm^{242}. Затем находилось среднее арифметическое по всем нуклидам

$$\langle \delta E_b \rangle = \frac{1}{79} \sum_{i=1}^{79} \frac{|E_{bBWi} - E_{bi}|}{E_{bi}} \cdot 100\%. \qquad (9)$$

Энергия связи по массе атома вычислялась по формуле:

$$E_b = 931,4940038(ZM_{H^1} + (A - Z)M_n - M_a)\ МэВ. \tag{10}$$

Данные по массам атомов брались из [4]. Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

Источник	a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_p, МэВ	Степень A	Z^2 (а) или Z(Z-1) (б)	$\langle \delta E_b \rangle$, %
[5]	15,5933955	17,344797	0,6935199	23,601209	33,5	−3/4	а	0,350
[6]	15,76	17,81	0,711	23,702	34	–3/4	а	0,381
[7]	15,75	17,8	0,71	23,7	12	–1/2	а	0,391
[8]	15,75	17,8	0,71	23,7	34	–3/4	а	0,394
[9, .Rohlf]	15,75	17,8	0,711	23,07	11,181	–1/2	а	0,406
[9, Least squaes, fit 1]	15,8	18,3	0,714	23,2	12	–1/2	б	0,414
[10]	15,56	17,23	0,7	23,285	11	–1/2	а	0,420
[11], ф. 2	15,835	18,33	0,714	23,2	11,2	–1/2	б	0,423
[12], ф. 1	15,4093	16,8726	0,69476	22,4352	11,1547	–1/2	б	0,510
[13]	15,78	18,34	0,71	23,21	12	–1/2	б	0,521
[12], ф. 2	15,7773	18,3407	0,710021	23,2107	11,9957	–1/2	б	0,538
[14]	15,36	16,42	0,691	22,53			а	0,540
[15]	15,6	17,2	0,7	22,5	34	–3/4	а	0,596
[16]	15,75	17,8	0,71	22	34	–3/4	а	0,632
[17]	15,4	17	0,69	24	34	–3/4	б	0,711
[18]	14,03	13,03	0,5837	19,3175	33,52	–3/4	а	0,8326
[19], набор 1	14,9297	15,058	0,6615	21,6091	10,1744	–1/2	а	0,8328
[20]	14,03	13,03	0,5835	19,31	34,57	–3/4	а	0,834
[21]	14	13	0,584	19	33,5	–3/4	а	0,843
[22]	15,6	17,2	0,72	23,6	34	–3/4	б	0,850
[11], ф. 1	15,835	18,33	0,714	23,2	11,2	–1/2	а	0,868
[23]	14	13	0,583	19,3	33,5	–3/4	а	0,874
[24]	14	13	0,584	19,3	33,5	–3/4	а	0,907
[25]	14	13	0,574	18,1	33,5	–3/4	а	0,928
[9, Wapstra]	14,1	13	0,595	19	33,5	–3/4	а	0,939
[26]	15,56	17,23	0,71	23,7	12	–3/4	а	1,045
[27]	14,1	13,1	0,585	18,1	132	–1	а	1,139
[19], набор 2	16,6433	14,0788	0,6442	21,068	11,5398	–1/2	а	1,16

Более точной считалась та формула, которая дает меньшее значение величины (9).

Самую высокую точность из рассмотренных наборов обеспечивает набор [5]. Заметим, что в [5] коэффициенты находятся не с помощью часто используемого метода наименьших квадратов, а другим способом, который будет описан ниже.

В [7] исправлена опечатка в степени A в энергии спаривания.

Отметим, что в [11, с. 24] написано, что для малых Z лучше заменить в кулоновской энергии Z^2 на Z(Z-1), но авторы не будут применять эту небольшую поправку. Наша проверка показывает, что использование в формуле при данных коэффициентах Z(Z-1) вместо Z^2 значительно улучшает точность.

Анализ точности предсказаний модифицированных вариантов формулы Бете – Вайцзеккера

В монографии [28, с. 108] приводится модифицированная формула Вайцзеккера, в которую добавлено слагаемое, определяющее, согласно [28], поправку к энергии асимметрии ядра и позволяющее применять формулу к ядрам с сильным избытком нейтронов. Итоговая формула:

$$E_{bBW} = 15,75A - 17,8A^{2/3} - 0,71\frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23,7A\left(1-\frac{2Z}{A}\right)^2 - 0,88A\left(1-\frac{2Z}{A}\right)^4 + 34\frac{\delta}{A^{3/4}}. \quad (11)$$

В [29] модифицированы объемная, поверхностная и кулоновская энергии связи, а также добавлена оболочечная поправка. В формуле при этом отсутствует поправка асимметрии. В связи с невозможностью рассчитать оболочечную поправку из-за недостатка данных по деформации ядер в данной работе будет проверяться точность формулы без оболочечной поправки и учета влияния деформации ядра на остальные слагаемые [29, (9)].

$$E_{bBW} = 15,677\left[1 - k\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right]A - 18,56\left[1 - k\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right]A^{\frac{2}{3}} - \quad (12)$$
$$-0,717\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + 1,21129\frac{Z^2}{A} + 11\delta A^{-\frac{1}{2}},$$

где k = 1,79.

Отметим, что учет данных по деформации конкретного ядра лишает формулу Бете – Вайцзеккера статуса общности, позволяющего, исходя только из массового и зарядового чисел ядра, определять его энергию связи. Формула Майерса – Святецкого приводится без учета дефомации ядер и оболочечной поправки в некоторых источниках [30].

Также в [29] приведен вариант формулы с экспоненциальной поправкой Вигнера:

$$E_{bBW} = 15,7546\left[1 - k\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right]A - 19,1015\left[1 - k\left(\frac{A-2Z}{A}\right)^2\right]A^{\frac{2}{3}} - \quad (13)$$
$$-0,717\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + 1,21129\frac{Z^2}{A} + 11\delta A^{-\frac{1}{2}} + 7\exp(-6\left|\frac{A-2Z}{A}\right|),$$

где k = 1,78.

