Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Кафедра методики преподавания физико-математических дисциплин

Е.П. Гринько, Н.А. Каллаур

Методика преподавания математики (часть II)

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2021

УДК 372.851
ББК 74.262.21я73
Т-32

Авторы:
заведующий кафедрой методики преподавания физико-математических дисциплин
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
кандидат педагогических наук, доцент
Е.П. Гринько

доцент кафедры методики преподавания физико-математических дисциплин
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
кандидат педагогических наук, доцент
Н.А. Каллаур

Рецензенты:

кафедра профессионального развития работников образования
УО «Брестский областной институт развития образования»

учитель математики высшей категории
ГУО «Лицей №1 им. А.С. Пушкина г. Бреста»
И.Д. Потапова

Гринько, Е.П., Каллаур, Н.А. Методика преподавания математики (часть II) / Е.П. Гринько, Н.А. Каллаур – Брест : Изд-во БрГУ имени А.С. Пушкина, 2021. – 389 с.

Комплекс предназначен студентам специальности 1-02 05 01 Математика и информатика, написан в соответствии с программой обучения в вузе. В ЭУМК представлены лекции, вопросы для обсуждения, задания к практическим и лабораторным занятиям по всем темам курса «Методика преподавания математики», материалы для текущего и итогового контроля, дан перечень необходимой литературы. Предлагаются различные по форме информационно-содержательные средства осмысления, систематизации, обобщения знаний по методике преподавания математики и их практическому применению в педагогической деятельности.

ЭУМК может быть использован для организации учебной деятельности студентов, подготовки к итоговой аттестации, оценки уровня освоения дисциплины.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Одна из главных задач подготовки студентов к будущей профессиональной деятельности связана с формированием практических умений и навыков, составляющих основу технологии труда учителя. Настоящий ЭУМК ориентирован на творческое осмысление студентами теоретических знаний по методике преподавания математики.

Учебная дисциплина «Методика преподавания математики» относится к числу педагогических дисциплин и изучается студентами, уже получившими определенную философскую, педагогическую, психологическую, общедидактическую и математическую подготовку. Эти знания студентов систематически используются в курсе методики преподавания математики и находят свой выход в практике обучения школьников.

Структура ЭУМК:

1. Теоретический раздел, содержащий необходимые теоретические сведения.
2. Практический раздел, содержащий материал для практических занятий.
3. Раздел контроля знаний, содержащий вопросы к экзамену и тест.
4. Вспомогательный раздел, содержащий рекомендуемую литературу.

Значительное место в ЭУМК занимают вопросы, связанные с формированием творческого подхода к обучению математике, умением оценивать различные системы изложения материала с точки зрения педагогики, психологии, дидактики. Особое внимание в пособии уделяется рассмотрению вопросов по выработке профессиональных навыков и приемов работы, умению вести научно-исследовательскую деятельность, обращаться с техническими средствами обучения. Пособие содержит теоретический материал по общим вопросам методики преподавания математики и вопросам частной методики преподавания математики, задания для практических и лабораторных занятий, список литературы, который поможет подготовиться к семинарским занятиям по методике преподавания математики, к зачетам и экзаменам.

В пособии разработаны практические и лабораторные занятия разделов «Общая методика» и «Частная методика» по темам курса «Методика преподавания математики». Цель практических занятий состоит в формировании у студентов следующих умений и навыков: проводить анализ учебно-методической литературы по математике, анализировать отдельные темы школьного курса математики, планировать учебную работу и учебный материал по математике, правильно выбирать методы, формы и средства обучения для каждой конкретной темы с учетом индивидуальных особенностей учащихся с целью активизации их познавательной деятельности, знакомиться с основными методами решения задач, оценивать работы учащихся, анализировать урок, планировать и проводить внеклассные мероприятия по математике в школе. Важно отметить, что предлагаемый материал опирается на современные подходы к изучению методики преподавания математики.

ЭУМК разработан в соответствии с требованиями ОСВО 1-02 05 01-2013 на основании учебного плана ФМ-24-19/уч. от 30.05.2019 и учебной программы УД-19-002-20 от 29.05.2020.

О программе учебной дисциплины «Методика преподавания математики»

Структура содержания учебной дисциплины «Методика преподавания математики» основана на изучении двух традиционных разделов: общая методика и специальная (частная) методика. Содержание учебной дисциплины представлено в виде тем, которые характеризуются относительно самостоятельными дидактическими единицами содержания.

Содержание учебной дисциплины «Методика преподавания математики» тесно связано с такими учебными дисциплинами, как «Психология», «Педагогика». Для изучения учебной дисциплины «Методика преподавания математики» необходимо также наличие у обучающихся академических компетенций по учебным дисциплинам «Элементарная математика», «Элементарная математика и практикум по решению задач», «Введение в математику», формирование которых необходимо обеспечить в рамках компонента учреждения высшего образования.

Целью преподавания учебной дисциплины является формирование профессиональных компетенций учителя математики в условиях современного образовательного процесса.

Основными ***задачами*** учебной дисциплины являются:

– осознание роли общего математического образования в решении задач современной общеобразовательной школы, значения математики как общеобразовательного предмета, психолого-педагогических основ его изучения, задач и целей преподавания предмета на разных уровнях его изучения школьниками;

– формирование представлений об основных методических концепциях школьного математического образования и подходах к отбору, структурированию и систематизации содержания;

– ознакомление студентов с содержанием всех компонентов методической системы обучения математике в их современной трактовке, требованиями образовательных стандартов, с содержанием программ, учебников и учебных пособий по математике для общеобразовательных учреждений, перспектив и направлений их усовершенствования на различных уровнях;

– обеспечение глубокого усвоения студентами содержания школьного курса математики и понимания основных методических идей, заложенных в нем;

– овладение конкретными знаниями по общей теории и методике организации обучения школьной математике;

– выработка у студентов профессиональных умений и навыков на уровне требований государственных стандартов к преподаванию математики в общеобразовательных учреждениях;

– формирование творческого подхода к решению методических проблем;

– обучение студентов применению наиболее эффективных методов, средств и организационных форм обучения школьников математике, использованию в своей деятельности новых технологий обучения;

– формирование умений вести исследовательскую деятельность, результаты которой находят непосредственное развитие в курсовых, дипломных и научных работах;

– выработка умений видеть современные проблемы методики изучения математики в школе и находить пути решения этих проблем адекватно возрастным особенностям учащихся, прогнозировать результаты своей педагогической деятельности и корректировать ее на основе критического анализа.

Основными методами, технологиями обучения, отвечающими целям изучения учебной дисциплины, являются:

– методы проблемного обучения (проблемное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;

– приемы организации учебно-исследовательской деятельности, технологии модульного обучения, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе;

– моделирование студентами фрагментов будущей профессиональной деятельности, проведение дидактических игр;

– использование видеоуроков конкурса «Учитель года», фрагментов видеоуроков, записанных во время педагогической практики студентов на семинарских и лабораторных занятиях;

– личностно-ориентированное обучение (обучение в сотрудничестве, метод проектов, дифференцированное обучение и др.)

– использование современных информационных технологий (лекции с использованием компьютерных демонстраций, электронные лекции в режиме слайд-шоу или с использованием мультимедиа, электронные конспекты и базы данных и др.), использование аудио и видео техники.

В процессе обучения студентов целесообразно использовать современные тенденции в развитии методики преподавания математики и психолого-педагогические закономерности формирования знаний.

В результате изучения учебной дисциплины «Методика преподавания математики» студент должен:

знать:

– цели и задачи среднего математического образования;

– теоретические подходы, современные концепции обучения математике;

– общие основы методики преподавания математики;

– психологические особенности обучения математике;

– современные педагогические технологии обучения математике;

– формы и методы организации внеклассной и внешкольной работы по математике;

– формы контроля, критерии оценки уровня усвоения знаний и сформированности умений учащихся по математике;

уметь:

– применять систему знаний о закономерностях и дидактических принципах организации учебного процесса по математике;

– использовать принципы, методы, формы и средства учебной и научно-исследовательской работы в сфере математического образования;

– применять методы методологического и научно-методического анализа содержания и структуры учебных средств по математике;

– использовать знания, которые относятся к современным технологиям обучения математике;

– применять методику изучения математических понятий, теорем, доказательств и решения задач;

– организовывать образовательно-воспитательный процесс обучения математике для различных возрастных групп учащихся, на разных ступенях и профилях обучения и в разных типах образовательных учреждений;

владеть:

– способами ориентации в профессиональных источниках информации (журналы, сайты, образовательные порталы и т.д.);

– различными средствами коммуникации в профессиональной педагогической деятельности;

– способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования возможностей информационной среды образовательного учреждения, района, области, страны;

– методами методологического и научно-методического анализа содержания и структуры учебных средств по математике;

– современными педагогическими технологиями обучения математике;

– методами учебной и научно-исследовательской работы в сфере математического образования;

– методами организации внеклассной и внешкольной работы по математике;

– навыком формирования профессиональной самооценки деятельности.

Успешное освоение системы знаний, умений, навыков по учебной дисциплине «Методика преподавания математики» позволит студентам достигнуть профессионально-методической грамотности, готовности выполнять профессионально-методическую деятельность в условиях современного образовательного процесса.

В рамках лекционного курса должны формироваться концептуальные взгляды будущих учителей на проблемы школьного математического образования. Задачи лекционного курса заложить основы профессионального отношения к указанным в программе вопросам, дать всестороннюю характеристику изучаемых проблем, представить аналитический обзор возможных подходов к их решению.

Практические занятия должны быть направлены на приобретение студентами навыков использования полученных теоретических знаний при решении конкретных методических задач. Их структура и содержание, а также организация и проведение должны содействовать развитию индивидуально-творческих способностей каждого студента, приобретению навыков самостоятельной работы, в том числе и исследовательской. При этом занятия должны ориентироваться на продуктивное использование современных компьютерных технологий и технических средств обучения.

На практических занятиях студенты знакомятся с содержанием образовательного стандарта по математике, учебных программ, учебников и учебных пособий; анализируют методику преподавания конкретных тем школьного курса в разных УМК (учебно-методических комплексах); учатся планировать учебный материал; знакомятся с принципами построения системы задач по отдельной теме и разработки дидактических материалов; обсуждают проблемы организации обучения на уроках разных типов, формы контроля и оценки знаний учащихся, проблемы внеклассной работы по предмету.

Лабораторные занятия проводятся по подгруппам и должны включать активные, практико-ориентированные виды деятельности, направленные на формирование умений и навыков самостоятельной педагогической работы в обучении математике. Их организация должна способствовать развитию методической культуры студента и его профессиональной самореализации.

На занятиях всех типов рекомендуется изучение студентами методики работы опытных учителей математики, проведение встреч с учеными, методистами, творчески работающими учителями, авторами УМК.

Роль и место дисциплины в методической и математической подготовке определяется ее возможностями в формировании методической компетентности будущих учителей.

Освоение курса «Методика преподавания математики» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть методами научно-педагогического исследования.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

CJIK-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

СЛК-7. Быть способным к осуществлению самообразования и самосовершенствования профессиональной деятельности.

ПК-1. Управлять учебно-познавательной и учебно-исследовательской деятельностью обучающихся.

ПК-2. Использовать оптимальные методы, формы, средства обучения.

ПК-3. Организовывать и проводить учебные занятия различных видов и форм.

ПК-4. Организовывать самостоятельную работу обучающихся.

ПК-11. Развивать учебные возможности и способности обучающихся на основе системной педагогической диагностики.

ПК-12. Развивать навыки самостоятельной работы обучающихся с учебной, справочной, научной литературой и др. источниками информации.

ПК-13. Организовывать и проводить коррекционно-педагогическую деятельность с обучающимися.

ПК-14. Предупреждать и преодолевать неуспеваемость обучающихся.

ПК-15. Формулировать образовательные и воспитательные цели.

ПК-16. Оценивать учебные достижения обучающихся, а также уровни их воспитанности и развития.

ПК-17. Осуществлять профессиональное самообразование и самовоспитание с целью совершенствования профессиональной деятельности.

ПК-18. Организовать целостный педагогический процесс с учетом современных образовательных технологий и педагогических инноваций.

ПК-19. Анализировать и оценивать педагогические явления и события прошлого в свете современного гуманитарного знания.

Распределение аудиторного времени по семестрам:

Курс / Семестр	Общее кол-во часов	Аудиторное количество часов	Лекции	Практические занятия	Лабораторные занятия
2 курс / 3 семестр	118	66	32	30	4
2 курс / 4 семестр	124	60	28	28	4
3 курс / 5 семестр	98	60	30	28	2
3 курс / 6 семестр	66	36	16	18	2
4 курс / 7 семестр	144	42	24	16	2
Итого	**550**	**264**	**130**	**120**	**14**

На изучение учебной дисциплины «Методика преподавания математики» отводится всего 550 часов, из них 264 часа аудиторных занятий. Примерное распределение аудиторного времени по видам занятий: 130 часов – лекции, 120 часов – практические занятия, 14 часов – лабораторные занятия.

Итоговый контроль знаний проводится на зачетах (третий, пятый, шестой семестры) и на экзаменах (четвертый, седьмой семестры).

Содержание учебного материала

Раздел 1. Общие основы методики обучения математике

1.1. Предмет, цели, задачи и методы методики преподавания математики. Связь методики преподавания математики с другими науками. Основные этапы развития методики преподавания математики, современные тенденции методики преподавания математики.

Предмет методики преподавания математики. Методы методики обучения математике. История развития методики преподавания математики. Связь методики обучения математике с другими науками (с математикой, педагогикой, психологией, философией и др.). Основные противоречия процесса обучения математике. Актуальные проблемы методики преподавания математики.

1.2. Математика как наука и как учебный предмет в школе. Цели и содержание обучения математике. Модернизация математического образования. Концепция и стандарт учебного предмета «Математика».

Этапы развития математики. Особенности современного этапа развития школьного математического образования. Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования. Реформистское движение за модернизацию математического образования. Концепция и стандарт учебного предмета «Математика». Характеристика основных программ и учебных пособий по математике для средней школы. Проблема интеграции школьного курса математики.

1.3. Психолого-педагогические основы обучения математике. Основные дидактические принципы в процессе преподавания математики.

Особенности интеллектуального развития в подростковом возрасте. Модели обучения математике, построенные с учетом психологических закономерностей умственного развития учащихся. Дидактические принципы обучения математике. Особенности реализации дидактических принципов при обучении математике в условиях смены парадигм образования.

1.4. Общедидактические методы обучения математике и их классификация.

Проблема методов обучения. Классификация методов обучения. Объяснительно-иллюстративный метод. Репродуктивный метод. Проблемное обучение. Частично-поисковый (эвристический) метод. Исследовательский метод в обучении математике. Программированное обучение.

1.5. Методы научного познания в обучении математике.

Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез. Математические методы познания.

1.6. Методика изучения математических понятий.

Понятие. Содержание и объем понятия. Зависимость между объемами понятий. Определение понятия. Классификация понятий. Формирование математических понятий: психологические закономерности формирования математических понятий, методика введения математических понятий, применение понятий и их определений. Некоторые особенности усвоения математических понятий и их определений учащимся.

1.7. Методика изучения математических предложений.

Математические суждения и умозаключения. Основные виды математических суждений. Условная форма математических предложений. Четыре вида предложений, записанных в условной форме. Связь между их истинностью. Необходимые и достаточные условия. Сущность понятия доказательства. Методы доказательства теорем. Методика изучения теорем. Методические задачи, решаемые при изучении теорем. Воспитание у учащихся потребности в доказательствах. Методика обучения учащихся теоремам и их доказательствам. Подготовка учителя к доказательству теорем на уроке.

1.8. Задачи в школьном курсе математики.

Роль задач в обучении математике. Функции задач в обучении математике. Основные этапы в решении задачи. Общие умения по решению задач. Общие методы решения математических задач. Классификация задач. Роль алгоритмов и эвристик в обучении решению задач. Организация обучения решению математических задач. Методика обучения школьников решению текстовых задач арифметическим методом.

1.9. Формы организации обучения математике. Урок. Основные требования к уроку. Анализ урока математики. Средства обучения математике. Контроль и оценка знаний учащихся.

Современные формы организации обучения математике. Урок. Типы уроков. Основные требования к современному уроку. Организация современного урока (годовое или полугодовое планирование, тематическое планирование, поурочное планирование). Особенности организации учебного процесса на разных этапах и уровнях обучения математике, в различных образовательных технологиях. Средства обучения математике. Печатные средства обучения математике (учебник, учебное пособие, сборники задач и дидактических материалов, тетради с печатной основой, методические пособия, учебно-методические комплексы). Дидактические требования к учебнику по математике как основному средству обучения. Электронные средства обучения математике (компьютерные обучающие и контролирующие программы; электронные учебники и т.д.). Средства наглядности при изучении математики, дидактические требования к их качеству и использованию в учебном процессе. Дистанционные технологии обучения в традиционном образовательном процессе.

Анализ урока. Его роль в интенсификации учебного процесса. Организация контроля и оценки знаний, навыков и умений школьников по математике, виды контроля (текущий, тематический, итоговый), формы контроля (устные опросы, письменные работы, зачеты, экзамены, централизованное тестирование). Методика работы учителя по подготовке учащихся к устному и письменному экзамену по математике.

1.10. Дифференциация при обучении математике в системе основного и дополнительного образования. Внеклассная работа по математике. Организация исследовательской деятельности учащихся.

Проблема развития математических способностей у школьников.

Внешняя и внутренняя дифференциация при обучении учащихся математике. Основное образование учащихся, повышенный уровень изучения математики в гимназиях и лицеях. Дополнительное образование по математике. Постоянные и непостоянные формы внеурочной работы в рамках дополнительного образования по математике (кружки, факультативные занятия, курсы по выбору, заочные школы, олимпиады, конференции и т. п.). Организация исследовательской деятельности учащихся, подготовка к участию в научно-исследовательской работе, математических турнирах различного уровня.

1.11. Развитие мышления и воспитание учащихся в процессе обучения математике

Компоненты математического мышления. Качества математического мышления. Развитие познавательного интереса школьников при обучении математике. Воспитание в процессе обучения математике.

Раздел 2. Частная методика

2.1. Методика изучения числовых множеств в школьном курсе математики.

Историческая и логическая последовательности изучения числовых множеств. Общий принцип расширения числовых множеств. Общая схема методики изучения новых чисел. Методика повторения и дальнейшего изучения натуральных чисел. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей. Изучение процентов. Основные задачи на проценты. Методика введения и изучения рациональных и иррациональных чисел.

2.2. Методика изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе математики.

Тождественные преобразования в школьном курсе математики. Методика изучения понятия тождества. Тождество на множестве. Основные виды тождественных преобразований в школьном курсе математики. Методика формирования навыков и умений тождественных преобразований целых и дробных рациональных выражений, иррациональных, трансцендентных (показательных, логарифмических, тригонометрических) выражений. Типичные ошибки, допускаемые учащимися в тождественных преобразованиях и пути их предупреждения. Методика формирования культуры тождественных преобразований.

2.3. Обобщение понятия степени в школьном курсе математики.

Методика введения и изучения свойств степеней с показателями из разных числовых множеств. Методика изучения степени с натуральным и целым показателем. Корень n-ой степени в школьном курсе математики. Методика введения и изучения степени с иррациональным показателем.

2.4. Понятие функции. Методика изучения алгебраических функций в школьном курсе математики. Функции натурального аргумента.

Понятие функции. Разные трактовки понятия функции. Возможная методическая схема изучения функций в базовой школе. Методика изучения алгебраических функций. Числовые последовательности и прогрессии. Методика изучения арифметической и геометрической прогрессий в курсе математики средней школы.

2.5. Методика изучения тригонометрических функций в школьном курсе.

Понятие синуса, косинуса, тангенса, котангенса в курсе геометрии. Методика введения тригонометрических функций любого угла. Методические особенности изучения первых трансцендентных функций в школе. Построение графиков тригонометрических функций. Методические особенности изучения и использования свойств тригонометрических функций в курсе математики средней школы.

2.6. Методика изучения показательной и логарифмической функций.

Особенности методики изучения показательной и логарифмической функций в средней школе. Функциональная линия в школьном курсе математики и ее дидактические особенности.

2.7. Методика изучения производной. Применение производной в школьном курсе математики.

О проблеме введения понятия предела в школьный курс. Методика изучения производной функции в школьном курсе математики. Механический и геометрический смыслы производной. Применение производной к исследованию функций. Уточнение понятия касательной к графику функции.

Уравнение касательной к графику функции.

2.8. О понятиях равносильности и следования в курсе школьной математики. Методика обучения учащихся решению алгебраических уравнений, неравенств и их систем. Обучение школьников решению текстовых задач методом составления уравнений, неравенств, их систем.

Разные трактовки понятия уравнения и соответствующие им определения. Уравнения и неравенства в средней школе. Равносильность уравнений и неравенств. Понятие следования в курсе школьной математики. Рациональные уравнения и неравенства, их системы. Потеря и приобретение корней в процессе решения иррациональных уравнений. Метод интервалов как наиболее общий подход при решении неравенств школьной математики. Решение текстовых задач методом составления уравнений и неравенств.

2.9. Методика решения трансцендентных уравнений, неравенств и их систем.

Тригонометрические уравнения и неравенства. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Методика обучения школьников решению логарифмических и показательных уравнений и неравенств. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств.

2.10. Методика изучения начал систематического школьного курса планиметрии.

Значение курса геометрии в развитии учащихся. Пропедевтика и систематический курс геометрии. Методика изучения первых разделов систематического курса геометрии. Понятие равенства фигур в школьном курсе геометрии. Различные подходы к построению школьного курса геометрии. Особенности обучения доказательству первых теорем.

2.11. Методика изучения четырехугольников, их свойств.

Понятие многоугольника. Методика изучения четырехугольников, их свойств и признаков.

2.12. Методика изучения величин в школьном курсе планиметрии.

Методика формирования понятия каждой из геометрических величин (длина, мера угла, мера дуги, площадь) через усвоение соответствующей системы аксиом. Различные подходы к обоснованию формул площади прямоугольника. Методика обоснования формул площадей многоугольников. Обучение школьников решению задач на нахождение величин.

2.13. Методика изучения основных соотношений между элементами треугольника.

Методика изучения соотношений между сторонами и углами треугольников. Решение треугольников.

2.14. Методика изучения подобия фигур.

Определение и признаки подобия треугольников в школьном курсе планиметрии. Теорема Фалеса. Обучение школьников применению метода подобия при доказательстве теорем и решении задач планиметрии.

2.15. Методика изучения основных соотношений в круге. Вписанные и описанные многоугольники.

Взаимное расположение прямой и окружности. Углы, ассоциируемые с окружностью. Методика изучения метрических соотношений в окружности и треугольнике. Замечательные точки треугольника. Методика изучения свойств вписанных, описанных четырехугольников и правильных многоугольников.

2.16. Методика формирования у учащихся навыков решения задач по планиметрии. Обучение школьников решению задач на построение циркулем и линейкой.

Методика обучения школьников решению задач планиметрии. Основные методы решения планиметрических задач. Последовательность введения элементарных геометрических построений при обучении математике. Особенности конструктивных задач на плоскости. Схема решения задачи на построение при обучении планиметрии.

2.17. Методика изучения первых разделов систематического курса стереометрии. Особенности методики работы с многогранниками.

Трудности при изучении аксиом стереометрии и пути их преодоления. Методика введения многогранников на первых уроках. Обучение школьников решению задач при изучении аксиом стереометрии и первых следствий из них. Методические особенности обучения школьников решению задач на построение сечений многогранников аксиоматическими методами. Использование систем динамической геометрии (GeoGebra, «Живая геометрия» и др.).

2.18. Методика изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Взаимное расположение прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Методика изучения параллельности прямых и плоскостей в пространстве. Методические особенности изучения параллельного проектирования в школе. Изображение плоских и пространственных фигур. Перпендикулярность прямых в пространстве, перпендикулярность прямой и плоскости, двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярность двух плоскостей. Роль многогранников при изучении первых разделов стереометрии. Вопросы существования и единственности геометрических фигур при изучении начал стереометрии. Особенности методики обучения школьников решению задач первых разделов стереометрии.

2.19. Методика обучения учащихся нахождению углов и расстояний в пространстве.

Методика изучения понятий угла между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями. Двугранный угол. Понятие расстояния между геометрическими фигурами в пространстве. Методика обучения школьников вычислению расстояний и углов между геометрическими фигурами в пространстве.

2.20. Методика изучения многогранников и их свойств.

Роль и место многогранников на разных этапах изучения стереометрии. Особенности изучения призм и пирамид. Правильные многогранники. Обучение школьников решению задач на доказательство и использование свойств многогранников.

2.21. Методика изучения тел вращения, их свойств.

Методика введения понятий цилиндра, конуса и сопровождающих их понятий в школьных учебных пособиях и учебниках стереометрии. Определение сферы и шара. Взаимное расположение сферы и плоскости. Обучение школьников решению задач.

2.22. Методика изучения площадей поверхностей и объемов многогранников и тел вращения.

Методика формирования понятия объема в школьном курсе математики. Методика изучения объемов и площадей поверхностей многогранников. Методические особенности доказательства формул для вычисления объемов и площадей поверхностей тел вращения.

2.23. Методика обучения школьников решению задач на комбинации многогранников и тел вращения.

Понятие касательной прямой и плоскости сферы (шара), конуса цилиндра. Комбинации многогранников и тел вращения. Обучение школьников решению задач на комбинации пространственных тел.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов				
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР
1	2	3	4	5	6	7
	4 семестр (60 часов)	*28*	*28*		*4*	
1.9	**Формы организации обучения математике. Урок. Основные требования к уроку. Анализ урока математики. Средства обучения математике. Контроль и оценка знаний учащихся (10 ч)**	**2**	**4**		**2**	
1.9.1	Современные формы организации обучения математике. Урок. Типы уроков. Основные требования к современному уроку. Организация современного урока (годовое или полугодовое планирование, тематическое планирование, поурочное планирование). Анализ урока. Его роль в интенсификации учебного процесса.	2				
1.9.2	Особенности организации учебного процесса на разных этапах и уровнях обучения математике, в различных образовательных технологиях. Методика проведения нестандартных уроков.		2			

1.9.3	Средства обучения математике. Печатные средства обучения математике (учебник, учебное пособие, сборники задач и дидактических материалов, тетради с печатной основой, методические пособия, учебно-методические комплексы). Дидактические требования к учебнику по математике как основному средству обучения. Электронные средства обучения математике (компьютерные обучающие и контролирующие программы; электронные учебники и т.д.). Средства наглядности при изучении математики, дидактические требования к их качеству и использованию в учебном процессе.		2			
1.9.4	Организация контроля и оценки знаний, навыков и умений школьников по математике, виды контроля (текущий, тематический, итоговый), формы контроля (устные опросы, письменные работы, зачеты, экзамены, централизованное тестирование).				2	
1.10	**Дифференциация при обучении математике в системе основного и дополнительного образования (4 ч)**	**2**	**2**			
1.10.1	Внешняя и внутренняя дифференциация при обучении учащихся математике. Основное образование учащихся, повышенный уровень изучения математики в гимназиях и лицеях. Дополнительное образование по математике.	2				
1.10.2	Проблема развития математических способностей у школьников.		2			
1.11	**Развитие мышления и воспитание учащихся в процессе обучения математике (4 ч)**	**2**	**2**			
1.11.1	Компоненты математического мышления. Качества математического мышления.	2				
1.11.2	Развитие познавательного интереса школьников при обучении математике. Воспитание в процессе обучения математике.		2			

2	**ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА (182 ч)**	90	82		10	
2.1	**Методика изучения числовых множеств в школьном курсе математики (8 ч)**	4	4			
2.1.1	Историческая и логическая последовательности изучения числовых множеств. Общий принцип расширения числовых множеств. Общая схема методики изучения новых чисел. Методика повторения и дальнейшего изучения натуральных чисел.	2				
2.1.2	Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей. Методика введения и изучения рациональных и иррациональных чисел.	2				
2.1.3	Методика изучения рациональных чисел.		2			
2.1.4	Изучение процентов. Основные задачи на проценты.		2			
2.2	**Методика изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе математики (8 ч)**	4	4			
2.2.1	Тождественные преобразования в школьном курсе математики. Методика изучения понятия тождества. Тождество на множестве. Основные виды тождественных преобразований в школьном курсе математики.	2				
2.2.2	Методика формирования навыков и умений тождественных преобразований целых и дробных рациональных выражений, иррациональных, трансцендентных (показательных, логарифмических, тригонометрических) выражений.	2				
2.2.3	Типичные ошибки, допускаемые учащимися в тождественных преобразованиях и пути их предупреждения.		2			
2.2.4	Методика формирования культуры тождественных преобразований.		2			

2.3	**Обобщение понятия степени в школьном курсе математики (6 ч)**	**4**	**2**			
2.3.1	Методика введения и изучения свойств степеней с показателями из разных числовых множеств. Методика изучения степени с натуральным и целым показателем.	2				
2.3.2	Корень n-ой степени в школьном курсе математики. Методика введения и изучения степени с иррациональным показателем.	2				
2.3.3	Методика изучения степеней в школе.		2			
2.4	**Понятие функции. Методика изучения алгебраических функций в школьном курсе математики. Функции натурального аргумента (12 ч)**	**6**	**4**		**2**	
2.4.1	Понятие функции. Разные трактовки понятия функции. Функциональная линия в школьном курсе математики и ее дидактические особенности	2				
2.4.2	Возможная методическая схема изучения функций в базовой школе. Методика изучения алгебраических функций.	2				
2.4.3	Числовые последовательности и прогрессии. Методика изучения арифметической и геометрической прогрессий в курсе математики средней школы.	2				
2.4.4	Методика изучения алгебраических функций.		2			
2.4.5	Методика изучения арифметической и геометрической прогрессий в курсе математики средней школы.		2			
2.4.6	Методика изучения общефункциональных понятий.				2	
2.5	**Методика изучения тригонометрических функций в школьном курсе (8 ч)**	**4**	**4**			
2.5.1	Понятие синуса, косинуса, тангенса, котангенса в курсе геометрии. Методика введения тригонометрических функций любого угла.	2				

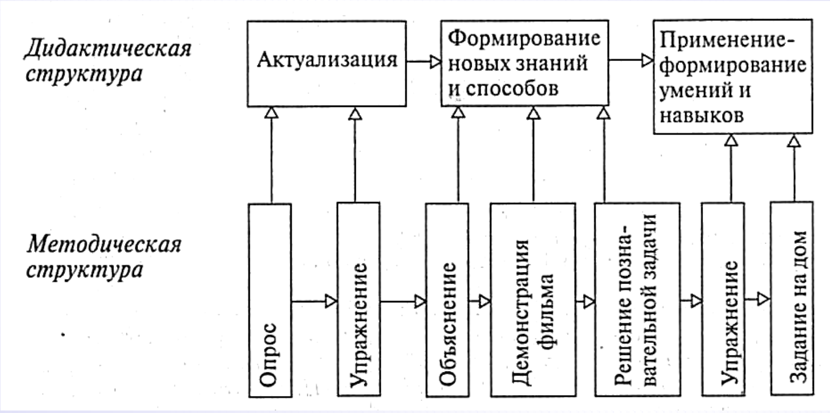
2.5.2	Методические особенности изучения первых трансцендентных функций в школе. Построение графиков тригонометрических функций.	2				
2.5.3	Понятие синуса, косинуса, тангенса, котангенса в курсе геометрии.		2			
2.5.4	Методические особенности изучения и использования свойств тригонометрических функций в курсе математики средней школы.		2			
	Контрольная работа		2			

Лекция 1. Современные формы организации обучения математике. Урок. Типы уроков. Основные требования к современному уроку. Организация современного урока (годовое или полугодовое планирование, тематическое планирование, поурочное планирование). Анализ урока. Его роль в интенсификации учебного процесса.

Урок остается самой распространенной организационной формой учебно-воспитательного процесса в школе. Основные положения, характеризующие урок, заложены в трудах Я. А. Коменского, И. Ф. Гербарта, К. Д. Ушинского, М. А. Данилова, Б. П. Есипова, И. Т. Огородникова, М. Н. Скаткина и др. Идеи отечественных и зарубежных педагогов получили развитие в исследованиях, проведенных Ю. Б. Зотовым, Г. Д. Кирилловой, М. И. Махмутовым, В. А. Онищуком, И. М. Чередовым и др. Результатом этих исследований явился вывод о вариативности урочной формы организации занятий, которая характеризуется расширением дидактических возможностей урока за счет синтеза его с другими формами обучения, что привело к появлению нестандартных уроков: урока-семинара, урока-конференции, урока-консультации и т. д.

Однако до 50-х гг. урок представлялся феноменом с достаточно жесткой структурой. Так, урок изучения нового материала состоял из следующих этапов: **организационный момент, проверка домашнего задания, объяснение нового материала, закрепление, подведение итогов урока и задание на дом.** Причем границы этапов жестко обозначались и последовательность их была строго определенной. В 50-х гг. липецкие учителя выступают за ликвидацию регламентации последовательности этапов и границ между ними, т. е. за отрицание прежних представлений об уроке. Опыт по внедрению липецкой инициативы убедил учителей в целесообразности сохранения структуры урока, однако без прежней жесткости границ между ее компонентами.

М.И. Махмутов выделяет следующие компоненты дидактической структуры урока: **1) актуализация прежних знаний и способов действий; 2) формирование новых понятий и способов действий; 3) применение-формирование умений и навыков.** Эта структура раскрывается и конкретизируется в методической подструктуре урока, элементами которой будут различные виды деятельности учителя и учащихся: рассказ, упражнение, чтение текста и т. д. Если число компонентов дидактической структуры постоянно, то число элементов методической подструктуры — величина переменная. Взаимосвязь между указанными структурами урока М.И. Махмутов представляет следующей схемой:



Проблема типологии уроков в дидактике решается по-разному. Наиболее распространенной является **типология уроков в зависимости от дидактической цели: а) урок усвоения новых знаний; б) урок усвоения навыков и умений; в) урок применения знаний, навыков и умений; г) урок обобщения и систематизации знаний; д) урок проверки, оценки и коррекции знаний, навыков и умений; е) комбинированный урок.**

Рассмотрим несколько типов урока. **Так, в уроке усвоения новых знаний выделяют следующую структуру: 1) проверка домашнего задания, воспроизведение и коррекция опорных знаний учащихся; 2) сообщение темы, цели, задач урока и мотивация учебной деятельности школьников; 3) восприятие и первичное осознание нового материала, осмысление связей и отношений в объектах изучения; 4) обобщение и систематизация знаний; 5) подведение итогов урока и сообщение домашнего задания.**

Урок усвоения навыков и умений имеет такую структуру: 1) проверка домашнего задания, воспроизведение и коррекция опорных знаний; 2) сообщение темы, цели, задач урока и мотивация учения школьников; 3) изучение нового материала; 4) первичное применение приобретенных знаний; 5) применение учащимися знаний в стандартных условиях; 6) творческий перенос знаний и навыков в новые условия; 7) итоги урока и сообщение домашнего задания.

С уроком обобщения и систематизации соотносят следующие элементы: 1) сообщение темы, цели, задач урока и мотивация учебной деятельности школьников; 2) воспроизведение и коррекция опорных знаний; 3) повторение и анализ основных фактов, событий, явлений; 4) повторение, обобщение и систематизация понятий, усвоение соответствующей системы знаний, ведущих идей и основных теорий. Данная типология хорошо соотносится с практикой, с традиционно сложившейся типологией, усовершенствуя ее, соответствует методическим концепциям формирования математических понятий, работы с теоремой и т. д.

Прежде чем перейти к анализу урока математики, остановимся на требованиях к уроку как организационной форме обучения. В педагогической литературе число таких требований колеблется от 6 до 18 и более. Одни авторы в число требований к уроку включают все требования к педагогическому процессу, другие не раскрывают требований к уроку, в которых учитывались бы достижения современной дидактики. В дидактике есть и попытки классификации требований к уроку. Например, В. А. Онищук делит их на четыре группы: **идеологические, дидактические, психологические, гигиенические.** Условность этого деления автор видит в том, что в реальной действительности все эти требования тесно связаны между собой, взаимопроникают друг в друга. **М.И. Махмутов** отмечает, что, кроме основных правил организации урока, вытекающих из дидактических принципов, обучающий руководствуется и специальными, основанными на логике процесса обучения, принципах обучения и закономерностях преподавания. К последним относятся следующие **правила: 1) определить цель, включающую учебную, развивающую и воспитательную цели (подцели); 2) подготовить содержание учебного материала; 3) определить дидактические задачи урока, последовательное решение которых приведет к достижению всех целей; 4) выбрать наиболее эффективное сочетание методов и приемов обучения в соответствии с поставленными целями, содержанием учебного материала, уровнем обученности учащихся и дидактическими задачами; 5) определить структуру урока, соответствующую целям и задачам, содержанию и методам обучения; 6) все дидактические задачи урока должны решаться на этом же уроке и не переноситься на домашнюю работу.**

В дореволюционной методической литературе не было специальных работ, посвященных уроку математики. Однако в трудах Н. А. Бобровникова, П. С. Гурьева, В. А. Евтушевского, Н. А. Извольского, К. Ф. Лебединцева, М. Г. Попруженко, С. И. Шохор-Троцкого и других ученых отражается сущность и направление изменения структуры урока математики: не ограничиваться «диктовкой», «задаванием и спрашиванием», а уделять больше времени объяснению и закреплению изучаемого материала.

В 20-х гг. классно-урочная система обучения объявляется архаичной и заменяется комплексной системой преподавания, введением бригадно-лабораторного метода обучения, метода проектов. Математика рассматривается не как самостоятельный учебный предмет, а выступает в качестве вспомогательного средства при ознакомлении учащихся с «комплексом знаний» по трем общим разделам: природа, труд, общество. Беспредметное обучение привело к резкому ухудшению знаний учащихся, особенно по математике, что послужило причиной восстановления в 30-х гг. урока в качестве основной организационной формы учебной работы в школе. Усилия методистов стали направляться на разработку требований к уроку математики, выявление особенностей построения его этапов, совершенствование методов и приемов обучения (А. Н. Барсуков, К. С. Барыбин, Е. С. Березанская, В. М. Брадис, С. Е. Ляпин, В. И. Мишин, В. В. Репьев, Р. С. Черкасов и др.). В 1955 г. защищается первая диссертация по проблеме урока математики (В. Я. Саннинский). В проведенном исследовании положено начало целенаправленному решению указанных проблем при построении уроков различных типов (урок ознакомления с новым материалом, урок закрепления изученного и урок проверки знаний). В теории и практике урока математики широко используются достижения педагогической психологии, результаты поиска учителями путей совершенствования урока, решения проблем развития школьников, индивидуализации и дифференциации обучения (учителя Липецкой и Ростовской областей, Татарии Б. Г. Зив, А. П. Карп, В. И. Рыжик, В. Ф. Шаталов и др.).

Открытый простор для поиска и внедрения новых форм обучения вызвал появление не только нестандартных уроков, но и различных мастерских, студий, разновозрастных классов и т. д. Большинство педагогов видят совершенствование процесса обучения в интеграции различных организационных форм, использовании урока в качестве связующего звена в этой интеграции.

Эффективность такого пути подтверждается и тем, что учителями все чаще при конструировании уроков используются структурные элементы различных форм организации обучения, что выражается в таких названиях, как урок-лекция, урок-дискуссия, урок-студия и т. д.

Таким образом, **современный урок математики, сохраняя присущие ему характерные признаки, рассматривается не как статичная, а как постоянно развивающаяся форма организации занятий.**

Анализируя особенности урока математики, С.Г. Манвелов выделяет следующие его **признаки: 1) содержание урока математики, как правило, не является автономным, оно развивается с опорой на ранее изученное, подготавливая базу для освоения новых знаний, что обусловлено строгой логикой построения курса математики; 2) в процессе овладения своеобразной системой математических знаний происходит существенное разделение обучающихся по склонностям и способностям, что обусловливает необходимость осуществления на уроках математики дифференциации в обучении, развития логического мышления, формирования самоконтроля и т. д.; 3) при обучении математике должны быть созданы условия для того, чтобы каждый ученик мог усвоить на уроке главное в изучаемом материале, поскольку без базовой математической подготовки невозможна постановка образования современного человека; 4) школьный курс математики служит опорным предметом для изучения смежных дисциплин; 5) в процессе обучения математике теоретический материал осознается и усваивается преимущественно в процессе решения задач, поэтому на уроках математики чаще всего теория не изучается в отрыве от практики.**

Анализ требований к уроку, ключевых направлений развития образования, учет образовательных идей гуманизации и гуманитаризации позволяет указать **наиболее значимые требования к современному уроку математики: 1) его целенаправленность; 2) рациональное построение и дифференциация содержания урока; 3) использование гуманитарного потенциала математического образования; 4) обоснованный выбор средств, методов и приемов, ориентированных на обучение, развивающее личность; 5) организация продуктивной учебной деятельности учащихся на уроке с учетом их интересов, наклонностей и потребностей;**

6) мотивация учения и формирование у учащихся умений учиться математике; 7) сотрудничество учителя и учащихся не только при проведении, но и при разработке урока.

Существуют различные типологии урока, и в учебных пособиях уроки анализируют, как правило, в контексте какой-либо конкретной типологии. На практике учитель, разрабатывая системы уроков по конкретным учебным темам, не всегда укладывается в рамки какой-то одной типологии. Учитывая это, С.Г. Манвелов предлагает перейти к разработке системы уроков таких типов, в которых актуализировались бы наиболее характерные структурные элементы современных уроков математики. Для этого он выявляет наиболее распространенные типы уроков математики и группирует их в блоки.

В первый блок уроков (B_1) он включает: урок ознакомления с новым материалом; урок закрепления изученного; урок применения знаний и умений; урок обобщения и систематизации знаний; урок проверки и коррекции знаний; комбинированный урок.

Во второй блок уроков (B_2) отнесены: урок-лекция, урок-семинар, урок-практикум, урок-консультация, урок-зачет.

В третий блок уроков (B_3) включены: урок с дидактической игрой, урок-ролевая игра, урок-экскурсия, урок-дискуссия.

В четвертый блок уроков (B_4) вошли: урок-соревнование, урок-деловая игра, интегрированный урок, театрализованный урок.

По мнению С.Г. Манвелова, всякий урок математики относится к одному из блоков либо является комбинацией структурных компонентов уроков указанных блоков. Например, урок ключевых задач он рассматривает как комбинацию элементов урока-лекции (изложение и конспектирование содержания ключевых задач по изучаемой теме, критериев их отбора и обзор подходов к их решению), урока обобщения и систематизации знаний (освоение учебного материала путем систематизации знаний и умений), урока-практикума (использование инструкций по выполнению заданий с применением ключевых задач), урока - деловой игры (рефлексия, связанная с самооценками и суждениями учащихся о работе класса, группы, своей деятельности и т.д.). Наблюдения показывают, что в основной школе предпочтение отдается урокам, входящим в указанные базисные блоки. При организации обучения учащихся классов математического профиля оказываются эффективными уроки-лекции, уроки-практикумы, интегрированные уроки, уроки-консультации, уроки-соревнования в виде математических боев. Уроки объяснения нового материала, уроки-экскурсии, уроки-ролевые игры, театрализованные уроки оказались более подходящими в организации обучения учащихся, которые не намерены использовать математику в своей будущей профессии.

2. Подготовка учителя к уроку. Анализ урока

Всякая разумная деятельность начинается с планирования.

ТИПОВЫЕ УЧЕБНЫЕ ПЛАНЫ УЧРЕЖДЕНИЙ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ИНСТРУКТИВНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ ПИСЬМА

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ СТАНДАРТЫ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПЕРЕЧНИ УЧЕБНЫХ ИЗДАНИЙ

ПЕРЕЧНИ ПОСОБИЙ ДЛЯ ПЕДАГОГОВ УЧРЕЖДЕНИЙ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПЕРЕЧНИ ПОСОБИЙ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ УЧРЕЖДЕНИЙ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНЫХ ПРОГРАММ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ

ПЕРЕЧНИ МЕБЕЛИ, ИНВЕНТАРЯ И СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

ДОПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ И ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДЕЙСТВИЯМ В ЧРЕЗВЫЧАЙНЫХ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СИТУАЦИЯХ

УЧЕБНЫЕ ПРЕДМЕТЫ. I–IV КЛАССЫ. 2020/2021

УЧЕБНЫЕ ПРЕДМЕТЫ. V–XI КЛАССЫ. 2020/2021

Учебно-методическое обеспечение образовательного процесса по учебному предмету

- Учебно-методическое обеспечение образовательного процесса по учебному предмету «Математика» в 2020/2021 учебном году
- Примерное календарно-тематическое планирование по учебному предмету
  - Примерное календарно-тематическое планирование по учебному предмету «Математика». X класс (базовый и повышенный уровни)
- Прыкладнае каляндарна-тэматычнае планаванне па вучэбным прадмеце
  - Прыкладнае каляндарна-тэматычнае планаванне па вучэбным прадмеце «Матэматыка». X клас (базавы і павышаны ўзроўні)
- Примерное календарно-тематическое планирование факультативных занятий
  - Примерное календарно-тематическое планирование факультативных занятий «Повторяем математику» для VIII класса учреждений общего среднего образования (2016 г.)
  - Примерное календарно-тематическое планирование факультативных занятий «Повторяем математику» для IX класса учреждений общего среднего образования (2016 г.)
- Перечень статей, опубликованных в научно-методическом журнале «Матэматыка»
  - Статьи научно-методического журнала «Матэматыка», актуальные для совершенствования методического мастерства учителя
- Учебно-методические комплексы факультативных занятий
  - Математика. V класс. Тропинками математики. Пособие для учащихся
  - Путешествие в страну Занимательной математики. V класс. Рабочая тетрадь
  - Математика. VI класс. Путешествие с математикой. Пособие для учащихся
  - Математика. V–VI классы. Пособие для учителей
  - Алгебра учит рассуждать. X класс. Пособие для учащихся
  - Алгебра учит рассуждать. XI класс. Пособие для учащихся
  - Геометрия. X класс. Многообразие идей и методов. Пособие для учащихся
  - Геометрия. XI класс. Многообразие идей и методов. Пособие для учащихся
  - Геометрия. X–XI классы. Многообразие идей и методов. Пособие для учащихся
  - Геометрия. X–XI классы. Многообразие идей и методов (пособие для учителей + программа)
- Контрольно-измерительные материалы
  - Математика: контрольные и самостоятельные работы. V–IX классы
- Пособия для учителей
  - Элементы комбинаторики и бином Ньютона

Подготовка учителя к урокам начинается с годового и тематического планирования учебного процесса. **Годовой и тематический планы** содержат следующие разделы: **1) наименование тем уроков; 2) число часов, отводимых на их изучение; 3) темы для предваряющего и итогового повторения; 4) перечень наглядных пособий и учебного оборудования; 5) учебно-методические пособия; 6) межпредметные связи; 7) типы уроков.**

Пособие составлено в соответствии с концепцией обучения математике в 5 классе. В издании приведен обзор основных теоретических идей каждого урока, сформулированы предметные, метапредметные и личностные цели изучения материала. По изучению каждого параграфа даются методические рекомендации и планы, приводится планирование уроков с указанием заданий для работы в классе и дома, а также примеры конспектов уроков для классов с различным уровнем усвоения знаний.

Адресуется учителям учреждений общего среднего образования.