В [14] подробно рассматривается ряд дополнительных членов в формуле Бете – Вайцзеккера. В частности, рассматривается вариант формулы, содержащей объемную энергию, поверхностную, кулоновскую для непрерывного распределения заряда и поправку симметрии, а также один дополнительный член.

Рассматриваются следующие добавки: энергия спаривания, кулоновская обменная энергия $E_{x\tilde{N}} = a_{xC}Z^{4/3}A^{-1/3}$, поправка Вигнера $E_W = a_W\left|A-2Z\right|/A$, поправка асимметрии для поверхностной энергии $E_{symS} = a_{st}(A-2Z)^2 A^{-4/3}$, поправка кривизны $E_R = a_R A^{1/3}$, оболочечный эффект $E_m = \alpha_m P + \beta_m P^2, P = \nu_N \nu_P / (\nu_N + \nu_P)$, ν – число валентных нуклонов – модуль разности между числом нуклонов и ближайшим магическим числом [31, ф. (6.79)]. Магические числа равны: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.

Коэффициенты формул с различными дополнительными членами приведены в таблице 2.

Также приведены значения коэффициентов для случая, когда в формулу включены все поправки:

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{sym}A\left(1-\frac{2Z}{A}\right)^2 + a_{xC}\frac{Z^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} + a_W\frac{|A-2Z|}{A} + a_{st}\frac{(A-2Z)^2}{A^{\frac{4}{3}}} + \quad (14)$$
$$+ a_p\delta \cdot A^{-\frac{1}{2}} + a_R A^{\frac{1}{3}} + \alpha_m P + \beta_m P^2$$

Таблица 2.

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	Дополнительный член, МэВ	Показатель степени A	Z^2 или Z (Z–1)
15,15	17,06	0,702	21,19	$a_{xC} = 1{,}12$		Z^2
15,67	17,62	0,705	23,71	$a_W = 27{,}98$		Z^2
15,62	17,50	0,698	27,33	$a_{st} = 23{,}92$		Z^2
15,38	16,47	0,692	22,55	$a_p = 11{,}24$	–1/2	Z^2
14,84	13,34	0,669	21,75	$a_R = -5{,}26$		Z^2
15,38	16,30	0,693	22,48	$\alpha_m = -1{,}52$ $\beta_m = 0{,}077$		Z^2

Значения поправок для (14) приведены в таблице (3).

Таблица 3.

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_{xC}, МэВ	a_W, МэВ	a_{st}, МэВ	a_p, МэВ	a_R, МэВ	α_m, β_m, МэВ
16,58	26,95	0,774	31,51	2,22	–43,4	55,62	9,87	14,77	–1,90, 0,140

В [14] также рассматриваются варианты формулы со всеми поправками и экспоненциальной поправкой Вигнера:

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{sym} A\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + a_{xC} \frac{Z^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} +$$
$$+ a'_W \exp\left(-2{,}55 \left|\frac{A-2Z}{A}\right|\right) + a_{st} \frac{(A-2Z)^2}{A^{\frac{4}{3}}} + a_p \delta \cdot A^{-\frac{1}{2}} + a_R A^{\frac{1}{3}} + \alpha_m P + \beta_m P^2 \quad (15)$$

Значения коэффициентов при использовании этой поправки приведены в таблице 4:

Таблица 4.

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_{xC}, МэВ	a_W', МэВ	a_{st}, МэВ	a_p, МэВ	a_R, МэВ	α_m, β_m, МэВ
15,81	19,2	0,745	29,5	1,58	21,64	44,73	10,37	–6,94	–1,86, 0,134

Кирсон [14] рассматривает также вариант, когда поправка спаривания отличается по модулю для четно-четных ядер и нечетно-нечетных (индексы (е) и (о) относятся к четно-четным ядрам и нечетно-нечетным соответственно):

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{sym} A\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + a_{xC} \frac{Z^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} + a_W \frac{|A-2Z|}{A} + a_{st} \frac{(A-2Z)^2}{A^{\frac{4}{3}}} +$$
$$+ \frac{\delta}{2A^{\frac{1}{2}}}\left\{a_p^{(e)}(1+\delta) + a_p^{(o)}(1-\delta)\right\} \cdot + a_R A^{\frac{1}{3}} + \alpha_m P + \beta_m P^2 \quad (16)$$

Значения коэффициентов при этом такие же, как в таблице 3, кроме a_p. Вместо него берутся коэффициенты $a_p^{(e)} = 11{,}60$ МэВ, $a_p^{(o)} = 8{,}17$ МэВ.

Самую высокую точность по нашему критерию обеспечивают формулы Майерса – Святецкого (13) и Кирсона (15) с экспоненциальным вигнеровским членом, а также формула Кирсона с различным значением модуля поправки спаривания для нечетных и четных ядер (16).

Так как (13) содержит меньше подгоночных коэффициентов, то можно признать ее оптимальность для данного критерия точности формулы и для рассмотренных элементов.

Часто в качестве критерия оптимальности используется минимальность среднеквадратичного отклонения

$$rmsd = \sqrt{\frac{\chi^2}{N}},\ \chi^2 = \sum_{i=1}^{N}(E_{bi} - E_{bBWi})^2. \quad (17)$$

В таблице (5) также приведены значения среднеквадратичного отклонения. По этому критерию лучшие результаты дает расширенная формула Бете – Вайцзеккера по Кирсону с экспоненциальной поправкой Вигнера.

Таблица 5. – Среднее значение относительной погрешности

формула	(13)	(15)	(16)	(14)	(11)	(12)	E_{symS}	E_p	E_R	E_m	E_W	E_{xC}
$\langle \delta E_b \rangle$, %	0,346	0,354	0,376	0,388	0,392	0,46	0,48	0,51	0,52	0,52	0,54	0,55
rmsd, МэВ	3,61	2,30	2,45	2,49	4,26	3,80	4,17	4,35	4,47	3,48	4,42	3,82

Использование метода наименьших квадратов для нахождения оптимальных значений коэффициентов в различных вариантах формулы Бете – Вайцзеккера

В работе [19] авторы вычислили оптимальные значения коэффициентов в формуле Бете – Вайцзеккера вида (5), используя метод наименьших квадратов. В этом методе из условия минимума величины χ^2 (17) находится значение пяти коэффициентов в формуле (5). Экспериментальные данные брались из [4].