В дидактике и методике обучения математике процедура планирования учебного процесса доведена до уровня действий (операций). Например, **дидактическая схема тематического планирования включает следующие операции:**

1. Определение задач изучения темы путем ознакомления с программой и методическими указаниями по теме.

2. Ознакомление с содержанием учебного материала по теме в учебнике, выделение основных научных и воспитательных идей, понятий, законов, умений, навыков, которые должны быть усвоены учащимися в соответствии с поставленными задачами.

3. Обоснование логики раскрытия темы в соответствии с закономерностями усвоения знаний, дидактическими принципами, а также определение необходимых для раскрытия темы видов уроков.

4. Конкретизация числа последовательности всех уроков по теме в соответствии с выделенным программой числом часов на ее изучение.

5. Определение тематики каждого урока, формулировка основных задач, совокупность которых должна обеспечить решение общего комплекса задач изучения темы.

6. Конкретизация задач данного урока на основе изучения особенностей учащихся данного класса.

7. Отбор наиболее рационального содержания обучения на данном уроке, выделение в нем главного.

8. Выбор оптимального сочетания методов и средств обучения для решения намеченных учебно-воспитательных задач.

9. Выбор формы организации учебной работы школьников на уроке.

10. Определение оптимального темпа обучения на уроке.

11. Определение содержания и методов домашней работы учеников.

С. Г. Манвелов более детально характеризует действия учителя по составлению плана. Так, выявление содержания и постановку образо-вательных целей он сводит к: **1) определению содержания программных знаний, умений, навыков; 2) выявлению итоговых уровней их сформированности, которые зафиксированы в программе и учебниках; 3) конкретизации полученных сведений с учетом подготовленности класса и местом урока в системе уроков по изучаемой теме.** Наряду с образовательными целями учитель формулирует развивающие цели, с которыми связывает творческий уровень овладения знаниями и умениями, и воспитательные цели.

Отбор содержания урока сводится к выполнению следующих действий:

1. Изучить содержание текста учебника, относящегося к теме урока, и выделить в нем самое главное (основная идея, опорные понятия и теоремы и т.п.), на что и будет направлено внимание учащихся в ходе актуализации знаний.

2. Выделить все символы, обозначения, термины и понятия; факты и математические предложения в виде аксиом, теорем, определений; указания, алгоритмы и правила их применения, математические доказательства. Выяснить происхождение, правильную запись и чтение символов, обозначений, терминов и пр. Проверить, какие из понятий являются основными, какие могут быть определены, но не определяются в соответствии с дидактическими принципами, какие понятия определяются; какие определения понятий и формулировки теорем надо знать дословно. Разобраться в доказательствах, выявить их логическую структуру, пробелы; проверить себя в умении воспроизводить изучаемые доказательства.

3. Проанализировать систему задач учебника, относящихся к изучаемой теме. Выделить задачи, ориентированные на введение понятий, теорем, усвоение их содержания, на применение и систематизацию понятий и теорем; распределить задачи по блокам родственных задач и т.д.

4. Изучить методическую характеристику отобранного материала, пояснения и комментарии к нему, возможные подходы к его изложению. Рассмотреть указания к упражнениям в учебнике и определиться с образцами оформления записей. Подобрать различные системы дополнительных заданий: контрольные вопросы, устные упражнения, математические диктанты, тесты, задания на готовых чертежах, игровые упражнения, задачи повышенной трудности и т.д.

5. Учесть особенности компоновки содержания материала, разработанные при тематическом планировании. Уточнить роль и место изучаемого материала в теме и курсе; содержание материала, необходимого для организации повторения, установления межпредметных связей, проведения самостоятельных и контрольных работ и т.д.

6. Проверить возможности реализации поставленных целей урока с помощью отобранных материалов и обратить в то же время особое внимание на усиление его воспитывающего и развивающего влияния; насыщение учебного материала примерами, сведениями, фактами из повседневной действительности; углубление прикладной и практической направленности изучаемого материала; выявление эстетического содержания учебного материала; привлечение занимательных задач, исторических сведений; целенаправленное формирование навыков самоконтроля и т.д.

7. Дифференцировать содержание учебного материала с целью интенсификации самостоятельной познавательной деятельности наиболее подготовленных учащихся и активизации помощи слабоуспевающим. В случае необходимости подобрать индивидуальные и групповые задания, направленные на вовлечение учащихся в активную и посильную самостоятельную учебную деятельность.

8. Завершить отбор из учебника и других источников содержания учебного материала с таким расчетом, чтобы не перегрузить урок и обеспечить усвоение учащимися необходимых знаний и умений. Для организации работы в классе и дома, а также реализации возможного резерва времени на уроке распределить соответствующим образом весь отобранный материал.

Нередко содержание учебного материала во многом определяет выбор соответствующих методов и структуру урока. Так, при первичном рассмотрении достаточно сложного материала, когда учитель существенно ограничен во времени на его проработку с учащимися, более благоприятными оказываются репродуктивные методы обучения. Причем если для изложения материала предполагается занять весь или почти весь урок, то лучше сделать это в рамках урока-лекции, в противном случае подходящей оказывается структура урока ознакомления с новым материалом.

Определенная роль в профессиональной деятельности учителя отводится умению оформлять результаты разработки урока. И не только потому, что план или конспект урока является важным документом учителя при его проведении, а умение фиксировать строение урока и детализировать к тому же каждый из его составных элементов в конечном счете сказывается на организации урока. Конспект урока становится действенным средством осмысления и обобщения собственного педагогического опыта. Вот как оценивает роль конспекта известный учитель математики **А.А. Окунев:** «Вдохновение учителя, реакция учеников на его домашние заготовки вселяют душу в урок. Урок оживает и порой довольно часто идет совсем по другому руслу. Тогда после занятия бросаешься к конспекту и быстро, пока не забылись самые драгоценные его моменты, записываешь тот урок, который на самом деле получился» (Окунев А. А. Подготовка к уроку // Математика в школе. – 1991. – № 1. – С. 12).

Существуют разные формы написания конспекта урока: произвольный, с выделением деятельности учителя и учащихся, с выделением вопросов и ответов на них, раскрывающих содержание урока.

Рассмотрим подготовку учителя к проведению конкретных уроков.

Урок 1. Натуральные числа (вводный урок)

Основная дидактическая цель урока: познакомить с новой учебной книгой, ее особенностями; систематизировать и обобщить знании о натуральных числах, полученные в начальной школе.

Ход урока

I. Организационный момент

Математика, друзья,
Абсолютно всем нужна.
На уроке работай старательно,
И успех тебя ждет обязательно!

II. Знакомство с учебником

А поможет нам изучать эту трудную, но увлекательную науку наш главный помощник — учебник по математике.

– Посмотрите на новый учебник. Расскажите, какую информацию несет обложка.

– Прочитайте обращение авторов к пятиклассникам.

– Назовите основные мысли этой статьи.

– Какими качествами необходимо обладать для успешного изучения этого предмета?

– Прочитайте, с какими условными обозначениями мы встретимся на страницах учебника.

– Закройте учебник, сегодня мы к нему еще вернемся.

III. Работа по теме урока

На доске:

ВАЗА – 3191 ЖАЖДА – ?
ДЕД – 565 ЗВЕЗДА – ?

– Слова ВАЗА и ДЕД зашифрованы. Используя тот же шифр, зашифруйте слова ЖАЖДА и ЗВЕЗДА. (Цифра соответствует номеру буквы в алфавите.)

– Запишите все числа в одну строчку.

3191 565 81851 936 951

– Что можете сказать про эти числа?

– Какие цифры не были использованы при записи данных чисел? (0, 2, 4, 7.)

– Допишите в эту же строчку самое маленькое и самое большое четырехзначные числа этими же цифрами. (2047, 7420.)

– Прочитайте все записанные числа.

– Запишите их на следующей строчке в порядке возрастания. (565, 2047, 3191, 7420, 81 851, 936 951.)

– Какое из чисел может быть лишним, почему? (7420 — четное.)

IV. Работа по учебнику

– Прочитайте внимательно теорию и приготовьтесь ответить на вопросы.

– Какое число не является натуральным?

– Как называется группа из трех цифр в записи числа, считая справа налево? (Класс.)

– Как называется место, занимаемое цифрой в записи числа? (Разряд.)

– Сколько разрядов в каждом классе? (Три.)

– Придумайте задание с нашими числами. (Разбить вторую строчку записанных чисел на классы, дать пояснение, определить количество разрядов в каждом числе.)

565 *3191* 81*851*

2047 *7420* 936*951*

– Замените каждое число суммой разрядных слагаемых.

565 = 500 + 60 + 5

2047 = 2000 + 40 + 7

3191 = 3000 + 100 + 90 + 1

7420 = 7000 + 400 + 20

81 851 = 80 000 + 1000 + 800 + 50 + 1

936 951 = 900 000 + 30 000 + 6000 + 900 + 50 + 1

V. Выполнение заданий

1. С. 6, № 1 (устно).

– Прочитайте числа. Что обозначает цифра 5 в записи каждого из этих чисел?

– Что обозначает цифра 0 в записи каждого из чисел?

2. С. 6, № 2 (возможна работа с интерактивным пособием).

– Какое задание дано?

– Подумайте, будут ли среди записанных чисел пятизначные.

– Почему?

– Запишите числа.

Проверка

903, 580, 3241, 6543, 3950, 7008.

– На какие группы можно разделить эти числа? Почему? (На трехзначные и четырехзначные; на четные и нечетные; кратные и не кратные 5 и 10.)

– Запишите в виде суммы разрядных слагаемых числа, в записи которых не используется цифра 0. (3241; 6543.)

С. 9, № 22 (работа в паре).

$654 + 367 = 1021$

$947 - 469 = 478$

$258 \cdot 8 = 2064$

$987 : 7 = 141$

$3018 : 6 = 503$

$52 \cdot 23 - 77 = 1119$

$192 : 32 + 8 = 14$

$28 \cdot (319 - 273) = 1288$

VI. Работа над задачей

С. 8, № 19.

– О чем говорится в задаче? (О двух комбайнерах.)

– Что известно?

– Что неизвестно?

– А что про второй сказано?

– Что значит на 46 т меньше? (Это столько же, но без 46.)

– Во сколько действий эта задача?

– Составьте план решения.

– Решите по действиям с пояснениями.

1) $231 - 46 = 185$ (т) – намолотил второй комбайнер.

2) $231 + 185 = 416$ (т) – намолотили оба комбайнера.

– Прочитайте ответ. (Оба комбайнера намолотили 416 т зерна.)

– Измените условие задачи так, чтобы первым действием было сложение. (Один комбайнер намолотил 231 т зерна, а второй — на 46 т больше. Сколько зерна намолотили оба комбайнера?)

– Решите новую задачу.

1) $231 + 46 = 277$ (т) – намолотил первый комбайнер.

2) $231 + 277 = 508$ (т) – намолотили оба комбайнера.

– Прочитайте ответ. (Оба комбайнера намолотит 508 т зерна.)

VII. Рефлексия

– Как называются числа, с которыми мы работали? (Натуральные.)

– Что вы запомнили? Расскажите.

– Что вызвало трудность?

Домашнее задание

С. 9, № 23, 28.

Урок 2. «Вписанный угол. Теорема о вписанном угле»

Тип урока. Урок изучения нового материала.

Характеристика темы урока.

Содержанием темы являются понятие вписанного угла и теорема о вписанном угле, поэтому теоретическая часть темы насыщенная и большая по объему (доказательство теоремы рассматривает три случая). Определение понятия вписанного угла содержит два существенных свойства, формулировка теоремы несложная. Доказательство теоремы в условиях первого случая опирается на свойство центрального угла, доказательства в условиях двух последних случаев аналогичны.

Цели урока:

1. Сформировать понятие вписанного угла. Познакомить с теоремой о вписанном угле.

2. Формирование навыков самостоятельной работы с учебником.

3. Формирование способа доказательства, заключающегося во введении новой фигуры, находящейся в известных связях с теми фигурами, отношение между которыми - доказывается.

4. Формирование действий, адекватных понятию и теореме, на примере вписанного угла.

Отбор основного содержания учебного материала:

1. Актуализация опорных знаний и умений. К опорным знаниям и умениям относятся определение центрального угла, связь градусных мер центрального угла и соответствующей дуги, умение находить градусную меру центрального угла по градусной мере соответствующей дуги и обратно, умение чертить окружность, знание ее элементов, определения понятий равнобедренного треугольника, внешнего угла треугольника, знание свойств углов равнобедренного треугольника.

2. а) Формирование понятия вписанного угла: мотивация введения понятия, выделение существенных свойств, усвоение учебных действий распознавания

вписанных углов и выведения следствий из факта принадлежности угла к вписанным углам, построение вписанных углов, применение определения вписанного угла.

б) Организация изучения теоремы о вписанном угле: мотивация изучения теоремы, усвоение ее формулировки, ознакомление со способом доказательства теоремы, доказательство теоремы, применение, связь теоремы с ранее доказанными теоремами.

Большое место на всех этапах формирования понятия и изучения теоремы занимают упражнения. С их помощью осуществляется и актуализация опорных знаний и умений.

Оборудование урока: 1. Презентация. 2. Рисунки.

Выбор методов обучения. Различные этапы урока реализуются с помощью различных методов обучения. Наибольшее применение получают эвристический и репродуктивный методы.

Структура урока:

1. Постановка цели урока.
2. Актуализация знаний и умений.
3. Формирование понятия вписанного угла.
4. Изучение теоремы о вписанном угле.
5. Применение теоремы.
6. Подведение итогов работы на уроке.
7. Задание на дом.

Ход урока:

I. Актуализация знаний и умений.

Замечаем, что реализация всех этапов урока требует большого количества упражнений. Поэтому возникает необходимость конструирования таких упражнений, которые несли бы несколько функций. Причем следует иметь в виду и проверку усвоения предыдущего материала. Итак, попробуем сконструировать такое упражнение, при выполнении которого актуализировались бы выделенные знания и умения, осуществлялось бы знакомство с вписанным углом и способом доказательства теоремы о вписанном угле. Указанными качествами обладает следующее упражнение: «Вершина B угла ABC лежит на окружности с центром O (BC — диаметр окружности). Найдите величину этого угла, если величина дуги AC равна 50^0».

Выполнением этого упражнения и начинается обсуждаемый урок. Работа с упражнением может быть организована разными способами: 1) посредством специальных вопросов учитель подводит учащихся к требованию задачи; 2) учитель организует самостоятельную работу учащихся по специальным карточкам, которые позволяют дифференцировать работу школьников. Выполнение данного упражнения позволяет ввести понятие вписанного угла, выделить его существенные свойства (вершина угла лежит на окружности, а стороны угла пересекают окружность), выявить зависимость между вписанным углом и дугой, на которую он опирается, и метод ее обоснования, суть которого заключается во введении центрального угла, опирающегося на ту же дугу, что и вписанный угол.

П. Формирование новых знаний и умений.

1. Предлагаем учащимся упражнения на распознавание вписанных углов, в процессе выполнения которых они овладевают действием подведения объекта под понятие.

Организация выполнения упражнения на распознавание вписанных углов (рисунок дан) может быть различной.

а) Условие упражнения предъявляется учащимся на карточках. Учащиеся выполняют упражнение самостоятельно, объясняя вслух результаты. Можно использовать и такую форму: один ученик читает вслух первую логическую часть определения вписанного угла: «Угол, вершина которого лежит на окружности...», остальные отыскивают на рисунках такие углы. Выделив их, первый ученик продолжает читать: «а стороны пересекают окружность...», другие ученики выделяют углы, обладающие также и этими признаками. Первый ученик заканчивает чтение определения: «...называется вписанным углом». Учащиеся называют те рисунки, на которых изображены вписанные углы. Учитель может контролировать выполнение упражнения наиболее слабыми учащимися. Видовые отличия вписанного угла могут быть зафиксированы на плакате:

$$\angle ABC \text{ — вписанный: } \begin{cases} 1) \text{ вершина } B \text{ лежит на окружности;} \\ 2) \text{ сторона } BA \text{ пересекает окружность;} \\ 3) \text{ сторона } BC \text{ пересекает окружность.} \end{cases}$$

Учащиеся выполняют упражнения, соотнося свои действия с видовыми отличиями понятия вписанного угла.

б) Условие упражнения фиксируется на доске (учитель заранее выполняет на доске необходимые рисунки). Оно может быть предъявлено учащимся посредством компьютера. Формы организации учебной деятельности школьников остаются теми же, что и в случае а).

После выполнения упражнений указанных видов используются упражнения на построение вписанных углов и на их выделение в сложной заданной конфигурации.

2. Организуем работу с теоремой о вписанном угле.

Напоминаем школьникам, что выполненное в начале урока упражнение привело нас к выводу: вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается. Теперь это утверждение нужно доказать. Учитель на доске, а учащиеся в тетрадях выполняют рисунок, делают записи «Дано», «Доказать» и вместе намечают способ доказательства. Оформление доказательства учащиеся могут выполнить самостоятельно. Доказательство теоремы во втором и третьем случаях может быть рассмотрено самостоятельно в классе либо дома, при этом учитель показывает, как эти случаи сводятся к первому случаю.

Работа с доказательством в основном случае может быть организована и по-другому. Сильные учащиеся могут разобрать доказательство сами, учащимся же слабее может быть оказана помощь в виде упражнений на специальных карточках.

III. Применение знаний и умений.

Если учитель рассмотрит на уроке, кроме основного случая, еще один, то этот вид учебной деятельности можно отнести к реализации этапа применения знаний и умений. Если же рассмотрение двух случаев доказательства теоремы будет отнесено к домашнему заданию, то в классе можно выполнить несложное упражнение на применение теоремы. Примером такого упражнения может служить следующее: «Найдите вписанный угол ABC, если дуга AC, на которую он опирается, равна: а) 48^0; б) 57^0; в) 90^0; г) 124^0; д) 180^0».

IV. На дом, кроме разбора теоремы о вписанном угле, можно предложить упражнение на нахождение по данным рисунка либо вписанного угла, либо дуги окружности.

Данный конспект можно оформить в виде таблицы с выделением деятельности учителя и деятельности ученика.

Ход урока

Основное содержание учебного материала	**Деятельность**	
	учителя	**учащихся**
I. Постановка цели урока	сформулировать понятие вписанного угла, усвоить теорему о вписанном угле	
II. Актуализация знаний и умений: 1. Выполнение упражнения: «Вершина B угла ABC лежит на окружности с центром O (BC — диаметр окружности). Найдите величину угла ABC, если величина дуги AC равна 50^0»	Предъявляет упражнение	Фиксируют упражнение в своих тетрадях

2. Вопросы для обсуждения: а) нельзя ли указать угол, связанный с дугой AC, зная который можно найти угол ABC; б) как связаны угол ABC и дуга AC; в) в чем основная идея решения упражнения; г) перечислите существенные свойства угла ABC	Управляет посредством вопросов деятельностью учащихся и подводит их к понятию вписанного угла и к теореме. Наблюдает за работой учащихся. Осуществляет мотивацию введения понятия вписанного угла	Отвечают на вопросы учителя, обсуждают ответы товарищей, оформляют результаты упражнения, фиксируют новые понятия и суждения
III. Формирование понятия вписанного угла: 1. Выполнение упражнений на распознавание вписанных углов.	Предъявляет учащимся условия упражнений на карточках. Наблюдает за работой учащихся	Самостоятельно выполняют упражнения, соотнося свои действия с признаками понятия вписанного угла, обсуждают результаты выполнения упражнения и т. д.

Студенты самостоятельно могут продолжить трансформацию приведенного конспекта урока в табличную схему. Начинающему учителю выделение в конспекте деятельности учителя и деятельности ученика весьма полезно. Такая работа освободит его от часто совершаемой ошибки начинающего учителя, заключающейся в том, что на уроке виден и слышен лишь учитель. Учителю необходимо помнить о том, что колонка, куда заносятся действия учеников, должна быть заполненной.

Урок на тему «Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. Решение задач»

Тип урока. Формирование умений и навыков. Характеристика темы урока.

На предыдущем уроке были рассмотрены пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике. На предстоящем уроке формируется умение применять изученные факты в конкретных ситуациях. Для этого необходимо отобрать упражнения на применение этих фактов в простейших и сложных ситуациях. В конце урока проводится самостоятельная работа на 5–7 минут.

Цели урока: 1. Формирование умений и навыков в применении зависимостей между пропорциональными отрезками в прямоугольном треугольнике.

2. Формирование умений видеть один и тот же факт в различных ситуациях.

3. Формирование умений работать с задачей.

Отбор основного содержания учебного материала:

1. Актуализация опорных знаний. К опорным знаниям относятся следующие факты:

а) высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен исходному;

б) высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза высотой;

в) катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

Актуализация указанных фактов осуществляется посредством решения задач.

2. Формирование умений и навыков: нахождение элементов прямоугольного треугольника с помощью зависимостей между его элементами.

3. Применение умений и навыков. Выполнение упражнений. При отборе упражнений следует учитывать взаимосвязь между ними, возможность развития результатов предыдущего упражнения в последующее, видение известных фактов в новых ситуациях.

Оборудование урока: 1. Рисунки. 2. Кодоскоп. Кодопозитивы.

Выбор методов обучения. Основные методы — эвристические и репродукти вные.

Структура урока:

1. Постановка цели урока.
2. Актуализация опорных знаний и умений.
3. Формирование умений применять зависимости в прямоугольном треугольнике.
4. Подведение итогов работы на уроке.
5. Задание на дом.

Ход урока:

I. Актуализация опорных знаний и умений.

Выполнение упражнения: «Треугольник ABC – прямоугольный. CD – высота, проведенная из вершины прямого угла, а) Сколько пар подобных треугольников образовалось? б) Запишите соотношения между сторонами подобных треугольников, в) Выразите словами полученные соотношения».

II. Формирование умений и навыков:

1) Найдите h, a и b, если b_c=25, a_c=16.

Отдельные элементы упражнения могут выполняться самостоятельно, например вычисления либо нахождение a или b.

2) Работа с соотношениями:

$a^2 = a_c - c$ и $b^2 = b_c - c$; $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a_c}{b_c}$; $a^2 + b^2 = c^2$.

3) В треугольнике, стороны которого равны 5 см, 12 см, 13 см, проведена высота к большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону.

Интересно обратить внимание учащихся на то, что из соотношения между средним арифметическим и средним геометрическим вытекает соотношение c>2h.

Урок заканчивается подведением итогов работы и заданием на дом.

Урок на тему «Степенная функция» (IX класс)

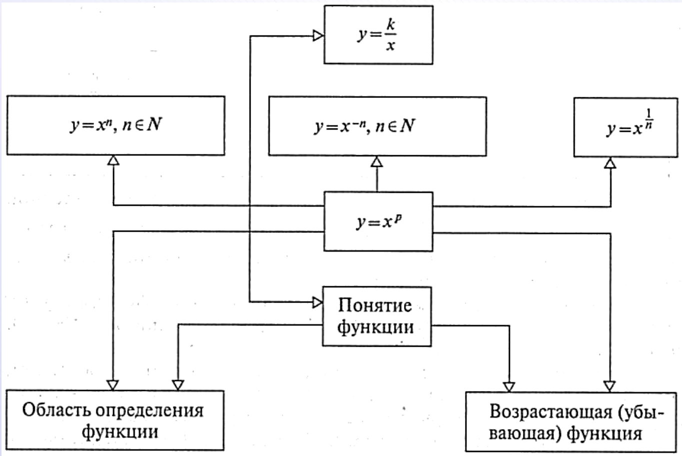
Цель урока: систематизировать, расширить и углубить знания, умения и навыки учащихся, связанные с понятиями функции, области определения функции, графика функции, степенной функции, возрастающей функции.

Ядром урока может служить работа по систематизации учебного материала, результатом которой явится схема, фиксирующая связи между блоками учебного материала (см. схему).

Указанная схема составляется и обсуждается учащимися всего класса под руководством учителя. Она фиксируется на доске и в тетрадях учащихся.

Вопросы для обсуждения:

1. Объясните, что такое функция.
2. Что понимается под областью определения функции?
3. Дайте определение графика функции.
4. Дайте определение степенной функции.



Понятие функции

Область определения функции

Возрастающая (убывающая) функция

5. Назовите виды степенной функции.

6. Какие виды функций вам известны из курса алгебры предыдущих классов?

7. Как построить графики функций $y = kf(x)$, $= -f(x)$, $y = f(x+a)$, если известен график функции $y = f(x)$? Проиллюстрируйте на конкретном примере.

8. Объясните, что значит график функции симметричен относительно начала координат (оси Oy).

Следующий этап урока заключается в выполнении упражнений на выделение и систематизацию основных действий, адекватных изучаемому материалу. К ним относятся: распознавание степенных функций, нахождение по значению аргумента значения функции и обратно, нахождение промежутка изменения функции по промежутку изменения аргумента и обратное действие, построение графиков степенных функций, осознание зависимости расположения графика от показателя степени, выводы о взаимном расположении графиков, объяснение по формуле особенностей графика функции и наоборот, по графику особенностей формулы, выяснение принадлежности данной точки заданному графику. Приведем упражнения на выделение и систематизацию перечисленных действий.

1. Из указанных функций выберите те, которые являются степенными функциями:

$$y=x^{10};\quad y=5x^2;\quad y=(x-2)^5;\quad y=x^{\frac{3}{2}};$$

$$y=x^{-0,5};\quad y=x^2+2;\quad y=x^3+x^2;$$

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \geqslant 0, \\ x^3, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

2. Заполните таблицу, изобразив схематично графики указанных функций:

y=x	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^4$	$y = x^{-2}$	$y = x^{\frac{1}{3}}$

3. Схематически изобразите на одном рисунке графики степенной функции $y = x^n$, если $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ при x>0. Как изменяется расположение графика функции, если n возрастает от единицы (убывает от единицы, оставаясь положительным)?

4. Схематически изобразите график степенной функции $y = x^r$ (x > 0), если: а) r > 1; б) 0 < r < 1, - и график функции $y = x^r$ (x > 0), если r < 0.

5. Используя свойство степени с рациональным показателем, докажите, что степенная функция $y = x^r$, где x > 0 и r — любое рациональное число, возрастает, если r > 0, и убывает, если r < 0.

6. Опишите расположение графика функции $y = x^{-5}$, схематически изобразите его.

7. На рисунке (рисунок дан) изображен график степенной функции. Какой формулой может быть задана эта функция?

8. Объясните, как построить график функции:

а) $y = \sqrt{x+2}$; б)$y = \frac{5}{x}$; в) $y = x^3 - 2$; г) $y = (x+5)^3$.

9. Объясните, как графически решить следующее уравнение:

$x^{\frac{1}{2}} = x^2 - 1$.

Заканчивается урок самостоятельной работой.

1. Докажите, что функция $y = x^2$ является возрастающей при x>0 и убывающей при x<0.

2. Постройте график функции $y = \frac{1}{x}$. Найдите: y (2), y(-1,5). Как изменяется y, если x изменяется от 1 до 22 Укажите те значения x, при которых y принимает значение, равное 2; $\frac{1}{2}$. Как должны изменяться значения аргумента, если y изменяется от -1,5 до -1?

3. Найдите значения n, зная, что график функции $y = x''$ проходит через точку С с координатами $(2; 8)$.

4. График функции вида $y = x^r$ изображен на рисунке (рисунок дан). Каким может быть число r? Найдите r, если $y(2) = \frac{1}{16}$.

Учитель может предусмотреть несколько вариантов самостоятельной работы либо один. В конце урока обсуждаются результаты самостоятельной работы, подводятся итоги и дается домашнее задание.

Урок на тему «Умножение и деление рациональных чисел»

Цель урока: проверка, оценка и коррекция знаний, умений и навыков учащихся, связанных с умножением и делением положительных и отрицательных чисел, законами умножения, приведением подобных слагаемых в алгебраических выражениях.

Вопросы для беседы:

1. Объясните правило умножения двух чисел с одинаковыми знаками. Приведите примеры.

2. Объясните правило умножения двух чисел с разными знаками. Приведите примеры.

3. Чему равно произведение нескольких чисел, если одно из них нуль? При каких условиях $a–b=0$?

4. Чему равно произведение $a\cdot(–1)$? Приведите примеры.

5. Как изменится произведение при перемене знака одного из множителей?

6. Объясните переместительный закон умножения.

7. Как формулируется сочетательный закон умножения?

8. Запишите, используя буквы, переместительный и сочетательный законы умножения.

9. Как найти произведение трех, четырех рациональных чисел?

10. Ученик, выполняя упражнение на отыскание произведения $0{,}25\cdot 18\cdot 18\cdot(–4)$, использовал следующую последовательность действий:

$(0{,}25\cdot(–4))\cdot 18\cdot 18=(–1)\cdot 18\cdot 18=–18\cdot 18$. Какие законы он использовал?

11. Какой множитель алгебраического выражения называют коэффициентом?

12. Как найти коэффициент произведения, в котором несколько буквенных и числовых множителей?

13. Чему равен коэффициент выражения: a; $-a$; ab; $-ab$?

14. Объясните распределительный закон умножения. Запишите его с помощью букв.

15. Какие слагаемые алгебраической суммы называются подобными слагаемыми?

16. Объясните, что значит привести подобные слагаемые.

17. Объясните, с помощью каких законов выполняется приведение подобных слагаемых в выражении $5,\ 2y-8a-4,\ 8y-2a$.

18. Каково правило деления рациональных чисел с одинаковыми знаками?

19. По какому правилу выполняют деление рациональных чисел с разными знаками?

20. В каком случае частное двух рациональных чисел равно нулю?

21. В каком порядке выполняют совместные действия с рациональными числами?

Отдельные вопросы могут составить предмет коллективного обсуждения, ответы на другие вопросы могут быть проверены посредством листов взаимоконтроля, на основе некоторых вопросов можно провести математический диктант и т. д.

Последующая серия упражнений направлена на контроль, оценку, коррекцию умений учащихся. Возможны различные формы выполнения упражнений: самостоятельное решение упражнений, сопровождающееся самоконтролем учащихся, комментированное решение, выполнение упражнений на доске, устный опрос и т. д. Эта серия охватывает две группы упражнений. Первая группа не требует для выполнения мыслительной деятельности реконструктивного характера, выполнение второй группы предполагает реконструкцию знаний и умений по изучаемой теме.

I группа

1. Какие из указанных равенств верные:
1) (-9)·(-8) - 72; 3) (-1,4)·0,5 = - 0,7;
2) 12·(-0,2)=-0,24; 4) (-3,2)·(-2,1) = 6,72?
Выберите правильный ответ.
Ответ: 1), 2), 3), 4); верных равенств нет; не знаю.

2. Не выполняя вычислений, определите, какое произведение положительно:
1) 0,2·(-7)-(-5)·(-34); 3) (-16)·(-0,87)·$\frac{3}{4}$ (-5);
2) (-1)·(-8)-0,4-$\frac{1}{2}$·(-3,4); 4) 5· (-3,2)-0·(-0,7).
Ответ: 1), 2), 3), 4); не знаю.

3. Укажите выражения, имеющие равные коэффициенты:
1) 9ac и 3x(4y); 3) (-3)·(-8c6) и 4x-6y;
2) $\frac{3}{4}abc$ и 2,75xy; 4) 3,15abc и 0,001abc.

4. Какое из выражений содержит подобные слагаемые:
1) 7a-12ab+14; 3) -0,5xy + 2,7kx-0,5;
2) $3c - 2,7xyc - 3\frac{2}{3}$; 4) $72ab - \frac{1}{4}ab + 241$?

5. Укажите верные равенства:
1) -3·(11+17) = -3·11 + 17;
2) (-7,6 + 14)·(-7) = -7,6·(-7) + 14·(-7);
3) -1,5·(37-24) = -1,5·37 - 1,5·24.

6. Верно ли выполнено деление:
1) -7,2:(-9) = 0,8; 3) 48:(-8) = 6;
2) -5,6:7 = -8; 4) 4,2:(-1) = -4,2?

7. Не выполняя вычислений, укажите частные, являющиеся отрицательным числом:
1) -7,2:((-0,2)-(-12)); 3) $(144 \cdot \frac{12}{98}) : 2,3$;
2) (14,2·(-0,36)):(-8,49); 4) $-2\frac{1}{5} : (-18,2 \cdot 100)$.
Ответ: 1), 2), 3), 4); отрицательных частных нет; не знаю.

II группа

1. Определите знак значения выражения:
а) $(-0,2)\cdot(-\frac{1}{2}):16\cdot(-7\frac{2}{5}):0,01\cdot(-127)$;
b) $12\frac{1}{7}:(-0,09)\cdot 3,25:\frac{11}{13}\cdot 324:(-46,21)$.
2. Упростите выражение:
а) -5,1 (-3x)0,2x;
б) -6,3a(-10a6)(-8c).
3. Выберите наибольшее и наименьшее числа среди чисел:
$a; a^1; a^1; a^4; a^5; a^6; a^7$ при a = -5, a = 6.
4. Упростите выражение:
а) -x(y-4)-2(xy-3)-3x;
б) a(b + 3)-3(2-ab) + a.

Легко заметить, что совокупность всех заданий и их последовательность охватывают все уровни усвоения знаний. Ответы на вопросы предполагают контроль, оценку и коррекцию знаний на уровне воспроизведения. Последующая серия упражнений ориентирована на прямое применение знаний, их выполнение не требует от учащихся мыслительной деятельности реконструктивного характера. Набор таких упражнений охватывает всю совокупность умений и навыков по изученной теме, но осуществление этой совокупности предполагается в простейших ситуациях. Завершает контроль знаний и умений школьников выполнение упражнений на применение знаний и умений в измененных ситуациях, требующих их реконструкции в соответствии с условием и требованием задачи.

Выполнение этой программы соответствует качественному усвоению знаний и умений и может быть оценено отличной отметкой. Усвоению знаний и умений на уровне их применения в ситуациях, не требующих реконструкции знаний и умений, соответствуют приведенные вопросы и упражнения первой группы. Правильные ответы на вопросы характеризуют усвоение знаний на уровне воспроизведения. Оценка «шесть» может быть выставлена ученику, ответившему на большинство вопросов и выполнившему большинство упражнений первой группы. Оценка «восемь» соответствует правильным ответам на вопросы, правильно выполненному большинству упражнений первой и второй групп.

Приведенная схема урока иллюстрирует урок проверки, оценки и коррекции знаний, умений и навыков. В подобных уроках выделяют следующие этапы: 1) мотивация учебной деятельности школьников и сообщение темы, цели и задач урока; 2) проверка знания учащимися фактического материала и умения раскрывать связи в предметах и явлениях; 3) проверка знания учащимися основных понятий и умений объяснять их сущность; 4) проверка глубины осмысления учащимися знаний и степени обобщения их; 5) применение учащимися знаний в различных конкретных ситуациях; 6) проверка, анализ и оценка выполненных заданий; 7) итоги урока, домашнее задание.

Рассмотрим еще один «классический» тип урока математики - *комбинированный* урок. Он имеет несколько равных по своему значению образовательных целей. Известны уроки с различными сочетаниями целей, например: контроль и оценка знаний и умений школьников и усвоение новых знаний; контроль и оценка знаний и умений и формирование умений и навыков и т. д.

Проведение комбинированного урока предполагает реализацию основных структурных элементов тех уроков, которые соответствуют целям комбинированного урока. При этом одни из этапов могут выпадать из структуры комбинированного урока, другие - объединяться.

Такой, например, может быть структура урока контроля и оценки ранее усвоенного материала и усвоения новых знаний: 1) проверка выполнения домашнего задания; 2) проверка ранее усвоенных знаний: а) методом фронтальной беседы, б) методом индивидуального устного опроса или письменной работы с текстовыми заданиями; 3) мотивация учения и сообщение темы, цели и задач урока; 4) восприятие и осмысление учащимися нового учебного материала; 5) обобщение и систематизация знаний; 6) подведение итогов урока и сообщение домашнего задания.

Заметим, что структура комбинированного урока может охватить не один, а несколько уроков.

Урок на тему «Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю»

Цели урока:

1. Контроль и оценка знаний, умений и навыков, связанных с основным свойством дроби, сокращением дробей и приведением дробей к новому знаменателю.

2. Формирование действия приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

Первая часть урока

I. Примерные вопросы для собеседования:

1. Объясните основное свойство дроби.
2. Что значит сократить дробь?
3. Всякую ли дробь можно сократить?
4. Какую дробь называют несократимой? Приведите примеры.
5. Как нужно сокращать дробь, чтобы получить несократимую дробь?
6. Что означает приведение дроби к общему знаменателю?
7. Какое число называют дополнительным множителем дроби? Приведите примеры.

II. Упражнения для самоконтроля.

1. Укажите верное равенство:

1) $\frac{2}{10} = \frac{2}{5}$; 2) $\frac{14}{15} = \frac{10}{11}$; 3) $\frac{3}{5} = \frac{9}{25}$; 4) $\frac{3}{15} = \frac{9}{15}$.

Ответ: 1), 2), 3), 4); не знаю.

2. Определите, какие из дробей $\frac{3}{17}$, $\frac{34}{17}$, $\frac{4}{25}$ являются сократимыми. Выберите правильный ответ:

1) $\frac{4}{25}$; 2) $\frac{3}{17}$ и $\frac{34}{17}$; 3) $\frac{3}{17}$, $\frac{34}{17}$, $\frac{4}{25}$; 4) $\frac{34}{17}$.

3. На какое число можно сократить дробь $\frac{39}{120}$?

1) На 10; 2) на 13; 3) на 3; 4) дробь несократима; 5) не знаю.

4. Приведите дробь $\frac{2}{3}$ - к знаменателю 18 и укажите правильный ответ:

1) $\frac{2}{18}$; 2) $\frac{4}{18}$; 3) $\frac{16}{18}$; 4) $\frac{12}{18}$; 5) не знаю.

5. Сократите дробь — $\frac{38}{95}$.

III. *Упражнения для самостоятельной работы:*

1. Вместо x поставьте такое число, чтобы равенство было верным:

а) $\frac{5}{4} = \frac{10}{x}$; б) $\frac{12}{3} = \frac{x}{6}$.

2. Назовите дробь, сократимую на 2, 3, 5.

3. Придумайте несократимую дробь, знаменатель которой 210.

Вторая часть урока

Формирование действия приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

1. Мотивация введения действия - решение задачи: «За первый день работы тракторист вспахал $\frac{2}{5}$ - поля, а за второй - $\frac{1}{3}$ - того же поля. В какой из этих дней тракторист выполнил большую часть работы?»

Решение задачи предполагает действие сравнения дробей $\frac{2}{5}$ и $\frac{1}{3}$, что возможно при приведении их к общему знаменателю. Учащимся следует показать образец оформления выполнения упражнений на приведение дробей к наименьшему общему знаменателю.

1. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{7}{10}$ и $\frac{3}{5}$; б) $\frac{5}{38}$ и $\frac{10}{29}$; в) $\frac{3}{17}$ и $\frac{4}{1}$.

2. Какие из указанных пар дробей являются дробями, полученными в результате приведения дробей $\frac{1}{6}$ и $\frac{9}{10}$ к наименьшему общему знаменателю:

а) $\frac{2}{12}$ и $\frac{18}{20}$; б) $\frac{10}{60}$ и $\frac{90}{60}$; в) $\frac{5}{30}$ и $\frac{27}{30}$?

Тем учащимся, которые усвоили правило, можно предложить самостоятельную работу, те учащиеся, которые нуждаются в помощи, работают с учителем.

Самостоятельная работа

1. Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю:
а) $\frac{5}{9}$ и $\frac{7}{18}$; б) $\frac{2}{3}$ и $\frac{10}{24}$; в) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{4}$; г) $\frac{9}{14}$ и $\frac{13}{20}$.
2. Сравните дроби, приведя их к наименьшему общему знаменателю:
а) $\frac{7}{9}$ и $\frac{9}{11}$; б) $\frac{3}{4}$ и $\frac{3}{8}$.
Работа с учащимися, нуждающимися в помощи учителя:
1. Выполнение упражнений под контролем учителя:
$\frac{8}{9}$ и $\frac{11}{18}$; б) $\frac{5}{6}$ и $\frac{4}{3}$; в) $\frac{7}{12}$ и $\frac{3}{5}$.
2. Самостоятельная работа.
Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю и сравните их:
а) $\frac{7}{100}$ и $\frac{3}{10}$; б) $\frac{11}{17}$ и $\frac{2}{5}$.
Урок заканчивается подведением итогов работы и домашним заданием.

Опыт краснодарских учителей выявил следующие закономерности: методические концепции, заложенные в школьных учебниках, как правило, ориентированы на введение математических понятий в рамках уроков изучения нового материала. При укрупнении дидактических единиц в ходе изучения нового материала более подходящими являются уроки-лекции. Если новый материал равномерно распределяется в системе уроков по учебной теме, то лучше воспользоваться комбинированными уроками. Для овладения ведущими идеями изучаемых тем больше подходят уроки обобщения и систематизации знаний. Если в ходе изучения нового материала привлекаются сведения из других учебных предметов, то лучше это сделать в рамках интегрированных уроков. Вопросы изучения исторических сведений, установления связи теории с практикой могут успешно решаться на уроках-экскурсиях. Воспроизведение изученного и его применение на уровне обязательных требований к математической подготовке учащихся лучше проводить в рамках урока формирования умений и навыков. Для отработки умений применять знания для решения задач с практическим и прикладным содержанием более подходят уроки-практикумы. Для самостоятельной проработки учебного материала можно использовать уроки-семинары. Своевременной ликвидации пробелов в знаниях учащихся, оказанию индивидуальной помощи в развитии их умений служат уроки-консультации. Обсуждение с учащимися различных способов доказательств теорем, решений задач лучше осуществляется на уроках-дискуссиях. Для поддержания у учащихся интереса к выполняемой работе, их активности можно воспользоваться уроками с дидактической игрой. Благоприятные условия для проявления инициативы учащихся, их возможностей создают уроки-ролевые игры. Театрализованные уроки служат привнесению в ученические будни атмосферы праздника, выработке чувства взаимопомощи, коммуникативных умений.

Остановимся на этапе, общем для многих типов уроков,— постановке домашнего задания. Ясно, что от его реализации зависит очень много, так как усвоение материала невозможно без систематической домашней работы учащихся. Она служит и связующим звеном между прошедшим и предстоящим уроками. В методике обучения математике выделены следующие виды домашних заданий: 1) устные и письменные; 2) репродуктивные, конструктивные и творческие; 3) обязательные и по желанию; 4) общие, дифференцированные и индивидуальные; 5) регламентированные и без установленного срока выполнения; 6) комбинированные.

Учителя домашние задания чаще всего предлагают с целью закрепления материала, изученного на уроке. Однако эффективность домашнего задания зависит от перспективы дальнейшего использования результатов домашней работы учащихся, от того, насколько активно они используются при получении новых знаний. Поэтому при определении домашнего задания следует предусмотреть возможность использования его для углубления изученного материала, для воспроизведения опорных знаний, особенно тех, которые применяются при объяснении нового материала. В литературе выделяют различные учебные цели использования на уроке домашнего задания: 1) повторение ранее изученного материала; 2) создание проблемной ситуации; 3) ознакомление с новым материалом (новый материал возникает как обобщение домашнего задания, изучение нового материала на уроке проходит в постоянном обращении к домашнему заданию); 4) обобщающее повторение.

В практике обучения математике домашнее задание, как правило, дается в конце урока. Однако такая ситуация не всегда оправданна. По мнению учителей математики, окончание урока полезно разнообразить подведением итогов, ознакомлением учащихся с обобщающими выводами и идеями; использованием эффекта «незавершенного действия»; привлечением исторических сведений; выполнением игровых упражнений, решением головоломок, кроссвордов, анаграмм, ребусов на математическую тему; применением в концовке неожиданного хода, комплимента, шутки и т. д.

Важной составляющей методической подготовки учителя математики является умение анализировать уроки математики. В учебной литературе по дидактике и методике обучения математике содержится немало различных вариантов анализа урока, рекомендаций, предложений. Сопоставляя их в соотнесении с требованиями к уроку математики, приходим к следующей схеме анализа урока:

Схема анализа урока

1. Общие сведения об уроке

Школа, класс, предмет, Ф.И.О. учителя, тема урока, цель и тип урока.

2. Организация урока

1. Готовность учителя к уроку.
2. Готовность учащихся к уроку.
3. Подготовленность классного помещения.
4. Мобилизующее начало урока.

3. Структура урока

1. Этапы урока, распределение времени.
2. Четкость этапов, выделение главного.
3. Соответствие структуры урока целям и содержанию его.
4. Насыщенность урока и темы.
5. Сочетание коллективной, групповой и индивидуальной работы с учащимися.

4. Содержание урока

1. Объем фактического материала, соответствие программе и уровню знаний учащихся.
2. Научность изложения материала, единство образовательной и воспитательной функций.
3. Соответствие теории и упражнений.
4. Повторение пройденного, опорные знания.
5. Внутрипредметные и межпредметные связи, связь с жизнью.

5. Методы, приемы и средства обучения

1. Целесообразность методов обучения.
2. Достижение основных принципов дидактики в обучении.
3. Познавательная активность учащихся и роль учителя на уроке.
4. Наличие обратной связи «учитель - ученик».
5. Развитие логического мышления у учащихся и самостоятельность в обучении.
6. Работа со слабоуспевающими учащимися.
7. Методы проверки и оценки знаний учащихся.
8. Средства достижения и поддержания внимания учащихся на уроке и интереса к предмету.
9. Итог урока, его воспитательная ценность.

6. Учитель как личность

1. Знания и методическая грамотность учителя.
2. Культура речи и педагогический такт.
3. Доброта и требовательность к учащимся.
4. Контакт учителя с учащимися.

7. Заключение по уроку

1. Эффективность урока.
2. Ценные стороны урока и недостатки.
3. Предложения учителю.

ПАМЯТКА ПРАКТИКАНТУ ПО ПОДГОТОВКЕ К УРОКУ

1. Узнайте заранее тему своего урока, точно определите материал учебника к этому уроку, его место в системе уроков по теме.

2. Изучите методическую литературу по теме урока.

3. Посетите 1-2 урока, предшествующие вашему, наблюдайте и фиксируйте ход урока, работу обучающихся, методику и организационную работу учителя: вопросы, задания, действия учителя и учеников, ответы, отношение детей к работе, к учителю, к друг другу, выполнение задач урока, трудности, возникающие в самостоятельной работе. Продумайте взаимосвязи проводимого вами урока с предыдущим и последующим.

4. Определите цели урока, его структуру и основные этапы.

5. Подумайте о путях реализации дидактических принципов.

6. Разработайте содержание урока. Отберите материал и определите методы и приёмы обучения на каждом этапе урока. Сформулируйте вопросы и задания для обучающихся.

7. Продумайте организационную структуру и распределите учебное время на все этапы урока.

8. Предусмотрите чередование различных видов работы детей, сложного и несложного материала, правильные соотношения между работой под руководством учителя и самостоятельной работой обучающихся.

9. Используйте по возможности приёмы дифференциации учебной работы, а также элементы проблемного обучения.

10. Включите, если нужно, упражнения занимательного характера, дидактические игры, физкультминутки.

11. Распределите учебное время на отдельные этапы урока в соответствии с целями и содержанием работы.

12. Подготовьте дидактический и наглядный материал к уроку, ТСО, продумайте место и методику его использования, оформление записей учеников в тетрадях, а также записей на доске.

13. Оформите развёрнутый план-конспект урока.

СХЕМА САМОАНАЛИЗА УРОКА

1. Какова характеристика реальных учебных возможностей обучающихся? Какие особенности обучающихся были учтены при планировании данного урока?