Необходимое условие минимума χ^2 – равенство нулю частных производных от χ^2 по всем коэффициентам формулы (5). Отсюда получается система линейных уравнений (18) для определения искомых коэффициентов.

В [19] найден набор оптимальных коэффициентов по данным для 2 497 нуклидов из [4], а также набор оптимальных коэффициентов для A ≥ 50 по данным для 2 166 нуклидов.

Как было показано в [32], для выборки из 79 нуклидов с A ≥ 20 оба набора коэффициентов обеспечивают невысокую точность. Для оценки точности использовалась средняя относительная погрешность (9).

Мы провели вычисление оптимальных коэффициентов для формул (5–8). Использованы метод наименьших квадратов и данные для 79 нуклидов. При этом для вариантов формулы (5–8) получаются системы уравнений соответственно (18–21) для вычисления коэффициентов.

В результате решения соответствующих систем уравнений получаются следующие наборы значений коэффициентов, представленные в таблице 6.

Таблица 6. – Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

Вариант	a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_p, МэВ
(5)	15,97265	18,33468	0,718723	25,495462	11,43212
(5) округленно	15,97	18,33	0,719	25,495	11,43
(6)	16,05498	18,9097	0,725242	25,44119	11,47805
(7)	15,97676	18,35062	0,718607	25,5286	29,41414
(8)	16,05915	18,92575	0,72513	25,4744	29,56754
(8) округленно	16,059	18,93	0,725	25,47	29,57

Для каждого набора коэффициентов рассчитана средняя относительная погрешность и среднеквадратичное отклонение. Результаты представлены в таблице 7.

Таблица 7. – Средняя относительная погрешность и среднеквадратичное отклонение

Вариант	(5)	(5) округленно	(6)	(7)	(8)	(8) округленно
$\left\langle \delta E_b \right\rangle$, %	0,3624	0,3551	0,3567	0,3566	0,3504	0,3501
rmsd, МэВ	3,620	3,654	3,566	3,603	3,5490	3,5492

Интересно, что при округленных значениях коэффициентов для первого варианта традиционной формулы получается меньшее значение средней относительной ошибки. Это объясняется тем, что при расчете коэффициентов минимизировалась сумма квадратов отклонений, а не средняя относительная погрешность.

Среднеквадратичное отклонение при округлении коэффициентов возросло. Данный пример показывает, что по разным критериям могут оказываться оптимальными различные значения коэффициентов.

Из таблицы 7 видно, что наиболее точные результаты по критерию минимальности средней относительной погрешности обеспечивает вариант (8) с округленными значениями коэффициентов, а по критерию среднеквадратичного отклонения – вариант (8).

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} A_i^2 a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{2/3} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} (A_i - 2Z_i)^2 a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \cdot A_i^{1/2} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} A_i E_{bi}; \\ \sum\limits_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} A_i^{4/3} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{1/3} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \cdot A_i^{1/6} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} A_i^{2/3} E_{bi}; \\ \sum\limits_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{2/3} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{1/3} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{Z_i^4}{A_i^{2/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{5/6}} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{Z_i^2}{A_i^{1/3}} E_{bi}; \\ \sum\limits_{i=1}^{N} (A_i - 2Z_i)^2 a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{Z_i^2 (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(A - 2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} + \\ + \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\delta_i \cdot (A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i} E_{bi}; \\ \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i A_i^{1/2} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i A_i^{1/6} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{5/6}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i} \cdot a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{1/2}}. \end{cases} \tag{18}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} A_i^2 a_V - \sum_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3} a_C - \sum_{i=1}^{N} (A_i-2Z_i)^2 a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot A_i^{1/2} a_p = \sum_{i=1}^{N} A_i E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_V - \sum_{i=1}^{N} A_i^{4/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot A_i^{1/6} a_p = \sum_{i=1}^{N} A_i^{2/3} E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3} a_V - \sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} +\\
&+\sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6}} a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3}} E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} (A_i-2Z_i)^2 a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} +\\
&+\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i} E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} \delta_i A_i^{1/2} a_V - \sum_{i=1}^{N} \delta_i A_i^{1/6} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{1/2}}.
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} A_i^2 a_V - \sum_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{2/3} a_C - \sum_{i=1}^{N} (A_i-2Z_i)^2 a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot A_i^{1/4} a_p = \sum_{i=1}^{N} A_i E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_V - \sum_{i=1}^{N} A_i^{4/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{1/3} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} A_i^{2/3} E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{2/3} a_V - \sum_{i=1}^{N} Z_i^2 A_i^{1/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i^4}{A_i^{2/3}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot \frac{Z_i^2}{A_i^{13/12}} a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i^2}{A_i^{1/3}} E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} (A_i-2Z_i)^2 a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} +\\
&+\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i} E_{bi};\\
&\sum_{i=1}^{N} \delta_i A_i^{1/4} a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{13/12}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2}} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{3/4}}.
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$\begin{cases}
\sum_{i=1}^{N} A_i^2 a_V - \sum_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3} a_C - \sum_{i=1}^{N} (A_i-2Z_i)^2 a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot A_i^{1/4} a_p = \sum_{i=1}^{N} A_i E_{bi}; \\
\sum_{i=1}^{N} A_i^{5/3} a_V - \sum_{i=1}^{N} A_i^{4/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} A_i^{2/3} E_{bi}; \\
\sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3} a_V - \sum_{i=1}^{N} Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i^{\,2}(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_{sym} + \\
+\sum_{i=1}^{N} \delta_i \cdot \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12}} a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3}} E_{bi}; \\
\sum_{i=1}^{N} (A_i-2Z_i)^2 a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2} a_{sym} + \\
+\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i} E_{bi}; \\
\sum_{i=1}^{N} \delta_i A_i^{1/4} a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/12}} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12}} a_C - \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2}} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i E_{bi}}{A_i^{3/4}}.
\end{cases} \tag{21}$$

Подбор оптимальных значений коэффициентов путем минимизации суммы квадратов отклонений удельных энергий связи

В [14, р. 53] рассматривается вариант нахождения оптимальных коэффициентов в формуле Бете – Вайцзеккера, записанной для удельной энергии связи. При этом должна минимизироваться сумма квадратов отклонений удельных энергий связи:

$$\sum_{i=1}^{N} (\varepsilon_{bi} - \varepsilon_{bBWi})^2, \varepsilon_{bi} = \frac{E_{bi}}{A_i} \tag{22}$$

Как показано в [14], это приводит к существенному изменению значений оптимальных коэффициентов. Можно ожидать, что минимизация суммы квадратов отклонений удельных энергий связи позволит уменьшить и среднюю относительную погрешность по сравнению с результатом, получаемым методом наименьших квадратов отклонений энергий связи.

Из условия минимума величины (22) для каждого варианта формулы (5–8) получается соответствующая система уравнений для определения пяти коэффициентов. Соответствующие системы уравнений (23–26) приведены ниже.

Оптимальные коэффициенты для вариантов (5–8) приведены в таблице 8. В таблице 9 приводятся значения средней относительной погрешности.

Из таблицы видно, что точность данного метода выше точности, обеспечиваемой методом наименьших квадратов. Наилучшую точность для рассмотренного массива изотопов обеспечил вариант формулы (6).

Также в таблице 9 приведены значения наибольшего относительного отклонения по 79 нуклидам.

Таблица 8. – Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

Вариант	a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_p, МэВ
(5)	15,33442	16,78971	0,6547780	24,949377	12,22525
(6)	15,43804	17,35893	0,6660444	24,718404	12,36547
(7)	15,34304	16,81980	0,6546074	25,034389	27,82304
(8)	15,44663	17,38897	0,6658594	24,804420	28,13404

$$\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{N} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_S}{A_i^{1/3}} - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{3/2}} \cdot a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \varepsilon_{bi}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_V}{A_i^{1/3}} - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_S}{A_i^{2/3}} - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2}{A_i^{5/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{11/6}} \cdot a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2}{A_i^{5/3}} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^4}{A_i^{8/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \cdot \dfrac{Z_i^2}{A_i^{17/6}} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2}{A_i^{4/3}} \varepsilon_{bi}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A-2Z_i)^4}{A_i^4} a_{sym} + \\
+\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2} \varepsilon_{bi}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{3/2}} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{11/6}} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{17/6}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i^2}{A_i^3} \cdot a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i \varepsilon_{bi}}{A_i^{3/2}}.
\end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{N} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_S}{A_i^{1/3}} - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{4/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{3/2}} \cdot a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \varepsilon_{bi}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_V}{A_i^{1/3}} - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{a_S}{A_i^{2/3}} - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{11/6}} \cdot a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{4/3}} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/3}} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{8/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_{sym} + \\
+\sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \cdot \dfrac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{17/6}} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{4/3}} \varepsilon_{bi}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A-2Z_i)^4}{A_i^4} a_{sym} + \\
+\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i \cdot (A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2} \varepsilon_{bi}; \\
\sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{3/2}} a_V - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i}{A_i^{11/6}} a_S - \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{17/6}} a_C - \sum\limits_{i=1}^{N} \delta_i \dfrac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/2}} a_{sym} + \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i^2}{A_i^3} \cdot a_p = \sum\limits_{i=1}^{N} \dfrac{\delta_i \varepsilon_{bi}}{A_i^{3/2}}.
\end{cases} \tag{24}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{a_S}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2}a_{sym} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{7/4}}\cdot a_p = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{bi};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{a_V}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^{N}\frac{a_S}{A_i^{2/3}} - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2}{A_i^{5/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}}a_{sym} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{25/12}}\cdot a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}}a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2}{A_i^{5/3}}a_S - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^4}{A_i^{8/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}}a_{sym} + \sum_{i=1}^{N}\delta_i\cdot\frac{Z_i^2}{A_i^{37/12}}a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2}{A_i^{4/3}}\varepsilon_{bi};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2}a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}}a_S - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^4}a_{sym} +\\ +\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{15/4}}a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2}\varepsilon_{bi};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{7/4}}a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{25/12}}a_S - \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{37/12}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\delta_i\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{15/4}}a_{sym} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i^2}{A_i^{7/2}}\cdot a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\varepsilon_{bi}}{A_i^{7/4}}.\end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{a_S}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{4/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2}a_{sym} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{7/4}}\cdot a_p = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{bi};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{a_V}{A_i^{1/3}} - \sum_{i=1}^{N}\frac{a_S}{A_i^{2/3}} - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}}a_{sym} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{25/12}}\cdot a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{\varepsilon_{bi}}{A_i^{1/3}};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{4/3}}a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/3}}a_S - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{8/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}}a_{sym} +\\ +\sum_{i=1}^{N}\delta_i\cdot\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{37/12}}a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{4/3}}\varepsilon_{bi};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2}a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/3}}a_S - \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{10/3}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^4}a_{sym} +\\ +\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{15/4}}a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^2}\varepsilon_{bi};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{7/4}}a_V - \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{25/12}}a_S - \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i Z_i(Z_i-1)}{A_i^{37/12}}a_C - \sum_{i=1}^{N}\delta_i\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{15/4}}a_{sym} + \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i^2}{A_i^{7/2}}\cdot a_p = \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\varepsilon_{bi}}{A_i^{7/4}}.\end{cases} \quad (26)$$

Таблица 9. – Средняя относительная погрешность

Вариант	(5)	(6)	(7)	(8)
$\langle\delta E_b\rangle$, %	0,2983	0,2912	0,3003	0,2931
$\delta E_{b\max}$, %	0,938	0,932	0,954	0,914

Минимизация суммы квадратов относительных отклонений энергии связи

Величина, наиболее близкая по смыслу к (9), – среднее значение квадрата относительного отклонения:

$$\left\langle \delta E_b^{\,2} \right\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(E_{bBWi}-E_{bi}\right)^2}{E_{bi}^{\,2}}. \quad (27)$$

Эту величину можно минимизировать стандартным способом. Из условия минимума величины (27) для вариантов формулы (5–8) получаются соответственно системы уравнений (28–31).