2. Каково место данного урока в теме, разделе, курсе? Как он связан с предыдущим, на что в них опирается? Как этот урок «работает» на последующие уроки, темы, разделы? В чём специфика этого урока? Каков его тип?

3. Какие задачи решались на уроке: образовательные, воспитательные, развивающие? Была ли обеспечена их комплексность, взаимосвязь? Какие задачи были главными, стержневыми? Как учтены в задачах особенности класса, отдельных групп школьников?

4. Почему выбранная структура урока была рациональна для решения этих задач? Рационально ли выделено место в уроке для опроса, изучения нового материала, закрепления, домашнего задания и т.д.? Рационально ли было распределено время, отведённое на все этапы урока? Логичны ли «связки» между всеми этапами урока?

5. На каких понятиях, идеях, положениях фактах делался главный акцент на уроке и почему? Выбрано ли главное, существенное?

6. Какое сочетание методов обучения избрано для раскрытия нового материала? Дать обоснование выбора методов обучения.

7. Какое сочетание форм обучения было избрано для раскрытия нового материала и почему? Необходим ли был дифференцированный подход к обучающимся? Как он осуществлялся и почему именно так?

8. Как организован контроль усвоения знаний, умений и навыков? В каких формах и какими методами осуществлялся? Почему?

9. Как использовался на уроках учебный кабинет, какие средства обучения. Почему?

10. За счёт чего обеспечивалась высокая работоспособность школьников в течение всего урока?

11. За счёт чего на уроке поддерживалась хорошая психологическая атмосфера, общение? Как было реализовано воспитательное влияние личности учителя?

12. Как и за счёт чего обеспечивалось на уроке и в домашней работе школьников рациональное использование времени, предупреждение перегрузки школьников?

13. Запасные методические «ходы» на случай непредвиденной ситуации.

14. Удалось ли полностью реализовать все поставленные задачи? Если не удалось, то какие и почему? Как учитель планирует восполнение нереализованного?

ПРИМЕРНАЯ СХЕМА КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА ТРАДИЦИОННОГО УРОКА

1. Общие сведения об уроке: дата, класс, предмет. Оборудование и ТСО.

2. Начало урока. Подготовленность класса к уроку. Умение учителя мобилизовать внимание обучающихся на учебную работу, создание рабочей обстановки в классе.

3. Тема и основные цели урока.Образовательная, развивающая и воспитательная цели урока. Место данного урока в системе уроков по теме, связь с предыдущим материалом.

4. Организация урока:

- тип урока;
- структура урока, его отдельные элементы, их последовательность и дозировка во времени, соответствие построения урока его содержанию и поставленной цели;
- виды учебной деятельности;
- сочетание фронтальной, групповой и индивидуальной работы на уроке;
- плотность урока, рациональное использование времени.

5. Содержание урока:

- научная правильность освещения материала на уроке, его соответствие возрастным возможностям обучающихся;
- воспитательная направленность урока;
- правильность подбора учителем материала для уроков: для опроса, закрепления, объяснения, тренировки, для самостоятельной работы, практических и лабораторных работ, для повторения, разъяснения домашней работы и т.п.;
- соответствие содержания урока требованиям программы;
- связь теории с практикой: раскрытие учителем практической значимости знаний, обучение школьников применению своих знаний на практике, использование местного материала и его доступность;

- связь изучаемого материала с ранее пройденным, приёмы повторения пройденного;

- межпредметные связи;

- использование жизненного опыта учеников с целью развития у них познавательной активности и самостоятельности;

- качество знаний обучающихся, их умений и навыков.

6. Методика проведения урока:

а) оборудование урока, использование наглядных пособий, дидактического материала на всех этапах урока;

б) соответствие методов и приёмов образовательным и развивающим задачам урока, их оптимальное сочетание;

в) соответствие методов содержанию урока, возрасту и уровню подготовки обучающихся, эффективность применяемых методов и приёмов;

г) постановка учителем перед обучаемыми цели урока и подведение итогов;

д) работа с отстающими и слабоуспевающими на уроке;

е) правильность оценки учителем знаний и деятельности учеников, педагогическое значение выставляемых оценок, их эффективность и объективность;

ж) соблюдение на уроке единых требований к обучающимся.

7. Организация познавательной деятельности обучающихся:

- роль, место и характер самостоятельной работы обучающихся на уроке;

- место учебника и наглядных средств;

- место, форма, последовательность вопросов и заданий, приёмы активизации обучающихся;

- характер познавательных заданий, формулировка проблемных вопросов.

8. Психологические основы урока:

- развитие и поддержание внимания;

- развитие памяти, мышления, воображения; ритмичность урока: чередование материала разной степени трудности, разнообразие видов учебной деятельности;

- наличие психологических пауз и разрядки;

- эмоциональная атмосфера урока.

9. Индивидуальный и дифференцированный подход к учащимся на уроке.

10. Наличие, объём, характер домашних заданий и целесообразность поставленных в них дидактических задач.

11. Работа и поведение учащихся на уроке:

- активность класса, качество ответов учеников;

- заинтересованность детей материалом урока;

- дисциплинированность и организованность;

- речь учащихся, характер задаваемых вопросов.

12. Поведение учителя на уроке:

- выдержка и собранность, доброжелательность в обращении с учениками;

- умение распределять внимание на уроке, прислушиваться к ответам обучающихся;

- требовательность, использование разнообразных приёмов воздействия на обучающихся;

- эмоциональность;

- речь учителя;

- внешний вид.

13. Выводы и предложения.

Организация самостоятельной работы учащихся на уроке

Проблема самостоятельной работы учащихся и ее организации на уроке имеет богатую историю и свои традиции ее решения. Еще К. Д. Ушинский считал самостоятельную работу «единственно прочным основанием всякого плодовитого учения». Исследователи этой проблемы вкладывают разный смысл в понятие «самостоятельная работа». Одни рассматривают ее как метод обучения, другие - как форму организации познавательной деятельности учащихся, третьи - как средство обучения, а также как вид деятельности учащихся и как самостоятельную деятельность учения. По мнению ряда исследователей, самостоятельная работа есть синтез формы учебной деятельности и средства организации познавательной деятельности, вида деятельности и организационной формы. Сопоставляя эти точки зрения, И. В. Харитонова пришла к выводу, что неоднозначность в толковании понятия самостоятельной работы у разных исследователей объясняется тем, что они исходят из разных групп признаков, определяющих ее сущность: организационных, дидактических, физиологических и др. Объясняется это тем, что самостоятельная работа является предметом дидактики, психологии, методики и т. д.

В контексте методики обучения математике самостоятельная работа есть многогранное явление обучения, обладающее следующими признаками:

1) быть одной из форм проявления методов обучения;
2) являться одним из видов деятельности;
3) быть средством обучения;
4) являться одной из форм организации познавательной деятельности;
5) быть самостоятельной деятельностью учения.

Такое представление самостоятельной работы позволяет рассмотреть различные аспекты ее функционирования в учебном процессе. Так, если с точки зрения деятельностного подхода самостоятельная работа выступает в качестве самостоятельной деятельности учения и является одним из видов деятельности, то в организации учебного процесса она может выступать как метод, средство или форма обучения. Каждый из признаков самостоятельной работы, взятый отдельно от других, имеет лишь определенное назначение. Поэтому для понимания сущности самостоятельной работы следует учитывать все ее аспекты.

Различные трактовки самостоятельной работы обусловливают наличие в учебной литературе различных классификаций самостоятельных работ. Они отличаются:

1) по дидактическим целям;
2) по уровню самостоятельности учащихся;
3) по степени индивидуализации;
4) по источнику и методу приобретения знаний;
5) по форме выполнения;
6) по месту выполнения.

Наиболее распространенной является классификация самостоятельных работ, учитывающая динамику познавательной деятельности учащихся:

1) по образцу;
2) реконструктивные;
3) частично поисковые;
4) творческие (П. И. Пидкасистый).

И.В. Харитонова, учитывая специфику математических знаний (высокий уровень абстракции, дедуктивность доказательств, обобщенность, алгоритмичность и т. д.), особенности их формирования, концепцию самостоятельной работы, предлагает следующую совокупность типов самостоятельных работ при обучении математике:

1) алгоритмический;
2) с указанием способа выполнения;
3) распознавание;
4) обобщение;
5) творчество.

Очевидно, что данная типизация учитывает и дифференциацию усвоения математических знаний. В работе первого типа ученик получает задание с абсолютно точными предписаниями всех шагов, которые ему надлежит выполнить; второй тип содержит указания, определяющие основное направление работы;

третий тип предполагает распознавание объектов, принадлежащих понятию, и ситуаций, удовлетворяющих теореме; самостоятельные работы четвертого типа ориентированы на умение выделять свойства объекта, проводить анализ их связей и отношений, обобщать, проводить реконструкцию учебного материала, и, наконец, для самостоятельной работы пятого типа предусматривается использование творческих заданий, в которых осуществляется неалгоритмический поиск решения задачи, составление задач и т.д.

Предпринимаются попытки индивидуализировать самостоятельные работы, т.е. ориентировать их на индивидуальные особенности учащихся. Так, некоторые педагоги, исходя из характера учебной деятельности, выделяют три типа заданий для самостоятельной работы:

1) учебные задания, опосредующие учебную информацию;

2) учебные задания, направляющие работу ученика с учебным материалом;

3) учебные задания, требующие от ученика творческой деятельности.

Замечу, что данная типология недостаточно мотивирована: очевидно, что выполнение заданий первых двух типов может основываться на творческой деятельности, а задания третьего типа могут быть осуществлены на материале учебника. Далее, автор этой типологии предлагает в каждом из указанных типов заданий предусмотреть еще четыре вида, учитывающие уровни:

а) сформированности знаний, умений и навыков;

б) развития индивидуальных особенностей;

в) сформированности общеучебных умений;

г) сформированности познавательных интересов учащихся.

Таким образом, рассмотренная типология самостоятельных работ обусловливает в каждой из трех их групп наличие, как минимум, четырех вариантов самостоятельных работ. Надо сказать, что если ранее в дидактических материалах приводили три варианта, то теперь число вариантов значительно возросло. Объясняется это тем, что разброс скоростей усвоения математического материала различными учащимися намного больше, чем по другим предметам, а потому ориентировка на среднего ученика в обучении математике приводит к низким результатам. Учителя учитывают это обстоятельство и стараются максимально индивидуализировать работу учащихся с помощью карточек. Однако наблюдения показывают, что в классе обычно присутствует 6—8 однородных групп учащихся со сходными индивидуальными особенностями в каждой группе. Следовательно, вариантов самостоятельных работ для класса должно быть 6—8. Каждой группе учащихся примерно с одинаковым «показателем» усвоения материала предъявляется свой вариант. Но в таком случае возникают трудности с проверкой самостоятельных работ, выражающиеся в том, что для проверки пяти-шести вариантов самостоятельной работы, если они различны, требуется много времени, да и обсуждение результатов выполнения каждого варианта интересно лишь для соответствующей группы школьников, остальные учащиеся не могут принять участие в обсуждении, так как они незнакомы с заданиями.

Поэтому более эффективны самостоятельные работы с единой основой, которая в зависимости от уровня подготовки учащихся корректируется с помощью наборов указаний к выполнению предложенного задания. При подборе заданий можно исходить из трех уровней усвоения знаний, умений и навыков: первый состоит в осознании информации и ее запоминании; второй представляет усвоение способов применения знаний по образцу, включая легко опознаваемые вариации этого образца, применение знаний в знакомой ситуации; третий заключается в готовности обучающегося творчески применять усвоенную информацию в новой, незнакомой ему ситуации. Эти уровни усвоения знаний, которых необходимо добиться при изучении того или иного материала на определенном этапе, должны определять подбор задач для самостоятельных работ. Корректировка заданий позволяет расширить диапазон этих базовых уровней усвоения знаний и умений до, например, уровней, характеризующих типологию И. В. Харитоновой. Приведем примеры многовариативных самостоятельных работ.

Вариант I

Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Докажите равенство треугольников AOD и BOC.

Вариант II

Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Докажите равенство, отрезков AD и CB.

Вариант III

Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Выделите соответственно равные элементы в треугольниках AOD и BOC.

Вариант IV

Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Пусть M и N — середины отрезков BC и AD. Докажите, что $OM = ON$.

Вариант V

Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Пусть M и N — середины отрезков BC и AD. Докажите, что $OM = ON$.

Указание. 1. Докажите равенство треугольников AOD и BOC. 2. Докажите равенство треугольников COM и DON.

Вариант VI

Отрезки AB и CD не лежат на одной прямой и имеют общую середину O. Пусть M и N — середины отрезков BC и AD. Докажите, что $OM = ON$.

Указание. 1. Отметьте на рисунке равные элементы. 2. Докажите равенство углов AOD и COB; равенство треугольников AOD и BOC; равенство отрезков BM и AN; равенство углов OAD и OBC; равенство треугольников AON и BOM.

Варианты I-VI реализуются с помощью карточек. Все карточки вариантов V-VI имеют указания, а в карточках вариантов I-III их нет.

Упражнения вариантов I-III имеют одно и то же условие. Для их выполнения нужен примерно один и тот же круг знаний, умений и навыков. Но требования этих упражнений неодинаковы; для вариантов I-II это часть требования упражнений варианта III. В связи с этим увеличивается число логических шагов, приводящих к выполнению упражнения, меняется степень актуализации знаний, используемых при его выполнении. В задачах вариантов IV-VI изменено условие (добавлены данные) по сравнению с условиями задач вариантов I-III, их требования, по существу, включают в себя требования задач вариантов I-III. Упражнения вариантов I-III предназначены для проверки знаний на первом и втором уровнях их усвоения. При этом метод доказательства, основной круг понятий, необходимых для выполнения упражнения, остаются неизменными, последовательность рассуждений удлиняется.

Проверке знаний, соответствующих третьему уровню усвоения, способствуют упражнения вариантов IV-VI, выполнение которых требует от учащихся глубокого осознания изучаемых понятий и методов решения, свободного оперирования полученными знаниями, умения применять их в новой ситуации, более высокой степени актуализации знаний. Проверка знаний и умений, соответствующая наиболее высокому уровню усвоения, может быть осуществлена только для наиболее успевающих учеников. Многовариативность самостоятельной работы можно обеспечить также путем использования специальных карточек с имеющимися в них пропусками. Организация работы с ними, технология их изготовления описаны в методической литературе.

Рассмотрим вариант самостоятельной работы

1. Упростите выражение
$$\frac{sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cdot cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+sin^2\alpha}{sin\alpha+sin2\alpha\cdot sin\alpha}.$$

2. Докажите тождество $cos4a+1=\frac{1}{2}sin4a(ctga-tga)$.

Приведем несколько вариантов рекомендаций по выполнению первого упражнения

Вариант I

1) Преобразуйте по формулам приведения множители произведения, находящегося в числителе дроби.

2) Разложите числитель дроби на множители.

3) Разложите знаменатель дроби на множители.

4) Выполните сокращение дроби.

5) Выполните преобразование суммы функций, находящихся в знаменателе дроби, в произведение.

Вариант II

1) Разложите числитель дроби на множители, используя формулы приведения.

2) Разложите знаменатель на множители и выполните сокращение дроби.

3) Выполните преобразование суммы функций в произведение.

Приведем несколько вариантов рекомендаций
по выполнению упражнения 2 самостоятельной работы

Вариант I

1) Представьте $\cos 4\alpha$ и $\sin 4\alpha$ через $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$.
2) Преобразуйте $\operatorname{ctg} \alpha$-$\operatorname{tg} \alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.
3) Воспользуйтесь основным тригонометрическим тождеством.

Вариант II

1) Используя основное тригонометрическое тождество и формулу косинуса двойного аргумента, преобразуйте левую часть равенства.

2) Используя определение синуса и косинуса и формулу синуса двойного угла, преобразуйте правую часть равенства.

Вариант III

Используя основное тригонометрическое тождество, формулы синуса и косинуса двойного аргумента, приведите левую и правую части равенства к виду $2cos^2 2\alpha$.

Вариант IV

Заполните пропуски и выполните дальнейшие преобразования:

$$cos^2 2\alpha - ...sin^2 2\alpha + ... = \frac{1}{2} - 2sin^2 2\alpha + ... = (\frac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{\frac{1}{2}sin...\alpha}).$$

Совокупность полученных вариантов вполне обеспечит индивидуализацию выполнения учащимися данной самостоятельной работы и коллективное обсуждение ее результатов.

Нестандартные уроки математики

В последнее время в практике обучения распространены такие уроки, как урок-лекция, урок-практикум, урок-семинар, урок-зачет, урок-консультация, урок-соревнование, театрализованный урок, урок одной задачи, урок-бенефис и т.д. Структура этих уроков отличается от структуры классических типов уроков, рассмотренных выше, поэтому их и называют нестандартными уроками. Некоторые из них, например, театрализованный урок, мало напоминают обычный урок. Еще более это относится к таким формам обучения, как мастерская; эффективна форма учебной работы, представляющая пару «урок — внеклассное мероприятие». Расширяющийся список уроков является результатом активного, творческого поиска учителей таких форм обучения, которые соответствовали бы требованиям к выпускникам школ, тенденциям развития математического образования, новым образовательным идеям и максимально способствовали бы развитию способностей ученика, его личностных качеств, самостоятельности мышления и т.д.

Рассмотрим некоторые из уроков.

Урок-лекция. В старших классах резко возрастает объем учебного материала, подлежащего изучению, значительно удлиняются цепочки логических рассуждений, что предполагает изложение материала крупными блоками, а это трудно реализовать в рамках урока усвоения новых знаний. К тому же в старших классах активизируется необходимость воспитания у учащихся способности к самостоятельному получению знаний, к работе с книгой (учебником, справочником, различными пособиями для учащихся, задачником). Реализовать сказанное возможно на уроке-лекции. Такие уроки будут готовить ученика и к учебе в вузе, где лекция занимает значительное место среди различных форм обучения студентов. Эффективность использования лекционного способа изложения учебного материала в школе доказана многими учителями, в частности учителем математики В. Ф. Шаталовым.

Опыт высшей школы показывает, что усвоение взаимосвязанного материала более успешно при его изложении крупными порциями (блоками), позволяющими установить различные отношения нового понятия с известными. При этом автоматически происходит выделение основного и второстепенного в изучаемом материале. Резко возрастающий объем материала, подлежащий усвоению, компенсируется увеличением времени на решение задач по данному материалу. При таком подходе несколько удлиняется период усвоения новых понятий и фактов, но усвоение их вполне сознательное, разностороннее и активное.

Ясно, что лекция в школе не должна быть полной копией соответствующей формы изложения учебного материала в вузе. Необходимо учитывать возрастные особенности учащихся и значительно более неоднородный состав учащихся в школе по сравнению с вузом. С учетом разной способности учеников к усвоению новой информации лекция учителя должна сопровождаться необходимым повторением узловых моментов рассуждения. Лекция в школе должна быть более короткой и чередоваться в отдельных случаях с другими формами учебной работы. Объяснение учителя должно опираться на известные учащимся факты (изучение нового в форме повторения и развития или уточнения известного); на аналогию; на моделирование новых понятий и отношений; на четкую постановку проблемы и «прозрачную» идею ее решения. Объяснение учителя должно сопровождаться контрольными вопросами к классу, но в минимально необходимом объеме, не нарушающем логику рассуждений. Промежутки времени между изучением теоретических фактов и их приложением в школе должны быть значительно меньше, чем в вузе. Контроль за усвоением знаний должен быть более частым и разнообразным по форме, опираться на индивидуальные и коллективные формы работы учащихся.

Урок-практикум. На уроках этого типа осуществляется работа по закреплению теоретического материала, изложенного на лекции. На уроках-практикумах проводится работа по формированию умений и навыков решения основных типов задач, опорных задач темы, оформлению решений. Учащиеся овладевают эвристическими приемами, адекватными применению знаний и умений в различных конкретных ситуациях. При отборе задач учитель предусматривает необходимость усвоения внутрипредметных связей изучаемого материала. На таких уроках имеется хорошая возможность использования групповых форм учебной работы, приобщения в качестве консультантов групп учащихся. Уроки-практикумы в большей мере, чем уроки формирования умений и навыков, позволяют осуществлять дифференциацию в обучении, учитывать интересы и возможности школьников, приобщать их к творческой деятельности. Одним из средств реализации этих возможностей урока-практикума являются многовариативные самостоятельные работы, которые позволяют дифференцированно включать учащихся в творческий процесс и привлекать их к обсуждению результатов выполнения задания. Как уже было сказано, уроки-практикумы предоставляют возможность обстоятельно рассмотреть совокупность опорных задач, привлечь учащихся не только к их решению, но и выделению. Такие уроки следует использовать и для формирования умения составлять задачи, используя для этого различные приемы. Если уроки формирования умений и навыков в большей мере соотносятся с уровнем обязательных результатов, то уроки-практикумы – с уровнем возможностей школьников.

Урок-семинар. Семинары служат для формирования и развития навыков самообразования, приобщения школьников к самостоятельной работе, выработке умений формулировать гипотезы, анализировать литературу, аргументировать суждения и, наконец, выступать перед аудиторией, отвечать на вопросы своих товарищей. Уроки-семинары организуют для углубления и систематизации знаний, их обобщения. К таким урокам следует тщательно готовиться и учителю, и ученикам, подготовка к ним должна занимать не менее двух недель. Доклады учеников могут касаться не только теоретических вопросов, но и подборки задач, их составления, обсуждения различных способов решения задачи. Доклад может соотноситься не только с отдельным учеником, к его подготовке можно привлекать и группу школьников, причем с различным распределением функций. Последнее может проявляться в коллективной работе над докладом либо в выполнении каждым учеником группы индивидуального задания. Такие уроки эффективны на заключительном этапе изучения темы, целью которого является систематизация знаний, умений, способов решения задач, эвристик, обучение учащихся применению их в нестандартных ситуациях, знакомство учащихся с историей развития математики.

Урок-зачет. Как было отмечено выше, для определения уровня овладения учащимися умением самостоятельно применять знания в стандартных условиях чаще всего используются уроки проверки и коррекции знаний и умений. Однако важно знание уровня умения каждого учащегося выполнять все основные задания по изученной теме, соответствующие уровню обязательной математической подготовки.

Диагностика этого умения осуществляется на уроках-зачетах. Итак, основная цель урока-зачета заключается в том, чтобы выяснить, соответствуют ли знания и умения каждого школьника по изученной теме уровню обязательных результатов. Обычно учителя перед проведением таких уроков заранее сообщают круг теоретических и практических вопросов, выносимых на зачет, что позволяет ученикам ответственно подготовиться к уроку.

На практике используются различные формы зачета: учащиеся отчитываются о проделанной работе перед учителем; ученики контролируют друг друга (взаимозачет); зачет группы учащихся принимает консультант, назначенный учителем из числа специально подготовленных учеников. Сдающие зачет учащиеся выполняют задания на отдельных листках, которые консультантом сдаются учителю. Ясно, что при подборе консультантов следует учитывать не только уровень их математической подготовки, но и личностные качества (ответственность, тактичность, принципиальность, справедливость). Учителя используют и разные виды зачета: устный зачет без предварительной подготовки к ответу, теоретико-практический зачет с ответами на теоретические вопросы и решением задач, творческий зачет. Ответы учащихся могут быть даны как в письменной, так и в устной форме.

Для диагностики умения решать задачи по теме используется зачет в несколько этапов. Первый этап служит для оценки умения решать элементарные задачи по теме, на втором этапе диагностируется умение использовать блоки элементарных задач для решения опорных задач по теме, третий этап подводит итог в оценке способности школьника применять в различных ситуациях совокупность умений, приобретенных в процессе решения опорных задач.

Математические задачи, особенно геометрические, решаются различными способами, выявить и оценить которые на любом из разобранных типов уроков невозможно. Для этих целей используются *уроки одной задачи*. Ясно, что для уроков данного вида подходит не любая задача, а только такая, решение которой может быть выполнено различными способами (векторным, методом геометрических преобразований, алгебраическим, традиционно геометрическим и т.д.). Опорой в поисках способов решения задачи должны стать различные эвристики. Задачная ситуация должна позволять на ее основе широко использовать методы научного познания для составления новых задач.

Урок-бенефис. Это уроки, на которых учащиеся выступают с результатами собственных самостоятельных исследований. Такие уроки обладают высоким стимулирующим воздействием на учащихся. Чувство ответственности, огромное желание оправдать надежды учителя, поднять свой авторитет среди товарищей мобилизуют мыслительные способности ученика. Ученик знает, что от него ждут изящного решения задачи, а отыскать его можно только в результате большой работы. Такая работа зачастую приносит ученику радость, «окрыляет» его. Знания, приобретенные при высоком эмоциональном настрое, надолго остаются в памяти.

Уроки-бенефисы проводятся в форме отчета о решении задачи. Поэтому для «бенефисной» задачи желательна нестандартная формулировка, наличие нескольких способов ее решения и среди них – изящного способа. К таким задачам можно отнести следующую задачу: «На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC вне его построен квадрат $ACDE$. Докажите, что луч BO является биссектрисой угла B (O – точка пересечения диагоналей квадрата)». Самое изящное ее решение получим при использовании поворота вокруг точки O на 90^0, переводящего точку A в точку C, и признака биссектрисы угла.

В практике обучения математике появился новый способ организации деятельности учащихся под названием *мастерская* [14]. Мастерская состоит из ряда заданий, которые направляют работу учащихся в нужное русло, но внутри каждого задания школьники свободны. Важным признаком мастерской является необходимость выбора учеником пути исследования, средств для достижения цели, темпа работы и т.д. Мастерская начинается с выявления знаний каждого ученика по данному вопросу, затем эти знания обогащаются знаниями соседа по парте. На следующем этапе знания корректируются в разговоре с учащимися, сидящими за другой партой, и только после этого точка зрения группы объявляется классу. Знания еще не раз корректируются в результате сопоставления своей позиции с позицией других групп. В частности, теперь свою позицию может высказать учитель.

В качестве примера приведем из книги А. А. Окунева мастерскую по теме «Параллелограмм».

Работа идет в парах:

I. Напишите план изучения этой темы, перечислите все, что вы хотели бы узнать о параллелограмме.

II. Разговор в четверках, обмен соображениями.

III. Слушаем четверки. Учитель пишет общий план на доске, корректируя по ходу обсуждения порядок изучения вопросов. (Определение. Свойства. Признаки. Площадь.)

IV. На отдельном листке, работая в четверках, можно исследовать любые из этих вопросов. На эту работу дается около 20 мин. Затем каждая группа получает место на доске или пишет фломастером на большом листе все, что она сумела сделать.

V. Защита четверками результатов своих исследований.

VI. На дом задается § 4. Из него ребята должны получить всю информацию, которую не могли добыть сами.

В мастерской акцентируется внимание учащихся на некоторых вопросах, например: можно ли вычислить площадь параллелограмма по формуле площади трапеции? Воспроизведите формулу, по которой можно вычислить площади треугольника, трапеции и параллелограмма.

В названной книге приведен и другой вариант мастерской по этой же теме.

Индивидуализация и дифференциация в обучении математике

По мнению исследователей, феномен дифференциации возник во Франции в 1852 г. (П. Руднев), однако Н. К. Гончаров утверждает, что он появился значительно раньше. В России попытка дифференциации была предпринята в 1864 г. В то время это явление обозначалось термином «фуркация» и означало разделение учебных планов в старших классах по циклам знаний. В «Педагогической энциклопедии» (1964) приведено следующее пояснение: «Дифференцированное обучение применительно к образовательной школе представляет собой разделение учебных классов и профилей средней школы». Цели дифференциации были направлены на: 1) выбор учащимися профессии в соответствии с их склонностями и интересами; 2) удовлетворение интереса учащихся к определенному циклу предметов; 3) повышение эффективности учебно-воспитательного процесса в школе; 4) подготовку к продолжению образования в высшей школе.

В 1963 г. при университетах открываются специальные школы – интернаты физико-математического профиля, а в 1966 г. в средних школах вводятся факультативные занятия с целью углубления знаний по физико-математическим, естественным и гуманитарным наукам, развития разносторонних интересов и способностей учащихся. В последнее время появились школы разного типа: лицеи, колледжи, гимназии, частные школы. Значительно шире стал спектр профилей школ: физико-математический, гуманитарный, технический, педагогический, экологический и т. д. Многообразие профилей и типов школ, естественно, ведет к изменению целей дифференциации. В концепции развития школьного математического образования сказано: «Дифференциация способствует более полному учету индивидуальных запросов учащихся, развитию их интересов и способностей, достижению целей образования. В условиях дифференцированного обучения ученик реализует право выбора предмета или уровня обучения в соответствии со своими склонностями: известная однородность интересов и уровня подготовленности учащихся облегчает и делает более эффективной работу учителя».

В настоящее время широкое распространение получила уровневая дифференциация, которую связывают с планированием обязательных результатов обучения.

Итак, в методике обучения математике основную цель дифференциации видят в развитии личности ученика с учетом его индивидуальных особенностей. Такая широкая трактовка понятия дифференциации охватывает понятие индивидуализации, которое трактуется как такая организация учебного процесса, при которой выбор способов, приемов, темпа обучения учитывает индивидуальные различия учащихся, уровень развития их способностей к учению.

Надо сказать, что существуют разные точки зрения на содержание понятий дифференциации и индивидуализации и на отношение между ними. Так, одни соотносят дифференциацию с образованием, а индивидуализацию с обучением, другие дифференциацию рассматривают как одну из форм индивидуализации. Ряд авторов понятие дифференциации подчиняют понятию индивидуализации, другие полагают, что индивидуализация – частный случай дифференциации. Мы не будем анализировать все эти трактовки, поскольку это занятие имеет чисто научное значение и не отражается в учебном пособии по методике преподавания математики. Читателю, проявившему интерес к проблеме соотношения между дифференциацией и индивидуализацией, рекомендуем обратиться к книге: Утеева Р. А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе. – М.: Прометей, 1997.

Эффективность дифференциации (индивидуализации) в обучении зависит от того, насколько удачно сформированы типологические группы школьников. Последнее понимается в контексте адекватности оснований деления на группы по математическим способностям. Заметим, что в дидактическо-методической литературе предлагается более 20 критериев деления учащихся на группы. Так, Е. С. Рабунский предлагает объединять учащихся в группы по успеваемости, устойчивости интереса и уровню познавательной самостоятельности. А. А. Кирсанов исходит из устойчивости восприятия, уровня развития памяти, соотношения наглядно-образного и словесно-логического компонентов мышления, уровня выполнения мыслительных операций. И. Э. Унт предлагает в качестве критериев деления обученность, обучаемость, умение самостоятельно работать, умение читать текст с пониманием и нужной скоростью, специальные способности, познавательные интересы, отношение к труду. Х. И. Лийметс называет следующие признаки: успеваемость по предмету, темп работы, информированность по предмету, способности, взаимоотношения учащихся. А. З. Макоев, Р. А. Утеева делят учащихся на группы, исходя из фактического уровня знаний и умений по разделу, теме, курсу. В. Ф. Чучуков в качестве основных параметров деления предлагает уровень знаний, умений, навыков; уровень развития способностей; уровень работоспособности.

В практике обучения дифференциация реализуется в основном посредством специальных дифференцированных заданий. Примеры таких заданий можно найти в методических рекомендациях для учителя. К таким заданиям можно отнести и многовариативные самостоятельные работы, рассмотренные в предыдущем параграфе, а также задания с использованием специальных карточек.

Одним из важных факторов организации учебной деятельности являются взаимоотношения между учащимися и учителем, между самими учащимися, которые определяют формы организации учебной деятельности. Выделяют отношения следующих видов: 1) учитель – ученик – класс; 2) учитель – класс– ученик; 3) учитель – группа – ученик; 4) учитель – ученик. В свою очередь, указанные виды отношений реализуются в следующих формах организации учебной работы школьников: фронтальной, коллективной, групповой, индивидуальной. Специальные исследования (Р. А. Утеева, Р. А. Хабиб и др.) показали, что эффективно использование на уроке комбинаций нескольких форм.

Так, на этапе изучения нового материала школьного курса математики эффективна взаимосвязь форм групповой и фронтальной, или групповой и коллективной, или индивидуальной и фронтальной, или индивидуальной и коллективной. Способ организации, в основе которого лежит взаимосвязь групповой и фронтальной форм, заключается в следующем: новый материал изучается учащимися коллективно в типологических группах, каждая из которых работает по своим заданиям; затем учитель организует совместную деятельность учащихся всех групп. Смысл композиции, например, индивидуальной и коллективной форм заключается в том, что учитель посредством заданий обеспечивает переход от индивидуальной к коллективной деятельности. Очевидно, что это можно осуществить посредством многовариативных самостоятельных работ, переходя от их индивидуального выполнения к коллективному обсуждению, либо заданий с карточками.

На этапе закрепления знаний и формирования умений целесообразно использование: а) взаимосвязей: Ф→И, Ф→Г, Г→И, И→Г, если изучается определение понятия и его применение к решению задач; б) Ф→Г→И, Г→И, К→Г, если изучаются теоремы, их доказательства, применения к решению задач; в) Ф→Г→И, Г→И, Ф→И, если изучаются приемы и способы решения задач.

На этапе проверки знаний и умений эффективны взаимосвязи вида Г→Ф или И→Ф. Например, взаимосвязь Г→Ф обусловливает выполнение каждой группой своих заданий с последующим фронтальным обсуждением результатов: анализом ошибок, показом рациональных способов решения задач.

Остановимся еще на одном подходе к реализации дифференциации обучения математике. При этом подходе исходят из структуры личности. Основаниями образования групп служат уровни сформированности мотивационного, операционально-действенного и волевого компонентов личности. Выделяют две группы мотивов: $М_1$ – социальные мотивы, связанные с социальными взаимодействиями обучаемого с другими людьми; $М_2$ – познавательные мотивы, связанные с содержанием курса математики и процессом его изучения. Операционально-действенный компонент будем характеризовать тремя уровнями: $С_1$ – ученик знает основные теоремы и определения курса математики, умеет решать стандартные задачи, но допускает нарушение логической последовательности изложения, испытывает затруднения при решении нестандартных задач; C_2 – ученик правильно применяет теоремы, не допускает существенных неточностей при формулировке теорем и определений, но его изложение неполное; C_3 – ученик четко формулирует определения понятий и теоремы, не испытывает затруднений в доказательстве теорем и решении задач. В формировании волевого компонента зафиксируем следующие уровни: B_1 – волевые усилия ученика проявляются слабо, т. е. ученик не стремится довести работу до конца, при первых затруднениях отказывается от выполнения задания; B_2 – волевые усилия ученика проявляются в большинстве случаев, например, на занятиях работает напряженно, стремится довести работу до конца, но при серьезных затруднениях отступает; B_3 – волевые усилия проявляются во всех видах учебно-познавательной деятельности.

Состояние личности ученика можно характеризовать объектом $<M_{2j}C_jB_k>$, где i=1, 2; j=1, 2, 3; k=1, 2, 3. Например, объект $<M_XC_2B_X>$ соответствует такому состоянию личности: мотивационный компонент развит слабо, волевые проявления слабые, однако ученик способен при этом выполнять частично творческую деятельность.

Указанными объектами можно характеризовать развитие ученика. Наиболее низкому уровню развития соответствует объект $<M_XC_XB_X>$, характеризующий личность, все три компонента которой находятся на самых низких уровнях, а самому высокому – объект $<M_2C_3B_3>$, символизирующий устойчивые познавательные мотивы, волевые проявления и способность к творческой деятельности. Каждый ученик в зависимости от уровня мотивов, волевых усилий и уровня владения учебным материалом может продвигаться от самого элементарного состояния до самого сложного своим путем. Очевидно, можно выделить три направления в формировании личности: 1) в ситуации лидирующего изменения мотивационного компонента; 2) в ситуации лидирующего изменения содержательно-операционного компонента; 3) в ситуации лидирующего изменения эмоционально-волевого компонента. Первое направление реализуется по схеме: $M_1C_1B_1 \to M_2C_1B_1 \to M_2C_2B_X \to M_2C_2B_2 \to M_2C_3B_2 \to M_2C_jB_2$, второе представляет следующую цепочку: $M_1C_1B_1 \to M_1C_2B_1 \to M_1C_3B_1 \to M_2C_3B_1 \to M_2C_3B_2 \to M_2C_3B_3$, направленность развития личности в последней ситуации представляется схемой: $M_1C_1B_1 \to M_1C_1B_2 \to M_1C_2B_2 \to M_1C_3B_2 \to M_2C_3B_2 \to M_2C_3B_3$. В главах II и III были рассмотрены условия упрочения мотивации в процессах работы с теоремой и формирования понятий. Используя тему «Векторы», приведем несколько задач, соответствующих каждому из рассмотренных направлений:

I. 1. Укажите на рисунке (рисунок дан) коллинеарные векторы.

2. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы, изображающие полет самолета сначала на 300 км на юг от города А до В, а потом на 500 км на восток от города В до С. Затем начертите вектор АС, который изображает перемещение из начальной точки полета в конечную.

3. Начертите два вектора: а) имеющие равные длины и неколлинеарные; б) имеющие равные длины и противоположно направленные. В каком случае полученные векторы равны?

4. Верно ли утверждение: а) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; б) $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; в) если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; г) если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} = \vec{b}$.

II. 1. Начертите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ так, чтобы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ были коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}|$=1 см, $|\overrightarrow{CD}| = 4{,}5$ см.

2. В параллелограмме ABCD диагонали пересекаются в точке О. Равны ли векторы: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$; в) $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{OC}$; г) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

3. Определите вид четырехугольника ABCD, если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

III. 1. Какие из следующих величин являются векторными: скорость, масса, сила, время, температура, длина, площадь, работа?

2. Начертите ненулевой вектор $\vec{a}$ и отметьте на плоскости точки A, B, C. Отложите от этих точек векторы, равные $\vec{a}$.

3. Пользуясь параллелограммом, построенным на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверьте справедливость равенств: а) $\vec{a}+\vec{b}$-$(\vec{a}+\vec{b})$=0; б) $(\vec{a}+\vec{b})$-(-$\vec{a}$)=$\vec{b}$.

Внеклассная работа по математике

Под внеклассной работой понимают необязательные систематические занятия с учащимися во внеурочное время. Различают два вида внеклассной работы по математике: работа с учащимися, для которых усвоение программного материала вызывает существенные трудности; работа с учащимися, проявляющими повышенный интерес к изучению математики.

Первый вид внеклассной работы имеет место в каждой школе и реализуется в зависимости от конкретных ситуаций. Второе направление внеклассной работы преследует основную цель, которая заключается в развитии способностей школьников и их интереса к изучению математики и ее приложений. Кроме этого, внеклассная работа призвана способствовать углублению математических знаний, умений и навыков, усвоенных учащимися на уроках, формировать познавательную самостоятельность учащихся и приобщать их к творческой деятельности, выявлять учащихся с повышенными математическими способностями.

Предлагаются различные классификации форм внеклассной работы. По количественному признаку формы делятся на групповые, массовые, индивидуальные; по функции выделяют познавательные и соревновательные формы; на основе временного признака формы внеклассной работы по математике подразделяются на константные и темпоральные.

Нашей школой накоплен богатый опыт в организации внеклассной работы по математике. Широкое распространение получили такие формы внеклассной работы, как математический кружок, олимпиада, математический бой, математический вечер и т.д. По аналогии с систематизацией основных типов уроков, результатом которой являются блоки уроков, можно говорить о блоках форм внеклассной работы по математике. В первый блок отнесем константные формы: математический кружок, школа юного математика, творческая группа, научное математическое общество школьников. Вторую группу образуют темпоральные, т. е. приуроченные к определенному времени (предметной декаде, концу четверти, полугодия и т. п.), формы: математический вечер, математическая олимпиада, математический бой, математическая конференция, математический КВН. Все другие формы внеклассной работы по математике относятся к одному из указанных блоков либо являются комбинацией структурных компонентов форм блоков. К последним можно отнести познавательные и соревновательные формы внеклассной работы по математике.

Наиболее распространенной формой внеклассной работы по математике является кружок. В его основе лежит принцип добровольности. Содержание кружковых занятий определяет учитель. Считают, что в V–VI классах основным в работе кружка является развитие мышления и формирование первоначального интереса к математике, а в VII–XI классах – углубление знаний по математике и развитие мышления школьников.

Однако при определении содержания кружковых занятий следует иметь в виду следующие факторы. Учебными стандартами предусмотрено снижение часов на изучение математики. В то же время гуманитаризация математического образования предполагает приобщение учащихся к творческой деятельности, овладение ими системой знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математики, ее методах, способах рассуждений. Реализовать это крайне сложно в условиях снижения урочных часов. Разрешить указанное противоречие непросто даже в рамках нестандартных уроков.

В данной ситуации наиболее адекватной ей формой обучения математике является пара «урок – внеклассное мероприятие». Эффективность этой пары обусловлена и особенностями математического знания (обобщение, конкретизация, систематизация, аналогия). Форма обучения математике, являющаяся композицией урока и кружка, позволяет продолжить изучение учебного материала, начатое на уроке, на занятиях математического кружка. В частности, указанная форма позволяет реализовать все функции заключительного этапа решения математической задачи, особенно в части составления на основе заданной задачной ситуации задач-обобщений, задач-аналогов, блоков родственных задач и т. д.

Заметим, что реализовать все функции заключительного этапа работы с задачей в условиях урочной формы обучения затруднительно даже на уроке решения одной задачи.

Использование пары «урок – внеклассное мероприятие» позволяет включать каждого ученика в учебную деятельность в соответствии с его психологическими особенностями, математическими способностями и желаниями. Данная форма обучения математике хорошо согласуется и с идеей уровневой дифференциации, давая возможность ученику выбирать в изучении материала либо уровень обязательных результатов, либо продвинутый. Примеры работы с задачей, которая может быть начата на уроке и продолжена на занятии кружка, даны в методической литературе.

Идея взаимосвязи содержания урока и внеклассного мероприятия может быть перенесена на организацию факультативных занятий. Содержание факультатива должно исходить из содержания основного, программного материала, продолжать его посредством использования обобщения, конкретизации, аналогии, что позволит учащимся принимать участие в организации содержания факультативного курса. Примером такого факультатива может служить курс по изучению элементов четырехмерного пространства, объекты которого конструируются с помощью аналогии и обобщения из объектов трехмерного пространства.

Например, изучение признаков равенства треугольников, начатое на уроках, можно продолжить на кружковых занятиях, рассмотрев нестандартные признаки: а) по стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон; б) по стороне, сумме двух других сторон и углу, противолежащему одной из них; в) по двум сторонам и разности противолежащих им углов и т. д. В контексте сказанного рекомендуем книги В. В. Прасолова «Задачи по планиметрии» (Ч. I, II. – М.: Наука, 1991). Много интересного и полезного содержится в книгах: Шарыгин И. Ф. Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1994; Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. сред, шк.г – М.: Просвещение, 1991.

Лекция 2. Внешняя и внутренняя дифференциация при обучении учащихся математике. Основное образование учащихся, повышенный уровень изучения математики в гимназиях и лицеях. Дополнительное образование по математике.

Понятия «индивидуализация» и «дифференциация» обучения разрабатывались в педагогической науке как принципы обучения. Однозначной трактовки терминов «дифференциация», «индивидуализация», «индивидуальный подход», «дифференцированный подход», «дифференцированное обучение» не существует. По мнению И. Унт, это учет индивидуальных особенностей учащихся в той или иной форме, когда учащиеся группируются на основании каких-либо особенностей для раздельного обучения.

Дифференциация по способностям

Происходит на основе учета общего уровня обученности (успеваемости) и развития учащихся, особенностей развития познавательных процессов (мышления, памяти и др.). Другие индивидуальные особенности учащихся учитываются в рамках внутренней дифференциации, то есть непосредственно в классе. Дифференциация по способностям требует наличия более или менее объективных методик выявления способностей человека. Данный вид дифференциации отчасти помогает решать проблему одаренных детей, для обучения которых необходимы особые учебные программы. За рубежом распространена дифференциация по коэффициенту умственного развития (IQ). В педагогике советского периода дифференциация по способностям считалась неприемлемой, так как она якобы подчеркивала неравенство детей.

Дифференциация по неспособностям

Результатом дифференциации по неспособностям является создание классов коррекции, обычно предназначенных для детей, неуспевающих по тем или иным предметам. Некоторые педагоги считают, что создание таких классов не самый лучший путь преодоления неуспеваемости, так как если ученик, отстающий по отдельным предметам, попадает в класс коррекции, то он должен осваивать все дисциплины на таком же «корректирующем» уровне. Морально-психологический климат, складывающийся вокруг класса коррекции и в самом этом классе, также нельзя считать благоприятным для развития учащихся.

Дифференциация по интересам

Предназначена для школьников, особенно интересующихся тем или иным предметом, областью знания или видом деятельности. Осуществляется как в классах с углубленным изучением предметов, профильных классах, так и во внеурочной работе с учащимися в предметных кружках, клубах, познавательно-творческих или научных объединениях и т.п.

Дифференциация по проектируемой профессии

Предназначена для учащихся, уже определившихся со своей профессиональной ориентацией. Осуществляется, например, в музыкальных, художественных, хореографических школах или в школах с углубленным изучением предметов. Этот вид дифференциации может реализоваться также в результате профильного обучения в средней общеобразовательной школе различных типов (гимназии, лицеи и т. д.), в ходе групповых занятий в школе по подготовке в вуз.

Согласно Г.К. Селевко, **дифференциация обучения может пониматься как:**

1) создание разнообразных условий обучения для различных школ, классов, групп с целью учета особенностей их контингента;

2) комплекс методических, психолого-педагогических и организационно управленческих мероприятий, обеспечивающих обучение в гомогенных (однородных) группах.

В понимании дифференциации (лат. difference – разделение целого на различные части, формы, ступени) можно выделить три основных аспекта: учет индивидуальных особенностей учащихся; группирование учеников на основании этих особенностей; вариативность учебного процесса в группах.

Цель дифференциации процесса обучения – обеспечить каждому ученику условия для максимального развития его способностей, склонностей, удовлетворения познавательных потребностей и интересов в процессе овладения им содержания общего образования.

Существуют разные подходы к трактовке соотношения понятий «индивидуализация» и «дифференциация» обучения. Например, И. Унт определила индивидуализацию как учет в процессе обучения индивидуальных особенностей учащихся во всех его формах и методах, независимо от того, какие особенности и в какой мере учитываются. И, следовательно, дифференциация обучения понимается ею как один из основных вариантов индивидуализации обучения. Дидакт М. Н. Скаткин, наоборот, утверждал, что дифференциация является родовым понятием и включает в себя индивидуализацию как понятие видовое.

В трактовке Г. К. Селевко индивидуализация обучения – это, с одной стороны, организация учебного процесса, при котором выбор способов, приемов, темпа обучения обусловливается индивидуальными особенностями учащихся, а с другой – различные учебно-методические, психолого-педагогические и организационно-управленческие мероприятия, обеспечивающие учет индивидуальных особенностей ребенка в процессе обучения.

Современные педагоги рассматривают дифференциацию как принцип совершенствования (реформирования) системы образования, который реализует индивидуальный подход в обучении и воспитании; предполагает изменение учебных планов и программ, содержания и методов образования, темпов и сроков обучения в соответствии с потребностями, возможностями, интересами обучающихся; создание учебных заведений различных типов, профильных классов, классов поддержки и коррекции и др.

Как соотносятся понятия «дифференциация обучения» и «личностно ориентированное» обучение? Личностно ориентированное обучение предполагает построение индивидуальных образовательных траекторий с учетом субъектного опыта индивида, его предпочтений и ценностей, актуализацию личностных функций учащегося в процессе обучения. Дифференциация обучения рассматривается в качестве средства реализации личностно ориентированного обучения, так как она способствует раскрытию индивидуальности, выявлению способностей и склонностей личности.

В педагогической литературе различают понятия «внутренней» и «внешней» дифференциации обучения. В первом случае речь идет о такой организации учебного процесса, при которой индивидуальные особенности учащихся учитываются учителем в условиях обычного класса. Внутренняя дифференциация в пределах одного класса обусловлена различными способностями учащихся, их различиями в психическом развитии, особенностями памяти, мышления, уровнем знаний, интересов, мотивацией и т. д. Во втором случае создаются специальные дифференцированные учебные группы, в которых и осуществляется учет индивидуальных особенностей учащихся. Внешняя дифференциация предусматривает организацию обучения в классах (школах) с однородным (гомогенным) составом учащихся. При этом преподавание предметов ведется по программам, рассчитанным на один уровень учебных возможностей (интересов) учащихся.

В качестве видов «внешней» дифференциации традиционно выделяют: дифференциацию по способностям (по общим или специальным способностям, по неспособностям), дифференциацию по интересам, дифференциацию по проектируемой профессии.

Различают также дифференциацию по характерным индивидуально-психологическим особенностям детей, составляющим основу формирования гомогенных групп:

– по возрастному составу (школьные классы, возрастные параллели, разновозрастные группы);

– по полу (мужские, женские, смешанные классы, команды, школы);

– по личностно-психологическим типам (типу мышления, акцентуации характера, темпераменту и др.);

– по уровню здоровья (физкультурные группы, группы ослабленного зрения, слуха, больничные классы).

По организационному уровню гомогенных групп выделяют дифференциацию:

– по типу школ (гимназии, лицеи, колледжи, частные школы, школы-комплексы);

– внутришкольную (уровни, профили, отделения, уклоны, потоки и т. п.);

– в параллели (группы и классы различных уровней: гимназические, классы компенсирующего обучения и т. д.);

– межклассную (факультативные, сводные, разновозрастные группы);

– внутриклассную, или внутрипредметную (группы в составе класса).

Объединенной формой дифференциации обучения по интересам и по уровню развития является смешанная дифференциация, например, модель сводных групп по параллелям классов. Уровневая дифференциация как форма «внутренней» дифференциации дает возможность каждому ученику овладевать учебным материалом по отдельным предметам школьной программы на разных уровнях, но не ниже базового в зависимости от его способностей и индивидуальных особенностей. Профильная дифференциация предполагает обучение разных групп старшеклассников по программам, отличающимся глубиной изложения и объемом учебного материала, номенклатурой изучаемых вопросов, профессионально ориентированным содержанием обучения. Оба вида дифференциации – уровневая и профильная — могут сосуществовать и взаимно дополнять друг друга на всех ступенях школьного образования.

Дифференцированное обучение: методы, средства, формы, возрастная специфика

Дифференцированным в дидактике называют такое обучение, для которого характерен учет типологических возрастных и индивидуальных особенностей учащихся. При дифференцированном обучении реализуется тот или иной вид дифференциации. Целевыми ориентациями дифференцированного обучения являются: обучение каждого ученика на уровне его возможностей и способностей; приспособление (адаптация) обучения к особенностям различных групп учащихся. В ходе дифференцированного обучения применяются разнообразные методы, приемы, формы обучения и специальный дидактический материал, позволяющий осуществлять развитие учащихся в соответствии с их возможностями.

Вариантом дифференцированного обучения является **индивидуальное обучение,** при котором: 1) учитель взаимодействует лишь с одним учеником; 2) один учащийся взаимодействует лишь со средствами обучения (учебные пособия, компьютер и т.п.). Главным достоинством индивидуального обучения является то, что оно позволяет полностью адаптировать содержание, методы и темпы учебной деятельности ребенка к его особенностям; следить за его продвижением от незнания к знанию, вовремя корректировать деятельность обучающегося и учителя. Индивидуальное обучение в таком «чистом» виде применяется в массовой школе ограниченно (например, для занятий с одаренными детьми, с девиантными детьми).

Наиболее полно идеи дифференцированного обучения реализуются в школах с уровневой дифференциацией, организационная модель которых включает следующие виды дифференциации:

1) комплектование классов однородного состава с начального этапа обучения в школе на основе диагностики тех или иных характеристик личности и уровня овладения общеучебными умениями;

2) внутриклассная дифференциация обычно в среднем звене (V–IX классы) проводится посредством отбора групп для раздельного обучения на разных уровнях (базовом и вариативном); зачисление в группы производится на добровольной основе с учетом познавательного интересов учащихся;

3) профильное обучение в основной школе и старших классах организуется на основе психолого-педагогической диагностики, экспертной оценки, рекомендаций учителей и родителей, а также самоопределения школьников.

Дифференцированное обучение предполагает не только дифференциацию содержания, но и дифференциацию организации обучения с выделением методов, форм работы (фронтальная, групповая формы, индивидуальные занятия), темпов изучения материала и т. д. В настоящее время в средней общеобразовательной школе Беларуси уровневая дифференциация осуществляется в форме кружковых или факультативных занятий по предметам, а профильная дифференциация сохраняется в X–XI классах некоторых типов средней школы (гимназии, лицеи). Актуальной в связи с этим остается внутриклассная (внутрипредметная) дифференциация, которая осуществляется на всех ступенях общеобразовательной школы.

Основной формой учебных занятий при дифференцированном обучении является урок (традиционный и нетрадиционный). Каковы пути организации дифференцированного обучения на уроке? Организация учителем внутриклассной дифференциации включает несколько этапов.

Необходимым условием осуществления дифференцированного обучения, его основой является психолого-педагогическая диагностика индивидуально-психологических особенностей школьников. Критериями разделения учащихся на гомогенные группы, например, могут служить: отношение (интерес) к предмету, уровни обучаемости или обученности (высокий, средний, низкий), отношение к учебной деятельности (положительное, отрицательное), психофизиологические особенности человека. Так, с учетом последнего из названных критериев учитель выделяет группы учащихся с сильной или слабой нервной системой, с преобладающим типом памяти, уровнем развития произвольного внимания и т.п.

В процессе дифференцированного подхода педагог изучает, анализирует и классифицирует различные качества личности и их проявления у детей, выделяя наиболее общие, типичные черты, характерные для данной группы учащихся. Деление класса на группы условно и негласно. Перемещение учащихся из группы в группу производится в конце каждой учебной четверти на основе выделенных показателей интелектуально-личностного роста школьников.

Самым распространенным методом внутриклассной дифференциации является выполнение учениками заданий разного уровня сложности. Кроме того, дифференцируются задания по степени самостоятельности учащихся, по уровню творчества, по объему учебного материала, по характеру помощи учащимся.

Дифференцированное обучение возможно только в контексте развивающего и личностно ориентированного обучения. Эффективными методами такого обучения являются рассмотренные нами ранее методы проблемного обучения, активные методы обучения, в том числе учебные дискуссии, игровые методы, методы стимулирования и мотивации интереса к учению, создание ситуаций успеха, творчества и другие.

Дифференцированное обучение в настоящее время рассматривается в качестве эффективного средства обучения так называемых нестандартных детей, выходящих за пределы нормы: выше или ниже ее. Это дети с особыми образовательными потребностями (одаренные учащиеся, отстающие в учении школьники и другие).

Организация образовательного процесса при изучении учебного предмета «Математика» на повышенном уровне в РБ

На II ступени общего среднего образования учебный предмет «Математика» может изучаться на повышенном уровне в VIII и IX классах в объеме не более 2 дополнительных учебных часов в неделю.

Рекомендации по организации изучения математики на повышенном уровне размещены на национальном образовательном портале: https://adu.by/ Образовательный процесс. 2020/2021 учебный год / Общее среднее образование / Учебные предметы. V–XI классы / Математика.

На изучение учебного предмета «Математика» на повышенном уровне в X классе отводится 6 часов в неделю. Рекомендуется 4 часа в неделю отвести на изучение содержания алгебраического компонента и 2 часа в неделю на изучение содержания геометрического компонента.

Учебный материал алгебраического компонента для изучения на повышенном уровне в X классе содержится в учебном пособии «Сборник задач по алгебре» / "Зборнік задач па алгебры": учебное пособие для 10 класса учреждений общего среднего образования с русским (белорусским) языком обучения и воспитания (базовый и повышенный уровни) / И.Г. Арефьева, О.Н. Пирютко. – Минск : Народная асвета, 2020.

Учебный материал геометрического компонента для изучения на повышенном уровне в X классе содержится в учебном пособии «Геометрия»/ "Геаметрыя": учебное пособие для 10 класса учреждений общего среднего образования с русским (белорусским) языком обучения и воспитания (базовый и повыш. уровни) / Л.А. Латотин и [др.]. – Минск : Адукацыя і выхаванне, 2020.

При изучении учебного предмета «Математика» на повышенном уровне (X-XI классы) при проведении практикумов по решению задач класс делится на 2 группы. Деление класса на группы осуществляется в соответствии с пунктами 54, 57 Положения об учреждении общего среднего образования.

Для максимально успешного освоения учащимися содержания учебной программы по математике на повышенном уровне в X классе рекомендуется дополнительно организовать факультативные занятия с использованием учебной программы факультативных занятий «Векторы» для IX (X) классов, утвержденной Министерством образования Республики Беларусь в 2020 году. Для реализации указанной программы подготовлено учебное издание:

Казаков В.В. Векторы: пособие для 9-10 класса учреждений общего среднего образования с русским (белорусским) языком обучения (факультативные занятия). – Минск : Народная асвета, 2020.

Особенности воспитания и обучения одаренных детей

Понятие «одаренность» является производным от понятия «способности». Кратко **одаренность можно определить как высокий уровень развития и проявления способностей, общих или специальных.** Соответственно, говорят об общей или специальной одаренности (таланте). В современных теоретических концепциях одаренность рассматривается как сложное интегральное качество личности, включающее познавательную, эмоционально-потребностную и волевую сферы в их взаимосвязи. В структуре одаренности обычно выделяют: ненасыщаемую познавательную потребность, креативность, настойчивость Синтез этих свойств и приводит к высокому уровню развития и проявления тех или иных способностей.

Общая одаренность – высокий уровень развития общих способностей, определяющий сравнительно широкий диапазон деятельностей, в которых человек может достичь больших успехов. Установлено, что общая (умственная) одаренность является фундаментом всех специальных способностей, но представляет собой независимый от них фактор.

Выделяют также **«художественную одаренность» (музыкальную, изобразительную, сценическую и т.д.), общую интеллектуальную и академическую одаренность, творческую одаренность, психомоторную (спортивную) одаренность, социальную или лидерскую (организаторскую) одаренность, «практическую» одаренность и другие виды одаренности.**

Особенности развития познавательной сферы одаренного ребенка

Особенности психосоциального развития одаренного ребенка

1. Опережающее познавательное развитие: отличная память; большой словарный запас; широта восприятия; высокая концентрация внимания; повышенные математические способности; большое упорство в решении каких-либо задач; увлеченность тем или иным занятием.

2. Сверхчувствительность к проблемам.

3. Стремление к постоянному углублению в проблему.

4. Высокий уровень развития логического мышления.

5. Склонность к задачам дивергентного типа.

6. Оригинальность и гибкость мышления.

7. Легкость генерирования идей (продуктивность мышления).

8. Способность к прогнозированию

Положительные и отрицательные проявления

1. Повышенное стремление реализовать свои личностные возможности (самоактуализация).

2. Перфекционизм.

3. Самостоятельность, социальная автономность.

4. Склонность к лидерству и соревновательности.

5. Живое воображение, богатая фантазия.

6. Изобретательность, творчество.

7. Чувство юмора.

8. Чуткость к проявлениям несправедливости.

9. Чувствительность к невербальным сигналам окружающих.

1. Повышенная возбудимость и чувствительность.
2. Эмоциональный дисбаланс.
3. Нетерпеливость.
4. Преувеличенные страхи.
5. Склонность к самообвинению.
6. Предъявление завышенных требований к себе и окружающим.
7. Негативное самовосприятие, заниженная самооценка.
8. Недостаточная общительность со сверстниками, трудности в установлении социальных контактов.
9. Неравномерность развития отдельных способностей и личностных свойств.
10. Неприязнь к школе, протест против стандартных требований, если они кажутся ребенку бессмысленными или не отвечающими его интересам.

Наибольшие трудности в образовании одаренного ребенка вызывает **диссинхрония** его развития, понимаемая как неравномерность развития отдельных способностей и личностных свойств. Неравномерность развития проявляется, например, в несоответствии физического развития ребенка его умственным, творческим возможностям.

В систему диагностических методик одаренности обычно включают стандартизированные тесты на интеллектуальное развитие и творческие возможности. Эти методики (применяются в основном специалистами) дают возможность получения более или менее объективной оценки количественных показателей детской одаренности. Разрабатываются также методики диагностики детской одаренности для педагогов и родителей: опросники, схемы наблюдений, алгоритмы составления характеристик. Эти методики, как правило, направлены на выявление качественных сторон детской одаренности.

Основным методом изучения детской одаренности является наблюдение за ребенком в процессе его свободного взаимодействия с окружающей средой. Интенсивность деятельности ребенка в той или иной области, постоянство выбора им соответствующих занятий и материалов могут свидетельствовать о наличии у него одаренности в этой области.

Прогресс во всех сферах жизни общества невозможен без повышенного внимания к одаренным детям. В последнее время в Республике Беларусь это осознается на государственном уровне. Вместе с тем решение проблемы одаренных детей требует разработки для них специальных образовательных программ и соответствующих учебных, дидактических пособий. Очень важно подготовить и педагогов для работы с одаренными детьми.

В мировой образовательной практике предложены следующие пути образования одаренных детей: обучение этих детей в классах с более высоким уровнем и скоростью обучения; обучение их по индивидуальным программам.

Каковы пути развития способностей и одаренности в общеобразовательной школе? Во-первых, необходимо зафиксировать проявление ребенком тех или иных способностей, его сильных сторон. Проявление способностей обнаруживается прежде всего наблюдением за тем, как ученик занимается той или иной деятельностью: с интересом, с проявлением положительных эмоций, с увлеченностью. Продолжая заниматься этой деятельностью, ученик развивает и соответствующие способности. Во-вторых, и ученику, и педагогам надо быть готовыми к возможным трудностям, периодам остановки или даже регресса в развитии способностей. Следует помочь ребенку в преодолении возможных препятствий, поддержать его уверенность в своих силах. Рост успехов не всегда заметен и требует кропотливой терпеливой работы.

Существует два типа одаренности: «школьная одаренность», проявляющаяся в больших способностях к обучению, в том числе к быстрому усвоению материала, и одаренность творческая. Творческие способности проявляются в собственной работе мысли, в собственной позиции, нередко отличающейся от общепринятой. Для учителя творческий ученик не всегда удобен на уроке, так как он не умеет приспосабливаться к общим требованиям, имеет свое мнение и интересы.

Важно, чтобы учитель был готов к работе с одаренными детьми, понимал их психофизические особенности и образовательные потребности.

Неуспеваемость учащихся как комплексная проблема, пути ее решения

Особо следует рассмотреть проблему неуспевающих детей. **Под неуспеваемостью понимают итоговую (комплексную) неподготовленность учащихся по одному или нескольким предметам, которая диагностируется по завершении более или менее длительного законченного отрезка времени (учебная четверть, полугодие, учебный год).** Существуют разные подходы к классификации причин неуспеваемости.

В категорию неуспевающих, отстающих в учении детей чаще всего попадают:

– Дети с особенностями психофизического развития, прежде всего с задержкой психического развития (нарушением нормального темпа психического развития). Причинами неуспеваемости таких детей в массовой школе является незрелость сложных форм поведения, целенаправленной деятельности на фоне быстрой утомляемости, нарушений работоспособности и т. п. Детям с ЗПР свойственны: медленное восприятие и переработка информации, потребность в наглядно-практической опоре для более полного ее восприятия; недоразвитость словесно-логического мышления; объем и темп работы ниже, чем в норме; неустойчивое внимание, большая отвлекаемость, несамостоятельность и другие особенности.

– Социально и педагогически запущенные дети, которые в силу неправильного семейного воспитания или его отсутствия, неблагоприятных макросоциальных условий оказываются недостаточно подготовленными для обучения в школе.

– Ослабленные или функционально несозревшие для школьного обучения дети: дети с хроническими заболеваниями, с неразвитым произвольным вниманием, несформированной на надлежащем уровне волей, недостаточно развитой учебной мотивацией и т. п.

– Дети с незначительными отклонениями в различных функциональных системах, которые, сочетаясь между собой, приводят к чрезмерной возбудимости или даже агрессивности, двигательному беспокойству, гиперактивности. Нарушения поведения сочетаются нередко с трудностями в овладении письмом, чтением, счетом и т. п.

– Дети, в структуре личности которых возникли негативные психические процессы (угнетенное состояние, фрустрация, страх), вызванные непрофессиональными педагогическими действиями учителей и родителей и отрицательно сказывающиеся на учебной деятельности и межличностных отношениях детей.

– Дети с относительной неуспеваемостью, при которой происходит отставание реального уровня знаний от фактических способностей учащихся, вызванное, как правило, заниженными требованиями к ним.

– Нестандартные дети (одаренные, талантливые, тугодумы и др.).

Исследователь данной проблемы Л. С. Славина выделяет следующие группы неуспевающих школьников: 1) дети с неправильным отношением к учению; 2) усваивающие материал с трудом (низкая обучаемость); 3) дети, у которых не сформированы умения учебной работы; 4) учащиеся, не умеющие трудиться; 5) дети, у которых отсутствуют познавательные и учебные интересы. При этом неуспеваемость может носить эпизодический характер (ослаб контроль, возникли интересы вне школы и т.п.); быть частичной, но относительно стойкой по основным или отдельным предметам (невысокие способности ученика к данному предмету, отсутствие интереса к нему, конфликт с учителем и т.д.) или носить характер общего и глубокого отставания в учении по многим предметам в течение длительного времени.

К субъективным причинам неуспеваемости относят недостаточную готовность ребенка к школьному обучению (отсутствие необходимых знаний, умений, привычек); неверие ученика в собственные силы, низкая самооценка; повышенный конформизм (подчинение нормам поведения группы сверстников в противовес собственным устремлениям); оценка достижений ученика не по его реальному продвижению в учении, а в сравнении с успехами лучших учеников класса; отсутствие в арсенале педагогов методов, форм и средств дифференцированного обучения, а также методик обучения нестандартных детей.

Преодоление неуспеваемости в каждом конкретном случае индивидуально: начиная от помощи по преодолению трудностей в усвоении материала и возникших пробелов в знаниях до перевода в классы коррекции (выравнивания) и даже во вспомогательные (специальные) школы. К общим мерам можно отнести тщательную и продуманную диагностику причин явления, корректное их устранение, терпение, уважение к личности ребенка вне зависимости от его школьных успехов. Проверенными способами коррекции неуспеваемости является дифференцированное и индивидуальное обучение.

Коррекционную работу с детьми и подростками, имеющими отставание в учебной деятельности, следует начинать с диагностики (наблюдение, беседа, тестирование, изучение результатов учебной деятельности и другие методы) их познавательных возможностей, мотивации учебной деятельности, состояния их эмоционально-волевой сферы. С учетом результатов диагностики педагоги оказывают непосредственную (оперативную) помощь или опосредованную (длительного действия) помощь. Оперативная помощь носит единовременный, локальный характер и направлена на устранение пробелов в знаниях, способах мышления или деятельности.

Признаки отставания в учении

Затрудняется отвечать на вопросы по тексту учебника или по содержанию рассказа учителя,

1. Не может выделить главные теоретические положения, неправильно воспроизводит определение, формулировку закона, не может воспроизвести схему и т. п.

Надо

Повторить объяснение, максимально разбив его на части. Задать вопросы по основным содержательным частям изученного материала, опустив детали

2. Испытывает затруднения в понимании, запоминании, воспроизведении правил, формул, в применении их по образцу, в знакомой ситуации

Надо

Выполнить несколько однотипных заданий, постоянно возвращаясь к тексту этих правил или формул. После тренировки воспроизвести их. Повторно рассмотреть и проанализировать используемые на уроке схему, таблицы, опоры с объяснением того, что непонятно

3. Затрудняется в творческом применении изученного материала в незнакомой ситуации

Надо

Решить ряд задач, в которых используется изучаемый материал (понятие, закон), рассматривая альтернативные варианты решения

4. Не владеет общеучебными умениями и навыками (работа с учебником, справочной литературой, другими источниками учебной информации, составление плана, конспекта, выделение главного, связный пересказ и т.п.)

Надо

Разъяснять назначение данных умений; систематично и последовательно отрабатывать каждое умение; обеспечить алгоритмизацию отработки умений и навыков (давать точные предписания по выполнению элементарных операций и действий в определенной последовательности)

В целом устранение пробелов в знаниях и умениях осуществляется в ходе выполнения посильных индивидуальных заданий, подборе дополнительного материала, в конкретизации учебных заданий, в указании способов работы, предупреждающих ошибки, в совместном выполнении образцов заданий, в предупреждении о возможных трудностях в учебной деятельности и путях их преодоления. Опосредованная помощь направлена на устранение причин, порождающих неуспеваемость, на общее улучшение условий обучения. Важное направление работы по преодолению отставания в учении - это психолого-педагогическая подготовка к учебной деятельности, а также ее мотивация, убеждение в значимости знаний и умений. Важно, чтобы учащиеся проявили активное отношение к изучению учебного материала.

Лекция 3. Компоненты математического мышления. Качества математического мышления

Современной психологией и педагогикой выделены компоненты, составляющие «ядро» математического мышления:

1. **Пространственный** – понимание пространственных фигур, образов и их составляющих, память на пространственные образы, пространственные абстракции.

2. **Логический** – образование понятий абстракций, запоминание и самостоятельное выделение общих понятийных связей, заключений и доказательств по правилам формальной логики, образование числовых представлений, память на числовые решения.

3. **Символический** – понимание и запоминание символов, операции с ними.

К основным компонентам математического мышления относят:

Конкретное мышление. Специфика математического мышления проявляется не только в том, что ему присущи все качества научного мышления, но и в том, что для него характерны особые формы (разновидности проявления мышления), которые в ходе их описания обычно выделяются специальными терминами: **конкретное и абстрактное мышление, функциональное мышление, интуитивное мышление** и т.п.

Конкретное (предметное) мышление – это мышление в тесном взаимодействии с конкретной моделью объекта.

Различаются две формы конкретного мышления:

1) неоперативное (наблюдение, чувственное восприятие);

2) оперативное (непосредственные действия с конкретной моделью объекта).

Неоперативное конкретное мышление чаще всего проявляется у дошкольников и младших школьников, которые мыслят лишь наглядными образами, воспринимая мир лишь на уровне представлений.

В процессе обучения математике в среднем и старшем звене школы воздействие на неоперативное конкретное мышление учащихся проявляется при использовании различных наглядных пособий, диафильмов, кино и телевидения.

Ж. Пиаже утверждает (и это утверждение согласуется с мнениями многих советских психологов), что **оперативное конкретное мышление** является более действенным для подготовки детей к овладению абстрактными понятиями. Самостоятельная мыслительная деятельность выделяется именно по мере развития практической деятельности, лежащей в основе развивающейся психики ребенка.

Конкретное мышление играет большую роль в образовании абстрактных понятий, в конструировании особых свойств математического мышления, развитие которых способствует познанию математических абстракций.

Поэтому психологи рекомендуют широко использовать различные дидактические пособия, с которыми школьники могут действовать непосредственно в процессе обучения. В целях развития у учащихся этого типа мышления, помимо традиционного применения наглядных средств в обучении, необходимо учить школьников общим рассуждениям на конкретных (частных) примерах.

В старших классах мера конкретного в процессе познания убывает, в то время как само конкретное меняет свою форму, на смену конкретному приходит абстрактное, которое должно выступать как целесообразное обобщение конкретного.

Особенно полезно использовать это положение при введении в новую тему. Содействуя развитию у учащихся неоперативного конкретного мышления, полезно помнить о том, что постоянное обращение к наглядным представлениям может иногда оказаться вредным. Так, например, чрезмерное увлечение наглядностью преподавания начал стереометрии может затормозить формирование у учащихся пространственного воображения.

Абстрактное мышление. Абстрактное мышление тесно связано с мыслительной операцией, называемой абстрагированием. Абстрагирование имеет двойственный характер: негативный (отвлекаются от некоторых сторон или свойств изучаемого объекта) и позитивный (выделяют определенные стороны или свойства этого же объекта, подлежащие изучению).

Поэтому, **абстрактным мышлением называют мышление, которое характеризуется умением мысленно отвлечься от конкретного содержания изучаемого объекта в пользу его общих свойств, подлежащих изучению.**

Абстрактное мышление может проявляться в процессе обучения математике:

а) в явном виде. Например, рассматривая в курсе геометрии понятие геометрического тела, мы явно отвлекаемся от и всех свойств реальных тел, кроме формы, размеров и положения в пространстве;

б) в неявном виде. Например, при счете предметов. конкретного множества мы неявно отвлекаемся от свойств каждого; отдельного предмета, полагая, что все предметы одинаковы (тождественны).

Абстрактное мышление можно подразделить на:

1) аналитическое мышление;

2) логическое мышление;

3) пространственное мышление.

1. Аналитическое мышление характеризуется четкостью отдельных этапов в познании, полным осознанием, как его содержания, так и применяемых операций. Оно проявляется в процессе обучения через:

а) аналитический способ доказательства теорем и решения задач (чтобы узнать, надо знать);

б) решение задач методом уравнения;

в) исследование результата решения некоторой задачи и т.п.

В свою очередь, побуждая школьников к математической деятельности, учитель может способствовать развитию у учащихся аналитического мышления.

Аналитическое мышление не выступает изолированно от других видов абстрактного мышления; на отдельных этапах мышления оно может лишь превалировать над теми видами, с которыми оно выступает совместно. Этот вид мышления тесно связан с мыслительной операцией анализа.

2. Логическое мышление характеризуется обычно умением выводить следствия из данных предпосылок, умением вычленять частные случаи из некоторого общего положения, умением теоретически предсказывать конкретные результаты, обобщать полученные выводы и т.п. Известно, что развитие логического мышления школьников в процессе обучения математике является предметом особой заботы учителей и методистов. В процессе обучения математике логическое мышление проявляется (и развивается) у учащихся, прежде всего в ходе различных математических выводов: индуктивных (полная индукция) и дедуктивных, в ходе доказательств теорем, обоснований решения задачи т.п.

3. Пространственное мышление характеризуется умением мысленно конструировать пространственные образы или схематические конструкции изучаемых объектов и выполнять над ними операции, соответствующие тем, которые должны были быть выполнены над самими объектами.

Известно, что невысокий уровень развития пространственного воображения и мышления, учащихся обычно является для них камнем преткновения при изучении стереометрии, так как оно не формируется сразу; для его успешного развития обычно требуется кропотливая предварительная подготовка учащихся. В определенной степени развитию пространственного мышления способствует использование в обучении таких технических средств обучения, как кинофильмы, диафильмы, диапозитивы, кодоскоп.

Широкое применение наглядных пособий при изучении стереометрии, конечно, в какой-то мере способствует развитию у учащихся пространственного мышления (и воображения).

С этим типом мышления тесно связана способность учащихся выразить при помощи, какой-либо схемы тот или иной математический объект, операции или отношения между объектами. Схемы, которые при этом составляются, могут иметь самый разнообразный характер.

Интуитивное мышление

«Интуиция (лат. intuito – пристальное всматривание) – особый способ познания, характеризующийся непосредственным постижением истины. К области интуиции принято относить такие явления, как внезапно найденное решение задачи, долго не поддававшейся логическим усилиям, мгновенное нахождение единственно верного способа избежать опасности, быстрое и безотчетное отгадывание замыслов или мотивов поведения человека и т.д.» В современной педагогике специфику интуитивного мышления в его отличии от аналитического мышления пытался рассмотреть Дж. Брунер. «Можно более конкретно охарактеризовать аналитическое и интуитивное мышление. Аналитическое мышление характеризуется тем, что его отдельные этапы отчетливо выражены и думающий может рассказать о них другому человеку. Такое мышление обычно осуществляется с относительно полным осознанием как его содержания, так и составляющих его операций...

В противоположность аналитическому, интуитивное мышление характеризуется тем, что в нем отсутствуют четко определенные этапы. Оно имеет тенденцию основываться, прежде всего, на свернутом восприятии всей проблемы сразу. Человек достигает ответа, который может быть правильным или ошибочным, не осознавая при этом (если вообще такое осознание имеет место) тот процесс, посредством которого он получил искомый ответ. Обычно интуитивное мышление основывается на знакомстве с основными знаниями в данной области и с их структурой, и это дает ему возможность осуществляться в виде скачков, быстрых переходов, с пропуском отдельных звеньев; эти особенности требуют проверки выводов аналитическими средствами – индуктивными или дедуктивными».

В процессе традиционного школьного обучения математике иногда основное внимание уделяется точному воспроизведению школьником полученных им знаний. Поэтому нередко своеобразный ответ одаренного учащегося ценится меньше, чем хорошо заученный ответ другого. В первом случае, хотя учащийся не в состоянии четко изложить ход своих мыслей, он приходит к правильному результату, показывая хорошее умение применять свои знания, во втором – учащийся много и правильно говорит, но по существу не умеет пользоваться понятиями, выраженными в его речи.

Геометрическое воображение, или, как говорят, «геометрическая интуиция», играет большую роль при исследовательской работе почти во всех разделах математики, даже самых отвлеченных. В школе обычно с особенным трудом дается наглядное представление пространственных фигур. Надо, например, быть уже очень хорошим математиком (по сравнению с обычным школьным уровнем), чтобы, закрыв глаза, без чертежа ясно представить себе, какой вид имеет пересечение поверхности куба с плоскостью, проходящей через центр куба и перпендикулярной одной из его диагоналей».

В процессе обучения математике следует всячески поощрять у учащихся желание и способность к догадке. При этом следует каждый раз обращать внимание учащихся на то, что каждая гипотеза, выдвинутая при помощи догадки, нуждается в проверке на правдоподобность и в обосновании (если она не будет опровергнуты каким-либо примером).

Интуитивное мышление нередко проявляется в процессе умозаключений по аналогии.

Функциональное мышление, характеризуемое осознанием динамики общих и частных соотношений между математическими объектами или их свойствами (и умением это использовать), ярко проявляется в связи с изучением одной из ведущих идей школьного курса математики – идеи функции.

Наиболее характерными чертами функционального мышления являются:

а) представление математических объектов в движении, изменении;

б) операционно-действенный подход к математическим фактам, оперирование причинно-следственными связями;

в) склонность к содержательным интерпретациям математических фактов, повышенное внимание к прикладным аспектам математики.

Одним из средств развития функционального мышления могут служить системы задач на математическое выражение и исследование конкретных ситуаций с ярко выраженным «функциональным содержанием».

В общем случае решение такой задачи содержит в себе три момента:

1. В изучаемом явлении выделяют основные, существенные связи, отбрасывая второстепенные, несущественные детали, вводят различного рода упрощения и допущения.

2. Связав объекты, выступающие в изучаемом явлении, с числами или геометрическими образами, переходят от зависимостей между этими объектами к математическим соотношениям – формулам, таблицам, графикам.

3. Полученные математические соотношения исследуют, пользуясь уже известными, выработанными и изученными математическими правилами действий над ними, а результаты исследования истолковывают в терминах и понятиях изучаемого явления.

Известно также, что наряду с задачей развития **логического мышления**, составляющей одну из задач обучения математике, в школьном обучении должна решаться не менее важная, хотя и более общая задача - задача воспитания логической грамотности. Содержание понятия «логическая грамотность» доставляют такие логические знания и умения, которые дают возможность для успешного обучения в школе, для дальнейшего обучения и самообразования, для успешной общественно полезной практической деятельности и повседневной жизни. Исследования Л. Никольской показали, что от выпускников средней школы требуется овладение следующими логическими знаниями и умениями: умения определять известные понятия, классифицировать, понимать смысл основных логических связок, распознавать логическую форму математических предложений, доказывать утверждения и обнаруживать логические ошибки, организовывать свою деятельность в соответствии с внутренней логикой ситуации, мыслить критически, последовательно, четко и полно, владеть основными мыслительными приемами. Нетрудно обнаружить, что в понятие логической грамотности вкладываются не только соответствующие знания и умения, но и сформированность многих качеств научного мышления. Поэтому задача воспитания логической грамотности правомерно рассматривается как важный элемент общей культуры мышления.

Развитие же логического мышления учащихся в процессе обучения математике есть, прежде всего, развитие **теоретического мышления**, которое представляет собой один из важнейших аспектов развития диалектического мышления. В самом деле, не только в ходе обучения и развития, но и в ходе воспитания, и в особенности в процессе формирования диалектико-материалистического мировоззрения школьников, предполагается целенаправленная работа учителя по развитию логического мышления, основанная на самом содержании учебного материала и его методологии. Конечным итогом обучения любому предмету (в том числе и математике) должно быть подведение учащихся к наиболее общим философским выводам о видах и формах существования материи. При этом важно, чтобы эти выводы и обобщения были сделаны самими учащимися в процессе размышления над логикой тех или иных посылок и следствий, в процессе изучения конкретного учебного предмета, под руководством учителя.

В состав математического мышления включаются мыслительные умения, адекватные известным методам научного познания. В

практике обучения математике они выступают не столько как методы математической деятельности, сколько как комплекс средств, необходимых для усвоения учащимися математики и развития у них качеств, присущих математическому мышлению. Эти мыслительные умения могут проявиться (и формироваться) в обучении на уровнях эмпирического и научно-теоретического мышления.

Наряду со спецификой математического мышления справедливо различать специфику физического, технического, гуманитарного и других видов мышления. Именно в силу этой специфики в процессе познания конкретных наук (и обучения конкретным учебным предметам) активизируется развитие того или иного компонента мышления вообще, усиливается роль того или иного приема мыслительной деятельности, того или иного метода познания.

Формирование математического мышления школьников предполагает, таким образом, целенаправленное развитие на предмете математики всех качеств, присущих естественно-научному мышлению, комплекса мыслительных умений, лежащих в основе методов научного познания, в органическом единстве с формами проявления мышления, обусловленными спецификой самой математики, с постоянным акцентом на развитие научно-теоретического мышления.

В процессе обучения математике естественно уделять особое внимание развитию у учащихся качеств мышления, специфичных для мышления математического. При условии, что проблеме развития мышления школьников при изучении других учебных предмета будет уделено должное внимание, опасность одностороннего развития мышления школьников не возникает. Развивающее обучение, осуществляемое при изучении других учебных предметов, неизбежно приведет к усилению развития тех компонентов мышления, которые с точки зрения математического образования считаются второстепенными.

Органическое сочетание и повышенная активность разнообразных компонентов мышления вообще и различных его качеств проявляются в особых способностях человека, дающих ему возможность успешно осуществлять деятельность творческого характера в самых разнообразных областях науки, техники и производства. Так называемые **математические способности - это определенная совокупность некоторых качеств творческой личности, сформированных (и применяемых) в процессе математической деятельности.** Совокупность способностей, присущих творческой личности, реализуемых в процессе мышления, называют **творческим мышлением.**

В последнее время в образовании уделяется повышенное внимание вопросу о развитии **дивергентного мышления** учащихся и их способности решать нестандартные задачи. Способность взаимодействовать в современном обществе и ориентироваться в постоянном потоке меняющейся информации являются важными составляющими для развития самостоятельного, критического и творческого мышления. Современные условия развития общества неразрывно связаны с постоянными изменениями, которые затрагивают все сферы жизни.

Понятие конвергентного мышления в педагогике и психологии

В психологии **мышление относят к высшим познавательным психическим процессам; его суть заключается в порождении нового знания на основе творческого отражения и преобразования человеком действительности. Логическое мышление – это мыслительный процесс, направленный на решение конкретных задач при помощи применения и анализа полученных ранее знаний.** Психолог Р.С. Немов рассматривал мышление как совокупность последовательных логических операций:

1) анализ – мысленное дробление предмета или явления на определенные составляющие, благодаря которым мы выделяем различные доказательства, объяснения, теории и гипотезы;

2) синтез – мысленное соединение отдельных частей предметов и явлений в единое целое;

3) обобщение – это объединение и связывание предметов и явлений между собой;

4) сравнение – это процесс установления сходства и различия между предметами и явлениями реального мира;

5) конкретизация – это представление чего-либо единичного, что соответствует тому или иному понятию или обобщённому положению.

Американский психолог Джой Гилфорд вводит новое понятие – конвергентное мышление. **«Под конвергентным (логическим) мышлением понимается поиск единственного решения. Если говорить коротко, под конвергентным мышлением понимается линейное, логическое мышление, предполагающее одно единственное правильное решение проблемы.** Именно этот тип мышления Джой Гилфорд связывает с показателем IQ и классическим методом преподавания». По мнению психолога Дж. Гилфорда, **конвергентное (логическое) мышление основывается на аналитическом рассуждении, которое предполагает наличие четкой и конкретной логической проблемы.** Согласно этому определению, конвергентное мышление при решении проблемы интересуют условия, принципы и правила, основанные на рассуждениях. Данный тип мышления выражается в организации мыслительной операции, которая основывается на четких выводах, доказуемости и корректности. Конвергентное (логическое) мышление является важным этапом в процессе познания окружающей действительности и развития личности. Способность логически мыслить позволяет человеку осознавать действительность, находить и определять связи в предметах и явлениях, делать умозаключения, решать различные практические и научные задачи, формулировать и проверять гипотезы, доказывать и опровергать все те идеи, которые необходимы для успешной деятельности человека в любом возрасте.

Понятие «дивергентное мышление» также ввел американский психолог Джой Гилфорд. Он рассматривал его как более совершенное мышление, относящееся к наиболее продуктивным формам мышления. Дж. Гилфорд определил, что способность к дивергентному мышлению связана с развитием в нем следующих пяти способностей:

1) беглость мышления – способность быстро генерировать бесконечный поток идей и возможных решений;

2) гибкость мышления – способность находить и применять разнообразные подходы и стратегии при решении задач;

3) оригинальность мышления – способность создавать новые, уникальные и необычные идеи и решения. Именно эту способность Дж. Гилфорд считал наиболее значимой;

4) разработанность мышления – способность создавать новые идеи адекватно поставленной задаче;

5) систематичность мышления – способность охватить все проблемы одним взглядом.

По мнению американского психолога Эрика Фромма, **дивергентное мышление – это альтернативное мышление, в отличие от логики оно проявляется в задачах, имеющих одно условие и бесконечное множество решений.**

Э.П. Торренс определил **дивергентное мышление как тип мышления, который способствует поиску неординарных идей, направленных на развитие исследовательского интереса и нестандартных форм деятельности.** Э.П. Торренс сравнивает дивергентное мышление с **креативностью, которая включает в себя следующие этапы:**

1) повышенная чувствительность к проблемам;
2) нахождение и определение проблемы;
3) поиск решения проблемы на основе выдвинутых предположений;
4) проверка и опровержение выдвинутых предположений;
5) формулировка выводов и результатов решения.

М.А. Холодная проводит параллель между дивергентным и творческим мышлением. Отличительная особенность творчества – это выход за рамки системы, нахождение или создание нового продукта, поиск новых решений.

К.В. Дрязгунов описывает дивергентное мышление в качестве катализатора развития исследовательского поиска, способности анализа материала и развития новых направлений по нему. Он выделил следующие **критерии дивергентности: 1) целостность и системность; 2) рефлексивность и оценка; 3) инновационность; 4) критичность; 5) гибкость и продуктивность.**

Исходя из анализа о понятии «дивергентное мышление», мы наблюдаем то, что многие ученые отождествляют данный тип мышления с понятием «креативность» и «творчество». Но так ли это на самом деле? С одной стороны, и дивергентность, и творчество, и креативность способствуют развитию исследовательского поведения. С другой стороны, в отличие от креативности и творчества, дивергентное мышление состоит из некоторого множества идей, большая часть из которых может оказаться банальной и непродуктивной. В результате мы наблюдаем, что человек, у которого развито дивергентное мышление, пытается найти множество решений одной и той же задачи. Такие личности свободны от стереотипов и способны придумать интересные и нестандартные идеи, что так важно и актуально на сегодняшний день. Таким образом, дивергентным можно назвать особый вид мышления, которым обладают творческие личности.

Взаимосвязь конвергентного и дивергентного мышления при решении задач. При рассмотрении понятий «конвергентное и дивергентное мышление» возникает вопрос: «Что же важнее – конвергентное или дивергентное мышление?». Для ответа на данный вопрос для начала разберемся в механизме и схеме решения задач. ***С точки зрения конвергентного мышления, процесс решения задач заключается в четком и логическом изучении проблемы, стоящей перед человеком, рассмотрение которой происходит за счет таких операций, как анализ, синтез, абстрагирование, сравнение, обобщение, классификация и категоризация.***

Аристотель утверждал, что мыслительная система основана на следующих операциях:

- анализе;
- суждениях;
- доводах;
- критике.

Хотя данная схема и способна решить множество наших задач, на практике все-таки существуют проблемы, причину которых невозможно найти, основываясь на своих знаниях и прошлом опыте. Именно на этом этапе возникает потребность искать, куда идти дальше, оставив размышления о причине. Большинство наших проблем не могут быть решены с помощью одной простой логики, поэтому мы нуждаемся в творческом подходе.

Конвергентному мышлению недостает творческой и созидательной энергии, на помощь нам приходит дивергентное мышление. С другой стороны, совершенно игнорировать конвергентное мышление тоже нельзя. Ведь выдвигая бесконечное число идей, можно так и не определиться, какое из них поможет нам в решении поставленной задачи. Поэтому дивергентное мышление в отрыве от конвергентного невозможно и будет совершенно непродуктивным. **В результате взаимодействия конвергентного и дивергентного мышления процесс решения задач будет выглядеть следующим образом:**

1. ***Постановка цели. На данном этапе человек решает, какой результат он хочет получить в итоге.***
2. ***Анализ ситуации – процесс осознания проблемы и потребность в поиске решения.***
3. ***Поиск вариантов – это этап поиска возможных решений проблемы, а также разработка альтернативных и новых идей.***
4. ***Выбор оптимального решения – на данном этапе человек принимает решение и вырабатывает линию своего поведения.***
5. ***Деятельность – заключительный этап, основанный на воплощении идеи в жизнь и реализации принятого решения.***

Анализируя данную схему, мы наблюдаем, что на этапах 1, 2, 4 и 5 задействованы компоненты конвергентного мышления, а на третьем этапе человек подключает творческий поиск и исследовательские способности, запуская механизмы дивергентного мышления. Данная схема демонстрирует взаимосвязь конвергентного и дивергентного мышления при решении задач. **Креативное мышление играет большую роль в развитии человека и общества. Люди, обладающие способностью находить нестандартные решения, добиваются большего успеха в жизни. Их секрет заключается в умении мыслить многомерно.**

Итак, **конвергентным называется тип мышления, направленный на решение задач с помощью четкого алгоритма действий.**

Дивергентное мышление предполагает многовариантность действий в процессе поиска решения задачи. Конечно же, такой тип является более эффективным.

Большинство людей обладает конвергентным мышлением, поскольку мыслить по-другому их никто не обучает. Вся система образования направлена на развитие именно конвергентного направления. Человека учат решать задачи по четкому поэтапному алгоритму, когда существует ответ на задачу и последовательный ход решения. Успеваемость ученика оценивается по скорости, точности и правильности прохождения всех этапов решения. Такой подход идеален для последовательных людей, но совершенно не подходит для творческих натур. Именно поэтому существует немало случаев, когда отстающие ученики, окончив школу и получив возможность решать задачи, не подстраиваясь под стандартные алгоритмы, становились настоящими гениями. К таким личностям можно отнести Альберта Эйнштейна и Уинстона Черчилля. **К сожалению, система образования ограничивает творческое мышление, пренебрегая его развитием.** Подавляющее большинство тестов на определение уровня интеллекта построено таким образом, чтобы задействовать только конвергентное (линейное) мышление. Люди, у которых развито конвергентное мышление, видят только одно, единственно верное решение задачи. Их знания и опыт направлены на поиск этого решения. Такие люди среди множества попадающей к ним информации отбирают ту, которая подтверждает известные факты, и отбрасывают ту, которая эти факты опровергает, даже не пытаясь разобраться и найти что-то новое. Ярким примером проявления конвергентного мышления является общеизвестная теория Дарвина о том, что человек якобы произошел от обезьяны. Многие люди согласны с этим и даже не подозревают о том, что на самом деле Дарвин не утверждал, что обезьяна является предком человека. Он только предположил, что у человека и обезьяны существует общий предок. Однако большинство людей просто согласились с распространенным мнением, даже не удосужившись изучить саму теорию Дарвина и вникнуть в ее суть, хотя труд ученого «Происхождение видов» можно найти практически в любой библиотеке. И таких примеров великое множество.

Человек, у которого развиты способности к дивергентному мышлению, старается найти не один, единственно верный путь решения, а множество путей решения одной и той же задачи. Такой человек свободен от стереотипов, поэтому может придумать немало интересных и нестандартных идей. Таким образом, **дивергентным можно назвать мышление, работающее в разных направлениях, или параллельно.** Подмечено, что такая особенность чаще всего встречается у творческих людей. **Дивергентный тип характеризуется следующими особенностями:**

быстрота восприятия (человек способен выдавать много идей за короткий промежуток времени);

образность (умение оперировать образами);

гибкость (человек легко может переходить от одной точки зрения к другой);

чувствительность (человек тонко чувствует и замечает малейшие нюансы, видит необычное в обычном);

оригинальность и креативность (склонность к созданию нестандартных идей).

Дивергентный тип мышления можно и нужно развивать. Для этого существует несколько простых методов.

1. Нахождение новых решений. Необходимо приучить себя в каждой ситуации искать не одно решение, а несколько.

2. Поиск нестандартных решений. В процессе решения задачи нужно постараться отбросить стереотипы и взглянуть на проблему с неожиданного ракурса, придумать решение, которое не пришло бы в голову большинству людей.

3. Размышление над проблемой. Размышляя над поставленной задачей и не останавливаясь, даже если верное решение найдено, можно прийти к неожиданным выводам. Важно также все теоретические задумки связывать с практическим опытом.

4. Вопросы. Поиск решения будет наиболее удачным, если выстраивать его по принципу «вопрос-ответ». В процессе решения задачи необходимо задавать вопросы, относительно разных аспектов исследуемого объекта и искать конкретные ответы на них.

5. Решение задач методом мозгового штурма. Для коллективного поиска решения эффективнее всего использовать метод мозгового штурма, позволяющий активировать творческое мышление.

Историческая и логическая последовательности изучения числовых множеств. Общий принцип расширения числовых множеств. Общая схема методики изучения новых чисел. Методика повторения и дальнейшего изучения натуральных чисел.

«Понятие числа» – одна из самых важных и самых сложных тем школьного курса. Формирование понятия «число» происходит на протяжении всего курса обучения учащихся.

Число – одно из основных понятий математики, используемое для количественной характеристики, сравнения, нумерации объектов и их частей.

Письменными знаками для обозначения чисел служат цифры, а также символы математических операций.