Оптимальные коэффициенты для вариантов (5–8) приведены в таблице 10.

Таблица 10. – Значения коэффициентов в формуле Вайцзеккера

Вариант	a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_p, МэВ
(5)	15,32882	16,77270	0,6544663	24,942423	12,08643
(6)	15,43895	17,35816	0,6663589	24,717869	12,25706
(7)	15,33812	16,80413	0,6544081	25,023227	27,46921
(8)	15,44828	17,38975	0,6662895	24,799788	27,84855

В таблице 11 приводится значение средней относительной погрешности. Из таблицы видно, что точность данного метода выше точности, обеспечиваемой методом наименьших квадратов и сравнима с точностью, обеспечиваемой методом наименьших квадратов удельных энергий связи.

Наилучшую точность для рассмотренного массива нуклидов обеспечил вариант (6). Он же обеспечил самую высокую точность из всех ранее рассмотренных методов.

Также в таблице 11 приведены значения наибольшего относительного отклонения по 79 нуклидам.

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot A_i^{1/2}}{E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{E_{bi}};\\
\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot A_i^{1/6}}{E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}};\\
\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^4}{A_i^{2/3}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\delta_i\cdot\frac{Z_i^2}{A_i^{5/6}E_{bi}^2}a_p=\\
=\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2}{A_i^{1/3}E_{bi}};\\
\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2E_{bi}^2}a_{sym}+\\
+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_iE_{bi}};\\
\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iA_i^{1/2}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iA_i^{1/6}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iZ_i^2}{A_i^{5/6}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\delta_i\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i^2}{A_iE_{bi}^2}\cdot a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{1/2}E_{bi}}.
\end{cases}
\qquad (28)
$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot A_i^{1/2}}{E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{E_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot A_i^{1/6}}{E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^{\,2}(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3}E_{bi}^2}a_C-\\
&-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\delta_i\cdot\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3}E_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2E_{bi}^2}a_{sym}+\\
&+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_iE_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iA_i^{1/2}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iA_i^{1/6}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iZ_i(Z_i-1)}{A_i^{5/6}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\delta_i\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{3/2}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i^2}{A_iE_{bi}^2}\cdot a_p=\\
&=\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{1/2}E_{bi}}.
\end{aligned}\right. \tag{29}$$

Таблица 11. – Средняя относительная погрешность

Вариант	(5)	(6)	(7)	(8)
$\left\langle \delta E_b \right\rangle$, %	0,2982	0,2907	0,3002	0,2927
$\delta E_{b\max}$, %	0,929	0,918	0,946	0,900

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot A_i^{1/4}}{E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{E_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{1/12}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^4}{A_i^{2/3}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\delta_i\cdot\frac{Z_i^2}{A_i^{13/12}E_{bi}^2}a_p=\\
&=\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2}{A_i^{1/3}E_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2E_{bi}^2}a_{sym}+\\
&+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_iE_{bi}};\\
&\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iA_i^{1/4}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{1/12}E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iZ_i^2}{A_i^{13/12}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\delta_i\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2}E_{bi}^2}\cdot a_p=\\
&=\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{3/4}E_{bi}}.
\end{aligned}\right. \tag{30}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot A_i^{1/4}}{E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{E_{bi}};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{5/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{4/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{1/12}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i^{2/3}}{E_{bi}};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{2/3}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)A_i^{1/3}}{E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i^2(Z_i-1)^2}{A_i^{2/3}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_{sym}+\\ +\sum_{i=1}^{N}\delta_i\cdot\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)}{A_i^{1/3}E_{bi}};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{1/3}E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{Z_i(Z_i-1)(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{4/3}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\frac{(A-2Z_i)^4}{A_i^2E_{bi}^2}a_{sym}+\\ +\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i\cdot(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}E_{bi}^2}a_p=\sum_{i=1}^{N}\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_iE_{bi}};\\ \sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iA_i^{1/4}}{E_{bi}^2}a_V-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{1/12}E_{bi}^2}a_S-\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_iZ_i(Z_i-1)}{A_i^{13/12}E_{bi}^2}a_C-\sum_{i=1}^{N}\delta_i\frac{(A_i-2Z_i)^2}{A_i^{7/4}E_{bi}^2}a_{sym}+\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2}E_{bi}^2}\cdot a_p=\\ =\sum_{i=1}^{N}\frac{\delta_i}{A_i^{3/4}E_{bi}}.\end{cases}\quad(31)$$

Комбинация метода Веги и других и метода наименьших квадратов относительных отклонений

В [5] авторы предложили новый метод нахождения четырех из пяти коэффициентов в традиционной формуле Бете – Вайцзеккера.

Рассматривается вариант формулы (7). Поправка спаривания обращается в 0 для ядер с нечетным массовым числом. При этом в формуле остается четыре неизвестных коэффициента.

Для их нахождения авторы предлагают решить систему из 4 уравнений вида

$$E_{bBWi}-E_{bi}=0, i=1-4. \quad (32)$$

Лучшие результаты в [5] получились при использовании изотопов O^{17}, Mn^{55}, I^{127} и Pt^{195}. Авторы получили значения четырех коэффициентов, приведенные в таблице 12.

Таблица 12.

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ
15,5933955	17,344797	0,6935199	23,601209

Мы решили систему уравнений (32) с уточненными данными по массам изотопов [4]. При этом получились значения коэффициентов:

Таблица 13.

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ
15,5935624	17,344915	0,6936067	23,602387

Средняя относительная погрешность для коэффициентов из таблиц 12 и 13 приведена в таблице 14.

Таблица 14.