Возникнув ещё в первобытном обществе из потребностей счёта, понятие числа с развитием науки значительно расширилось.

Со временем начинают применяться действия над числами, сначала сложение и вычитание, позже умножение и деление. В результате длительного развития сложилось представление об отвлечённом характере этих действий, о независимости количественного результата действия от рассматриваемых предметов, о том, что, например, два предмета и семь предметов составляют девять предметов независимо от характера этих предметов. Когда стали разрабатывать правила действий, изучать их свойства и создавать методы решения задач, тогда начинает развиваться **арифметика – наука о числах.** Потребность в изучении свойств чисел как таковых проявляется в самом процессе развития арифметики, становятся понятными сложные закономерности и их взаимосвязи, обусловленные наличием действий, выделяются классы чётных и нечётных чисел, простых и составных чисел и так далее. Тогда появляется раздел математики, который сейчас называется **теория чисел.** Когда было замечено, что натуральные числа могут характеризовать не только количество предметов, но и ещё могут характеризовать порядок предметов, расположенных в ряд, возникает понятие порядкового числа. Вопрос об обосновании понятия натурального числа, столь привычного и простого, долгое время в науке не ставился. Только к середине XIX века под влиянием развития математического анализа и аксиоматического метода в математике, назрела необходимость обоснования понятия количественного натурального числа. Введение в употребление дробных чисел было вызвано потребностью производить измерения и стало исторически первым расширением понятия числа.

В Средние века были введены отрицательные числа, с помощью которых стало легче учитывать долг или убыток. Необходимость введения отрицательных чисел была связана с развитием алгебры как науки, дающей общие способы решения арифметических задач, независимо от их конкретного содержания и исходных числовых данных. Необходимость введения в алгебру отрицательного числа возникает уже при решении задач, сводящихся к линейным уравнениям с одним неизвестным. Отрицательные числа систематически применялись при решении задач ещё в VI–XI веках в Индии и истолковывались примерно так же, как это делается в настоящее время.

После того, как Декарт разработал аналитическую геометрию, позволившую рассматривать корни уравнения как координаты точек пересечения некоторой кривой с осью абсцисс, что окончательно стёрло принципиальное различие между положительными и отрицательными корнями уравнения, отрицательные числа окончательно вошли в употребление в европейской науке.

Ещё в Древней Греции в геометрии было совершено принципиально важное открытие: не всякие точно заданные отрезки соизмеримы, другими словами, не у каждого отрезка длина может быть выражена рациональным числом, например, сторона квадрата и его диагональ. В «Началах» Евклида была изложена теория отношений отрезков, учитывающая возможность их несоизмеримости. В Древней Греции умели сравнивать такие отношения по величине, производить над ними арифметические действия в геометрической форме. Хотя греки обращались с такими отношениями, как с числами, они не осознали, что отношение длин несоизмеримых отрезков может рассматриваться как число. Это было сделано в период зарождения современной математики в XVII веке при разработке методов изучения непрерывных процессов и методов приближённых вычислений. И. Ньютон во «Всеобщей арифметике» даёт определение понятия действительного числа: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу». Позже, в 1870-х годах, понятие действительного числа было уточнено на основе анализа понятия непрерывности Р. Дедекиндом, Г. Кантором и К. Вейерштрассом.

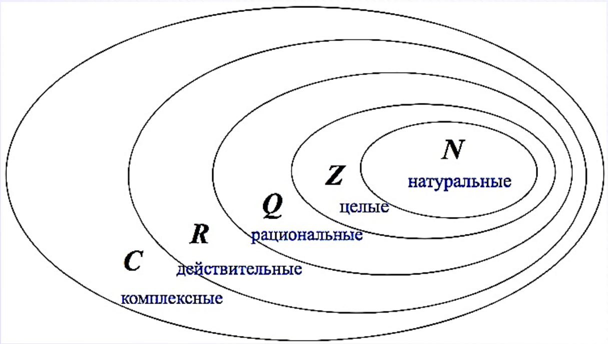
С развитием алгебры возникла необходимость введения комплексных чисел, хотя недоверие к закономерности пользования ими долго сохранялось и отразилось в сохранившемся до сих пор термине «мнимое». Уже у итальянских математиков XVI века (Дж. Кардано, Р. Бомбелли), в связи с открытием алгебраического решения уравнений третьей и четвёртой степеней, возникла идея комплексного числа. Дело в том, что даже решение квадратного уравнения, в том случае, если уравнение не имеет действительных корней, приводит к действию извлечения квадратного корня из отрицательного числа. Казалось, что задача, приводящаяся к решению такого квадратного уравнения, не имеет решения. С открытием алгебраического решения уравнений третьей степени обнаружилось, что в том случае, когда все три корня уравнения являются действительными, по ходу вычисления оказывается необходимо выполнить действие извлечения квадратного корня из отрицательных чисел.

После установления в конце XVIII века геометрического истолкования комплексных чисел в виде точек на плоскости и установления несомненной пользы от введения комплексных чисел в теории алгебраических уравнений, в особенности после знаменитых работ Л. Эйлера и К. Гаусса, комплексные числа были признаны математиками и начали играть существенную роль не только в алгебре, но и в математическом анализе. Значение комплексных чисел особенно возросло в XIX веке в связи с развитием теории функций комплексного переменного.

В 3 в. до н. э. Евклид определил **число как «множество, составленное из единиц»**. Так же понимал число и Л.Ф. Магницкий. Но, в 18 веке применение этого определения встретилось с рядом трудностей. Согласно этому определению, 0; 1; дробь; иррациональные числа – не являются числами. Поэтому И. Ньютон вводит следующее определение числа: «число есть отношение одной величины к другой, того же рода, принятой за единицу». Изучение понятия «непрерывность» привело к уточнению понятия «иррациональное число». (Этим занимались Р. Дедекинд, Г. Кантор, К. Вейерштрасс), а развитие теории уравнения привело к понятию комплексного числа. В 19 веке в связи с развитием аксиоматического метода и разработкой основ математического анализа Г.Кантор дал определение натурального числа на основе понятия множество и равномощность, а Д. Пеано– основе сформулированных им аксиом. Дальнейшее обобщение понятия числа и развитие учения о числе принадлежит Г. Кантору.

Особую важность имеют множества натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел и т.п., для них были приняты свои обозначения:

N – множество всех натуральных чисел;
Z – множество целых чисел;
Q – множество рациональных чисел;
J – множество иррациональных чисел;
R – множество действительных чисел;
C – множество комплексных чисел.



Исторически числовые множества расширялись следующим образом: $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N+0}\rightarrow\mathbf{a/\text{в}}\rightarrow\mathbf{Z}\rightarrow\mathbf{Q}\rightarrow\mathbf{R}$., в современной математике порядок изучения чисел другой: **N, Z, Q, R, C.**

Приверженность школы исторической последовательности объясняется тем, что понятие «дробь» доступнее учащимся, чем понятие «отрицательное число». (Историко – генетический метод введения понятия). Совершенствование методики преподавания позволило изучать отрицательные числа не в 7, а в 6 классе. Большую роль в этом сыграли работы Л.В. Занкова, П.Я. Гальперина, В.В. Давыдова. В рамках реформы образования 1967г. историческая схема развития числа была заменена на логическую (то есть была предпринята попытка сделать предметом изучения не число, а множества). Однако в ходе дальнейшей реформы был учтен действительный уровень развития логического мышления учащихся, поэтому пришлось отказаться от теоретико–множественного построения курса и чрезмерной строгости изложения материала. В отношении учения о числе это выразилось в некотором компромиссе – сочетании исторической и логической схем развития понятия «число».

В основе построения нового числового множества лежит *принцип расширения*, формулируемый следующим образом: «Пусть множество $\boldsymbol{A}$ расширяется до множества $\boldsymbol{B}$, тогда необходимо выполнение следующих условий:

1. $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$.
2. Все операции и отношения, выполняемые в $\boldsymbol{A}$, должны выполнятся в $\boldsymbol{B}$.
3. В $\boldsymbol{B}$ выполняется та операция, которая не выполняется в $\boldsymbol{A}$.
4. Расширение идет по минимальности. (Нельзя $\boldsymbol{N}$ сразу расширить до $\boldsymbol{Q}$).

В школьном курсе число будет считаться введенным, если:

• дано определение этого числа (часто описательного характера), вытекающее из мотивирования необходимости его введения;

• для введенных чисел определяются отношения: $=$, $>$, $<$;

• дается определение алгебраических операций на множестве этих чисел;

• показывается, что в новом множестве выполнима «новая» операция.

Учебной *целью* изучения числовой линии является:

- формирование у учащихся знаний о числе и действий с ним;

- формирование вычислительных умений и их использование для решения практических задач;
- формирование вычислительной алгоритмической культуры.

В школьном курсе изучение отдельных числовых систем носит *концентрический* и *многоэтапный* характер. Понятие числа - это сложное понятие, усвоить которое можно лишь, изучив каждый вид чисел в отдельности и поняв процесс перехода от одного вида числа к следующему.

К понятию числа в математике существует *два подхода*: аксиоматический и конструктивный. В школьном курсе присутствуют элементы каждого из них.

Характеристика числовых множеств

N	**Z**	**Q**	**R**
Бесконечное	Бесконечное	Бесконечное	Бесконечное
Упорядоченное	Упорядоченное	Упорядоченное	Упорядоченное
Дискретное	Дискретное	Дискретное	Всюду плотное и полное
С начальным элементом, но без конечного элемента	Без начального и конечного элементов	Без начального и конечного элементов	Без начального и конечного элементов
Замкнутое относительно операций «+», и «*», не замкнутое относительно операций «-» и «/»	Замкнутое относительно операций «+»,«*» и «-», не замкнутое относительно операции «/»	Замкнутое относительно операций «+», «*», «-», «/» (кроме 0)	Замкнутое относительно операций «+», «*», «-», «/» и операции сходимости любой сходимой последовательности (непрерывное)

Схема расширения числового множества

Исходное множество	**Причины расширения исходного множества**	**Присоединяемое множество**	**Расширенное числовое множество**
Натуральные числа	Вычитание равных чисел	Нуль	Целые неотрицательные числа
Целые неотрицательные числа	Вычитание из меньшего числа большего	Целые отрицательные числа	Целые числа
Целые числа	Деление нацело не всегда возможно	Дробные числа	Рациональные числа
Рациональные числа	Извлечение корня из любого положительного числа	Иррациональные числа	Действительные числа
Действительные числа	Извлечение корня из отрицательного числа	Мнимые числа	Комплексные числа

Исходя из психологии ребенка, математических закономерностей и исторического развития математики при введении нового для учащихся числового множества учителю совместно с учащимися нужно выполнить ряд действий:

1. На специально подобранных задачах установить недостаточность известного на данном этапе числового множества для решения этой задачи и сделать вывод о необходимости расширения множества путем введения новых чисел.

2. Показать, что невозможность решения данных задач связана с невозможностью выполнения какого-либо действия в известном числовом множестве. Сделать вывод о необходимости расширения старого множества путем добавления таких новых чисел, чтобы в расширенном множестве выполнялись действия, которые раньше были невыполнимы или не всегда выполнимы.

3. Ввести новое число, дать ему название и определение.

4. Объединить известное множество и множество новых чисел. Дать ему название и проиллюстрировать место новых чисел на числовой прямой.

5. Показать, что предыдущее множество является подмножеством нового множества, решая соответствующие задачи.

6. Определить операцию сравнения и арифметические действия над числами как элементами нового множества. Вывести правила действий (коммуникативный, дистрибутивный законы и т.д.) над этими числами, установив, что для элементов нового множества они имеют тот же смысл, что и в прежнем множестве. Проиллюстрировать новые для учащихся факты на числовой прямой.

7. Организовать решение упражнений на действия с новыми числами. При этом:

– выделить в явном виде алгоритм и приемы вычислений;

– установить, что действие, ради которого производилось расширение, всегда выполнимо;

– подтвердить выполнимость в новом числовом множестве известных законов действий над числами. Заметим, что ни одно обратное действие, а из прямых – возведение в степень, не подчиняется переместительной закономерности.

8. Организовать решение текстовых задач с использованием новых чисел.

Этапы изучения числовых множеств в курсе математики средней школы

Этап	Класс	Темы программы
Пропедевтический (нач. школа)	1-4	Счет, натуральный ряд, число 0. Запись и чтение чисел, четыре арифметических действия, сравнение чисел; доли и их запись с помощью дробей. Величины и их измерения, зависимость между ними, численное значение величин, числовые выражения. Правила и алгоритмы устных и письменных вычислений, приемы решения текстовых задач
5-7 классы	5	Натуральные числа. Сложение и вычитание натуральных чисел. Решение текстовых задач. Умножение и деление натуральных чисел. Решение задач арифметическим способом. Обыкновенная дробь. Правильная и неправильная дроби, смешанное число. Целая и дробная части числа. Основное свойство дроби. Сокращение дроби. Приведение дроби к новому знаменателю. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю. Сравнение дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление обыкновенных дробей. Взаимно обратные числа. Смешанные числа и действия над ними. Задачи на нахождение дроби числа и числа по его дроби, дробного отношения чисел, их решение. Среднее арифметическое нескольких чисел. Задачи на среднее арифметическое нескольких чисел и их решение.

5-7 классы	6	Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Округление десятичных дробей. Конечная и бесконечная десятичные дроби. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Умножение и деление десятичной дроби на разрядную единицу. Преобразования числовых выражений с обыкновенными и десятичными дробями. Проценты. Основные задачи на проценты. Пропорция и ее свойства. Прямая пропорциональная зависимость. Обратная пропорциональная зависимость. Зависимости между величинами: путь, скорость, время; работа, производительность, время; стоимость, цена, количество. Задачи на пропорции (части, проценты) и их решение. Множество. Элементы множества. Способы задания множеств. Пустое множество. Подмножество. Операции над множествами (пересечение, объединение). Задачи на нахождение общих элементов и всех элементов заданных множеств. Положительные и отрицательные числа. Координатная прямая. Модуль числа. Координаты точек на координатной прямой. Изображение точки на координатной прямой по ее координате. Нахождение координаты точки на координатной прямой. Противоположные числа. Множество натуральных чисел. Множество целых чисел. Множество рациональных чисел. Сравнение рациональных чисел. Действия над рациональными числами.
	7	Степень с натуральным показателем и ее свойства. Степень с целым показателем и ее свойства. Стандартный вид числа.

8-11 классы	8-9	Числовые неравенства, их геометрическая интерпретация. Свойства числовых неравенств. Линейное неравенство. Системы линейных неравенств с одной переменной. Двойные неравенства. Корень n-й степени из числа. Иррациональное число. Действительное число. Сравнение действительных чисел. Числовые промежутки. Арифметический квадратный корень и его свойства.
	10-11	Корень n-й степени из числа. Арифметический корень. Основные свойства корня n-й степени. Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени. Избавление от иррациональности в знаменателе дроби. Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с действительным показателем. Степенная функция с рациональным показателем $\mathrm{y}=\mathrm{x}^k$, $\mathrm{y}=\mathrm{x}^{\frac{1}{k}}$ для $\mathrm{k}\in\mathrm{N}$, свойства и график степенной функции. Иррациональные уравнения. Иррациональные неравенства. Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с иррациональным показателем. Определение логарифма числа. Основное логарифмическое тождество. Показательная, логарифмическая, степенная функции.

Первое числовое множество, с которым сталкиваются учащиеся еще начальных классов - множество натуральных чисел. В математике существует два способа его построения. *Количественные натуральные числа* отождествляются с мощностью непустого конечного множества (построение по Кантору), *порядковые* натуральные числа построены на основе **аксиом Пеано:**

A1. Каждому $\mathrm{a}\in\mathrm{N}$ соответствует единственное натуральное число, которое назовем следующим за a числом и обозначим a', т.е.$(\forall \mathrm{a},\ \mathrm{b}\in\mathrm{N})\ \mathrm{a} = \mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{a}' = \mathrm{b}'$.

A2. Существует натуральное число 1, которое не следует ни за каким натуральным числом, т.е. $(\forall \mathrm{a}\in\mathrm{N})\ \mathrm{a}' \neq 1$.

А3. Любое натуральное число следует не более чем за одним натуральным числом, т.е. $(\forall a, b \in N)\ a' = b' \Rightarrow a = b$.

А4. (Аксиома индукции) Если множество M натуральных чисел содержит единицу и вместе с каждым, содержащимся в нем числом a содержит и следующее за ним число a', то $M = N$, т.е. $(1 \in M) \wedge ((\forall a \in N)\ a \in M \Rightarrow a' \in M) \Rightarrow M = N$.

Замечание. Аксиома 4 лежит в основе метода математической индукции.

А5. $(\forall a \in N)\ a + 1 = a'$.

А6. $(\forall a, b \in N)\ a + b' = (a + b)'$.

А7. $(\forall a \in N)\ a \times 1 = a$.

А8. $(\forall a, b \in N)\ a \times b' = a \times b + a$.

Аксиомы А1-А8 были впервые сформулированы в 1801 году итальянским учёным Пеано и получили название аксиом Пеано.

В школьном курсе математики на наглядно-интуитивной основе представлены оба эти способа: каждое новое число появляется из анализа количества предметов, представленных на рисунках, а далее довольно четко выясняется и упорядоченность, и дискретность множества натуральных чисел.

Термин «натуральное число» ввел римский автор Боэций (475 - 524). Систематическое изучение натуральных чисел начинается в 5-м классе. Основная цель темы «Натуральные числа» - обобщение и закрепление тех сведений о множестве натуральных чисел, которые получены учащимися еще в начальной школе. Особое внимание уделяется позиционной записи любого натурального числа, выполнению поразрядного сравнения натуральных чисел. Вводятся символы $=$, $>$, $<$.

При изучении арифметических операций над натуральными числами учителю необходимо достаточно отчетливо представлять себе *различие в требованиях к технике вычислений, к обоснованию этой техники и теории операций.* К технике вычислений надо предъявлять самые жесткие требования - это основа (фундамент) всей вычислительной культуры учащихся. Твердого *обоснования* техники выполнения операций требовать не следует. Достаточно, если учащиеся будут выполнять эти операции и пользоваться их свойствами («на» - сложение или вычитание, «в» - умножение или деление). Наиболее дифференцированно приходится подходить к *теории* самих операций.

Понятие сложения вообще не определяется и считается интуитивно ясным из опыта предшествующего обучения. Хотя понятие *вычитания* тоже интуитивно ясно учащимся, но относительно него вводится *строгое определение*, которое остается неизменным для всех числовых и даже нечисловых множеств (вычесть из числа *а* число *в* - это значит найти такое число *с*, которое, будучи сложенным с числом *в*, даст число *а*). Операция *умножения* вводится *специальным определением*, справедливым лишь на множестве N(а*в = а+а+...+а).

Деление опять строго определяется (а:в = с <=> с*в = а).

Хотя глава и называется «Натуральные числа», фактически же в ней изучаются целые неотрицательные числа. И здесь ученики должны твердо усвоить двоякий смысл термина «нуль» (нуль - цифра и нуль - число). Поэтому необходимо научиться оперировать с нулем : 0+а = а; а+0 = а; 0*а = 0; а*0 = 0; 0:а = 0; обоснование невозможности деления на нуль: а:0 = х <=> х*0 = а, что неверно, 0:0 = х <=> х*0 = 0, но в качестве х можно взять любое число.

Лучшему усвоению учащимися множества натуральных чисел способствует изучение некоторых вопросов делимости. По отношению делимости на данное натуральное число n множество N разбивается на два непересекающихся класса: натуральные числа, делящиеся на n и натуральные числа, не делящиеся на n. По числу делителей - простые, составные, 1. Рассматриваются признаки делимости на 2, 3, 5, 9, 10 и деление с остатком.

Из Программы:

5 класс
НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА (42 ч)

Натуральные числа, нуль и действия над ними. Свойства арифметических действий и их использование для рациональности вычислений.

Координатный луч. Координата точки. Изображение натуральных чисел на координатном луче. Отношения «больше», «меньше», «равно» между числами на координатном луче. Сравнение натуральных чисел друг с другом и с нулем. Округление натуральных чисел до определенного разряда.

Степень с натуральным показателем. Запись натурального числа в виде суммы разрядных слагаемых, порядок выполнения действий в выражениях, содержащих степень, вычисление значений выражений, содержащих степень.

Деление с остатком. Делители и кратные числа. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10. Разложение числа на множители. Простые и составные числа. Общий делитель. Общее кратное. Разложение чисел на простые множители. Наибольший общий делитель. Взаимно простые числа. Наименьшее общее кратное.

** Признаки делимости на 6, 7, 8, 11.*

** Решето Эратосфена.*

Текстовая задача. Арифметический способ (метод) решения текстовых задач. Использование таблиц, схем, других форм представления данных при решении задач.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

* *Познавательные, развивающие задачи на движение, взвешивание, переливание.*

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

правильно употреблять термины и использовать понятия:

цифра, разряд, класс, натуральное число, натуральный ряд, координата точки на координатном луче, четное число, нечетное число, простое число, составное число, взаимно простые числа, степень с натуральным показателем;

делители числа, разложение числа на множители, общий делитель, общее кратное, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное;

знать:

различие между цифрой и числом;

позиционную запись натурального числа;

правило округления натуральных чисел;

признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 10;

уметь:

читать и записывать натуральные числа;

выполнять арифметические действия с натуральными числами;

представлять натуральные числа в виде произведения простых множителей;

изображать координатный луч, находить координату точки, изображенной на данном луче, и по заданной координате изображать точку на координатном луче;

сравнивать два числа и более двух чисел;

представлять натуральные числа в виде суммы разрядных слагаемых;

представлять произведение одинаковых натуральных множителей в виде степени с натуральным показателем;

округлять натуральное число до определенного разряда;

применять законы арифметических действий для упрощения (рациональности) вычислений;

находить делители числа и кратные числа; общие делители чисел и общие кратные чисел; наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное;

выполнять деление с остатком и представлять число в виде суммы остатка и произведения частного и делителя ($a = b \cdot g + r$, где $0 \leq r < b$);

контролировать правильность выполнения арифметических действий;

строить модель условия задачи (в виде таблицы, схемы, чертежа), в которой даны значения двух из трех взаимосвязанных величин, в целях поиска ее решения и уметь осуществлять переход от одной модели к другой;

интерпретировать вычислительные результаты в задаче, исследовать полученное решение задачи.

Лекция 5. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей. Методика введения и изучения рациональных и иррациональных чисел.

Из Программы:

5 класс
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДРОБИ (64 ч)

Обыкновенная дробь. Правильная и неправильная дроби, смешанное число. Целая и дробная части числа. Основное свойство дроби. Сокращение дроби. Приведение дроби к новому знаменателю. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю. Сравнение дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление обыкновенных дробей. Взаимно обратные числа. Смешанные числа и действия над ними. Задачи на нахождение дроби числа и числа по его дроби, дробного отношения чисел, их решение.

Среднее арифметическое нескольких чисел. Задачи на среднее арифметическое нескольких чисел и их решение.

Линейные и столбчатые диаграммы. Представление данных в виде таблиц и диаграмм. Использование информации, представленной в виде таблиц и диаграмм, для составления и решения задач.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

правильно употреблять термины и использовать понятия:

обыкновенная дробь, числитель и знаменатель дроби, правильная и неправильная дроби, сократимая дробь, несократимая дробь, смешанное число, взаимно обратные числа;

среднее арифметическое нескольких чисел;

линейная и столбчатая диаграммы;

знать:

основное свойство дроби;

уметь:

читать и записывать обыкновенные дроби;

изображать обыкновенные дроби на координатном луче;

записывать натуральные числа в виде дроби с заданным знаменателем, записывать смешанное число в виде неправильной дроби и неправильную дробь в виде смешанного числа;

применять правила сокращения дробей;

сравнивать дроби;

использовать алгоритм нахождения наибольшего общего делителя для сокращения дроби;

приводить дроби к новому знаменателю, приводить дроби к наименьшему общему знаменателю;

применять алгоритм нахождения наименьшего общего кратного для нахождения наименьшего общего знаменателя;

находить число, обратное данному числу;

выполнять арифметические действия с обыкновенными дробями;

находить дробь от числа и число по его дроби;

применять законы арифметических действий для упрощения вычислений и преобразования выражений;

находить значения выражений при заданных дробных значениях переменных;

находить среднее арифметическое нескольких чисел;

интерпретировать и преобразовывать информацию, представленную в таблицах и на диаграммах, отражающую свойства и характеристики реальных процессов и явлений, и решать обратную задачу;

моделировать условие задач в виде диаграмм, таблиц, схем;

решать практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

6 класс

Десятичные дроби (39 ч)

Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Округление десятичных дробей. Конечная и бесконечная десятичные дроби. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Умножение и деление десятичной дроби на разрядную единицу. Преобразования числовых выражений с обыкновенными и десятичными дробями.

**Бесконечная периодическая дробь. Запись бесконечной периодической десятичной дроби в виде обыкновенной.*

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны:

правильно употреблять термины и использовать понятия:

десятичная дробь;

разряды десятичной дроби;

конечная десятичная дробь;

бесконечная десятичная дробь;

знать:

правила выполнения арифметических действий с десятичными дробями;

правила округления десятичных дробей;

правило умножения и деления десятичных дробей на разрядную единицу;

уметь:

читать и записывать десятичные дроби;

изображать десятичные дроби на координатном луче;

заменять конечную десятичную дробь равной ей обыкновенной дробью;

заменять обыкновенную дробь равной ей десятичной дробью; округлять десятичные дроби;

сравнивать десятичные дроби;

выполнять преобразования числовых выражений с обыкновенными и десятичными дробями;

решать практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Рациональные числа (38 ч)

Множество натуральных чисел. Множество целых чисел. Множество рациональных чисел. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел.

Координатная прямая. Координаты точек на координатной прямой. Изображение точки на координатной прямой по ее координате. Нахождение координаты точки на координатной прямой. Геометрическая интерпретация модуля числа.

Действия над рациональными числами.

** Нахождение значений выражений, содержащих знак модуля.*

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны:

правильно употреблять термины и использовать понятия:

числовые множества (множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел), элементы числовых множеств;

положительные, отрицательные числа;

рациональные числа;

модуль числа;

координатная прямая, координата точки;

знать:

геометрический смысл модуля числа;

правила выполнения действий с рациональными числами;

уметь:

находить модуль числа;

сравнивать рациональные числа;

изображать точку на координатной прямой по ее координате;

находить координату точки на координатной прямой;

выполнять действия с рациональными числами;

находить среднее арифметическое нескольких рациональных чисел;

решать практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Квадратные корни и их свойства. Действительные числа (26 ч)

Квадратный корень из числа. Арифметический квадратный корень. Множество иррациональных чисел. Множество действительных чисел. Изображение действительных чисел на координатной прямой. Сравнение действительных чисел.

Свойства квадратных корней. Применение свойств квадратных корней: вынесение множителя за знак корня; внесение множителя под знак корня; избавление от иррациональности в знаменателе дроби; вычисление значений выражений и упрощение выражений, содержащих корни.

Числовые промежутки. Объединение и пересечение числовых промежутков.

Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной (неизвестной). Решение двойных неравенств.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием и их решение.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны правильно употреблять термины и использовать понятия:

квадратный корень из числа;

арифметический квадратный корень;

иррациональное число;

действительное число;

числовые промежутки.

Учащиеся должны знать:

определение и свойства квадратных корней;

представление рационального числа в виде бесконечной десятичной периодической дроби; иррационального числа в виде бесконечной десятичной непериодической дроби;

смысл требований: «решить систему линейных неравенств»; «решить совокупность линейных неравенств».

Учащиеся должны уметь:

вычислять значения выражений и выполнять преобразования выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня;

читать и записывать числовые промежутки;

решать системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной; двойные неравенства; практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием; анализировать и исследовать полученные результаты.

В методике математики существует проблема порядка изучения десятичных и обыкновенных дробей.

Возможные подходы к ее решению:

- сначала изучаются десятичные дроби, а потом – обыкновенные;

- сначала изучаются обыкновенные дроби;

- смешанный вариант изучения дробей.

В существующих учебниках придерживаются следующего варианта:

5 класс	6 класс
Обыкновенная дробь. Правильная и неправильная дроби, смешанное число. Целая и дробная части числа. Основное свойство дроби. Сокращение дроби. Приведение дроби к новому знаменателю. Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю. Сравнение дробей. Сложение, вычитание, умножение и деление обыкновенных дробей. Взаимно обратные числа. Смешанные числа и действия над ними. Задачи на нахождение дроби числа и числа по его дроби, дробного отношения чисел, их решение.	Десятичные дроби. Сравнение десятичных дробей. Округление десятичных дробей. Конечная и бесконечная десятичные дроби. Сложение, вычитание, умножение и деление десятичных дробей. Умножение и деление десятичной дроби на разрядную единицу. Преобразования числовых выражений с обыкновенными и десятичными дробями. Проценты. Основные задачи на проценты. Пропорция и ее свойства. Прямая пропорциональная зависимость. Обратная пропорциональная зависимость. Положительные и отрицательные числа. Координатная прямая. Модуль числа. Координаты точек на координатной прямой. Изображение точки на координатной прямой по ее координате. Нахождение координаты точки на координатной прямой. Противоположные числа. Множество натуральных чисел. Множество целых чисел. Множество рациональных чисел. Сравнение рациональных чисел. Действия над рациональными числами.

Важным элементом методики изучения дробных чисел является убеждение учащихся в целесообразности их введения.

Возможность записи «доли» с помощью обыкновенных дробей является одним из приемов убеждения учащихся в полезности таких дробей.

Вторым приемом является тот факт, что с их помощью операция деления натуральных чисел делается всегда выполнимой.

Третий прием связан с измерением величин.

Методика введения обыкновенных дробей

В соответствии с программой по математике в начальной школе у учащихся должно быть сформировано понятие «доля». С помощью этого понятия у учащихся формируется понятие «обыкновенная дробь». Понятие «дробь» вводится на примере разрезания арбуза и деления отрезка на части, на примере разрезания торта. Оговаривается, что $1/2$ это - половина, $1/3$ это - треть, $1/4$ это - четверть.

Характеристика дроби всегда начинается со знаменателя. «Знаменатель показывает, на сколько равных частей разделен предмет, а числитель показывает, сколько таких частей надо взять».

Дается четкое определение дробных чисел. Обращается внимание на тот факт, что «две равные дроби – это различные обозначения одного и того же дробного числа, например, $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$».

Методическая схема введения понятия «обыкновенная дробь»

- Выполнить материализованные действия по делению предмета на 4 равные части.
- Сообщить термины: «одна четвертая», «три четвертых»...
- Ввести запись: $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$...
- Ввести термины «обыкновенная дробь», «числитель, знаменатель дроби».
- Дать содержательную характеристику дроби (что показывает знаменатель дроби, числитель дроби).
- Привести примеры дробей.

Особую трудность технического характера представляют собой операции сложения и вычитания обыкновенных дробей с разными знаменателями, так как при сложении или вычитании дробей ребенок должен выполнить следующие логических операции:

- проанализировать знаменатели;
- если они неравные, то найти наименьший общий знаменатель;
- найти дополнительные множители;
- привести дроби к общему знаменателю;
- сложить или вычесть числители;
- сократить, если возможно;
- выделить целую часть.

Глава 3 «Обыкновенные дроби»
Самостоятельная работа №10 (2)
I вариант

1) Верно, ли что любая неправильная дробь больше или равна 1?

2) Сократите дробь, выделите из нее целую часть, и запишите смешанное число: $\frac{24}{16}$; $\frac{112}{32}$.

3) Начертите координатный луч, приняв за единичный отрезок 10 клеток, отметьте на луче точки, координаты которых равны: $\frac{2}{5}$; $\frac{7}{5}$; $1\frac{1}{5}$. Запишите координаты точек в порядке возрастания.

4) На уроке математики $\frac{1}{9}$ часть времени заняла проверка домашнего задания, $\frac{1}{3}$ часть времени учитель объяснял новую тему, остальное время учащиеся выполняли самостоятельную работу. Сколько минут учащиеся выполняли самостоятельную работу?

5) Определите, при каких натуральных значениях **p** дробь: $\frac{5p}{12}$ будет правильной?

II вариант

1) Верно ли что любая правильная дробь меньше 1?

2) Сократите дробь, выделите из нее целую часть, и запишите смешанное число: $\frac{42}{18}$; $\frac{96}{36}$.

3) Начертите координатный луч, приняв за единичный отрезок 12 клеток. Отметьтена луче точки, координаты которых равны: $\frac{5}{6}$; $\frac{13}{6}$; $1\frac{1}{6}$. Запишите координаты точек в порядке убывания.

4) На субботнике по уборке школьного участка $\frac{1}{4}$ часть времени учащиеся окапывали кусты, $\frac{3}{5}$ часть времени ушла на подготовку клумбы к посадке цветов, а остальное время учащиеся подметали дорожки. Сколько минут учащиеся подметали дорожки, если всю работу учащиеся выполнили за час?

5) Определите, при каких натуральных значениях **t** дробь: $\frac{4t}{15}$ будет правильной?

Глава 3 «Обыкновенные дроби»
Самостоятельная работа №11(3)
I вариант

1) Закончите предложение: Чтобы сложить дроби с разными знаменателями, нужно . . .

2) Приведите дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$ и $\frac{3}{4}$ к наименьшему общему знаменателю.

3) Найдите значение числового выражения, используя правила сложения и вычитания дробей: $\frac{1}{6}+3\frac{1}{2}-1\frac{1}{3}$.

4) На дачном участке собрали смородину с трех кустов. С первого куста собрали $3\frac{1}{4}$ кг, со второго – на $\frac{3}{5}$ кг больше, чем с первого, а с третьего куста на $1\frac{2}{5}$ кг меньше, чем с первого и второго куста вместе. Сколько килограммов смородины собрали со всех трех кустов?

5) При каком наименьшем натуральном значении **n**, $9 \leq \frac{2n}{3}$.

II вариант

1) Закончите предложение: Чтобы вычесть дроби с разными знаменателями, нужно . . .

2) Приведите дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$ и $\frac{2}{9}$ к наименьшему общему знаменателю.

3) Найдите значение числового выражения, используя правила сложения и вычитания дробей: $\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}-1\frac{1}{8}$.

4) В супермаркете все печенье из коробки расфасовали в три пакета. В первый пакет положили $2\frac{3}{4}$ кг, во второй – на $\frac{1}{6}$ кг меньше, чем в первый, а в третий пакет на $1\frac{1}{3}$ кг меньше, чем в первый и второй пакеты вместе. Сколько килограммов печенья было в коробке?

5) При каком наименьшем натуральном значении **m**, $7 \leq \frac{3m}{5}$.

Глава 3 «Обыкновенные дроби»
Самостоятельная работа №12(4)
I вариант

1) Запишите число, обратное данному числу $\frac{13}{14}$.

2) Выполните умножение и деление дробей и смешанных чисел:

$2 : \frac{3}{4}$; $\quad 3\frac{1}{2} \cdot 4$; $\quad 2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{11}$.

3) Выясните, при каком значении **p** выполняется равенство $\mathbf{p} \cdot 3\frac{3}{7} = \frac{8}{21}$ и проверьте полученный результат.

4) Найдите значение числового выражения, используя законы умножения:

а) $\frac{13}{14} \cdot (\frac{4}{5} \cdot \frac{14}{39})$; $\quad$ б) $\frac{17}{21} \cdot \frac{3}{25} + \frac{3}{25} \cdot \frac{4}{21}$.

5) Ширина прямоугольника $2\frac{1}{2}$ см, а его длина на $1\frac{3}{4}$ см больше. Найдите его периметр и площадь?

II вариант

1) Запишите число, обратное данному числу $\frac{11}{12}$.

2) Выполните умножение и деление дробей и смешанных чисел:

$3 : \frac{2}{3}$; $\quad 2\frac{1}{2} \cdot 6$; $\quad 4\frac{1}{4} \cdot 1\frac{3}{17}$.

3) Выясните, при каком значении **k** выполняется равенство $2\frac{3}{4} \cdot k = \frac{11}{12}$ и проверьте полученный результат.

4) Найдите значение числового выражения, используя законы умножения:

а) $(\frac{4}{15} \cdot \frac{4}{5}) \cdot \frac{15}{16}$; $\quad$ б) $\frac{7}{25} \cdot \frac{5}{16} + \frac{5}{16} \cdot \frac{18}{25}$.

5) Длина прямоугольника $4\frac{2}{3}$ см, а ширина его на $1\frac{1}{2}$ см меньше. Найдите его периметр и площадь?

Глава 3 «Обыкновенные дроби»
Самостоятельная работа №13(5)
I вариант

1) Закончите предложение: Чтобы найти, какую часть одно число (первое) составляет от другого (второго), нужно ...

2) Из 24 учащихся танцевального кружка школы $\frac{7}{8}$ учатся в одном классе. Сколько учащихся в кружке танцев из других классов?

3) Учащийся 5-го класса прошел на лыжах 500 метров, что составило $\frac{5}{8}$ всей дистанции. Определите длину дистанции.

4) Тополя составляют $\frac{3}{5}$ всех деревьев парка, остальные 80 деревьев – березы. Сколько тополей растет в парке?

5) При каком натуральном значении n $\frac{3}{n}$ от числа 60 будет наибольшим числом? Укажите это число.

II вариант

1) Закончите предложение: Чтобы найти дробь от числа, можно ...

2) Из 36 подготовленных для сбора урожая яблок ящиков только $\frac{5}{6}$ оказались заполненными. Сколько оказалось пустых ящиков?

3) Учащаяся 5-го класса прочитала 200 страниц в книге «Сказки народов мира», что составило $\frac{4}{9}$ всех страниц книги. Сколько страниц в этой книге?

4) В книжном магазине книги сказок составляют $\frac{4}{7}$ всех книг отдела детской книги, остальные 150 книг – книги серии приключений. Сколько книг сказок в отделе детской книги магазина?

5) При каком натуральном значении m $\frac{4}{m}$ от числа 36 будет наибольшим числом? Укажите это число.

Глава 3 «Обыкновенные дроби»
Самостоятельная работа №14(6)
I вариант

1) Используя соотношения между единицами площади, выразите 8 $см^2$ в $мм^2$.

2) Найдите длину двухзвенной ломаной, если длина меньшего звена составляет $\frac{3}{4}$ длины большего звена и равна 9 см.

3) Постройте угол, равный 30^0. Отметьте на его сторонах по одной точке. Проведите через эти точки прямую, перпендикулярную стороне угла. Проведите через вершину угла прямую, параллельную прямой, проходящей через отмеченные на сторонах угла точки.

4) Длина прямоугольника 48 см, а ширина его составляет $\frac{7}{12}$ его длины. Найдите периметр и площадь прямоугольника. Площадь прямоугольника округлите до $м^2$.

5) Длина ломаной из трех звеньев 64 см. Длина первого звена составляет $\frac{3}{8}$ длины ломаной, длина второго звена на 120 мм больше длины первого звена. Какую часть длина третьего звена составляет от длины всей ломаной?

II вариант

1) Используя соотношения между единицами площади, выразите 9 $см^2$ в $мм^2$.

2) Найдите длину двухзвенной ломаной, если длина меньшего звена составляет $\frac{4}{5}$ длины большего звена и равна 8 см.

3) Постройте угол, равный 45^0. Отметьте на его сторонах по одной точке. Проведите через эти точки прямую, перпендикулярную стороне угла. Проведите через вершину угла прямую, параллельную прямой, проходящей через отмеченные на сторонах угла точки.

4) Длина прямоугольника 44 мм, а ширина его составляет $\frac{5}{11}$ его длины. Найдите периметр и площадь прямоугольника. Площадь прямоугольника округлите до $см^2$.

5) Периметр треугольника 56 см. Длина первой стороны составляет $\frac{3}{8}$ периметра, длина второй стороны на 100 мм меньше длины первой стороны. Какую часть длина третьей стороны составляет от длины периметра треугольника?

Глава 3 «Обыкновенные дроби»
Самостоятельная работа №15(7)
I вариант

1) Используя соотношения между единицами объема, выразите 7 см^3 в мм^3.

2) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что стороны, образующие прямой угол равны 14 мм и 16 мм.

3) Определите, сколько проволоки потребуется на изготовление модели куба, если периметр его грани равен 16 см.

4) Выполните действия: $(12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}) : 11\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{18}$.

5) Из двух чисел одно в 3 раза больше другого. Какую часть меньшее число составляет от среднего арифметического этих чисел?

II вариант

1) Используя соотношения между единицами объема, выразите 4 дм^3 в см^3.

2) Найдите площадь прямоугольного треугольника, если известно, что стороны, образующие прямой угол равны 12 см и 15 см.

3) Определите, сколько проволоки потребуется на изготовление модели прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 4см, 6см, 8см.

4) Выполните действия: $(3\frac{1}{5} : 4 + 4\frac{4}{5} : 3\frac{1}{5}) \cdot 4\frac{4}{5} : \frac{23}{25}$.

5) Из двух чисел одно в 5 раз меньше другого. Какую часть меньшее число составляет от среднего арифметического этих чисел?

Схема введения понятия «десятичная дробь»

1. Мотивация к изучению темы

Задача. Ширина доски равна 6 дм 3 см необходимо выразить ее в сантиметрах.

Решение. 6 дм 3 см = 63 см. Чтобы выразить ту же ширину в дециметрах, придется использовать дроби. Так как 1см$=\frac{1}{10}$дм, то 3см$=\frac{3}{10}$дм и потом 6дм 3см$=6\frac{3}{10}$дм. Таким же образом находим 4ц 17кг$=4\frac{17}{100}$ц.

2. *Формулировка определения.* Знаменатель дробной части числа $6\frac{3}{10}$ равен 10, а у числа $4\frac{17}{100}$ он равен 100.

Числа со знаменателями 10, 100, 1000 и т. д. условились записывать без знаменателя.

Правило записи. Сначала пишут целую часть, а потом числитель дробной части. Целую часть отделяют от дробной части запятой (для неправильной дроби).

– Если дробь правильная, то перед запятой записывается 0.

Такую запись дробей называют десятичной, а сами дроби – ***десятичными***.

3. Понятие о разрядах в десятичных дробях

В записи натурального числа значение цифры зависит от того, в каком разряде она находится. Единицы двух соседних разрядов отличны друг от друга в 10 раз.

Для записи десятичных дробей используются новые разряды, которые пишутся справа от разряда единиц, поставив после него запятую.

В этих разрядах указывают доли единиц. В первом разряде после запятой указывают число десятичных долей, его так и называют разряд десятые. Во втором указывают число сотых долей, его так и называют разряд сотых.

Чтение десятичных дробей. При чтении десятичной дроби сначала называется ее часть, стоящая до запятой, а затем часть, стоящая после запятой, с добавлением названия последнего разряда.

7,35 – семь целых и тридцать пять сотых

7,35 содержит 7 единиц, 3 десятых, 5 сотых.

При записи десятичной дроби последнюю цифру помещают в том разряде, который произносят при ее чтении.

Ноль целых, восемь тысячных – 0,008.

В десятичной дроби после запятой должно быть столько же цифр, сколько нулей в записи знаменателя обыкновенной дроби.

$5{,}13 = 5\frac{13}{100}$, $5{,}00013 = 5\frac{13}{100000}$;

2 цифры - 2 нуля, 5 цифр - 5 нулей.

4. Изображение чисел на координатном луче.

5. Сложение и вычитание десятичных дробей.

6. Умножение десятичных дробей.

7. Деление десятичных дробей.

8. Типы упражнений:

- Назовите число единиц каждого разряда...
- Какая цифра записана в данном разряде...?
- Прочитайте следующие десятичные дроби...
- Запишите в виде десятичной дроби...
- Запишите десятичные дроби в виде обыкновенных и сократите их...
- Какие числа отмечены точками на координатном луче...?
- Изобразите на координатном луче следующие числа...
- Какую часть метра составляют...?
- Выразить в тоннах, метрах...
- Измерьте ширину тетради и выразите ее в дециметрах...
- Расположите числа в порядке возрастания...
- Какие натуральные числа заключены между дробями...?

-Вычислите сумму, разность дробей...

- Увеличьте, уменьшите каждое число в ... раз.

-Какое число нужно прибавить к данному чтобы получить следующее число...?

- Решите задачи ...

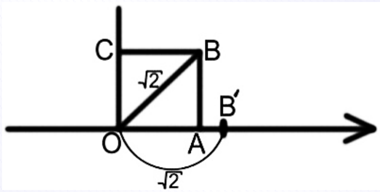
Методика введения и изучения иррациональных чисел

1. Введение начинается с целесообразно подобранной задачи.

Например, извлечение квадратного корня из положительного числа, не являющегося полным квадратом; каким числом выражается длина диагонали квадрата со стороной 1; чему равна сторона квадрата, если известно, что его площадь равна 3.

Практические задачи: задачи измерения; каждой ли точке координатной прямой соответствует рациональное число?

Изображение чисел на координатной прямой



Покажем, что точке B$'$ соответствует число, не являющееся рациональным, так как диагональ квадрата OB несоизмерима с его стороной OA.

Докажем, что точка B$'$ не соответствует никакому рациональному числу.

От противного: пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ –несократимая дробь. Обе части – неотрицательны, возведем в квадрат, получим: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, $2n^2 = m^2$, $\Rightarrow m^2$ - четное, $\Rightarrow$ m – четное. Значит, можно представить в виде $m{=}2k$. Подставим в дробь:

$2n^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2n^2 = 4k^2, n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ – четное, n – четное. Тогда имеем m, n – четные. Это противоречит тому, что $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. $\Rightarrow \sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Таким образом, число можно изобразить на координатной прямой некоторым числом, которое не является рациональным. Такие числа называются иррациональными.

Начало
Содержание
Страница 173 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

Лекция 6. Тождественные преобразования в школьном курсе математики. Методика изучения понятия тождества. Тождество на множестве. Основные виды тождественных преобразований в школьном курсе математики

Учебный материал предмета «Математика» структурируется по семи основным содержательным линиям:

- числа и вычисления;
- выражения и их преобразования;
- уравнения и неравенства;
- координаты и функции;
- геометрические фигуры и их свойства;
- геометрические величины;
- геометрические построения.

Выражения и их преобразования представляют собой одну из главных линий школьного курса математики. На их основе формируются представления об аналитических методах математики. Как правило, решение каждой математической задачи аналитическим методом предполагает выполнение некоторых тождественных преобразований.

Тождественные преобразования не являются какой-либо отдельной темой школьного курса математики, они изучаются на протяжении всего курса.

Изучение темы имеет как самостоятельное, так и прикладное значение. **Материал линии связан:**

- с обобщением операций над числами;

- проведением вычислений в общем виде;

- обучением использования буквенной символики в математике и ее приложениях.

Существует два подхода к изучению линии тождеств: алгебраический и функциональный.

Алгебраический подход. **Больше внимания уделяется букве и операциям над буквенными выражениями. На выражение смотрят формально, не задумываясь над тем, что скрывается под буквами. Все преобразования опираются на правила действий и свойства действий.**

Функциональный подход. **Входящие в выражения буквы понимаются как переменные, а тождественные преобразования опираются на условие равенства функций (равенство значений функций при всех допустимых значениях переменной).**

Понятие о тождественных преобразованиях закладывается в сознание ученика уже в 5 классе, хотя, согласно программе, термины «тождество» и «тождественное преобразование» еще не введены. В 5-м классе даются задания, в которых рассматриваются некоторые преобразования числовых выражений и выражений, содержащих переменные; тождественные преобразования, выполняемые на основе свойств арифметических действий. Учащиеся знакомятся с первыми основными тождествами (например, $ab = ba$, $a(b+c) = ab + ac$ и др.), а затем применяют их при решении различных видов упражнений.