Вариант	[5]	[5] с учетом [4]
$\langle \delta E_b \rangle$, %	0,3495	0,3492

Так как коэффициент в поправке спаривания в данной методике не вычисляется, то мы попробуем для улучшения результатов вычислить этот коэффициент с помощью метода наименьших квадратов относительных отклонений. Для этого надо решить уравнение (33):

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial a_p} \frac{\left(E_{bBWi} - E_{bi}\right)^2}{E_{bi}{}^2} = 0. \tag{33}$$

Для вариантов (6) и (8) решение системы уравнений (32) для четырех изотопов приводит к значениям коэффициентов, приведенных в таблице 15.

Таблица 15.

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ
15,640404	17,7712225	0,7010998	23,1366934

Для варианта (5) получается та же четверка коэффициентов, что для варианта (7) по уточненным энергиям связи (таблица 13).

Уравнение (33) для вариантов (5), (6), (7) и (8) принимает соответственно вид (34) – (37). Для уравнений (34) и (36) следует брать значения коэффициентов из таблицы 13, а для уравнений (35) и (37) – из таблицы 15.

Из уравнений (34) – (37) получаются следующие значения поправки спаривания:

(5)	(6)	(7)	(8)
12,484761	12,423669	28,196150	27,987903

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{3/4} E_{bi}}. \tag{34}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i A_i^{1/4}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/12} E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i (Z_i - 1)}{A_i^{13/12} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{7/4} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{3/4} E_{bi}}. \tag{35}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i^2}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i E_{bi}^2} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/2} E_{bi}}. \tag{36}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i A_i^{1/2}}{E_{bi}^2} a_V - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i A_i^{1/6}}{E_{bi}^2} a_S - \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i Z_i (Z_i - 1)}{A_i^{5/6} E_{bi}^2} a_C - \sum_{i=1}^{N} \delta_i \frac{(A_i - 2Z_i)^2}{A_i^{3/2} E_{bi}^2} a_{sym} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i^2}{A_i E_{bi}^2} \cdot a_p = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta_i}{A_i^{1/2} E_{bi}}. \tag{37}$$

С учетом найденных для каждого варианта коэффициентов вычисляем $\langle \delta E_b \rangle$ для всех вариантов формулы:

Вариант	(5)	(6)	(7)	(8)
$\langle \delta E_b \rangle$, %	0,3436	0,3395	0,3479	0,3448

Как видим, объединение метода Веги и метода наименьших квадратов относительных отклонений немного улучшает результат. Оптимальным по выбранному критерию оказывается вариант (2).

Заключение

В данной работе были проанализированы различные известные из литературы и Интернета наборы коэффициентов для традиционной и расширенной формулы Бете – Вайцзеккера. Критерием оптимальности считалась минимальная средняя относительная погрешность энергии связи, рассчитанная для 79 нуклидов. По этому критерию набор коэффициентов, обеспечивающих наиболее точный результат для традиционной формулы Бете – Вайцзеккера приводится в [5]:

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_p, МэВ	Степень A	Z^2 или Z(Z–1)
15,5933955	17,344797	0,6935199	23,601209	33,5	–3/4	Z^2

Для расширенной формулы наиболее точные результаты дает вариант из работы [29, (13)].

Также вычислены коэффициенты для четырех вариантов традиционной формулы различными способами – методом наименьших квадратов, методом наименьших квадратов отклонений удельных энергий связи, методом наименьших квадратов относительных отклонений, комбинированным методом.

В результате удалось для рассматриваемых 79 нуклидов добиться среднего относительного отклонения менее 0,31 %, в то время как самый точный найденный в литературе метод дает результат около 0,35 %.

Наибольшее относительное отклонение по рассмотренным нуклидам оказывается менее 1 %.

Самую высокую точность обеспечил вариант формулы

$$E_{bBW} = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + a_p \delta \cdot A^{-1/2}$$

с коэффициентами, полученными методом наименьших квадратов относительных отклонений:

a_V, МэВ	a_S, МэВ	a_C, МэВ	a_{sym}, МэВ	a_p, МэВ
15,43895	17,35816	0,6663589	24,717869	12,25706

Анализ результатов показывает, что большую точность по выбранному критерию оценки для данного набора нуклидов обеспечивают использование в выражении для кулоновской энергии не Z^2, а Z(Z–1), а также методы наименьших квадратов относительных отклонений и наименьших квадратов отклонений удельных энергий связи.

Полученные результаты используются при изложении курса «Физика ядра» для студентов специальности «Компьютерная физика».

Использование более широкой базы нуклидов может позволить уточнить значения коэффициентов, а также прояснить вопрос общности выводов об оптимальности используемых методов и выражений для кулоновской поправки и поправки спаривания.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gamov, G. Mass Defect Curve and Nuclear Constitution / G. Gamov // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. – 1930. – Vol. 51. – P. 632–644.
2. Weizseker, C. F. von. Zur Theorie der Kernmassen / C. F. von Weizseker // Z. Physik. – 1935. – Vol. 96. – P. 431–458.
3. Bethe, H. A. Nuclear Physics A. Stationary States of Nuclei / H. A. Bethe, R. F. Bacher // Rev. Mod. Phys. – 1936. – Vol. 8. – P. 82–229.
4. The AME2016 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references / Meng Wang [et al.] // Chinese Physics C. – 2017. – Vol. 41, nr 3. – P. 030002–030002-49.
5. Semi-empirical Nuclear Mass Formula: Simultaneous Determination of 4 Coefficients / J. P. Vega [et al.] // Asian Journal of Physical Sciences. – 2016. – Vol. 1. – P. 1–10.
6. Alonco, M. University physics. V III. Quantum and statistical physics / M. Alonco, E. J. Finn. – Addison-Wesley publishing company, 1969. – 611 p.
7. Широков, Ю. М. Ядерная физика / Ю. М. Широков, Н. П. Юдин. – М. : Наука, 1980. – 728 с.
8. Мухин, К. Н. Введение в ядерную физику / К. Н. Мухин. – М. : АТОМИЗДАТ, 1965. – 720 с.
9. Semi-empirical mass formula [Electronic resource] // Wikipedia, the free encyclopedia. – Mode of access: https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-empirical_mass_formula#-cite_note-Rohlf-8. – Date of access: 28.05.2020.
10. Nuclear Masses and Binding Energy [Electronic resource]. – Mode of access: http://oregonstate.edu/instruct/ch374/ch418518/lecture3-1.pdf. – Date of access: 28.05.2020.
11. Flügge, S. External Properties of Atomic Nuclei / S. Flügge. – Springer-Verlag, 2013. – 472 p.
12. Basu, D. N. Evaluations of energy coefficients of Bethe – Weizsacker mass formula [Electronic resource] / D. N. Basu, P. R. Chowdhury. – Mode of access: https://arxiv.org/-abs/nucl-th/0408013v1. – Date of access: 25.09.2020.
13. Chowdhury, P. R. Modified Bethe – Weizsäcker mass formula with isotonic shift and new driplines / P. R. Chowdhury, C. Samanta, D. N. Basu // Modern Physics Letters A. – 2005. – Vol. 20, nr 21. – P. 1605–1618.
14. Kirson, M. W. Mutual influence of terms in a semi-empirical mass formula / M. W. Kirson // Nuclear Physics A. – 2008. – Vol. 798. – P. 29–60.
15. Михайлов, В. М. Ядерная физика / В. М. Михайлов, О. Е. Крафт. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 328 с.
16. Ракобольская, И. В. Ядерная физика / И. В. Ракобольская. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 295 с.
17. Мухин, К. Н. Экспериментальная ядерная физика : в 3 т. / К. Н. Мухин. – М. : Энергоатомиздат, 1993. – Кн. 1, ч. 2. – 320 с.
18. Tati, T. Separation Energies and Nuclear Structures in Light Nuclei / T. Tati / Prog. Theor. Phys. – 1955. – Vol. 14, nr 2. – P. 107–125.
19. Bethe – Weizsäcker semiempirical mass formula coefficients 2019 update based on AME2016 [Electronic resource] / D. Benzaid [et al.] // Nuclear Science and Techniques. – 2020. – Vol. 31, nr 9. – Mode of access: https://sci-hub.st/https://doi.org/10.1007/s41365-019-0718-8. – Date of access: 28.05.2020.
20. Белонучкин, В. Е. Основы физики. Курс общей физики : учебник : в 2 т. / В. Е. Белонучкин, Д. А. Заикин, Ю. М. Ципенюк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т. 2 : Квантовая и статистическая физика. – 504 с.

21. Корнюшкин, Ю. Д. Основы современной физики (квантовая механика, физика атомов и молекул, физика твердого тела, ядерная физика) : учеб. пособие / Ю. Д. Корнюшкин. – СПб. : СПбГУ ИТМО, 2005. – 326 с.

22. Ишханов, Б. С. Частицы и атомные ядра / Б. С. Ишханов, И. М. Капитонов, Н. П. Юдин. – М. : Изд-во ЛКИ, 2007. – 584 с.

23. Fermi, E. Nuclear Physics / E. Fermi. – The university of Chicago press, 1950. – 248 p.

24. Иродов, И. Е. Сборник задач по атомной и ядерной физике / И. Е. Иродов. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 216 с.

25. Путилов, К. А. Курс физики : в 3 т. / К. А. Путилов, В. А. Фабрикант. – М. : Физматгиз, 1963. – Т. 3 : Оптика. Атомная физика. Ядерная физика. – 636 с.

26. Капельная модель ядра [Электронный ресурс] // Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki Капельная_модель_ядра. – Дата доступа: 18.04.2020.

27. Friedlander, G. Introduction to Radio-chemistry / G. Friedlander, J. W. Kennedy. – New York : John Wiley & Sons, 1949. – 428 p.

28. Секержицкий, В. С. Равновесные системы фермионов и бозонов в магнитных полях : монография / В. С. Секержицкий ; Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2008. – 198 с.

29. Myers, W. D. Nuclear masses and deformations / W. D. Myers, W. J. Swiatecki // Nuclear Physics – 1966. – Vol. 81, nr 1. – P. 1–60.

30. Nuclear Masses and Binding Energy. Lesson 3 [Electronic resource]. – Mode of access: https://web.archive.org/web/20150930014054/http://oregonstate.edu/instruct/ch374/-ch418518/lecture3-1.pdf. – Date of access: 10.10.2020.

31. Casten, R. F. Nuclear Structure From A Simple Perspective / R. F. Casten. – New York : Oxford university press, 1990. – 376 p.

32. Удовенко, С. М. Проверка точности предсказаний формулы Вайцзеккера со значениями коэффициентов, представленных в [1] / С. М. Удовенко // Теоретическая физика, астрофизика и физика конденсированных сред : сб. материалов студенч. науч. конф., Брест, 4–5 июня 2020 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под общ. ред. В. С. Секержицкого. – Брест : БрГУ, 2020. – С. 22–23.

REFERENCES

1. Gamov, G. Mass Defect Curve and Nuclear Constitution / G. Gamov // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. – 1930. – Vol. 51. – P. 632–644.

2. Weizseker, C. F. von. Zur Theorie der Kernmassen / C. F. von Weizseker // Z. Physik. – 1935. – Vol. 96. – P. 431–458.

3. Bethe, H. A. Nuclear Physics A. Stationary States of Nuclei / H. A. Bethe, R. F. Bacher // Rev. Mod. Phys. – 1936. – Vol. 8. – P. 82–229.

4. The AME2016 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references / Meng Wang [et al.] // Chinese Physics C. – 2017. – Vol. 41, nr 3. – P. 030002–030002-49.

5. Semi-empirical Nuclear Mass Formula: Simultaneous Determination of 4 Coefficients / J. P. Vega [et al.] // Asian Journal of Physical Sciences. – 2016. – Vol. 1. – P. 1–10.

6. Alonco, M. University physics. V III. Quantum and statistical physics / M. Alonco, E. J. Finn. – Addison-Wesley publishing company, 1969. – 611 p.