В 6-м классе дается понятие коэффициента, учащиеся знакомятся с выражениями вида: $2a$, $-ab$, $-3ab$, то есть фактически постигают понятие одночлена, хотя термин «одночлен» не вводится.

Первое определение тождества дается в 7-м классе.

7 КЛАСС. ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (34 ч)

Числовые выражения и выражения с переменными. Область определения выражения (область допустимых значений переменной). Тождественно равные выражения. Тождество. Тождественные преобразования выражений.

Одночлен. Стандартный вид одночлена. Коэффициент одночлена. Степень одночлена. Подобные одночлены. Действия с одночленами. Многочлен. Приведение подобных слагаемых многочлена. Стандартный вид многочлена. Степень многочлена. Сложение, вычитание многочленов. Умножение и деление многочлена на одночлен. Умножение многочленов.

Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности двух выражений; разность квадратов двух выражений.

**Куб суммы и куб разности двух выражений, разность кубов, сумма кубов двух выражений.*

Разложение многочлена на множители способом вынесения общего множителя за скобки способом группировки, с помощью применения формул сокращенного умножения, группировки. Комбинации различных приемов разложения многочленов на множители.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

правильно употреблять термины и использовать понятия:

- тождественно равные выражения, тождество, тождественные преобразования выражений;
- одночлен, степень одночлена, стандартный вид одночлена, подобные одночлены;

● многочлен, степень многочлена;

● стандартный вид многочлена;

знать:

● формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности двух выражений; разность квадратов двух выражений;

● правила и алгоритмы действий с одночленами и многочленами;

● способы разложения многочлена на множители и алгоритмы их применения;

уметь:

●выводить формулы сокращенного умножения: квадрата суммы и квадрата разности двух выражений; разности квадратов двух выражений;

●приводить одночлен и многочлен к стандартному виду, выполнять операции с одночленами и многочленами: умножение, деление и возведение в степень одночленов, приведение подобных слагаемых многочлена, умножение и деление многочлена на одночлен, сложение, вычитание, умножение многочленов;

●применять формулы сокращенного умножения: квадрата суммы и квадрата разности двух выражений; разности квадратов двух выражений для тождественных преобразований многочленов, упрощения вычислений;

●раскладывать многочлены на множители способами: вынесения общего множителя за скобки, группировки, применения формул сокращенного умножения: квадрата суммы и квадрата разности двух выражений; разности квадратов двух выражений; применения комбинаций приемов.

Определение **Равенство, верное *при любых* значениях переменной, называется тождеством.**

Данное определение компактно и хорошо, когда учащиеся работают с целыми рациональными выражениями. Так равенства вида $\frac{a^2}{a} = a$ или $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ не подходят под это определение, поэтому его необходимо уточнить, и в 8-м классе в теме «Рациональные дроби» дается уже другое ***определение:*** **Равенство, верное *при всех допустимых* значениях, входящих в него переменных.**

Наиболее общим является следующее ***определение:*** **Равенство, верное *при любых значениях переменных, принадлежащих некоторому множеству*, называется тождеством на этом множестве.**

Данное определение раскрывает суть тождества с теоретико-функциональной точки зрения.

Например, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ - тождество на R;

$\sqrt{x^2} = x$ - тождество на R^+;

$\sqrt{x(x+3)} = \sqrt{x}\sqrt{x+3}$ - тождество при x>0.

Некоторые тождества выбираются как основные, с их помощью доказываются остальные тождества и рассматриваются свойства операций, истинность которых принимается в качестве аксиом (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, существование противоположного элемента и др.)

Различают понятия:

Тождества-равенства **(формулы сокращенного умножения, свойства степени с натуральным показателем и др.)**

Тождества-действия **(вынесение общего множителя за скобку, приведение подобных слагаемых и др.) или тождественные преобразования.**

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием.*

Итак, тождество - это равенство, выполняющееся на всём множестве значений входящих в него переменных, например:

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Иногда называют тождеством также равенство, не содержащее никаких переменных; напр. $25^2 = 625$.

Тождественное равенство, когда его хотят подчеркнуть особо, обозначается символом «≡». Не любое равенство является тождеством. Например, равенство x+2=5 имеет место не при всяком значении x, а только при x=3. Поэтому оно не является тождеством.

Тождественность на заданном множестве

В тех случаях, когда тождества выполняется не для всех возможных переменных, говорят, что выражения тождественны на некотором множестве. Примеры:

- выражение $\frac{a^2}{a} = a$ тождественно при любом а, кроме а=0.

- выражение $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ тождественно только для неотрицательных действительных чисел.

Линия тождественных преобразований в школе:

5-6 классы - раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых, вынесение множителя за скобки;

7 класс — тождественные преобразования целых и дробных выражений;

8 класс - тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни;

9 класс - тождественные преобразования тригонометрических выражений и выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

10-11 классы - организация целостной системы преобразований.

Основная цель – формирование гибкого и мощного аппарата, являющегося средством решения задач различного уровня сложности.

Темы программы:

- тождественные преобразования тригонометрических выражений;
- преобразование выражений, содержащих степень с произвольным показателем;
- преобразование выражений, содержащих логарифмы;
- преобразование тригонометрических выражений;
- преобразования, связанные с дифференцированием.

Определение. Целыми рациональными выражениями называются алгебраические выражения, которые не содержат деления на переменные и извлечения корня (в частности, возведения в степень с дробным показателем). Пример: $5x^2y - y^2$.

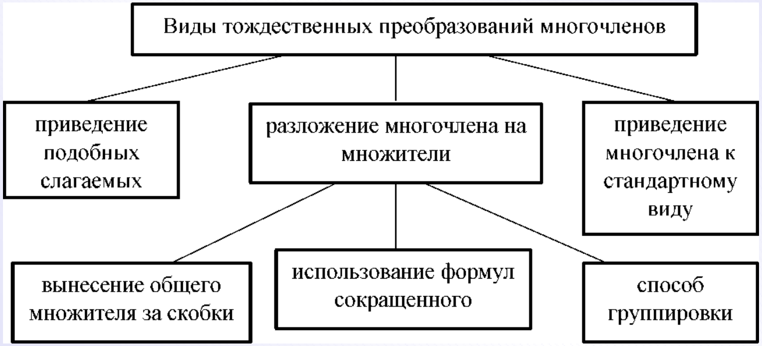
Определение. Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют допустимым значением переменных.

Определение. Множество всех допустимых значениях переменных называют областью определения алгебраического выражения.

Целое рациональное выражение имеет смысл при любых значениях переменных.

Определение. Одночленом называют такое выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения и не содержит никаких других действий над числами и переменными.

Определение. Многочленом называют сумму одночленов.



При изучении тождественных преобразований целых рациональных выражений, выделяют следующие **важные аспекты:**

- не следует рассматривать специально деление многочленов, отнеся его в раздел «рациональные дроби»;

- полезно считать тождественно равными два целых рациональных выражения, значения которых совпадают при одинаковых значениях, входящих в них переменных;

Начало
Содержание
Страница 180 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

- тождественные преобразования лучше строить на основе законов арифметических действий.

Методическая схема обучения тождественным преобразованиям целых рациональных выражений:

1. Приведение одночленов и многочленов к стандартному виду, выполнение основных действий с целыми рациональными выражениями (раскрытие и заключение в скобки, выполнение арифметических действий);

2. Приемы разложения многочлена на множители (вынесения общего множителя за скобки, способ группировки);

3. Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения);

4. Специальный прием разложение квадратного трехчлена на линейные множители, выделения полного квадрата в трехчлене;

5. Обобщенный прием упрощения целого рационального выражения (приведение подобных членов);

6. Разложение на множители двучлена;

7. Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона).

Определение. Дробными рациональными выражениями называются алгебраические выражения, составленные из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения, возведения в степень с натуральным показателем и деления, причем используется деление на выражение с переменными.

Свойство дроби. Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Методическая схема обучения тождественным преобразованиям дробных рациональных выражений

1. Приемы записи преобразований дробных рациональных выражений;

2. Сокращение рациональных дробей;

3. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю;

4. Сложение, вычитание, умножение и деление рациональных дробей;

5. Возведение рациональной дроби в целую степень;

6. Обобщенный прием упрощения рационального выражения (приведение подобных членов, прибавление и вычитание одного и того же числа);

7. Приемы доказательства тождества (формулы сокращенного умножения).

Определение. Если в алгебраическом выражении используется извлечение корня из переменных (или возведение переменных в дробную степень), то его называют иррациональным выражением.

Методическая схема обучения тождественным преобразованиям иррациональных выражений

1. Специальные приемы основных простейших преобразований арифметических корней (выполняются с использованием свойств корня);

2. Преобразования выражений со степенями с рациональным показателем (выполняются с использованием свойств степени);

3. Прием доказательства неравенств;

4. Обобщенный прием упрощения иррационального выражения (приведение подобных членов, умножение на сопряженное выражение);

5. Приемы доказательства тождества (применяются так называемые формулы–тождества);

6. Приемы разложения многочлена на множители (вынесения общего множителя за скобки).

Пример. Сократите дробь:

$$\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}.$$

Решение.

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}=\left[\frac{a-b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}=\frac{1}{a+b}\right]=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}.$$

Пример. Найдите значение выражения:

$$\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{15}-4)}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}.$$

Решение.

Преобразуем знаменатель:

$8 = 5 + 3$, $15 = 5 \cdot 3$,

Поэтому

$8 - 2\sqrt{15} = 5 - 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} + 3 = (\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$, то есть $\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Следуя несколько иной логике, можно рассмотреть число $2\sqrt{15}$ в качестве возможного удвоенного произведения первого слагаемого на второе. Далее, используя свойство квадратного арифметического корня, представим его в виде произведения $2\sqrt{15} = 2\sqrt{3}\sqrt{5}$.

Таким образом, получаем, что:

$\sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2} = |\sqrt{5}-\sqrt{3}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$, т.к. $\sqrt{5}-\sqrt{3} > 0$.

Раскроем скобки в числителе дроби:

$(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{15}-4) = \sqrt{150}+\sqrt{90}-4\sqrt{10}-4\sqrt{6}$.

Учитывая, что $150 = 25 \cdot 6$, $90 = 9 \cdot 10$, получаем следующее:

$\sqrt{25\cdot 6}+\sqrt{9\cdot 10}-4\sqrt{10}-4\sqrt{6} = 5\sqrt{6}+3\sqrt{10}-4\sqrt{10}-4\sqrt{6}$.

Далее приведем подобные слагаемые (первое и последнее, второе и третье), и, помня, что наша цель — разложить знаменатель дроби на множители для ее сокращения, вынесем за скобку множитель $\sqrt{2}$:

$\sqrt{6}-\sqrt{10} = \sqrt{2\cdot 3}-\sqrt{2\cdot 5} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

Тогда:

$$\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{6})(\sqrt{15}-4)}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = -\sqrt{2}.$$

Заметим, что подкоренное выражение в знаменателе можно было записать и как $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$, но $\sqrt{3}-\sqrt{5} < 0$, а $\sqrt{8-2\sqrt{15}} > 0$, поэтому:

$\sqrt{8-2\sqrt{15}} = |\sqrt{3}-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Ответ: $-\sqrt{2}$.

В тождественных преобразованиях тригонометрических выражений могут быть использованы следующие алгебраические приемы: добавление и вычитание одинаковых слагаемых; вынесение общего множителя за скобки; умножение и деление на одну и ту же величину; применение формул сокращенного умножения; выделение полного квадрата; разложение квадратного трехчлена на множители; введение новых переменных с целью упрощения преобразований.

При преобразованиях тригонометрических выражений, содержащих дроби, можно использовать свойства пропорции, сокращение дробей или приведение дробей к общему знаменателю. Кроме того, можно пользоваться выделением целой части дроби, умножением числителя и знаменателя дроби на одинаковую величину, а также по возможности учитывать однородность числителя или знаменателя. При необходимости можно представлять дробь в виде суммы или разности нескольких более простых дробей.

Кроме того, применяя все необходимые методы преобразования тригонометрических выражений, необходимо постоянно учитывать область допустимых значений преобразуемых выражений.

Основными приемами доказательства тригонометрических тождеств являются:

- *сведение левой части тождества к правой путем соответствующих преобразований;*
- *сведение правой части тождества к левой;*
- *сведение правой и левой частей тождества к одному и тому же виду;*
- *сведение к нулю разности левой и правой частей доказываемого тождества.*

При изучении темы “Преобразование логарифмических выражений” следует вспомнить ряд основных формул, связанных с логарифмами.

Глава 2. Выражения и их преобразования
Самостоятельная работа 2.1
Числовые выражения и выражения с переменными. Тождество
Вариант 1

№ 1. Выберите выражение, тождественно равное выражению $2m+n$:
а) $2m$-n; б) $2mn$; в) $n+2m$; г) $m+2n$.

№ 2. Укажите равенство, являющееся тождеством:
а) $b \cdot b \cdot b \cdot b = 4b$; б) $b \cdot b \cdot b \cdot b = b^4$; в) $b \cdot b \cdot b \cdot b = 4 + b$; г) $b \cdot b \cdot b \cdot b = b : 4$.

№ 3. Найдите значение выражения $(5\frac{8}{11} - 1\frac{6}{11}) : 2$.

№ 4. Запишите выражением произведение разности чисел n и 5 и числа d.

№ 5. Найдите область определения выражения $(x+4)$:$(7$-$x)$.

№ 6. Найдите значение выражения $-a^2 + 2a$ при a=$0,6$.

№ 7. Преобразуйте выражение $8a$-$8b$ в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при a=-$1,4$, b=$3,6$.

№ 8. Составьте выражение для решения задачи.

В школьной библиотеке имеются книги на трех иностранных языках. При этом на английском языке имеется m книг, на французском – в два раза больше, чем на английском, и на немецком – на 10 книг меньше, чем на французском. Сколько всего книг на иностранных языках есть в библиотеке?

№ 9. Докажите, что выражения $(a + 2)^2$ и $a^2 + 4$ не являются тождественно равными.

№ 10. Придумайте пример выражения с переменной, областью определения которого являются все числа, кроме чисел 0 и –3,2.

Вариант 2

№ 1. Выберите выражение, тождественно равное выражению $3a+b$:
а) $3ab$; б) $b+3a$; в) $3a$-b; г) $a+3b$.

№ 2. Укажите равенство, являющееся тождеством:
а) $m \cdot m \cdot m = 3+m$; б) $m \cdot m \cdot m = 3m$; в) $m \cdot m \cdot m = m^3$; г) $m \cdot m \cdot m = m : 3$.

№ 3. Найдите значение выражения $(5\frac{9}{11} - 1\frac{7}{11}) : 2$.

№ 4. Запишите выражением произведение суммы чисел m и 4 и числа k.

№ 5. Найдите область определения выражения $(x+3)$:$(5$-$x)$.

№ 6. Найдите значение выражения $-b^2 + 3b$ при b=$0{,}4$.

№ 7. Преобразуйте выражение $6a$-$6c$ в тождественно равное, применив распределительный закон умножения, и найдите значение полученного выражения при a=-$1{,}7$, b=$4{,}3$.

№ 8. Составьте выражение для решения задачи.

В школьной библиотеке имеются книги на трех иностранных языках. При этом на французском языке имеется n книг, на немецком – в три раза больше, чем на французском, и на английском – на 20 книг больше, чем на немецком. Сколько всего книг на иностранных языках есть в библиотеке?

№ 9. Докажите, что выражения $(a + 3)^2$ и $a^2 + 9$ не являются тождественно равными.

№ 10. Придумайте пример выражения с переменной, областью определения которого являются все числа, кроме чисел 0 и –2,8.

Ответы. Самостоятельная работа 2.1
Числовые выражения и выражения с переменными. Тождество
Вариант 1

№ 1. *в).*
№ 2. *б).*
№ 3. $2\frac{1}{11}$.
№ 4. $(n-5)\cdot d$.
№ 5. *Все числа, кроме 7.*
№ 6. *0,84.*
№ 7. *-40.*
№ 8. *5m-10.*

Вариант 2

№ 1. *б).*
№ 2. *в).*
№ 3. $2\frac{1}{11}$.
№ 4. $(m+4)\cdot k$.
№ 5. *Все числа, кроме 5.*
№ 6. *1,04.*
№ 7. *-36.*
№ 8. *7n+20.*

Самостоятельная работа 2.5
Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений
Вариант 1

№ 1. Выберите верные равенства:
а) $9x^2 - b^2 = (3x - b)^2$; б) $9x^2 + b^2 - 6xb = (3x - b)^2$;
в) $b^2 - 6xb + 9x^2 = (3x - b)^2$; г) $9x^2 + 6xb + b^2 = (3x - b)^2$.

№ 2. Выражение $(-a + 2x)^2$ тождественно равно выражению:
а) $(a + 2x)^2$; б) $(-a - 2x)^2$; в) $(a - 2x)^2$; г) $-a + 2x$.

№ 3. Выполните действия: $(a + 4)^2$.

№ 4. Преобразуйте в многочлен: $(3a - \frac{1}{3}b)^2$.

№ 5. Упростите выражение: $x^2 + 9 - (x + 3)^2$.

№ 6. Представьте в виде квадрата двучлена выражение: $36m^4 - 12m^2 + 1$.

№ 7. Решите уравнение: $(4 - x)^2 - x(x - 3) = 12$.

№ 8. Примените формулу квадрата разности и вычислите $8,97^2$.

№ 9. Упростите выражение $-(-a - 3b)^2 + 30ab + (4b - 3a)^2$ и найдите его значение при a=-2, b=3.

№ 10. Найдите наименьшее значение выражения $y^2 - 8y + 19$.

Вариант 2

№ 1. Выберите верные равенства:

а) $k^2 - 8ak + 16a^2 = (4a - k)^2$; б) $16a^2 + 8ak + k^2 = (4a - k)^2$;

в) $16a^2 - k^2 = (4a - k)^2$; г) $16a^2 + k^2 - 8ak = (4a - k)^2$.

№ 2. Выражение тождественно равно выражению:

а) $-b + 3y$; б) $(b - 3y)^2$; в) $(b + 3y)^2$; г) $(-b - 3y)^2$.

№ 3. Выполните действия: $(b + 3)^2$.

№ 4. Преобразуйте в многочлен: $(4y - \frac{1}{4}x)^2$.

№ 5. Упростите выражение: $x^2 + 4 - (x - 2)^2$.

№ 6. Представьте в виде квадрата двучлена выражение: $25n^4 - 10n^2 + 1$.

№ 7. Решите уравнение: $(2 - x)^2 - x(x + 8) = 6$.

№ 8. Примените формулу квадрата разности и вычислите $7,98^2$.

№ 9. Упростите выражение $-(-x - 5y)^2 + 22xy + (3y - 2x)^2$ и найдите его значение при x=-*3*, y=*2*.

№ 10. Найдите наименьшее значение выражения $y^2 - 10y + 29$.

Ответы. Самостоятельная работа 2.5
Квадрат суммы и квадрат разности двух выражений
Вариант 1

№ 1. *б)*; *в)*.
№ 2. *в)*.
№ 3. $a^2 + 8a + 16$.
№ 4. $9a^2 - 2ab + \frac{1}{9}b^2$.
№ 5. *-6x*.
№ 6. $(6m^2 - 1)^2$.
№ 7. *0,8*.
№ 8. *80,4609*.
№ 9. *95*.
№ 10. *3*.

Вариант 2

№ 1. *а)*; *г)*.
№ 2. *б)*.
№ 3. $b^2 + 6b + 9$.
№ 4. $16y^2 - 2xy + \frac{1}{16}x^2$.
№ 5. *4x*.
№ 6. $(5n^2 - 1)^2$.
№ 7. $-\frac{1}{6}$.
№ 8. *63,6804*.
№ 9. *-37*.
№ 10. *4*.

Самостоятельная работа 2.6
Произведение суммы и разности двух выражений
Вариант 1

№ 1. Укажите выражение, являющееся разностью квадратов выражений t и $5m$:
а) $(t-5m)^2$; б) $t^2-(5m)^2$; в) $(5mt)^2$; г) t^2-5m.

№ 2. Двучлен c^2-4 можно представить в виде произведения:
а) $(c-4)(c+4)$; б) $(c-2)(c+2)$; в) $(2-c)(2+c)$; г) $4c^2$.

№ 3. Представьте произведение $(4y-1)(4y+1)$ в виде многочлена стандартного вида.

№ 4. Преобразуйте в многочлен: $(x+0,3)(0,3-x)$.

№ 5. Представьте в виде многочлена произведение $(-2a+b^2)(2a+b^2)$.

№ 6. Представьте в виде произведения: $16m^2-\frac{1}{49}n^4$.

№ 7. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение:
$(m+2)^2-(m-3)(m+3)$.

№ 8. Используя формулу разности квадратов, вычислите: $654,68^2-345,32^2$.

№ 9. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:
$(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{5}n^2)(\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{5}n^2)-(\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{5}n^2)^2$.

№ 10. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:
$(a-2b)(a+2b)(a^2+4b^2)(a^4+16b^4)$.

Вариант 2

№ 1. Укажите выражение, являющееся разностью квадратов выражений $3c$ и d:
а) $(3cd)^2$; б) $(3c-d)^2$; в) $(3c)^2-d$; г) $(3c)^2-d^2$.

№ 2. Двучлен a^2-9 можно представить в виде произведения:
а) $(a-9)(a+9)$; б) $(a-3)(a+3)$; в) $(3-a)(3+a)$; г) $9a^2$.

№ 3. Представьте произведение $(5x-1)(5x+1)$ в виде многочлена стандартного вида.

№ 4. Преобразуйте в многочлен: $(y+0,2)(0,2-y)$.

№ 5. Представьте в виде многочлена произведение $(-3m+n^2)(3m+n^2)$.

№ 6. Представьте в виде произведения: $49a^2-\frac{1}{16}b^4$.

№ 7. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение:
$(n-3)^2-(n+2)(n-2)$.

№ 8. Используя формулу разности квадратов, вычислите: $764,57^2-235,43^2$.

№ 9. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:
$(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}b^2)(\frac{1}{5}a^2-\frac{1}{2}b^2)-(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{4}b^2)^2$.

№ 10. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:
$(x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2)(x^4+16y^4)$.

Ответы. Самостоятельная работа 2.6
Произведение суммы и разности двух выражений
Вариант 1

№ 1. *б).*
№ 2. *б).*
№ 3. $16y^2 - 1$.
№ 4. $0,09 - x^2$.
№ 5. $b^4 - 4a^2$.
№ 6. $(4m + \frac{1}{7}n^2)(4m - \frac{1}{7}n^2)$.
№ 7. $4m + 13$.
№ 8. 309360.
№ 9. $-\frac{2}{25}n^4 + \frac{1}{5}m^2n^2$.
№ 10. $a^8 - 256b^8$.

Вариант 2

№ 1. *г).*
№ 2. *б).*
№ 3. $25x^2 - 1$.
№ 4. $0,04 - y^2$.
№ 5. $n^4 - 9m^2$.
№ 6. $(7a + \frac{1}{4}b^2)(7a - \frac{1}{4}b^2)$.
№7. $-6n + 13$.
№ 8. 529140.
№ 9. $-\frac{5}{16}b^4 - \frac{1}{10}a^2b^2$.
№ 10. $x^8 - 256y^8$.

Контрольная работа № 2
Выражения и их преобразования
Вариант 1

№ 1. Выберите одночлен, записанный в стандартном виде:
а) $2abbc$; б) $2m^4n^3$; в) $-a\cdot\frac{1}{2}\cdot b$; г) $17a^2bca$.

№ 2. Укажите верное равенство:
а) $a-(b-c)=a-b-c$; б) $a-(b-c)=ab+ac$;
в) $a-(b-c)=a-b+c$; г) $a-(b-c)=a+b-c$.

№ 3. Найдите значение выражения $-0{,}3a+2$ при $a=-7$.

№ 4. Вынесите общий множитель за скобки: $3a-8a^2b$.

№ 5. Представьте в виде одночлена стандартного вида выражение:
$(-3a^4b)^2\cdot(-\frac{1}{3}a^5)$.

№ 6. Разложите на множители выражение $5mx-4by+4my-5bx$ и найдите его значение при $m=9$, $b=8$, $x=-6$, $y=7$.

№ 7. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение:
$(5-t)(-t-5)-(4+t)^2$.

№ 8. Найдите значение выражения $\frac{80{,}25^2-79{,}75^2}{0{,}4^2+1{,}28+1{,}6^2}$.

№ 9. Разложите на множители: $49-9n^2+6mn-m^2$.

№ 10. Найдите значение выражения $(x-b+1)^2+2(b-x-1)(x+b+1)+(x+b+1)^2$ при $b=0{,}4$ и $x=-4{,}019$.

Вариант 2

№ 1. Выберите одночлен, записанный в стандартном виде:
а) $m \cdot \frac{2}{3} \cdot n$; б) $9xb^2xc$; в) $7b^5c^2$; г) $3bcdd$.

№ 2. Укажите верное равенство:
а) $a-(b+c)=a-b+c$; б) $a-(b+c)=a+b-c$;
в) $a-(b+c)=a-b-c$; г) $a-(b+c)=ab-ac$.

№ 3. Найдите значение выражения $-0{,}2b+3$ при $b=-8$.

№ 4. Вынесите общий множитель за скобки: $4c-9c^2k$.

№ 5. Представьте в виде одночлена стандартного вида выражение:
$(-2m^5n)^2 \cdot (-\frac{1}{2}m^4)$.

№ 6. Разложите на множители выражение $3ax-4by+4ay-3bx$ и найдите его значение при $a=8$, $b=7$, $x=-5$, $y=3$.

№ 7. Представьте в виде многочлена стандартного вида выражение:
$(2-m)(-m-2)-(5+m)^2$.

№ 8. Найдите значение выражения $\frac{43{,}5^2-39{,}5^2}{1{,}8^2+0{,}72+0{,}2^2}$.

№ 9. Разложите на множители: $25-4x^2+4xy-y^2$.

№ 10. Найдите значение выражения $(y-c+3)^2+2(c-y-3)(y+c+3)+(y+c+3)^2$ при $c=0{,}2$ и $y=-8{,}029$.

Ответы. Контрольная работа № 2
Выражения и их преобразования
Вариант 1

№ 1. *б).*
№ 2. *в).*
№ 3. *4,1.*
№ 4. *a(3-8ab).*
№ 5. $-3a^{13}b^2$.
№ 6. *-2.*
№ 7. *-41-8t.*
№ 8. *20.*
№ 9. *(7-3n+m)(7+3n-m).*
№ 10. *0,64.*

Вариант 2

№ 1. *в).*
№ 2. *в).*
№ 3. *4,6.*
№ 4. *c(4-9ck).*
№ 5. $-2m^{14}n^2$.
№ 6. *-3.*
№ 7. *-29-10m.*
№ 8. *83.*
№ 9. (5-2x+y)(5+2x-y).
№ 10. *0,16.*

Лекция 7. Методика формирования навыков и умений тождественных преобразований целых и дробных рациональных выражений, иррациональных, трансцендентных (показательных, логарифмических, тригонометрических) выражений

Содержание линии тождественных преобразований выделяется в настоящее время достаточно четко. В нее входят: изучение тождеств в числовых системах, их применение к упрощению выражений и решению уравнений, изучение тождеств в классе элементарных функций. ***Организация изучения отдельных тождеств предполагает использование специальных циклов заданий. Цикл заданий на материале конкретной темы характеризуется соединением в последовательность упражнений нескольких аспектов изучения и приемов расположения материала.*** Применительно к тождественным преобразованиям представление о цикле может быть дано следующим образом. ***Задания связаны с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла, наряду с исполнительными, входят задания, требующие распознавания применимости рассматриваемого тождества. Изучаемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях. Учитывается специфика тождества.***

Задания в цикле разбивают на две группы.

I группа. Задания, выполняемые при первоначальном знакомстве с тождеством. Это материал для нескольких идущих подряд уроков. ***Это этап усвоения тождества, запоминания его словесной формулировки, выработки навыка его применения в хорошо видной ситуации.***

II группа связывает изучаемое тождество с различными его применениями. ***Это этап углубленного понимания тождества за счет рассмотрения его в разнообразных ситуациях в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам школьного курса.***

Рассмотрим систему упражнений для усвоения тождества $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Задания	Методические указания
1 группа 1. Представить в виде произведения: a) $m^2 - n^2$; b) $c^2 - 5^2$; c) $196 - k^2$.	Формируется структура изучаемого тождества, уточняются связи между его словесным выражением и символической формой. Идет работа не только с буквенными, но и буквенно-числовыми выражениями.
2. Проверить справедливость равенства: $(10^2 - 1)(10^2 + 1) = 10^4 - 1$.	Задание направлено на формирование навыка двустороннего преобразования
3. Раскрыть скобки в выражении: $(4 + 5^2)(4 - 5^2)$.	Идет отработка применения тождества
4. Вычислить: $25^2 - 24^2$; $49 * 51$.	Эта группа упражнений углубляет представление об операции подстановки и развивает навыки ее применения
5. Разложить на множители: $x^4 - y^4$; $16(ab)^2 - (a - b)^2$.	Изучаемое тождество применяется дважды.
6. Упростить: $(a + b)^2 - (a - b)^2$.	Переосмысление изучаемого тождества в терминах отношений между компонентами арифметических действий.
2 группа 1. Разложить на множители: $x^2 - 5$. 2. Исключить иррациональность в знаменателе дроби: $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$. 3. Доказать, что если k - нечетное число, то k - 1 кратно 4. 4. Функция задана выражением: $x^2 + 2\|x\| + 1$ Упростить, раскрыв знак модуля.	Идет привлечение новой операции - извлечение корня. Задания предполагают наличие уже сформированных навыков использования изучаемого тождества для разности квадратов. Цель предлагаемых заданий - углубить понимание тождества за счет рассмотрения разнообразных приложений его в различных ситуациях, в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам курса математики.
5. Решить уравнение: $x^3 - 4x = 15$.	$(*) \Leftrightarrow x^3 - 9x = 15 - 5x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(x-3)(x+3) = 5(3-x) \Leftrightarrow x = 3$ или $x(x+3) = -5$. Но уравнение $x(x+3) = -5$ действительных корней не имеет, поэтому $x = 3$ - единственный корень уравнения. Здесь использование тождества для разности квадратов составляет лишь часть решения уравнения, являясь ведущей идеей проведения преобразований.

Школьный курс математики выделяет два основных класса математических выражений: алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Определение. Алгебраическим выражением называется выражение, составленные из конечного числа букв и цифр, соединенных знаками действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень и извлечения корня).

Определение. Трансцендентными называются аналитические функции, которые не являются алгебраическими (тригонометрические, логарифмические и показательные).

Определение. Тождество – это равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в его состав переменных.

Определение. Два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называются тождественно равными.

Определение. Тождественное преобразование выражения – это замена исходного выражения на выражение, тождественно равное ему.

Формирование навыков тождественных преобразований более быстро протекает, если учитель добивается от учащегося устного выполнения некоторых преобразований не только при устном счете, но и в процессе решения задач.

Полезно также иметь в виду, что всякий раз, когда возникает необходимость в тождественном преобразовании, мы имеем дело с выражением, область определения которого задана. При выполнении преобразования она может расширяться или сужаться.

Пример

$\frac{x+2}{x(x+3)} - \frac{1}{3x+9} = \frac{3x+6-x}{3x(x+3)} = \frac{2}{3x}, \; x \neq 0, x \neq -3.$

В процессе обучения у учащихся должны быть сформированы навыки доказательства тождеств следующими способами.

Если надо доказать, что A=B, то можно

- доказать, что А - В = 0,
- доказать, что А/В = 1,
- преобразовать А к виду В,
- преобразовать В к виду А,
- преобразовать А и В к одному виду С.

В качестве опоры, на которой строятся доказательства тождеств, используются свойства арифметических операций. Иногда в доказательстве привлекаются геометрические понятия и методы. Геометрические доказательства не только поучительны и наглядны, но и способствуют усилению межпредметных связей.

Доказательства тождеств можно разделить на три типа в зависимости от того, насколько они удовлетворяют требованиям строгости:

а) не полностью строгие рассуждения, требующие использования метода математической индукции для придания им полной строгости. Эти доказательства применяются для вывода правила действий с многочленами, свойств степеней с натуральными показателями.

Например, доказать, что при каждом натуральном n справедливо равенство:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

б) полностью строгие рассуждения, опирающиеся на основные свойства арифметических действий и не использующие других свойств числовой системы. Основная область применения таких доказательств - тождества сокращенного умножения. Многие из утверждений, выражаемых формулами сокращенного умножения, допускают наглядно-геометрическую иллюстрацию.

в) полностью строгие рассуждения, использующие условия разрешимости уравнений вида $\Psi(x) = a$, где Ψ - изучаемая элементарная функция. Такие доказательства характерны для вывода свойств степени с рациональным показателем и логарифмической функции. Например, при доказательстве свойства арифметического корня:
$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (1)

будем опираться на переформулировку определения арифметического квадратного корня: для неотрицательных чисел х и у равенства $y = \sqrt{x}$ и $y^2 = x$ равносильны, поэтому (1) равносильно $(\sqrt{ab})^2 = (\sqrt{a}\sqrt{b})^2$ (2). Откуда следует, $ab = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$.

Прием доказательства, который здесь использовался, применяется довольно редко, тем не менее, необходимо подчеркнуть, что основная идея доказательства состоит в сопоставлении двух операций (или функций) - прямой и обратной к ней, что найдет применение уже в старшей школе.

Технологическая цепочка формирования алгоритмов и приемов тождественных преобразований выражений в основной школе

Линия	Алгоритм и приемы вычислений
Целые выражения Виды целых выражений (одночлен, многочлен), их степень, стандартный вид, частные случаи, формулы сокращенного умножения. Действия с целыми выражениями: разложение многочлена на множители; выделение полного квадрата в трехчлене.	1. Алгоритмы выполнения основных действий с целыми выражениями. 2. Приемы разложения многочлена на множители. 3. Специальный прием выделения полного квадрата в трехчлене. 4. Обобщенный прием упрощения целого выражения. 5. Приемы доказательства тождества.
Рациональные выражения Основное свойство дробного выражения и следствия из него. Сокращение дробных выражений. Действия с рациональными выражениями.	6. Приемы записи преобразований рациональных выражений. 7. Приемы использования аналогии с действиями над рациональными числами в общих и частных случаях. 8. Обобщение приемов 4 и 5.
Иррациональные выражения Основное свойство корня, простейшие преобразования корней. Действия с корнями, возведение выражения в степень с дробным показателем.	9. Специальные приемы основных преобразований арифметических корней. 10. Приемы преобразования выражений со степенями с рациональным показателем. 11. Прием доказательства неравенств. 12. Обобщение приемов 2, 4, 5 и 11.

Тождественные преобразования выражений, содержащих степени и квадратные корни.

Цель: Научить выполнять тождественные преобразования степенных выражений.

Изучаются тождества:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$; $(a^n)^m = a^{nm}$;

$(a^n b^n) = a^n \cdot b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

После изучения тождеств возводят в степень одночлены.

Уточняют, в каком случае показатели степеней складывают, а в каком перемножают.

Далее рассматривают темы: квадратные корни, арифметический квадратный корень и квадратный корень из произведения и дроби.

Изучают формулы – тождества:

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Работа учителя по организации процесса обучения любой теме школьного курса математики начинается с выполнения логико-методического анализа темы.

Проведение логико-методического анализа темы «Тождественные преобразования иррациональных выражений».

Цели изучения темы:

1. Формирование теоретического аппарата темы и умения применять его в практике решения задач, включая задачи на преобразования иррациональных выражений, требующих комплексного применения знаний;

2. Пропедевтика и расширение функциональной и числовой линии, линии уравнений и неравенств;

3. Применение математического аппарата для других учебных дисциплин и прикладных наук;

4. Развитие гибкости мышления (при использовании наиболее рационального преобразования), умения оперировать абстрактными объектами (одно из основных качеств творческого мышления), умения абстрагировать (видеть только форму, а не содержание), вариативности мышления (умения читать слева направо и справа налево), развитие логического мышления и математической речи;

5. Развитие познавательного интереса (через использование софизмов, доказательств с ошибками, свойств функций и их графиков, с непривычными формулировками). Эта цель может быть реализована посредством нетрадиционных заданий, например: а) внесите под знак корня $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b}$, проверьте при а=-3; б) замените |а| тождественно равным выражением.

6. При логико-математическом анализе темы выделяют блоки:

А - актуализируемые знания, умения, навыки (каждый пункт нумеруется буквами),

Б - вводимые понятия (нумеруются числами) и логический уровень их введения,

В - система математических утверждений (факты и связи между ними показаны стрелками) и их обоснования (могут быть реализованы на разных уровнях строгости). Для каждого утверждения указываются номера (числа (блок Б) или буквы (блок А)) обосновывающих знаний. Это позволит ребенку создать целостное представление о всей теме, о конкретных теоремах и их доказательствах, позволит организовать обучение блоками (выделить связанные группы знаний и умений) и найти идею доказательств. Например, доказательство теоремы о равенстве $\sqrt{a^2} = |a|$ предлагается после определения арифметического квадратного корня, значит, и будет на нем строиться.

7. Тема «Тождественные преобразования иррациональных выражений» в теоретическом отношении базируется на линии числа, теории тождественных преобразований рациональных выражений, понятиях иррационального числа, квадратного корня, арифметического квадратного корня. Успешное изучение этой темы невозможно без сформированности у учащихся навыков выполнения тождественных преобразований на первом этапе изучения курса алгебры (Блок А).

В теоретической части темы можно выделить основные теоретические положения, доказательство которых проведено на строгом математическом уровне, и операционный аппарат: примеры прямого применения теорем; выделение основных типовых задач (задача внесения множителя под знак корня и обратная операция); примеры преобразований в условиях комплексного применения знаний (Блоки Б и В).

Задачный материал на обязательном уровне содержит задачи (по видам заданий):

1) упрощение выражений (прямое применение теории, комплексное применение знаний);

2) сокращение дроби;

3) освобождение от иррациональности в знаменателе.

Дополнительная система упражнений представлена задачами этих же типов, но на более высоком уровне сложности. Например, задача вынесения множителя из-под знака корня на обязательном уровне рассматривается на числовом множестве; в дополнительной системе упражнений эта задача сформулирована на множестве выражений, содержащих переменные.

При изучении этой темы могут быть поставлены учебные задачи:

1) научиться выносить (вносить) множитель из-под знака корня;

2) сравнивать иррациональные числа и т.д.

Методическое планирование обычно оформляется в виде таблицы.

В процессе изучения темы целесообразно использовать такие формы контроля, как промежуточный (индивидуальный, коллективный) и итоговый. При осуществлении контроля целесообразно проводить его для разных уровней усвоения (уровень воспроизведения, уровень прямого применения, уровень творческого применения знаний).

При организации системы заданий можно выделить два аспекта.

Во-первых, при построении системы заданий в рамках учебной темы необходимо разнообразить их формулировку (заменить тождественно равным выражением; найти разность, отношение и т.д.; найти ошибку; установить, при каких условиях $a\sqrt{9b^2} = -3|ab|$).

Во-вторых, построение системы заданий должно осуществляться в рамках линии тождественных преобразований школьного курса алгебры и начал анализа.

ТРИГОНОМЕТРИЯ (40 ч)

Градусная и радианная мера произвольного угла. Единичная окружность. Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса произвольного угла.

Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества).

Тригонометрические функции числового аргумента. Их свойства и графики.

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа.

Простейшие тригонометрические уравнения sinx=a, cosx=a, tgx=a, ctgx=a и уравнения, сводящиеся к простейшим.

Формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать термины и правильно применять понятия: единичная окружность, синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла; тригонометрические функции числового аргумента; арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа;

знать:

• свойства тригонометрических функций числового аргумента;

• тригонометрические тождества; формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение;

• числовые значения выражений sinx, cosx при x, равном $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ и tgx, ctgx для этих углов (в случае существования этих значений); значения выражений arcsina и arccosa при a, равном $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm1$, и выражений arctga и arcctga при a, равном $0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm1, \pm\sqrt{3}$;

• формулы решения простейших тригонометрических уравнений;

уметь:

• переводить градусную меру углов в радианную и наоборот;

• строить углы по их заданной градусной или радианной мере; использовать единичную окружность для нахождения значений синуса и косинуса заданных углов; строить углы по заданному значению их синуса, косинуса, тангенса;

• находить числовые значения тригонометрических выражений, используя значения тригонометрических функций и соответствующих формул;

• выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул;

• строить графики тригонометрических функций и применять свойства функций;

решать: простейшие тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к ним (методами разложения на множители, замены переменной), однородные тригонометрические уравнения.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ (25 ч)

Корень n-й степени из числа a $(n \geqslant 2, n \in N)$. Арифметический корень. Основные свойства корня n-й степени. Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени.

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с действительным показателем.

Степенная функция с рациональным показателем, свойства и график степенной функции.

Иррациональные уравнения.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

иметь представление о степени с действительным показателем;

знать термины и правильно применять понятия: корень n-й степени из числа а, показатель степени корня, подкоренное выражение, степень с рациональным показателем, степенная функция, иррациональное уравнение;

знать:

• основные свойства корня n-й степени, свойства степеней с рациональным показателем; свойства и график степенной функции; формулы, выражающие свойства степеней и корней n-й степени;

• основные методы решения иррациональных уравнений;

уметь:

• вычислять корень n-й степени из действительного числа, представляющего n-ю степень; выносить множитель из-под корня; оценивать значение корня; представлять корень n-й степени в виде степени с рациональным показателем и наоборот; упрощать выражения, содержащие корни и степени с рациональным показателем;

• строить графики степенных функций $y = x^k$ для $k \in Z, k \neq 0, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{\frac{1}{3}}$;

• решать уравнения вида $x^n = a$, где $n \in N$, $a \in R$; иррациональные уравнения.

Выражение, в котором переменная содержится под знаками тригонометрических функций, называют *тригонометрическим.* Для преобразования выражений используют свойства тригонометрических функций и формулы тригонометрии.

Формулы сложения и вычитания аргументов. Для любых действительных чисел α и β справедливы формулы:

$cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta$, (1)

$cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta + sin\alpha sin\beta$, (2)

$sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$, (3)

$sin(\alpha-\beta)=sin\alpha cos\beta - cos\alpha sin\beta$, (4)

$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$, (5)

$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha tg\beta}$, (6)

Формула (5) верна при $\alpha, \beta, \alpha+\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$. Формула (6) верна при $\alpha, \beta, \alpha-\beta$, отличных от $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Пример 1. Вычислить $sin75^0$.

Решение. Имеем $sin75^0=sin(30^0+45^0)$. Воспользовавшись формулой (3) при $\alpha=30^0, \beta=45^0$, получим: $sin(30^0+45^0)=sin30^0cos45^0+cos30^0sin45^0$.

Известно, что $sin30^0=\frac{1}{2}, cos45^0=sin45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}, cos30^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Значит $sin(30^0+45^0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

Итак, $sin75^0=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$.

Пример 2. Найти $tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)$, если $tg\alpha=\frac{3}{4}$.

Решение. Воспользуемся формулой (5) и учтем, что $tg\frac{\pi}{4}=1$.

Имеем $tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\alpha}{1-tg\frac{\pi}{4}tg\alpha}=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=7$.

Пример 3. Упростить выражение $tgt-ctgt$.

$tgt-ctgt=\frac{sint}{cost}-\frac{cost}{sint}=\frac{sin^2t-cos^2t}{sintcost}=-\frac{cos^2t-sin^2t}{\frac{1}{2}sin2t}=-2\frac{cos2t}{sin2t}=-2ctg2t$.

В ***тождественных преобразованиях тригонометрических выражений*** могут быть использованы следующие алгебраические приемы: добавление и вычитание одинаковых слагаемых; вынесение общего множителя за скобки; умножение и деление на одну и ту же величину; применение формул сокращенного умножения; выделение полного квадрата; разложение квадратного трехчлена на множители; введение новых переменных с целью упрощения преобразований.

При преобразованиях тригонометрических выражений, содержащих дроби, можно использовать свойства пропорции, сокращение дробей или приведение дробей к общему знаменателю. Кроме того, можно пользоваться выделением целой части дроби, умножением числителя и знаменателя дроби на одинаковую величину, а также по возможности учитывать однородность числителя или знаменателя. При необходимости можно представлять дробь в виде суммы или разности нескольких более простых дробей.

Кроме того, применяя все необходимые методы преобразования тригонометрических выражений, необходимо постоянно учитывать область допустимых значений преобразуемых выражений.

В школьном курсе математики учащиеся изучают показательную и логарифмическую функции и их свойства, тождественные преобразования логарифмических и показательных выражений и их применение к решению соответствующих уравнений и неравенств, знакомятся с основными понятиями, утверждениями.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА ЧИСЛА (7 ч)

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с иррациональным показателем.

Определение логарифма числа. Основное логарифмическое тождество.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: определение и свойства степени с рациональным показателем; определение логарифма числа; основное логарифмическое тождество;

уметь: применять основное логарифмическое тождество:

- для упрощения выражений;
- для представления положительного числа в виде степени с любым положительным основанием;
- применять полученные знания при решении задач практической направленности;
- решать задачи с практическим и межпредметным содержанием.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ (20 ч)

Процессы показательного роста и показательного убывания. Показательная функция. Свойства показательной функции. Решение задач на применение свойств показательной функции.

Показательные уравнения. Решение показательных уравнений на основании свойств показательной функции. Решение показательных уравнений с помощью разложения на множители, заменой переменной, решение однородных показательных уравнений. Решение показательных неравенств.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: определение и свойства показательной функции, методы решения показательных уравнений и неравенств;

иметь представление о показательной функции как математической модели, которая находит широкое применение при изучении процессов и явлений окружающего мира (радиоактивный распад вещества, рост колонии бактерий);

уметь:

- строить графики показательной функции с различными основаниями;
- применять свойства и графики показательной функции с различными основаниями для сравнения значений показательной функции, для определения множества значений, наибольшего и наименьшего значений;
- решать показательные уравнения на основании свойств показательной функции, с помощью разложения на множители, заменой переменной;
- решать однородные показательные уравнения;
- решать показательные неравенства на основании свойств показательной функции с помощью разложения на множители, заменой переменной;
- решать однородные показательные неравенства;
- решать задачи с практическим и межпредметным содержанием.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (30 ч)

Свойства логарифмов: логарифм произведения, частного, степени. Формула перехода от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием. Десятичный логарифм.

Логарифмическая функция. Свойства логарифмической функции. Решение задач на применение свойств логарифмической функции.

Решение логарифмических уравнений на основании свойств логарифмической функции и свойств логарифмов. Решение логарифмических уравнений заменой переменных. Решение систем логарифмических уравнений.

Решение логарифмических неравенств.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: свойства логарифмов: логарифм произведения, частного, степени; формулу перехода от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием; определение десятичного логарифма; определение и свойства логарифмической функции; методы решения логарифмических уравнений и неравенств;

уметь:

- строить графики логарифмической функции с различными основаниями;
- применять свойства и графики логарифмической функции с различными основаниями для сравнения значений логарифмической функции, для нахождения области определения и множества значений, наибольшего и наименьшего значений;
- решать логарифмические уравнения на основании свойств логарифмической функции, с помощью разложения на множители, заменой переменной;

решать: системы логарифмических уравнений, логарифмические неравенства, задачи с практическим и межпредметным содержанием.