7. Shirokov, Yu. M. Jadiernaja fizika / Yu. M. Shirokov, N. P. Yudin. – M. : Nauka, 1980. – 728 s.

8. Mukhin, K. N. Vviedienije v jadiernuju fiziku / K. N. Mukhin. – M. : ATOMIZDAT, 1965. – 720 s.

9. Semi-empirical mass formula [Electronic resource] // Wikipedia, the free encyclopedia. – Mode of access: https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-empirical_mass_formula#-cite_note-Rohlf-8. – Date of access: 28.05.2020.

10. Nuclear Masses and Binding Energy [Electronic resource]. – Mode of access: http://oregonstate.edu/instruct/ch374/ch418518/lecture3-1.pdf. – Date of access: 28.05.2020.

11. Flügge, S. External Properties of Atomic Nuclei / S. Flügge. – Springer-Verlag, 2013. – 472 p.

12. Basu, D. N. Evaluations of energy coefficients of Bethe – Weizsacker mass formula [Electronic resource] / D. N. Basu, P. R. Chowdhury. – Mode of access: https://arxiv.org/-abs/nucl-th/0408013v1. – Date of access: 25.09.2020.

13. Chowdhury, P. R. Modified Bethe – Weizsäcker mass formula with isotonic shift and new driplines / P. R. Chowdhury, C. Samanta, D. N. Basu // Modern Physics Letters A. – 2005. – Vol. 20, nr 21. – P. 1605–1618.

14. Kirson, M. W. Mutual influence of terms in a semi-empirical mass formula / M. W. Kirson // Nuclear Physics A. – 2008. – Vol. 798. – P. 29–60.

15. Mikhajlov, V. M. Jadiernaja fizika / V. M. Mikhajlov, O. Ye. Kraft. – L. : Izd-vo Lieningr. un-ta, 1988. – 328 s.

16. Rakobol'skaja, I. V. Jadiernaja fizika / I. V. Rakobol'skaja. – M. : Izd-vo Mosk. un-ta, 1971. – 295 s.

17. Mukhin, K. N. Ekspierimiental'naja jadiernaja fizika : v 3 t. / K. N. Mukhin. – M. : Energoatomizdat, 1993. – Kn. 1, ch. 2. – 320 s.

18. Tati, T. Separation Energies and Nuclear Structures in Light Nuclei / T. Tati / Prog. Theor. Phys. – 1955. – Vol. 14, nr 2. – P. 107–125.

19. Bethe – Weizsäcker semiempirical mass formula coefficients 2019 update based on AME2016 [Electronic resource] / D. Benzaid [et al.] // Nuclear Science and Techniques. – 2020. – Vol. 31, nr 9. – Mode of access: https://sci-hub.st/https://doi.org/10.1007/s41365-019-0718-8. – Date of access: 28.05.2020.

20. Bielonuchkin, V. Ye. Osnovy fiziki. Kurs obshhiej fiziki : uchiebnik : v 2 t. / V. Ye. Bielonuchkin, D. A. Zaikin, Yu. M. Cypeniuk. – M. : FIZMATLIT, 2001. – T. 2 : Kvantovaja i statistichieskaja fizika. – 504 s.

21. Korniushkin, Yu. D. Osnovy sovriemiennoj fiziki (kvantovaja miekhanika, fizika atomov i moliekul, fizika tviordogo tiela, jadiernaja fizika) : uchieb. posobije / Yu. D. Korniushkin. – SPb. : SPbGU ITMO, 2005. – 326 s.

22. Ishkhanov, B. S. Chasticy i atomnyje jadra / B. S. Ishkhanov, I. M. Kapitonov, N. P. Yudin. – M. – Izd-vo LKI, 2007. – 584 s.

23. Fermi, E. Nuclear Physics / E. Fermi. – The university of Chicago press, 1950. – 248 p.

24. Irodov, I. Ye. Sbornik zadach po atomnoj i jadшernoj fizike / I. Hy. Irodov. – M. : Energoatomizdat, 1984. – 216 s.

25. Putilov, K. A. Kurs fiziki : v 3 t. / K. A. Putilov, V. A. Fabrikant. – M. : Fizmatgiz, 1963. – T. 3 : Optika. Atomnaja fizika. Jadiernaja fizika. – 636 s.

26. Kapiel'naja model' jadra [Eliektronnyj riesurs] // Vikipiedija. Svobodnaja enciklopiedija. – Riezhim dostupa: https://ru.wikipedia.org/wiki Kapel'naja_model'_jadra. – Data dostupa: 18.04.2020.

27. Friedlander, G. Introduction to Radio-chemistry/ G. Friedlander, J. W. Kennedy. – New York : John Wiley & Sons, 1949. – 428 p.

28. Siekierzhyckij, V. S. Ravnoviesnye sistiemy fermionov i bozonov v magnitnykh poliah : monografija / V. S. Siekierzhyckij ; Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina. – Briest : Izd-vo BrGU, 2008. – 198 s.

29. Myers, W. D. Nuclear masses and deformations / W. D. Myers, W. J. Swiatecki // Nuclear Physics – 1966. – Vol. 81, nr 1. – P. 1–60.

30. Nuclear Masses and Binding Energy. Lesson 3 [Electronic resource]. – Mode of access: https://web.archive.org/web/20150930014054/http://oregonstate.edu/instruct/ch374/-ch418518/lecture3-1.pdf. – Date of access: 10.10.2020.

31. Casten, R. F. Nuclear Structure From A Simple Perspective / R. F. Casten. – New York : Oxford university press, 1990. – 376 p.

32. Udovienko, S. M. Provierka tochnosti priedskazanij formuly Vajczekkiera so znachienijami koefficientov, priedstavliennykh v [1] / S. M. Udovienko // Tieorieticheskaja fizika, astrofizika i fizika kondiensirovannykh sried : sb. matierialov studiench. nauch. konf., Briest, 4-5 ijunia 2020 g. / Briest. gos. un-t im. A. S. Pushkina ; pod obshch. ried. V. S. Siekierzhyckogo. – Briest : BrGU, 2020. – S. 22–23.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 02.03.2021