Лекция 8. Методика введения и изучения свойств степеней с показателями из разных числовых множеств. Методика изучения степени с натуральным и целым показателем.

У математиков не сразу сложилось представление о возведении в степень как о самостоятельной операции, и при умножении одного и того же числа много раз они тратили много ненужных усилий. Решение нашел древнегреческий математик Диофант Александрийский. В своей знаменитой арифметике он впервые описывает натуральную степень числа: «Все числа состоят из некоторого количества единиц; ясно, что они продолжаются, увеличиваясь до бесконечности. Среди них находятся квадраты, получающиеся от умножения некоторого числа на себя; это же число называется стороной квадрата, затем кубы, получающиеся от умножения квадратов на их сторону, далее квадратоквадраты – от умножения квадратов самих на себя, далее квадрато-кубы, получающиеся от умножения квадрата на куб его стороны, далее кубо-кубы – от умножения кубов самих на себя». Математики средних веков стремились сократить число символов и ввести единое обозначение. Француз Никола Шюке ввел свою символику и добавил нулевой и отрицательный показатель степени. Он писал показатель сверху и справа от коэффициента мелким шрифтом. Такая символика приближена к современной.

К началу изучения темы «Степень» необходимо иметь простейшие представлений о такой операции, как возведение числа в натуральную степень. Знакомство с данной операцией осуществляется на начальном этапе обучения математике. В курсе алгебры 7 класса вводится понятие степени с натуральным показателем, изучаются свойства степеней и соответствующие тождественные преобразования со степенями. В 8 классе основное внимание уделено преобразованиям рациональных дробей и степеней с целыми показателями. Положено начало изучению тождественных преобразований иррациональных выражений (квадратные корни). В 9 классе вводится понятие степени с рациональным показателем. **Без ознакомления со степенями и операцией по возведению числа в степень невозможно изучение полиномов, степенных и показательных уравнений, неравенств и их систем.**

Изучение математики на ***втором этапе*** (VII—IX классы) направлено на знакомство учащихся с действительными числами, изучение иррациональных и некоторых трансцендентных (на примере тригонометрических) выражений, уравнений и неравенств, основных элементарных функций, систематическое изучение геометрических фигур, их свойств и отношений. При изучении многочленов и рациональных дробей формируются умения осуществлять тождественные преобразования. Основным подходом к решению текстовых задач становится использование математических моделей: уравнений, неравенств, их систем.

Содержание ***алгебраического компонента*** VII—IX классов предусматривает знакомство с понятиями иррационального и действительного чисел. Введение иррациональных чисел мотивируется недостаточностью рациональных чисел для решения некоторых математических задач. Здесь систематизируются знания учащихся о выражениях и формулах; изучаются тождества, формируются навыки тождественных преобразований; рассматриваются рациональные выражения и действия над ними; изучаются квадратный трехчлен, квадратные корни и их свойства, корни степени n; свойства числовых неравенств; квадратные уравнения; линейные и квадратные неравенства; системы уравнений с двумя переменными первой степени; системы уравнений с двумя переменными, сводящиеся к уравнениям первой или второй степени; арифметическая и геометрическая прогрессии; некоторые функции, их графики и свойства (область определения, множество (область) значений, нули, промежутки знакопостоянства, возрастание, убывание, наибольшее и наименьшее значения). Тождественные преобразования выражений, содержащих степени изучаются в 7 классе. **Расширение понятия степени проводится последовательно в**

зависимости от ее показателя (натурального, целого, рационального, действительного). Оно осуществляется так, чтобы сохранились все основные свойства степени с натуральным показателем. Это возможно лишь тогда, когда основание степени положительно.

Цели обучения теме «Степень»:

– ***образовательные:*** сформулировать понятие степени; обеспечить учащимся условия для овладения свойствами степеней; научить применять их при преобразованиях числовых выражений;

– ***развивающие:*** содействовать интеллектуальному и личностному развитию, математическому и логическому мышлению учащихся; формировать познавательный интерес к математике;

– ***воспитательные:*** воспитывать внимательность, аккуратность, упорство в достижении целей; выразить отношение к математике как к общечеловеческой культуре.

X класс
СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ (25 ч)

Корень n-й степени из числа a $(n \geqslant 2, n \in N)$. Арифметический корень. Основные свойства корня n-й степени. Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени.

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с действительным показателем.

Степенная функция с рациональным показателем, свойства и график степенной функции.

Иррациональные уравнения.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

иметь представление о степени с действительным показателем;

знать термины и правильно применять понятия: корень n-й степени из числа а, показатель степени корня, подкоренное выражение, степень с рациональным показателем, степенная функция, иррациональное уравнение;

знать:

• основные свойства корня n-й степени, свойства степеней с рациональным показателем; свойства и график степенной функции; формулы, выражающие свойства степеней и корней n-й степени;

• основные методы решения иррациональных уравнений;

уметь:

• вычислять корень n-й степени из действительного числа, представляющего n-ю степень; выносить множитель из-под корня; оценивать значение корня; представлять корень n-й степени в виде степени с рациональным показателем и наоборот; упрощать выражения, содержащие корни и степени с рациональным показателем;

• строить графики степенных функций $y = x^k$ для $k \in Z$, $k \neq 0$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$;

• решать уравнения вида $x^n = a$, где $n \in N$, $a \in R$; иррациональные уравнения.

XI класс
ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА ЧИСЛА (7 ч)

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с иррациональным показателем.

Определение логарифма числа. Основное логарифмическое тождество.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: определение и свойства степени с рациональным показателем; определение логарифма числа; основное логарифмическое тождество;

уметь: применять основное логарифмическое тождество:

- для упрощения выражений;
- для представления положительного числа в виде степени с любым положительным основанием;
- применять полученные знания при решении задач практической направленности;
- решать задачи с практическим и межпредметным содержанием.

Во время изучения темы «Степень» в большинстве случаев используется фронтальная (при изучении нового материала), коллективная (на уроках закрепления) и индивидуальная (при проверке знаний) формы обучения. Методы обучения применяются в единстве со средствами обучения. Однозначного определения понятия «средства обучения» в педагогике нет. Под ними чаще всего понимаются учебные и наглядные пособия, технические средства, демонстрационные устройства и др.

Методические рекомендации по обучению теме «Степень» в курсе алгебры основной школы

Последовательность изучения темы «Степень»:

– степень с натуральным показателем;

– степень с целым показателем;

– ***арифметический квадратный корень;***

– ***степень с рациональным показателем;***

– ***корень n-й степени;***

Степенью называют произведение из нескольких одинаковых множителей. Например:

$2 \times 2 \times 2$

Значение данного выражения равно 8

$2 \times 2 \times 2 = 8.$

Левую часть этого равенства можно сделать короче – сначала записать повторяющийся множитель и указать над ним сколько раз он повторяется. Повторяющийся множитель в данном случае это 2. Повторяется он три раза. Поэтому над двойкой записываем тройку: $2^3 = 8$.

Это выражение читается так: «два в третьей степени равно восемь» или «третья степень числа 2 равна 8».

Короткую форму записи перемножения одинаковых множителей используют чаще. Поэтому надо помнить, что если над каким-то числом надписано другое число, то это есть перемножение нескольких одинаковых множителей.

Например, если дано выражение 5^3, то следует иметь ввиду, что это выражение равносильно записи $5 \times 5 \times 5$.

Число, которое повторяется называют основанием степени. В выражении 5^3 основанием степени является число 5.

А число, которое надписано над числом 5 называют показателем степени. В выражении 5^3 показателем степени является число 3. Показатель степени показывает сколько раз повторяется основание степени. В нашем случае основание 5 повторяется три раза:

$$5^3 = \underbrace{5 \times 5 \times 5}_{3\ \text{раза}}$$

Саму операцию перемножения одинаковых множителей называют возведением в степень.

Например, если нужно найти произведение из четырёх одинаковых множителей, каждый из которых равен 2, то говорят, что число 2 возводится в четвёртую степень:

$$2^4 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{4 раза}} = 16$$

Видим, что число 2 в четвёртой степени есть число 16.

Степень с натуральным показателем

Степень числа a с натуральным показателем n — это выражение вида a^n, которое равно произведению n множителей, каждый из которых равен a:

$$a^n = \underbrace{aaa....a}_{n\ \text{раз}}$$

Примеры:

$$a^2 = \underbrace{aa}_{\text{2 раза}}$$

$$a^3 = \underbrace{aaa}_{\text{3 раза}}$$

$$a^4 = \underbrace{aaaa}_{\text{4 раза}}$$

$$a^5 = \underbrace{aaaaa}_{\text{5 раз}}$$

Следует быть внимательным при возведении числа в степень. Часто по невнимательности человек умножает основание степени на показатель.

Например, число 5 во второй степени есть произведение двух множителей каждый из которых равен 5. Это произведение равно 25:

$5^2 = 5 \times 5 = 25.$

Теперь представим, что мы по невнимательности умножили основание 5 на показатель 2:

$5^2 \neq 5 \times 2 = 10.$

Получилась ошибка, поскольку число 5 во второй степени не равно 10.

Дополнительно следует упомянуть, что степень числа с показателем 1, есть само это число: $a^1 = a$.

Например, число 5 в первой степени есть само число 5: $5^1 = 5$.

Соответственно, если у числа отсутствует показатель, то надо считать, что показатель равен единице.

Например, числа 1, 2, 3 даны без показателя, поэтому их показатели будут равны единице. Каждое из этих чисел можно записать с показателем 1:

$1 = 1^1, \quad 2 = 2^1, \quad 3 = 3^1.$

А если возвести 0 в какую-нибудь степень, то получится 0.

Основной целью изучения данного пункта является накопление знаний о степенях, то есть создание своего рода фундамента для последующего изучения широкого круга тождественных преобразований различного вида и разделов: квадратный корень, степень с целым показателем, корень n-й степени. В связи с этим «степени с натуральным показателем» необходимо уделить особое внимание; добиться того, чтобы данная тема была усвоена всеми учащимися. Определение степени числа с натуральным показателем учащиеся должны хорошо усвоить, так как на его основе этого определения строится алгоритм вычисления степени. Для лучшего запоминания определения целесообразно использовать наглядный материал. Необходимо требовать от учащихся грамотного прочтения выражения при конкретных значениях. Внимание учащихся следует обратить на свойство степени с отрицательным основанием с четным и нечетным показателем, а также на справедливость неравенства $a^2 \geqslant 0$ при любых значениях а. Таким образом, ученик в первую очередь должен привыкнуть определять знак получаемого значения степени. Большое количество упражнений уделяется вычислению значений выражений. Для их выполнения учитель должен ознакомить учеников с принятым порядком выполняемых действий: ***при отсутствии скобок сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление, и сложение и вычитание.***

При изучении свойств ***степеней с натуральным показателем*** (см. определение 1, 2), учащиеся сталкиваются с теоремами и их доказательствами. На этом этапе важно объяснить, что равенство $a^m a^n = a^{m+n}$ является основным свойством степени, так как из него следуют правила деления степеней и возведения степени в степень. Уместно рекомендовать учащимся изучить доказательства свойств степеней по учебнику, либо попробовать доказать их самостоятельно. Требовать воспроизводить доказательства в дальнейшем – не рекомендуется.

В связи с изучением правила деления степеней с одинаковыми показателям вводится понятие степени с нулевым показателем. Необходимо выделить, что выражение 0^0 не имеет смысла. Далее рекомендуется обратить внимание, что формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$ теперь можно применять в случае, когда один из показателей равен нулю, либо оба показателя равны нулю. А формулу $a^m : a^n = a^{m-n}$, где $a \neq 0$ можно применять при любых целых неотрицательных m и n, если $m \geqslant n$. При изучении правила возведения в степень произведения, нужно отметить, что для этого действия используются переместительное и сочетательное свойства умножения.

Степень с целым показателем

В ходе изучения данной темы, учащиеся должны осознать расширение понятия степени, а именно то, что степень бывает не только с натуральным, но и с любым целым показателем, поэтому первый урок целесообразно начать с напоминания определения степени с натуральным показателем. Учитель должен объяснить, что у степени с неположительным целым показателем основание не должно быть равным нулю. Учащиеся могут допустить типичную ошибку психологического характера: соотносить степень с отрицательным показателем с отрицательным числом. Для предупреждения подобных ошибок полезны некоторые упражнения, которые неоднократно нужно предлагать к выполнению, причем показатель степени можно брать в виде числа.

Ошибки допускаются также при вычислении значений степеней с дробными основаниями. Поэтому следует обучить школьников рациональному приему, для усвоения которого следует выполнить определенные упражнения. Свойства у степеней с целым показателями такие же, как и у степеней с натуральными показателями. Поэтому новый материал ученикам несложно будет освоить. Учителю достаточно объяснить, что каждое «новое свойство» можно доказать с помощью соответствующего «старого свойства», и рассмотреть предложенные примеры этих «доказательств».

Выражение 0^0 не имеет смысла. Но в некоторых разделах математики, в частности анализе и теории множеств, выражение 0^0 может иметь смысл.

Пример 1. Возвести число -2 в четвёртую степень.

Число -2 в четвёртой степени это произведение четырёх множителей, каждый из которых равен (-2):

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2 \times (-2) = 16.$

Легко заметить, что при возведении в степень отрицательного числа может получиться либо положительный ответ либо отрицательный. Знак ответа зависит от показателя исходной степени.

Если показатель степени чётный, то ответ будет положительным. Если показатель степени нечётный, ответ будет отрицательным. Покажем это на примере числа -3:

$(-3)^1 = (-3) = -3,$
$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9,$
$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27,$
$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81.$

В первом и в третьем случае показатель был **нечётным** числом, поэтому ответ стал **отрицательным.**

Во втором и в четвёртом случае показатель был **чётным** числом, поэтому ответ стал **положительным**.

Пусть ab исходное произведение. Чтобы возвести данное произведение в степень n, нужно по отдельности возвести множители a и b в указанную степень n:

$(ab)^n = a^n b^n.$

Данное свойство справедливо для любого количества множителей. Следующие выражения также справедливы:

$(abc)^n = a^n b^n c^n, \qquad (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n.$

Пример 2. Найти значение выражения $(2 \times 3 \times 4)^2$.

В данном примере нужно возвести во вторую степень произведение $2 \times 3 \times 4$. Чтобы сделать это, нужно возвести во вторую степень каждый множитель этого произведения и перемножить полученные результаты:

$(2 \times 3 \times 4)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 4^2 = 4 \times 9 \times 16 = 576.$

При возведении степени в степень основание оставляют без изменений, а показатели перемножают $(a^n)^m = a^{n \times m}$.

К примеру, выражение $(2^3)^2$ является возведением степени в степень - два в третьей степени возводится во вторую степень. Чтобы найти значение этого выражения, основание можно оставить без изменений, а показатели перемножить: $(2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6$.

Далее вычислить степень 2^6, которая равна 64:
$(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6 = 64$.

Данное правило основано на предыдущих правилах: возведении в степень произведения и основного свойства степени.

Вернёмся к выражению $(2^3)^2$. Выражение в скобках 2^3 представляет собой произведение из трёх одинаковых множителей, каждый из которых равен 2. Тогда в выражении $(2^3)^2$ степень, находящуюся внутри скобок можно заменить на произведение $2 \times 2 \times 2$: $(2 \times 2 \times 2)^2$.

Пример 3. Найти значение выражения $\frac{2^5 \times (2^3)^4}{2^{13}}$.

Выполним в числителе возведение степени в степень. Сделать это нужно с выражением $(2^3)^4$:
$\frac{2^5 \times (2^3)^4}{2^{13}} = \frac{2^5 \times 2^{3\times 4}}{2^{13}} = \frac{2^5 \times 2^{12}}{2^{13}}$.

Теперь выполним в числителе умножение степеней с одинаковыми основаниями:
$\frac{2^5 \times (2^3)^4}{2^{13}} = \frac{2^5 \times 2^{3\times 4}}{2^{13}} = \frac{2^5 \times 2^{12}}{2^{13}} = \frac{2^{5+12}}{2^{13}} = \frac{2^{17}}{2^{13}}$.

Теперь применяем правило деления степеней с одинаковыми основаниями:
$\frac{2^5 \times (2^3)^4}{2^{13}} = \frac{2^5 \times 2^{3\times 4}}{2^{13}} = \frac{2^5 \times 2^{12}}{2^{13}} = \frac{2^{5+12}}{2^{13}} = \frac{2^{17}}{2^{13}} = 2^{17-13} = 2^4 = 16$.

Значит, значение выражения $\frac{2^5 \times (2^3)^4}{2^{13}}$ равно 16.

Чтобы возвести в степень обыкновенную дробь, нужно возвести в указанную степень числитель и знаменатель этой дроби.

Например, возведём обыкновенную дробь $\frac{2}{3}$ во вторую степень. Возьмём в скобки данную дробь и в качестве показателя укажем 2: $(\frac{2}{3})^2$.

Если не брать в скобки всю дробь, то это равносильно возведению в степень только числителя данной дроби. Иными словами, если мы хотим возвести во вторую степень дробь $\frac{2}{3}$, мы не должны записывать это как $\frac{2^2}{3}$.

Итак, чтобы вычислить значение выражения $(\frac{2}{3})^2$, нужно возвести во вторую степень числитель и знаменатель данной дроби: $(\frac{2}{3})^2 = \frac{2^2}{3^2}$.

Получили дробь в числителе и в знаменателе которой содержатся степени.

Вычислим каждую степень по отдельности:

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$.

Значит обыкновенная дробь $\frac{2}{3}$ во второй степени равна дроби $\frac{4}{9}$.

Приведённое правило работает следующим образом. Дробь $\frac{2}{3}$ во второй степень это произведение двух дробей, каждая из которых равна $\frac{2}{3}$:

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$.

Мы помним, что для перемножения дробей необходимо перемножить их числители и знаменатели:

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times3}$.

А поскольку в числителе и в знаменателе происходит перемножение одинаковых множителей, то выражения 2×2 и 3×3 можно заменить на 2^2 и 3^2 соответственно:

$(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\times2}{3\times3} = \frac{2^2}{3^2}$.

Откуда и получится ответ $\frac{4}{9}$.

Вообще, для любого a и $b \neq 0$ выполняется следующее равенство: $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Это тождественное преобразование называют **возведением в степень обыкновенной дроби.**

Пример 4. Найти значение выражения: $(\frac{2}{4})^2 - \frac{3}{16}$.

Выполним возведение в степень обыкновенной дроби:

$(\frac{2}{4})^2 - \frac{3}{16} = \frac{2^2}{4^2} - \frac{3}{16} = \frac{4}{16} - \frac{3}{16}$.

Далее вычислим значение получившегося выражения:

$(\frac{2}{4})^2 - \frac{3}{16} = \frac{2^2}{4^2} - \frac{3}{16} = \frac{4}{16} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16}$.

При возведении в степень десятичной дроби её необходимо заключить в скобки. Например, возведём во вторую степень десятичную дробь 1,5:

$(1,5)^2 = 1,5 \times 1,5 = 2,25$.

Допускается переводить десятичную дробь в обыкновенную и возводить в степень эту обыкновенную дробь. Решим предыдущий пример, переведя десятичную дробь в обыкновенную:

$(1,5)^2 = (\frac{15}{10})^2 = \frac{15^2}{10^2} = \frac{225}{100} = 2,25$.

Пример 5. Найти значение степени $(-1,5)^3$.

Показатель степени является нечётным числом. Значит ответ будет отрицательным

$(-1,5)^3 = (-1,5) \times (-1,5) \times (-1,5) = -3,375.$

Пример 6. Найти значение степени $(-2,4)^2$.

Показатель степени является чётным числом. Значит ответ будет положительным:

$(-2,4)^2 = (-2,4) \times (-2,4) = 5,76.$

Вы знаете:

- **Определение степени числа с натуральным показателем;**
- **Определение степени с нулевым и отрицательным показателем;**
- **Свойства степени с целым показателем;**
- **Как записать число в стандартном виде.**

Вы помните наизусть:

1. Свойства степени с целым показателем:

1) $a^m a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}, \quad a \neq 0$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$;
6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

2. Стандартным видом числа называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n — целое число.

∮1. Степень с натуральным показателем и ее свойства

Из жизни чисел

Число Гугол, которое представляет собой 10^{100}, т. е. единицу со 100 нулями, стало известным благодаря известной поисковой системе Google, которая слегка исказила название числа "гугол" (Googol). От него произошло число "гуголплекс", которое представляет собой $10^{10^{100}}$, т. е. 10 в степени гугол. Если всю Вселенную наполнить листками бумаги и на каждом написать "нули", то окажется, что мы написали только половину этого числа. (*Источник: интернет…*)

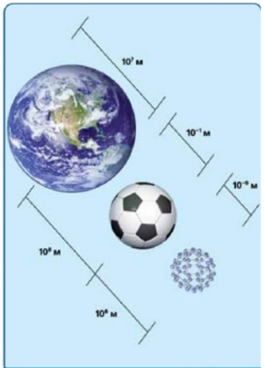


Рис. 1. Соотношение диаметров Земли ($\approx 10^{7}$ м), футбольного мяча ($\approx 10^{-1}$ м) и молекулы C_{60} ($\approx 10^{-9}$ м = 1 нм)

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Назад
На весь экран
Закрыть

Проверьте себя

1. Соедините стрелками выражение и его соответствующую словесную характеристику:	
$a^m a^n$ $(a \cdot b)^n$ a^{m+n} $a^n \cdot b^n$	• степень произведения; • произведение степеней с одинаковыми основаниями; • произведение степеней с одинаковыми показателями; • степень с основанием a.

2. Верно ли что при умножении степеней с одинаковыми основаниями произведение всегда больше множителей?

3. Верно ли, что из неравенства $a > b$ следует неравенство $a^n > b^n$, где n - натуральное число?

4. Верно ли, что из неравенства $a^n > b^n$ следует неравенство $a > b$, где n - натуральное число?

5. Верно ли, что из неравенства $(\frac{a}{b})^n > \frac{a}{b}$ следует неравенство $n > 1$, где n - натуральное число?

Тренируйтесь

Пример 1. Вычислите $14\cdot\left(\frac{35}{48}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6\cdot\left(1\frac{3}{5}\right)^5$.
Решение. Воспользуемся свойствами степени и получим:
$14\cdot\left(\frac{35}{48}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6\cdot\left(1\frac{3}{5}\right)^5 = 14\cdot\left(\frac{35}{48}\cdot 1\frac{3}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6 = 14\cdot\left(\frac{35}{48}\cdot\frac{8}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6 =$
$= 14\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6 = 14\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^6 = 14\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{-5+6} = 14\cdot\frac{6}{7} = 12.$
Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{(19\cdot 27^4)^2}{(4\cdot 3^{22}+7\cdot 3^{21})\cdot 57}$.
Решение. С помощью свойств степени преобразуем выражение:
$\frac{(19\cdot 27^4)^2}{(4\cdot 3^{22}+7\cdot 3^{21})\cdot 57} = \frac{19^2\cdot(3^{12})^2}{3^{21}\cdot(4\cdot 3+7\cdot 1)\cdot 57} = \frac{19^2\cdot 3^{24}}{3^{21}\cdot 19\cdot 57} = \frac{19^2\cdot 3^{24}}{3^{21}\cdot 19\cdot 19\cdot 3} = \frac{3^{24}}{3^{22}} = 3^2 = 9.$

Решите самостоятельно

1.1. Вычислите:
а) $\frac{3^{10}\cdot 7^{10}}{21^{10}}$; б) $\frac{6^{12}\cdot 4^{12}}{3^{12}\cdot 8^{12}}$; в) $\frac{15^5}{3^4\cdot 5^2\cdot 25}$.
1.2. Найдите значение выражения:
а) $\frac{16^2\cdot 3^5}{12^4}$; б) $\frac{8^5\cdot 3^4}{48^3}$; в) $\frac{15^{10}}{25^4\cdot 3^9}$; г) $\frac{10^3\cdot 6^2}{4^4\cdot 5^4}$.
1.3. Запишите в виде степени:
а) $2^3\cdot 5^3\cdot 10^5$; б) $7^4\cdot 14^9\cdot 2^4$; в) $3^4\cdot 2^5\cdot 6^4\cdot 9^5$; г) $5^8\cdot 100^2\cdot 4^4\cdot 10$.
1.4. Вычислите:
а) $\frac{5\cdot 2^{34}-4\cdot 2^{32}}{4^{17}}$; б) $\frac{2\cdot 5^{24}-9\cdot 5^{23}}{25^{11}}$; в) $\frac{5(3\cdot 7^5-19\cdot 7^4)}{7^6+3\cdot 7^5}$; г) $(10^{12}+5^{11}\cdot 2^9-5^{13}\cdot 2^8):(4\cdot 5^5\cdot 10^6)$.
1.5. Найдите, какой цифрой заканчивается значение выражения $3^{13}+10^{13}+18^{13}$.
1.6. Запишите все различные способы представления степенью с показателем, большим 1, числа 7^{15}.
1.7. Найдите значение выражения:
а) $(1+\frac{1}{n})^n$ при $n{=}3$; б) $(2-\frac{1}{n})^n$ при $n{=}2$.
1.8. а) Представьте сумму $2\cdot 16^n+2^n\cdot 8^n+2^{4n}$ в виде степени с основанием 2.
б) Представьте сумму $9^{3m}+9^m\cdot 81^m+27^{2m}$ в виде степени с основанием 3.
1.9. Найдите все натуральные значения переменной n, при которых значение выражения 2^n меньше 65.

1.10. Докажите, что значение выражения:

а) $5^9 - 25^4 - 125^2$ кратно 99; б) $343^3 + 49^4 - 7^7$ кратно 55.

1.11. Выясните, делится ли: 75^{30} на $45^5 \cdot 15^{15}$.

1.12. Найдите количество нулей, которыми оканчивается значение выражения: $\frac{10^{20}-90^{10}}{3^{20}-10^{10}}$.

1.13. Найдите последнюю цифру числа: $K = 2^{30} + 3^{30} + 4^{30}$.

Немного истории. Отрицательные показатели степени ввел еще в 15 веке математик Шюке. Англичанин Джон Валлис впервые рассмотрел вопрос о целесообразности употребления отрицательных показателей. Исаак Ньютон стал применять их систематически. В одном из писем в 1676 г. Ньютон указал: "Как алгебраисты вместо aa, aaa и т.д. пишут a^2, a^3 и т. д., так я ... вместо $1/a$, $1/a^2$, $1/a^3$ пишу a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} и т. д."

Проверьте себя

1. Закончите предложение, выбрав один из предложенных вариантов ответов:	
Степень положительного числа с любым целым основанием есть число… .	а) отрицательное;
Степень отрицательного числа с четным показателем есть число ….	б) положительное;
Степень отрицательного числа с нечетным показателем есть число ….	в) целое;
	г) дробное.

2. Верно ли что при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатель произведения всегда больше показателей множителей?

3. Верно ли, что 2^{-4}:

а) отрицательное число; б) число, большее, чем 8;

в) число, меньшее 1; г) число, большее 1?

4. Верно ли, что $0,5^{-1}$:

а) отрицательное число; б) число, меньшее, чем 0,5;

в) число, меньшее 1; г) число, большее 1?

5. При каком значении а справедливо неравенство $a^{-n} > a^n$, где n - натуральное число?

Тренируйтесь

Пример 1. Вычислите $-0,25^{-2}\cdot 10+3\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})^{-2}$.

Решение.

$-0,25^{-2}\cdot 10+3\frac{1}{3}\cdot(-\frac{2}{3})^{-2}=-(\frac{1}{4})^{-2}\cdot 10+3\frac{1}{3}\cdot(-\frac{3}{2})^{2}=-4^2\cdot 10+\frac{10}{3}\cdot\frac{9}{4}=$

$=-16\cdot 10+\frac{15}{2}=-160+7,5=-152,5.$

Пример 2. Представьте выражение $\frac{(8^3)^{-2}\cdot 64}{8^{-8}}$ в виде степени с основанием 8.

Решение. Воспользуемся свойствами степени с целым показателем и получим:

$\frac{(8^3)^{-2}\cdot 64}{8^{-8}}=\frac{8^{-6}\cdot 8^2}{8^{-8}}=\frac{8^{-6+2}}{8^{-8}}=\frac{8^{-4}}{8^{-8}}=8^{-4-(-8)}=8^{-4+8}=8^4.$

Пример 3. Упростите выражение: $(\frac{2^{n+2}-2^n}{120^{n+1}}:(\frac{5^n}{12^{-n}})^{-1})^{-1}$.

Решение.

$(\frac{2^{n+2}-2^n}{120^{n+1}}:(\frac{5^n}{12^{-n}})^{-1})^{-1}=(\frac{2^n(4-1)}{120^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{12^{-n}})^{-1}=(\frac{2^n\cdot 3}{120\cdot 120^n}\cdot 5^n\cdot 12^n)^{-1}=$

$=(\frac{2^n\cdot 3}{120\cdot 120^n}\cdot 5^n\cdot 12^n)^{-1}=(\frac{2^n\cdot 5^n\cdot 12^n}{40\cdot 120^n})^{-1}=(\frac{(2\cdot 5\cdot 12)^n}{40\cdot 120^n})^{-1}=(\frac{120^n}{40\cdot 120^n})^{-1}=(\frac{1}{40})^{-1}=40.$

Решите самостоятельно

1.14. Вычислите:

а) $-0,25^{-2}\cdot 10^3$;   б) $0,2^{-4}\cdot(-0,1)^3$;   в) $3\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{-2}-2^{-1}$;   г) $-4^{-1}\cdot 5+125^0$.

1.15. Найдите значение выражения: $3^4\cdot(-\frac{2}{3})^3+\frac{1}{(-0{,}1)^3}$.

1.16. Найдите значение выражения: $0,2^{-3}+(\frac{3}{7})^{-1}+(-0,5)^{-2}\cdot(1\frac{1}{3})^{-1}+(-1)^{-18}\cdot 6$.

1.17. Найдите значение выражения:

а) $7^{-12}\cdot 7^{14}$;   б) $5^{-19}:5^{-20}$;   в) $(2^{-1})^{-3}$;   г) $(\frac{1}{6})^{-5}\cdot(\frac{1}{6})^4$;

д) $(\frac{2}{3})^{-2}:(\frac{2}{3})^{-4}$;   е) $(0,2^{-2})^2$.

1.18. Выполните действия:

а) $8^{-2}\cdot 4^3$;   б) $7^0:7^{-2}$;   в) $\frac{2^{-23}}{4^{-6}\cdot 4^{-7}}$;   г) $\frac{3^{-8}\cdot 9^8}{(-3)^4}$.

1.19. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(2^4)^6\cdot(-2)^{13}}{2^{35}}$;   б) $\frac{(-3)^{17}\cdot(-3^2)^7}{3^{29}}$;   в) $\frac{(-2^3)^5\cdot(-2)^{11}}{2^{24}}$;   г) $\frac{(-3)^{15}\cdot(-3^3)^4}{3^{25}}$.

1.20. Найдите значения n, удовлетворяющие условию:
а) $7^{-13}\cdot 7^{18}:7^n=\frac{1}{7}$; б) $5^{-19}\cdot 5^{13}:5^n=\frac{1}{5}$.
1.21. Упростите выражение:
а) $\frac{9^{n+1}-9^n}{8^{n+1}}:(\frac{4^n}{6^{2n}})^{-1}$; б) $\frac{7^{n+1}+7^n}{8^{n+1}}:(\frac{2^n}{28^{-n}})^{-1}$, где n - целое число.
1.22. Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:
а) $\frac{5^{n+1}\cdot 2^{n-2}+5^{n-2}\cdot 2^{n-1}}{10^{n-2}}$; б) $\frac{21^n}{3^{n-1}\cdot 7^{n+1}+3^n\cdot 7^n}$.
1.23. Докажите, что значение выражения не зависит от значений переменных:
а) $\frac{2^m\cdot 3^{n-1}-2^{m-1}\cdot 3^n}{2^m\cdot 3^n}$; б) $\frac{5^m\cdot 4^n}{5^{m-2}\cdot 2^{2n}+5^m\cdot 2^{2n-1}}$.
1.24. Найдите наименьшее общее кратное чисел a и b, если $a=\frac{1}{3^{-1}}\cdot(2^{-3})^{-1}\cdot 5^2$ и $b=3^2\cdot\frac{1}{5^{-2}}\cdot 2^3$.
1.25. Укажите, какой цифрой заканчивается значение выражения:
$435^{121}+10^{19}+(-34)^0+51^{143}$.

Из жизни чисел

Большие числа Дирака (БЧД) относится к наблюдениям Поля Дирака* в 1937 году. В них речь идет о фундаментальных отношениях, например, отношения размеров Вселенной (мегамир) к размерам элементарных частиц (микромир). Эти отношения выражаются очень большими числами. Наиболее известные примеры больших чисел Дирака:

– отношение радиуса Вселенной к радиусу электрона $\approx 4{,}4\cdot 10^{40}$;

– отношение массы Вселенной к массе электрона $\approx 4{,}3\cdot 10^{41}$;

– отношение кулоновской силы к силе тяготения $\approx 4{,}2\cdot 10^{42}$;

– отношение радиуса Вселенной к длине Планка $\approx 7\cdot 10^{60}$;

– отношение энергии Вселенной к «нулевой энергии» $\approx 5{,}3\cdot 10^{121}$.

*Поль Дира́к — английский физик-теоретик, один из создателей квантовой механики. Лауреат Нобелевской премии по физике 1933 года.

Проверьте себя

1. Заполните пропуски, используя один из предложенных вариантов ответов:	
Если число…, то перенести запятую влево так, чтобы в целой части была только одна цифра, полученное число умножить на 10^n, где n – число цифр до запятой. Если число …, то перенести запятую вправо так, чтобы в целой части была только одна цифра, полученное число умножить на 10^{-n}, где n – число цифр до запятой.	Больше 1; Меньше 1 Дробное; Целое

2. Верно ли, что в стандартном виде можно записать любое число?

3. Верно ли, что в результате действий с числами в стандартном виде получаются числа, записанные в стандартном виде?

4. Верно ли, что порядок произведения чисел всегда больше порядка сомножителей?

Тренируйтесь

Пример 1. Найдите значение выражения $110 \cdot 10^{-3} : (2,2 \cdot 10^2)$. Результат представьте в стандартном виде.

Решение.

$110 \cdot 10^{-3} : (2,2 \cdot 10^2) = (110 : 2,2) \cdot (10^{-3} : 10^2) = 50 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10 \cdot 10^{-5} = 5 \cdot 10^{-4}$.

Решите самостоятельно

1.26. Какое из данных чисел записано в стандартном виде:
$1,7 \cdot 5^{10}$; $18,25 \cdot 10^{10}$; $1,24 : 10^7$; $53,7012$?

1.27. Запись вида $1,4005 \cdot 10^{-2}$ - это стандартный вид числа:
а) 140,05; б) 14005; в) 0,0014005; г) 0,014005.

1.28. Запись вида $3\frac{1}{3} \cdot 10^{-1}$ - это стандартный вид числа:
а) $2\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $10\frac{1}{3}$; г) $100\frac{1}{3}$.

1.29. Представьте число 5680124 в стандартном виде и назовите его порядок.

1.30. На сколько порядков число 342 000 000 больше чем 4 000 000?

1.31. Вычислите $a + b$; $b - a$; $a \cdot b$; $a : b$, если $a = 8,4 \cdot 10^{-3}$, $b = 2,1 \cdot 10^{-2}$;

1.32. Выразите:
а) $1,8 \cdot 10^{15}$ г в тоннах; б) $3,8 \cdot 10^{-1}$ т в килограммах;
в) $4,3 \cdot 10^3$ т граммах; г) $9,43 \cdot 10^{-1}$ кг в тоннах.

Приведите примеры объектов из окружающей действительности, которые могут иметь такую массу.

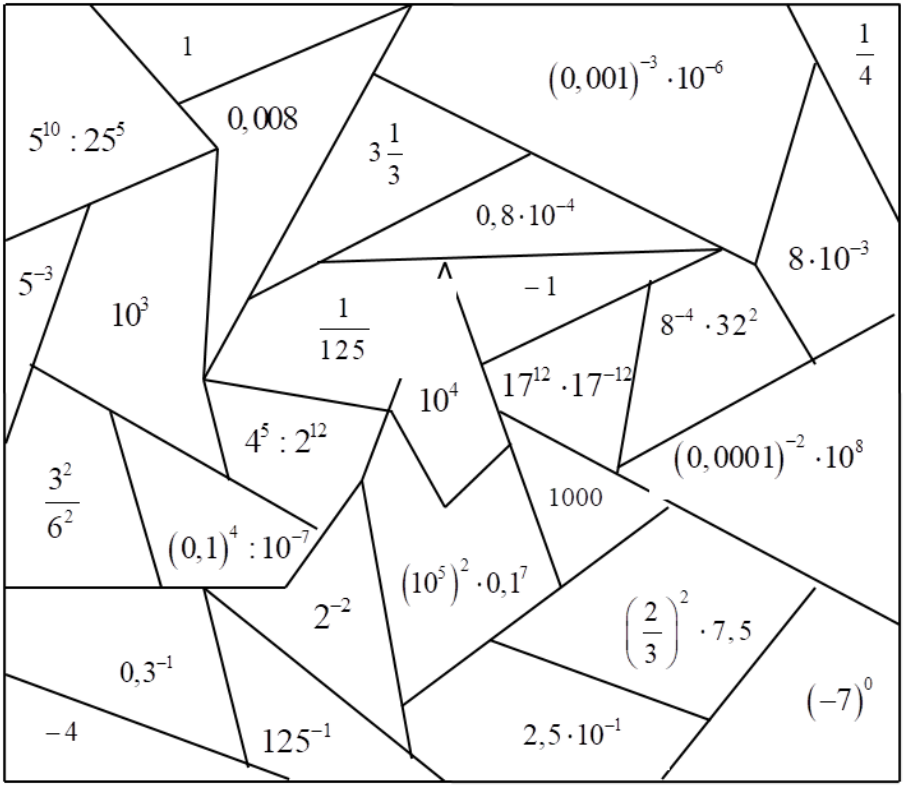
1.33. Выразите:
а) $5,3 \cdot 10^{-3}$ м в сантиметрах; б) $8,15 \cdot 10^2$ м в дециметрах;
в) $5,08 \cdot 10^{-4}$ км в сантиметрах; г) $3,12 \cdot 10^5$ см в метрах.

Приведите примеры объектов из окружающей действительности, которые могут иметь такую длину.

1.34. Выразите время в секундах и запишите полученное число в стандартном виде:
а) 1 час; б) 1 сутки; в) 1 год; г) 2 века.

∮ 4. Математическая мозаика

1.35. Найдите на рисунке выражения, значения которых равны, и закрасьте одинаковыми цветами ячейки, в которых они расположены. Сколько цветов Вам понадобилось? Сколько ячеек осталось незакрашенными?



Начало
Содержание
Страница 239 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

1.36. Найдите наименьшее из натуральных чисел, являющихся одновременно степенью чисел 3 и 81 и не являющихся при этом степенью числа 27.

1.37. Найдите наименьшее натуральное число при умножении которого на 2 получается точный квадрат, а при умножении на 3 - точный куб.

1.38. Как Вы думаете, 2^{64} - это много или мало?

Методика введения и изучения степени с иррациональным показателем

Термин корень имеет сложную и долгую историю. Древние греки понимали извлечение квадратного корня строго геометрически, как нахождение стороны квадрата по известной площади. Впервые обозначение ввел в 1525 году Кристоф Рудольф. Происходит этот знак от первой буквы слова «radix», что означает «корень». Показатель степени появился в знаке корня в 18 веке благодаря Валлису и «Универсальной арифметике» Ньютона. В курсе алгебры обучающиеся усваивают действия со степенями и корнями, изучают понятие «арифметический корень», способы преобразования алгебраических выражений, содержащих степени и корни.

Методические особенности расширения числовых множеств

Изучение нового числового множества идет по единой схеме:

- необходимость новых чисел;

- введение новых чисел;

- сравнение (геометрическая интерпретация);

- действия над числами;

- законы.

VIII класс
КВАДРАТНЫЕ КОРНИ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Корень n-й степени из числа.

Иррациональное число. Действительное число. Сравнение действительных чисел. Числовые промежутки. Арифметический квадратный корень и его свойства.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны:

знать термины и правильно использовать понятия:

• корень n-й степени из числа, подкоренное выражение, степень корня, квадратный корень из числа; арифметический квадратный корень из числа; рациональное число, конечная десятичная дробь; бесконечная периодическая десятичная дробь; бесконечная непериодическая десятичная дробь; иррациональное число, действительное число;

знать:

• определение и свойства квадратных корней;

• как называются и обозначаются основные числовые множества;

• представление: рационального числа в виде бесконечной десятичной периодической дроби; иррационального числа в виде бесконечной десятичной непериодической дроби;

уметь:

• читать и записывать числовые промежутки;

• выполнять с использованием свойств квадратных корней тождественные преобразования несложных иррациональных выражений, включая вынесение множителя из-под знака корня и внесение множителя под знак корня.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Квадратное уравнение. Формулы корней квадратного уравнения. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители. Теорема Виета. Квадратная (квадратичная) функция и ее график.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны:

знать термины и правильно использовать понятия:

• квадратное уравнение, дискриминант квадратного уравнения; квадратный трехчлен; квадратная (квадратичная) функция; парабола; вершина параболы;

знать:

• формулу дискриминанта; формулы корней квадратного уравнения;

• теорему Виета; формулу разложения квадратного трехчлена на линейные множители;

уметь:

• использовать формулы корней квадратного уравнения при решении квадратных уравнений и несложных уравнений, сводящихся к ним;

• раскладывать квадратный трехчлен на множители;

• решать квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним;

• применять теорему Виета к решению задач;

• выполнять тождественные преобразования рациональных выражений, используя разложение квадратного трехчлена на линейные множители;

• строить графики квадратной (квадратичной) функции;

• использовать квадратные уравнения для решения текстовых задач.

X класс
СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ (25 ч)

Корень n-й степени из числа a ($n \geqslant 2, n \in N$). Арифметический корень. Основные свойства корня n-й степени. Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени.

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с действительным показателем.

Степенная функция с рациональным показателем, свойства и график степенной функции. Иррациональные уравнения.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

иметь представление о степени с действительным показателем;

знать термины и правильно применять понятия: корень n-й степени из числа a, показатель степени корня, подкоренное выражение, степень с рациональным показателем, степенная функция, иррациональное уравнение;

знать:

- основные свойства корня n-й степени, свойства степеней с рациональным показателем; свойства и график степенной функции; формулы, выражающие свойства степеней и корней n-й степени;
- основные методы решения иррациональных уравнений;

уметь:

- вычислять корень n-й степени из действительного числа, представляющего n-ю степень; выносить множитель из-под корня; оценивать значение корня; представлять корень n-й степени в виде степени с рациональным показателем и наоборот; упрощать выражения, содержащие корни и степени с рациональным показателем;
- строить графики степенных функций $y = x^k$ для $k \in Z$, $k \neq 0$, $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$;
- решать уравнения вида $x^n = a$, где $n \in N$, $a \in R$; иррациональные уравнения.

В математике существуют различные построения теории действительного числа:

- по Дедекинду (построение действительного числа с помощью сечений на множестве рациональных чисел),
- по Вейерштрассу (представление действительного числа как бесконечного десятичного ряда),
- по Кантору (построение действительного числа с помощью фундаментальных последовательностей рациональных чисел).

Но эти построения весьма сложны (не случайно в математике они оформились во второй половине 19 века).

Понятие «действительное число» (как и понятие «бесконечная десятичная дробь»), основные положения теории действительного числа вполне доступны учащимся 8 класса. В настоящее время существует тенденция более раннего изучения действительных чисел, что ускоряет создание цельной системы знаний учащихся о числе, облегчает потребности практики вычислений, позволяет строже изложить некоторые вопросы фундаментальной теории.

Понятие «иррациональное число» появляется в учебниках 8 класса.

Мотивация введения действительных чисел опирается на внутренние потребности математики, а не на практику. Учащиеся убеждаются в необходимости введения новых чисел при решении следующих задач:

- Решить уравнение: $x^2 = 2$.
- Найти отношение длины дуги окружности к ее диаметру.
- Найти сторону квадрата, если его площадь 3 см^2.
- Решить графически уравнение: $x^2 = 3$.
- К множеству каких чисел относятся числа 2,56565...; 7,23233233...; 0, 123123412345...?

Определение иррационального числа дается через отрицание.

Доказывается, что «среди рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого равен 2».

Вводится понятие «действительное число»: «Если к положительным бесконечным десятичным дробям присоединить противоположные им числа и нуль, то получим множество чисел, которые называют действительными числами».

Дается определение иррациональных чисел: «Каждую бесконечную десятичную периодическую дробь можно записать в виде отношения m/n, где m - целое число, n - натуральное число. Бесконечные десятичные непериодические дроби представляют числа, не являющиеся рациональными. Их называют иррациональными числами (приставка «ир» означает отрицание). Иррациональные числа нельзя представить в виде отношения m/n. Таким образом, множество действительных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел».

Приводятся примеры иррациональных чисел.

Вводятся «действия» над числами. В школьном курсе действия с иррациональными числами сводятся к операциям с их рациональным приближениями по недостатку и по избытку.

Остановимся более подробно на методике изучения иррациональных чисел.

Рациональные и иррациональные числа

В 5 – 6 классах учащиеся познакомились с обыкновенными дробями. Перед изучением иррациональных чисел целесообразно обобщить эти знания и на новом уровне рассмотреть множество рациональных чисел Q.

В множестве натуральных чисел N операция деления имеет ограниченный характер: если а и в натуральные числа, то не всегда найдется натуральное число x такое, чтобы $ax = b$ (приведите примеры). Другими словами, в том случае, когда b не делится нацело на a, уравнение $ax = b$ неразрешимо. Чтобы устранить это несовершенство, вводятся дроби, записываемые в виде отношения m/n, где m, n - натуральные числа. При этом число m называют числителем, а число n знаменателем дроби m/n.

Присоединяя к положительным рациональным числам противоположные им величины и ноль, получаем все множество рациональных чисел Q. Оно состоит, таким образом, из нуля, положительных и отрицательных целых чисел, положительных и отрицательных дробей.

В множестве Q рациональных чисел все четыре арифметических операции выполняются беспрепятственно за одним досадным исключением: нельзя делить на ноль (один из доводов в пользу того, что 0 – «ненастоящее» число).

Наглядное представление о рациональных числах дает координатная ось. На некоторой прямой линии выбирается точка 0 – начало отсчета, указывается единица масштаба, направление. Если дано положительное рациональное число, то единица масштаба делится на n равных частей и вправо от нуля эта доля откладывается m раз. Полученная точка и есть изображение числа. Если число отрицательное – откладывание производят влево от нуля.

В словаре: «**иррациональный – не постигаемый разумом, такой, который не может быть выражен в логических понятиях**». Повседневный математический смысл проще: **иррациональное число – это число, не являющееся рациональным**.

Иррациональных чисел бесконечно много: первый конкретный пример иррационального числа – это длина диагонали единичного квадрата, т.е. положительный корень уравнения $x^2 = 2$. Изобразив действительные числа на координатной прямой, мы получим, что каждой точке координатной прямой соответствует действительное число (прямая без «дырок») и каждому действительному числу отвечает точка на прямой. Координатная прямая, на которой изображено множество действительных чисел, называется числовой прямой.

В большинстве учебников **иррациональное число рассматривается как бесконечная непериодическая десятичная дробь** (как и в теории Вейерштрасса). В некоторых учебниках – как **длина отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба, а затем показывается, как находятся приближения этого числа в виде десятичных дробей**.

Далее необходимо установить, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел. Поскольку иррациональные числа вводятся для измерения отрезков, несоизмеримых с единицей длины, то сразу получается, что для каждого отрезка можно найти действительное число, выражающее его отношение к единице длины. Обратное положение есть аксиома непрерывности прямой. В большинстве не формулируется, а подчеркивается это взаимно однозначное соответствие. В некоторых учебниках (Д.К. Фаддеева и др.) используется подход Кантора: ***для всякой стягивающейся последовательности вложенных друг в друга промежутков на прямой существует точка, принадлежащая всем промежуткам последовательности***. Отсюда и следует непрерывность множества действительных чисел.

Действия с иррациональными числами лучше начинать с геометрического изображения суммы $\sqrt{2}+\sqrt{5}$. Известно, что можно точно построить отрезки, имеющие такую длину.

Следует обратить внимание учащихся, что в результате действий над иррациональными числами могут получиться как рациональные, так и иррациональные. Для этого нужно предложить примеры на сложение непериодических дробей.

Арифметическим квадратным корнем из числа а называется неотрицательное число, квадрат которого равен а.

Методика введения понятия «иррациональное число»

Существует три подхода к введению понятия «иррациональное число».

При первом подходе можно выделить три основных этапа введения понятия: мотивационный, введение понятия, первичное закрепление.

1. ***Мотивационный этап.*** На этом этапе можно предложить решить следующую задачу: «Найти сторону квадрата, площадь которого равна 2». Алгебраической моделью ситуации является уравнение $x^2 = 2$. Решением этого уравнения (с учетом того, что длина выражается положительным числом) является арифметический квадратный корень из 2. Это число. Встает вопрос: «Какому числовому множеству принадлежит это число?»

2. Этап ***введения понятия***. Проиллюстрировать этот этап можно, выполнив лабораторную работу.

ПРИМЕРЫ

1) Является ли $\sqrt{2}$ целым числом?

Ответ. Рассмотрим квадраты последовательных натуральных чисел:

$1^2 = 1,\ 2^2 = 4.$

Вывод. Среди целых чисел значения $\sqrt{2}$ нет.

2) Является ли $\sqrt{2}$ рациональным числом?

Ответ. Рассмотрим приближенные значения $\sqrt{2}$ с точностью до 0,01; 0,001 и т.д.

$1,1^2 = 1,21;$

$1,2^2 = 1,44;$

$1,3^2 = 1,69;$

$1,4^2 = 1,96;$

$1,5^2 = 2,25;$

$1,96 < 2 < 2,25$, тогда $1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$

Выполняя аналогичную работу на отрезке [1,4;1,5], получим: $1,41 < \sqrt{2} < 1,42.$

Увеличивая точность приближения, можно показать: $\sqrt{2} = 1,4141\ldots.$ Уже на этом этапе можно увидеть, что $\sqrt{2}$ - бесконечная непериодическая дробь.

С использованием микрокалькулятора получим: $\sqrt{2} = 1,4142135623\ldots.$

Вывод (предположение) на этом этапе. $\sqrt{2}$ - не рациональное число.

3) Приведите строгое математическое доказательство предположения, сформулированного на предыдущем этапе.

Утверждение. Не существует рационального числа, квадрат которого равен двум. Далее приводится доказательство.

Примечание. Перед доказательством должна быть проведена подготовительная работа.

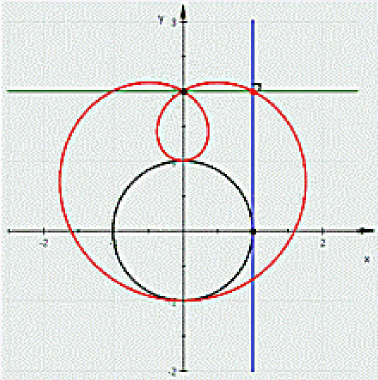
4) Дайте определение иррационального числа.

Ответ. **Числа, представляемые бесконечными десятичными непериодическими дробями, называются иррациональными.**

Далее приводятся примеры иррациональных чисел: $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; π и т.д.

5) Изобразите иррациональные числа на координатной прямой.

Ответ. Иллюстрируется построение **улитки Паскаля**.



Введение понятия «иррациональное число» завершается расширением множества рациональных чисел до множества действительных чисел, структуру которого можно изобразить с помощью кругов Эйлера.

3. Этап ***первичного закрепления***. На этом этапе целесообразно решать задачи на установление взаимосвязи известных числовых множеств, сравнение чисел, изображение чисел точками координатной прямой.

При втором подходе к ведению понятия «иррациональное число» можно предложить ученикам следующие задания.

ПРИМЕРЫ

1) Вычислите длины отрезка, если он составляет $\frac{2}{7}$ единичного отрезка.

Ответ. $\frac{2}{7} = 0,(285714)$.

2) Приведите геометрическое доказательство того, что отношение площади квадрата, построенного на диагонали данного квадрата, к площади данного равно 2.

Ответ. Длина диагонали квадрата равна числу, квадрат которого равен 2; при измерении длины диагонали (при условии, что единица измерения – длина стороны данного квадрата) получается бесконечная непериодическая десятичная дробь.

3) Приведите строгое доказательство, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум.

4) Дайте определение иррационального числа.

5) Постройте множество действительных чисел.

При третьем подходе к введению понятия можно привести формулировку определения и проиллюстрировать его примерами.

Рассмотрим пример урока математики

***Тема урока:* Корень n – й степени.**

Цели урока:

- ввести понятие корня n – й степени; выработать навыки вычисления корней n – й степени;

- развивать логическое мышление и математическую речь учащихся;

- воспитывать уважительное отношение к себе (я могу) и к товарищам (как у тебя получилось и почему?)

Ход урока:

1. Оргмомент.

2. Актуализация опорных знаний.

На этом уроке вы продолжите изучение алгебраических операций.

1. Назовите взаимообратные алгебраические операции над числами (сложение и вычитание, умножение и деление).

2. Всегда ли можно выполнить такую алгебраическую операцию, как деление? (нет, делить на нуль нельзя)

3. Какую еще операцию вы можете выполнять с числами? (возведение в степень)

4. Какая операция будет ей обратной? (извлечение корня)

5. Корень какой степени вы можете извлекать? (корень второй степени)

6. Какие свойства квадратного корня вы знаете? (извлечение квадратного корня из произведения, из частного, из корня, возведение в степень)

7. Найдите значения выражений:

$\sqrt{4} = \ldots$ т.к. $\ldots^2 = 4$, $\sqrt{9} = \ldots$,т.к.$\ldots^2 = 9$, $\sqrt{144} = \ldots$ т.к. $\ldots^2 = 144$

$\sqrt{-81} = \ldots$ т.к. ..., $\sqrt{0,25} = \ldots$,т.к.$\ldots^2 = 0,25$, $\sqrt{-1} = \ldots$

3. Учебная задача.

- Вычислите $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[10]{1}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$, $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$.

- Проверьте истинность ваших вычислений с помощью обратного действия.

- Проанализируйте полученные результаты и сформулируйте свои наблюдения об извлечении корней четной и нечетной степени в виде гипотезы.

- Учащиеся озвучивают свои гипотезы.

$\sqrt[2n]{a} = b, b^{2n} = a$, при $b \geqslant 0$ и $\sqrt[2n+1]{a} = b$, $b^{2n+1} = a$.

4. Работа с учебником.

Чтение текста и сравнение своего результата с научной теорией.

5. Самостоятельная работа.

1 вариант *2 вариант*

Соотнесите задания и ответы с помощью стрелок:

$\sqrt[3]{27}$	3	$\sqrt[4]{625}$	5
$\sqrt[4]{16}$	5	$\sqrt[3]{8}$	2
$\sqrt[3]{125}$	2	$\sqrt[4]{81}$	1
$\sqrt[10]{1}$	1	$\sqrt[5]{32}$	3

6. Закрепление материала.

7. Домашнее задание.

8. Рефлексия деятельности.

Достиг ли урок своей цели?

Чему вы научились?

Оцените свою деятельность на уроке в виде написания синквейна на цветных ладошках. Сверните ладошки в форме конуса и с помощью степлера прицепите к ножке. Это ваш подарок мне в память о сегодняшнем уроке.

Спасибо всем за урок!

Примеры синквейнов, составленных учениками:

Корень.
Квадратный, кубический.
Извлекали, возводили в степень, обобщали.
Было интересно.
Я молодец.

Алгебра.
Интересная, познавательная.
Изучала, обобщала, отвечала.
Работала у доски.
Поставьте, пожалуйста, десять.

Еще пример УРОКА

Цель: обеспечить овладение всеми учащимися основными алгоритмическим приемами применения свойств корня n-ой степени.

Оборудование: интерактивная доска, проекционное оборудование, карточки с заданиями, карточки с заданием “Конструктор”.

Ход урока

1 этап. Вход в урок.

2 этап. Цель урока.

3 этап. Активизация мыслительного процесса.

Предлагаю проверить как вы готовы к уроку в ходе небольшой разминки. Разминка включает в себя вопросы из разных областей знаний. Вопрос читаю один раз и жду вашего ответа.

- Чем заканчивается лето и начинается осень. *(Буква о.)*
- Поезд состоит из 12 вагонов. Марат сел в 6 по счёту вагон с головы поезда, а Андрей сел в 6 вагон по счёту с хвоста поезда. В одном ли вагоне ехали Марат и Андрей? *(В разных)*
- Карина гуляла и видела у реки 4 уток, 2 гусей, жука, 4 бабочки и соседскую собаку. Сколько птиц видела Карина? *(6)*
- Лестница состоит из 9 ступенек. На какую ступеньку надо встать, чтобы быть на середине лестницы? *(На 5 ступеньку)*

Молодцы, вижу, все включились в работу. Продолжаем урок.

4 этап. Проверка теоретического материала. Знание формул. “Конструктор” Собери равенства.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; \qquad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \qquad \sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$$

Один учащийся вызывается к доске, остальным предлагаются листки с заданиями. Левые и правые части формул разбросаны по листу, надо собрать равенства. Ответ записать у себя в тетради.

Начало
Содержание
Страница 254 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

5 этап. Устная работа. Лови ошибку.

Найти и объяснить ошибку в следующих заданиях.

$\sqrt{25}=-5$; $\quad \sqrt{25}=5$.

$\sqrt[6]{-64}=-2$; $\quad (-2)^6\neq -64$.

$-\sqrt[3]{-8}=-2$; $\quad \sqrt[3]{-8}=2$; $\quad -8\neq 2^3$.

$\sqrt[4]{625}=-25$; $\quad (-25)^4\neq 625$.

6 этап. Отработка практических умений и навыков учащихся.

Решение задач.

7 этап. Домашнее задание.

8 этап. Рефлексия.

Пример 1. Вычислить 1) $27^{\frac{1}{3}}$; 2) $81^{-\frac{3}{4}}$; 3) $(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{2}}$.

Решение.

$$27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3; \qquad 81^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{81^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{81^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(3^4)^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3^{12}}}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}.$$

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(\frac{1}{16})^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}}}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{16}}}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4.$$

Пример 2.Упростите выражения:

$$8x^{\frac{5}{6}}:4x^{-\frac{2}{3}}; \qquad (x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}); \qquad \left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}.$$

Пример 3. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{(6-\sqrt{35})^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}$.

Решение. Домножим дробь на сопряженное:

$$\frac{\sqrt[3]{(6-\sqrt{35})^2}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{\sqrt[3]{(6-\sqrt{35})^2}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}{\sqrt[3]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[3]{6-\sqrt{35}}}+\sqrt{35}=\frac{6-\sqrt{35}}{\sqrt[3]{36-35}}+\sqrt{35}=6-\sqrt{35}+\sqrt{35}=6.$$

Пример 4. Найдите значение выражения:

$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}$, при x=2021.

Решение. Пусть $t=\sqrt{x-4}$, тогда $x=t^2+4$.

И исходное выражение имеет вид:

$$\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=\sqrt{t^2+4-4t}-\sqrt{t^2+4+4t}=$$
$$=\sqrt{(t-2)^2}-\sqrt{(t+2)^2}=|t-2|-|t+2|=|\sqrt{x-4}-2|-|\sqrt{x-4}+2|.$$

Лекция 10. Понятие функции. Разные трактовки понятия функции. Функциональная линия в школьном курсе математики и ее дидактические особенности

Функциональная линия школьного курса математики – одна из ведущих, определяющая стиль изучения тем в курсах алгебры. Её особенность состоит в представлении возможности установления разнообразных связей в обучении. Понятия функции, как такового, не существовало до семнадцатого века, когда первое его определение предложил Рене Декарт. Понятие функции Декарта изначально изложено на языке геометрии, и возникло в силу того, что для создания единого подхода к зависимостям величин друг от друга и их характеристикам появилась необходимость внедрения нового, более общего понятия.

Задолго до Декарта ученые пользовались функциями для описания различных природных явлений и закономерностей в таких науках, как астрономия, алхимия или физика.

Термин «функция» (от латинского слова function – совершение, дело) впервые употребил Г. Лейбниц, однако в то время ему придавали несовременное значение, понятие функции в смысле роли, то есть величины, выполняющей ту или иную функцию. В более современном значении, как термин выражение «функция от x» стало употребляться Г. Лейбницем и И. Бернулли в 1698 году, после чего Г. Лейбниц также ввел понятия «переменная» и «константа».

Полное определение функции, свободное от геометрического языка, было дано учеником Лейбница, швейцарским математиком Иоганном Бернулли в 1718 году. Функцией переменной величины И. Бернулли назвал количество, образованное каким угодно способом из этой переменной величины и нескольких постоянных величин. Данное определение функции предполагало опору не только на работы Лейбница, но и на труды Исаака Ньютона, исследовавшего огромное количество разнообразных функциональных зависимостей.

В книге «Введение в анализ бесконечных», написанной в 1748 году, ее автор, Леонард Эйлер, пользуется определением И. Бернулли, однако несколько корректирует его. Эйлер называет функцией переменного количества некоторое аналитическое выражение, составленное из данного переменного количества и чисел (постоянных количеств). Таким же образом понимали функцию ученые-математики на протяжении всего восемнадцатого века, несмотря на то, что Эйлер постоянно трансформировал свое определение и развивал понятие функции.

В книге «Дифференциальное исчисление», изданной в 1755 году, Л. Эйлер дает новое определение функции: «Когда некоторые количества зависят от других, таким, образом, что при изменении последних и сами они подвергаются, изменению, то первые называются функциями вторых».

Претерпев ряд преобразований, само понятие функции отошло от первоначальной геометрической составляющей и фактически отождествилось с аналитическим выражением.

Изучение функциональной линии является ведущим элементом в изучении школьного курса математики, и в современной педагогической науке главенствующее место функциональной линии не оспаривается.

Функциональная линия представляет собой одну из основных содержательных линий школьного курса математики. Изучение ее имеет и мировоззренческое и общекультурное значение для каждого обучающегося. Это обусловлено тем, что при помощи функции описывается большинство реальных процессов. Кроме того, в истории становления математики, как науки, появление новых видов функций или уточнения самого термина «функция», как правило, было связано с необходимостью изучения и описания вновь открытых человеком законов природы.

Несмотря на то, что изучение функциональной линии начинается на седьмом году обучения, сама по себе функциональная линия открывается детям еще в начальной школе, то есть, к седьмому классу ребёнок имеет достаточный опыт работы с различными зависимостями. В частности, каждый может рассчитать, быстро или медленно следует идти в школу, чтобы не опоздать к назначенному времени.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СВОЙСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ (34 ч)

Линейное уравнение с одной переменной (неизвестной). Равносильные уравнения. Решение линейных уравнений с одной переменной (неизвестной).

Числовые неравенства и их свойства. Строгие и нестрогие неравенства. Двойные неравенства.

Применение числовых неравенств к оценке суммы, разности, произведения и частного выражений. Оценка числового выражения.

Линейное неравенство с одной переменной (неизвестной). Равносильные неравенства. Решение линейных неравенств с одной переменной (неизвестной).

Линейное уравнение с одной переменной (неизвестной) как математическая модель описания реальных процессов.

**Линейные уравнения и неравенства, содержащие выражения под знаком модуля.*

Понятие функции. Область определения и множество значений функции. Способы задания функции. Нули функции, положительные и отрицательные значения функции. График функции. Линейная функция и ее свойства. График линейной функции. Угловой коэффициент прямой. Взаимное расположение графиков линейных функций.

Практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, их решение.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

правильно употреблять термины и использовать понятия:

- линейное уравнение;
- равносильные уравнения;
- числовые неравенства; знаки неравенств; строгие и нестрогие неравенства;
- линейное неравенство;
- равносильные неравенства;
- функция, аргумент функции; значение функции; область определения функции; множество значений функции; график функции;
- линейная функция; угловой коэффициент прямой;
- нули функции; положительные и отрицательные значения функции;

знать:

- свойства числовых неравенств;
- смысл требований: «решить уравнение»; «решить неравенство»;
- алгоритмы построения графика линейной функции;
- способы задания функции;

уметь:

- решать линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним;
- доказывать свойства числовых неравенств;
- применять свойства числовых неравенств для доказательства неравенств, оценки значений выражений, сравнения значений выражений;
- решать линейные неравенства;
- записывать решения линейных неравенств с помощью знаков неравенств;
- строить графики линейных функций;
- исследовать линейные функции;
- определять взаимное расположение графиков линейных функций;

• использовать линейные уравнения и неравенства как математические модели при решении задач;

• использовать свойства линейной функции для описания реальных процессов;

• решать практико-ориентированные задачи, задачи с межпредметным содержанием, анализировать и исследовать полученные результаты.

Введение функциональной линии на уроках алгебры позволяет обучающимся обобщить представления о зависимостях, полученные в повседневной жизни и в ходе изучения других школьных курсов. Можно сказать, что изучение функциональной линии дает возможность обучающимся научиться мыслить в терминах переменных и зависимостей, и развивает у них представление о взаимной зависимости процессов и явлений в окружающем мире, что сыграет огромную роль в становлении у ребенка системного мышления.

Необходимо учитывать основные принципы, которых следует придерживаться в ходе изучения функциональной линии в школе. Среди фундаментальных из них можно выделить следующие:

• Отражение явлений реальной действительности непосредственно и конкретно. Данная цель не реализуется со столь значительным успехом при изучении иного материала, кроме изучения функциональной зависимости. Изучение функциональной линии должно быть выстроено таким образом, чтобы обучающийся постоянно встречался с разными применениями функциональной зависимости, как в виде формул, так и в виде графиков и диаграмм, составление и интерпретация которых предполагает определённое функциональное мышление.

• Воплощение черт современного математического мышления. Понятие функциональной линии, как ни одно другое математическое понятие приучает детей к осмыслению величин в их изменяемости и взаимосвязи. Можно сказать, что изучение функциональной линии способствует усвоению обучающимися основ диалектического мировоззрения и системного мышления.

• Внедрение основополагающего понятия высшей математики – понятия функции. В силу того, что функциональная линия присутствует и на постшкольных этапах обучения, качество подготовки обучающихся в школе к усвоению математики высшей школы во многом зависит от того, насколько твёрдо и полно изучена функциональная линия.

- Использование понятия функции в реальной жизни, а также при решении многих задач, непосредственно не связанных с понятием функции и не включенных в курс математики. Идея функции часто используется в геометрии, физике, химии и биологии.

Таким образом, изучение функциональной линии в школе представляет собой не только одну из важнейших задач преподавания математики в школе, но и является средством, позволяющим связать единственной идеей или формулой различные курсы математики а также, установить связь с другими науками.

Традиционно, при изучении функциональной линии, выделяется две полярные методические трактовки понятия функции и функциональной линии: **генетическая и логическая**.

Генетическая интерпретация понятия функции предполагает освоение основных черт, вошедших в понятие функции до середины девятнадцатого века. Ключевыми понятиями, используемыми при генетической трактовке, являются переменная величина, формула, выражающая одну переменную через другие, функциональная зависимость переменных величин, декартова система координат на плоскости.

Основные достоинства генетической трактовки состоят в том, что в данном подходе подчеркнут динамический характер понятия функциональной зависимости, выявляется модельный аспект функции при изучении явлений природы. В силу того, что большинство функций при данном подходе выражаются таблично или аналитически, генетическая трактовка весьма логично увязана с иными элементами содержания курса алгебры.

Помимо перечисленных положительных черт генетическая трактовка понятия функции содержит ряд ограничительных элементов, отрицательно сказывающихся на процессе освоения функциональной линии обучающимися. Одним из существенных минусов генетической трактовки является тот факт, что переменная при таком подходе, как правило, представляется величиной, пробегающей непрерывный ряд числовых значений. Это приводит к тому, что зачастую в значительной степени понятие функции при изучении связывается лишь с числовыми функциями одного числового аргумента. Для того, чтобы нивелировать этот недостаток, в обучении необходимо постоянно выходить за пределы первоначального описания аргумента, используя и развивая функциональные представления.

Логическая трактовка в изучении понятия функции предполагает построение обучения функциональным представлениям на основе методического анализа понятия функции. Анализ понятия функции при логическом подходе проходит в рамках понятия алгебраической системы.

При логической трактовке функция выступает в виде специфического отношения между двумя множествами, удовлетворяющего условию функциональности. Начальным этапом изучения функциональной линии, при логическом подходе, становится вывод понятия функции из понятия отношения.

Положительной стороной данной трактовки является то, что при логическом подходе существует необходимость иллюстрировать понятие функции при помощи разнообразных средств, что в значительной степени обогащает язык школьной математики. Кроме таблиц и формул, в логическом подходе используется задание функции стрелками, перечислением пар, применяется не только числовой, но и геометрический материал. Геометрические преобразования различного рода при логическом подходе также возможно рассматривать как функцию. Основные достоинства логической трактовки при изучении функциональной линии – это обобщенность возникающего понятия функции и вытекающие из него возможности установления взаимосвязей в обучении математике.

При этом, при логической трактовке выработанное общее понятие функции оказывается связанным с числовыми функциями одного числового аргумента, то есть с той же самой областью, в которой оно формируется при генетическом подходе, но с приложением меньших усилий, нежели в логическом.

Независимо от выбранного подхода в изучении функциональной линии следует учитывать многокомпонентность данного понятия, и формировать у обучающихся представление о системе этих компонентов. В самом общем смысле в систему входят **следующие компоненты**:

- Комплекс представлений о функциональной зависимости переменных величин в явлениях и процессах реальной жизни и в точных науках.
- Понимание функции как соответствия.
- Понимание графиков функций, как основы графического представления зависимостей.
- Комплекс способов вычисления значений функций.

На основании вышеизложенного можно сказать, что при изучении понятия функциональной линии генетический подход оказывается недостаточным для освоения обучающимися функции как обобщенного понятия, а логическая трактовка обнаруживает некоторую избыточность. Однако эти различия не особенно влияют на процесс освоения функциональной линии и не меняют свойств ее понятия, так как в дальнейшем ее изучении они постепенно стираются. Исчезновение этих различий обусловлено тем, что в курсах алгебры изучается не само понятие функции, а конкретно заданные функции и классы функций, а также их приложения в метапредметной области.

Из Программы:

Изучение математики на ***втором этапе*** (VII—IX классы) направлено на знакомство учащихся с действительными числами, изучение иррациональных и некоторых трансцендентных (на примере тригонометрических) выражений, уравнений и неравенств, **основных элементарных функций**, систематическое изучение геометрических фигур, их свойств и отношений. При изучении многочленов и рациональных дробей формируются умения осуществлять тождественные преобразования. Основным подходом к решению текстовых задач становится использование математических моделей: уравнений, неравенств, их систем.

В учебном предмете «Математика» при его изучении на втором и третьем этапах выделяется два компонента: алгебраический и геометрический.

Содержание ***алгебраического компонента*** VII—IX классов предусматривает знакомство с понятиями иррационального и действительного чисел. Введение иррациональных чисел мотивируется недостаточностью рациональных чисел для решения некоторых математических задач. Здесь систематизируются знания учащихся о выражениях и формулах; изучаются тождества, формируются навыки тождественных преобразований; рассматриваются рациональные выражения и действия над ними; изучаются квадратный трехчлен, квадратные корни и их свойства, корни степени n; свойства числовых неравенств; квадратные уравнения; линейные и квадратные неравенства; системы уравнений с двумя переменными первой степени; системы уравнений с двумя переменными, сводящиеся к уравнениям первой или второй степени; арифметическая и геометрическая прогрессии; **некоторые функции, их графики и свойства (область определения, множество (область) значений, нули, промежутки знакопостоянства, возрастание, убывание, наибольшее и наименьшее значения).**

IX класс
Алгебраический компонент
(2,5 ч в неделю, всего 87 ч)

Функции

Функция. Область определения и множество (область) значений функции. Способы задания функции. График функции. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства функции.

Функции $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, их свойства и графики.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны:

знать термины и правильно использовать понятия:

функция; аргумент функции; значение функции; область определения функции; множество (область) значений функции, график функции; четность и нечетность функции; наибольшее и наименьшее значения функции; нули функции; промежуток возрастания функции, промежуток убывания функции; промежуток возрастания функции, промежуток убывания функции, промежуток знакопостоянства;

знать: свойства функций $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$;

уметь: находить область определения функции, определять по графику функции ее свойства;

строить графики $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$.

X класс
СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА
140 ч (4 ч в неделю)
Алгебраический компонент — 84 ч
Геометрический компонент — 56 ч

ФУНКЦИЯ (15 ч)

Функция числового аргумента. Свойства функции (область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства функции, четность и нечетность, периодичность, возрастание и убывание, точки максимума и минимума, максимум и минимум, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке).

Построение графиков функций:
$y = f(x \pm a), \qquad y = f(x) \pm b, \qquad a, b \in R;$
$y = kf(x), \quad k > 0, \quad k \in R;$
$y = -f(x)$
с помощью преобразования графика функции $y = f(x)$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия как функция натурального аргумента. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

иметь представление о понятиях: функция числового аргумента, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия как функция натурального аргумента;

знать термины и правильно применять понятия: область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства, четность и нечетность, периодичность и наименьший положительный период, возрастание и убывание, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

уметь:

• находить область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, наименьший положительный период, промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке по аналитическому заданию функции и по графику функции;

• находить сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

• исследовать функцию на четность и нечетность по аналитическому заданию функции и по графику функции;

• выполнять построение графиков функций:

$y = f(x \pm a), \qquad y = f(x) \pm b, \qquad a, b \in R;$

$y = kf(x), \quad k > 0, \quad k \in R;$

$y = -f(x)$

с помощью преобразования графика функции $y = f(x)$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ (40 ч)

Градусная и радианная мера произвольного угла. Единичная окружность. Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса произвольного угла.

Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества).

Тригонометрические функции числового аргумента. Их свойства и графики.

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа.

Простейшие тригонометрические уравнения sinx=a, cosx=a, tgx=a, ctgx=a и уравнения, сводящиеся к простейшим.

Формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать термины и правильно применять понятия: единичная окружность, синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла; тригонометрические функции числового аргумента; арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа;

знать:

- свойства тригонометрических функций числового аргумента;
- тригонометрические тождества; формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение;
- числовые значения выражений sinx, cosx при x, равном $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ и tgx, ctgx для этих углов (в случае существования этих значений); значения выражений arcsina и arccosa при a, равном $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$, и выражений arctga и arcctga при a, равном $0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm 1, \pm\sqrt{3}$;
- формулы решения простейших тригонометрических уравнений;

уметь:

• переводить градусную меру углов в радианную и наоборот;

• строить углы по их заданной градусной или радианной мере; использовать единичную окружность для нахождения значений синуса и косинуса заданных углов; строить углы по заданному значению их синуса, косинуса, тангенса;

• находить числовые значения тригонометрических выражений, используя значения тригонометрических функций и соответствующих формул;

• выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул;

• строить графики тригонометрических функций и применять свойства функций;

решать: простейшие тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к ним (методами разложения на множители, замены переменной), однородные тригонометрические уравнения.

СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ (25 ч)

Корень n-й степени из числа а $(n \geqslant 2, n \in N)$. Арифметический корень. Основные свойства корня n-й степени. Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени.

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с действительным показателем.

Степенная функция с рациональным показателем, свойства и график степенной функции.

Иррациональные уравнения.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

иметь представление о степени с действительным показателем;

знать термины и правильно применять понятия: корень n-й степени из числа а, показатель степени корня, подкоренное выражение, степень с рациональным показателем, степенная функция, иррациональное уравнение;

знать:

• основные свойства корня n-й степени, свойства степеней с рациональным показателем; свойства и график степенной функции; формулы, выражающие свойства степеней и корней n-й степени;

• основные методы решения иррациональных уравнений; уметь:

• вычислять корень n-й степени из действительного числа, представляющего n-ю степень; выносить множитель из-под корня; оценивать значение корня; представлять корень n-й степени в виде степени с рациональным показателем и наоборот; упрощать выражения, содержащие корни и степени с рациональным показателем;

• строить графики степенных функций $y = x^k$ для $k \in Z, k \neq 0, y = x^{\frac{1}{2}}, y = x^{\frac{1}{3}}$;

• решать уравнения вида $x^n = a$, где $n \in N$, $a \in R$; иррациональные уравнения.

XI класс

Содержание учебного предмета

140 ч (4 ч в неделю)

Алгебраический компонент — 84 ч

Геометрический компонент — 56 ч

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА ЧИСЛА (7 ч)

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с иррациональным показателем.

Определение логарифма числа. Основное логарифмическое тождество.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: определение и свойства степени с рациональным показателем; определение логарифма числа; основное логарифмическое тождество;

уметь: применять основное логарифмическое тождество:

• для упрощения выражений;

• для представления положительного числа в виде степени с любым положительным основанием;

• применять полученные знания при решении задач практической направленности;

• решать задачи с практическим и межпредметным содержанием.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ (20 ч)

Процессы показательного роста и показательного убывания. Показательная функция. Свойства показательной функции. Решение задач на применение свойств показательной функции.

Показательные уравнения. Решение показательных уравнений на основании свойств показательной функции. Решение показательных уравнений с помощью разложения на множители, заменой переменной, решение однородных показательных уравнений. Решение показательных неравенств.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: определение и свойства показательной функции, методы решения показательных уравнений и неравенств;

иметь представление о показательной функции как математической модели, которая находит широкое применение при изучении процессов и явлений окружающего мира (радиоактивный распад вещества, рост колонии бактерий);

уметь:

- строить графики показательной функции с различными основаниями;
- применять свойства и графики показательной функции с различными основаниями для сравнения значений показательной функции, для определения множества значений, наибольшего и наименьшего значений;
- решать показательные уравнения на основании свойств показательной функции, с помощью разложения на множители, заменой переменной;
- решать однородные показательные уравнения;
- решать показательные неравенства на основании свойств показательной функции с помощью разложения на множители, заменой переменной;
- решать однородные показательные неравенства;
- решать задачи с практическим и межпредметным содержанием.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (30 ч)

Свойства логарифмов: логарифм произведения, частного, степени. Формула перехода от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием. Десятичный логарифм.

Логарифмическая функция. Свойства логарифмической функции. Решение задач на применение свойств логарифмической функции.

Решение логарифмических уравнений на основании свойств логарифмической функции и свойств логарифмов. Решение логарифмических уравнений заменой переменных. Решение систем логарифмических уравнений.

Решение логарифмических неравенств.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: свойства логарифмов: логарифм произведения, частного, степени; формулу перехода от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием; определение десятичного логарифма; определение и свойства логарифмической функции; методы решения логарифмических уравнений и неравенств;

уметь:

- строить графики логарифмической функции с различными основаниями;
- применять свойства и графики логарифмической функции с различными основаниями для сравнения значений логарифмической функции, для нахождения области определения и множества значений, наибольшего и наименьшего значений;
- решать логарифмические уравнения на основании свойств логарифмической функции, с помощью разложения на множители, заменой переменной;

решать: системы логарифмических уравнений, логарифмические неравенства, задачи с практическим и межпредметным содержанием.

Из предметных результатов при изучении функциональной линии должны быть достигнуты следующие:

• Обучающиеся должны овладеть базовым понятийным аппаратом по всем разделам содержания функциональной линии.

• Обучающиеся должны иметь представление об основных понятиях, приуроченных к функциональной линии, таких, как число, уравнение, геометрическая фигура, вероятность, функция, в силу того, что данные категории являются важнейшими математическими моделями, позволяющими исследовать и анализировать реальные процессы и явления.

• Обучающиеся должны овладеть системой функциональных понятий, языком и символикой.

• Обучающиеся должны уметь описывать и анализировать реальные зависимости, опираясь на функционально-графические представления.

• Обучающиеся должны уметь использовать функционально-графические представления для решения математических задач, исследования, описания и анализа реальных зависимостей [38].

Таким образом, исходя из планируемых результатов изучения функциональной линии, можно сформулировать ряд целей ее изучения:

1. Формирование у обучающихся целостного представления об окружающем мире и взаимосвязи его компонентов на основании исследования реальных зависимостей при помощи функций. При достижении данной цели ребенок научится понимать взаимосвязь явлений и процессов в мире, описывать их математическим языком, придет к осознанию того, что математика, как наука, является «линейкой» окружающего мира. Также у ребенка могут быть заложены основы навыков для продолжения образования на более высоких ступенях обучения - в высших учебных заведениях.

2. Формирование навыков использования функций в повседневной жизни, как в бытовых аспектах, так и в специальных областях, например, научных исследованиях. При достижении данной цели ребенок овладеет навыками применения изученного материала функциональной линии для решения бытовых

проблем и использования его при обучении другим учебным предметам. Также возможно формирование у ребенка основ умений и навыков учебно-исследовательской деятельности, имеющей значение для дальнейшего образования.

3. Формирование у обучающихся знаний, умений и навыков использования понятийного аппарата, связанного с функциональной линией, в математике и других областях научных знаний. При достижении данной цели обучающийся сможет свободно использовать термины и понятия из раздела «функции», как в общенаучных, так и в бытовых аспектах жизни. В дальнейшем возможно формирование у ребенка навыков использования терминов и понятий в научных исследованиях.

4. Формирование у обучающихся навыков перевода информации из одного вида в другой: из графической в текстовую, табличную, на язык формул. Достижение этого результата позволит более эффективно усваивать учебный материала и формировать знания, умения и навыки, как в курсе математики, так и в других школьных дисциплинах. Возможно формирование у ребенка ключевых навыков работы с информацией - поиска, получения, преобразования, необходимых в курсе дальнейшего обучения для обработки больших объемов научных знаний.

Лекция 11. Возможная методическая схема изучения функций в базовой школе. Методика изучения алгебраических функций.

Введение функциональной линии в школьный курс алгебры обусловило возникновение четырех методических проблем, вокруг которых сформировались расхождения во мнениях методистов, а именно:

1. Какова цель и значение изучения понятия функции обучающимися?

2. Какие подходы в наибольшей степени соответствуют грамотному освоению материала раздела «функции»?

3. В каком виде, и в какой момент необходимо вводить функциональную пропедевтику (преддверие понятия функции)?

4. Какое место, и в каком объеме должен занимать функциональный материал в курсе школьной математики?

В связи с большим объемом и многокомпонентностью понятия функции, простейшие элементы функциональной линии изучаются, начиная со средних классов школы. Как правило, с седьмого года обучения идет постепенное изучение свойств функций и функциональных зависимостей. Помимо этого, изучаются различные классы функций по возрастанию сложности: с линейных функций и их графиков к квадратичным функциям и функциям обратной пропорциональности. Позднее, в старших классах изучают тригонометрические, показательные и логарифмические функции. Различные классы функций рассматриваются как функции одной переменной, и сами переменные не выходят за рамки множества вещественных чисел.

Изучение функциональной линии представляет собой достаточно длительный процесс, который логически должен завершиться формированием представлений обо всех компонентах понятия функции, их взаимосвязи и роли в математической науке. Для достижения наилучших результатов, процесс изучения функциональной линии ведется по трем основным направлениям:

• Упорядочение основных представлений о функции, введение системы понятий, приуроченных к функциональной линии, в частности, способы задания и свойства функций, графическое чтение области определения и значений функции, возрастания и убывания.

• Подробное изучение отдельных функций и их классов.

• Расширение области применения функциональной линии при помощи включения в нее идеи функции и системы действий с функцией.

Первоначальным направлением в курсе школьной алгебры выступает упорядочение представлений о функции. При осуществлении данного направления ключевое место отводится освоению однозначности соответствия аргумента и определенного по нему значения функции. Для закрепления данного материала рассматриваются различные способы задания функции.

В большинстве случаев функция задается формулой, а иные способы задания функции играют второстепенную роль. На основании этого после знакомства с несколькими способами задания функции основное внимание в обучении уделяется функциям, имеющим стандартную алгебраическую форму их выражения. При этом необходимо учитывать тот факт, что в процессе введении понятия функции сопоставление разных способов ее задания выполняет важную роль. Главным образом, это обусловлено практической потребностью, так как таблицы и графики служат для удобного представления функции, в тех или иных обстоятельствах. Кроме того, для усвоения всего многообразия аспектов понятия функции также необходимо знать и понимать различные способы задания функции. Выражение функции формулой возможно только в тех случаях, когда функция включена в соответствующую систему представлений и операций, однако эта система сама по себе подразумевает, что различные компоненты понятия функции могут быть отображены наиболее естественно иными средствами.

В данном ключе использование заданий по переводу задания функции из одной формы представления в другую является достаточно эффективным методическим приемом при изучении функциональной линии.

Осуществление данного приема предполагает использование системы заданий, где представлены все случаи такого перевода. На современном этапе при изучении понятия функции преобладающими являются два исторически сложившихся подхода: индуктивный и дедуктивный.

Приобретаемые в ходе изучения функциональной линии навыки работы с формулой и исследования элементарных функций необходимы для изучения в дальнейшем электродинамики и оптики. Кроме того, навыки построения графиков функции играют существенную роль при изучении всего курса физики.

На основе знаний, полученных в процессе изучения функциональной линии у обучающихся формируются метапредметные расчетно-измерительные умения и навыки. Изучение материала функциональной линии опирается на метапредметные связи с курсами физики, черчения, химии, физической географии.

Преобразование графиков, как метод работы используется на восьмом году обучения, когда в теоретическом аспекте изучаются два преобразования: параллельный перенос и растяжение графика.

Задания на преобразование графиков функций более сложны, нежели вышеперечисленные, в связи с чем, прежде чем приступить к их выполнению, у обучающегося необходимо сформировать часть понятийного аппарата и дать понимание самого смысла функции, как математической категории. При соблюдении данных условий задания на преобразование графиков усиливают познавательную активность обучающихся.

Использование функциональной символики целесообразно начинать с седьмого года обучения после начала изучения функций. Для наилучшего овладения функциональной символикой необходимо предлагать обучающимся примеры, нацеленные на осознание смысла символьной записи функции. Недостаточное владение функциональной символикой вызывает ряд существенных затруднений у обучающихся. В частности, школьники, как правило, не могут исследовать функцию на четность не вследствие того, что не знают определений четной или нечетной функции, а потому, что не понимают значения записи f(-x). Зачастую обучающиеся испытывают затруднения с нахождением производной в силу лишь технических трудностей и недостаточного понимания смысла записи $f(x+\triangle x)$, в связи с чем, они не могут составить выражение для приращения функции даже в элементарных случаях. Данный факт означает, что соответствующая работа по изучению функциональной символики была в недостаточной степени проведена в седьмом, восьмом и девятом классах.

Чтение графика функции выступает наиболее фундаментальным методом изучения функциональной линии. Обучение описанию по графику свойств функции и переходу от заданной геометрической модели к вербальной, табличной или аналитической формирует у обучающихся навыки работы с информацией и ее преобразования.

На седьмом году обучения перевод из одних видов информации в другие достаточно беден, но по мере появления новых свойств функций и углубления знаний о ней он становится богаче, что обуславливает понимание обучающимися повышение собственного уровня знаний, что соответствует принципу осознанности в теории развивающего обучения.

Уже на девятом году обучения наличие в курсе алгебры достаточно большого числа свойств функций позволяет сделать процесс чтения графика разнообразным, интересным и многоплановым. У обучающихся появляется возможность составить довольно четкий «словесный портрет» функции по ее графику.

В рамках изучения функциональной линии происходит формирование у обучающегося целостного представления о зависимостях в мире и навыков метапредметных действий.

- Содержание материала функциональной линии подразумевает, выявление обучающимся общих закономерностей функций, развитие навыков оперирования ими, владение понятийным аппаратом, умение применять полученные знания на практике.

• Среди многообразия методов изучения функции необходимо отдавать предпочтение тем, которые нацелены на формирование навыков у обучающегося и достижение метапредметных результатов.

В таблице 1 представлены примерные формулировки заданий, исходя их необходимости формирования учебных навыков обучающегося:

Таблица 1

Формулировки учебных заданий, позволяющих сформировать учебные навыки обучающихся

Навык мнемонического воспроизведения	**Навык извлечения и описания информации**	**Навык структурирования и переработки информации**	**Навык осмысления, оценки и интерпретации информации**	**Навык творческого применения информации**
1. Дайте определение линейной функции; 2. Сформулируйте отличия линейной функции от других видов функций.	1. Опишите процесс построения графика функции по формуле; 2. Перечислите факторы, влияющие на форму графика функции; 3. Дайте характеристику основных видов функций; Понаблюдайте за превращением графика функции при изменении значения переменной.	1. Составьте план исследования функции; Выполните исследование функции; 2. Подготовьте доклад о свойствах линейной функции; 3. Укажите главное свойство линейной функции.	1. Проанализируйте график линейной функции; 2. Найдите закономерности изменения положения графика функции при изменении значения переменной; Объясните, чем обусловлены свойства линейной функции.	1. Выскажите своё мнение о свойствах линейной функции; 2. Исследуйте график функции.

Деятельностная задача урока открытия нового знания представляет собой формирование способности обучающихся к новому способу действия. Образовательная задача урока открытия нового знания - это расширение понятийной базы обучающегося при помощи включения в нее новых элементов. При изучении функциональной линии основной деятельностной задачей является формирование навыка преобразования информации из текстовой в аналитическую, графическую, табличную. На уроках данного типа целесообразно давать задания на чтение графика функций, составление таблиц значений функции, построение графика по формуле. При помощи подобных заданий достигается и формирование понятийного аппарата обучающегося. На уроках данного типа, с целью закрепления понятийного аппарата целесообразно включить задания следующего типа: «Объясните, чем обусловлены свойства линейной функции?», «Выявите отличия линейной функции от других видов функций на основании ее графика?». Также полезно предложить задания на сравнение, например: «Сравните два графика функции, в чем их основные отличия, каким функциям они принадлежат?».

Деятельностная задача урока рефлексии предполагает становление у обучающихся способностей к рефлексии коррекционно-контрольного типа, а также, фиксирование собственных затруднений в деятельности, выявление их причин, построение и осуществление плана выхода из затруднения. Образовательная задача урока рефлексии подразумевает коррекцию и тренинг изученных понятий, фактов и алгоритмов. На уроках рефлексии в рамках изучения функциональной линии необходимо организовывать взаимодействие обучающихся между собой по поиску затруднений, возникших при изучении материала раздела «функции». Для организации следует давать задания в парах по взаимопроверке, и также использовать методики групповой работы. Данный подход не только позволит грамотно провести рефлексию, но и сформирует ряд коммуникативных универсальных учебных действий. Для урока рефлексии задания должны быть сформулированы с целью формирования познавательной активности обучающихся, например: «Почему описание графика параболы вызвало у вас трудности и как можно их преодолеть?», «Какой тип функции вызывает наибольшие сложности при запоминании ее свойств и почему?», «Как можно ускорить процесс нахождения минимума и максимума функции?». Также полезно задавать стандартные для процесса рефлексии вопросы: «Что понравилось?», «Что вызвало сложности?», «Что осталось непонятным?».

Деятельностная задача урока общеметодологической направленности предполагает формирование способности обучающихся к новому способу действия, приуроченному к построению структуры изученных понятий, фактов и алгоритмов. Образовательная задача такого урока – это выявление теоретических основ построения содержательно-методических линий. При изучении функциональной линии данный тип урока является одним из самых важных, в силу того, что он позволяет обучающимся систематизировать полученную информацию. Задания на уроках общеметодологической направленности должны показывать взаимосвязь различных элементов материала. Одним из примеров подобного упражнения может являться отображение одной функции в разных видах – в виде графика, формулы, таблицы, теоретического описания, таким образом, у ученика формируется целостное представление о функции и возможности ее отображения в различных вариантах. Наиболее продуктивными вариантами контроля полученных знаний обучающихся является самоконтроль и взаимоконтроль. При изучении функции на уроках такого типа также целесообразно организовать работу в парах, когда обучающиеся проверяют контрольные работы друг друга, после чего они отдаются на проверку педагогу. Выставление оценки может быть и по результатам контрольной работы и по результатом поиска ошибок у соученика. Педагогический опыт показывает, что обучающиеся проверяют ошибки друг у друга строже, нежели сам учитель. Заданиями для урока общеметодологической направленности могут быть следующие: «Сгруппируйте виды функций по их основным свойствам?», «Проанализируйте виды функций?», «Объясните данное свойство функции». Также целесообразны упражнения на повторение материала.

Деятельностная задача урока развивающего контроля – это становление способности обучающихся к реализации контрольной функции, а образовательная задача подразумевает собственно контроль и самоконтроль изученных понятий, фактов и алгоритмов.

Механизм деятельности по контролю в рамках уроков развивающего контроля предполагает четыре этапа работы:

1. Предъявление контролируемого материала.

2. Подбор понятийно обоснованного эталона для контроля, а не его субъективной версии.

3. Сопоставление проверяемого материала с эталоном по определенным критериям.

4. Анализ результата сопоставления по предварительно обоснованным критериям.

На основании этого, уроки развивающего контроля предполагают организацию деятельности обучающегося по следующей структуре:

- Написание обучающимися контрольной работы.
- Сопоставление результатов контрольной работы с объективно обоснованным эталоном выполнения этой работы.
- Оценка обучающимися результата сопоставления на основании ранее определенных критериев.

В качестве примера материала для урока развивающего контроля можно привести процесс контроля усвоения материала в теме линейной функции. Результатом изучения линейной функции является формирование у обучающихся следующих навыков:

- Навык построения графиков линейной функции;
- Навык поиска по значению аргумента соответствующего значения функции и производство обратного действия;
- Навык определения расположения графика на оси координат в зависимости от коэффициента;
- Навык описания расположения графика по формуле, задающей функцию, и производство обратного действия.

При вынесении на контроль материала по линейной функции целесообразно включить разнородные задания.

Для устной работы полезно задать ряд таких вопросов, как: «Какой вид имеет формула, задающая линейную функцию?», «Из данных функций выделите линейные: 1. $y=-2,4x-4$; 2. $y=4x$; 3. $y=3x-4$; 4. $y=0,2x-4$», «Что представляет график линейной функции?», «Сколько точек необходимо для построения графика линейной функции?»

Для письменной работы целесообразно включить следующие упражнения: «Постройте график функции $y=4x-6$ и по графику найдите значение y, при котором $x=2$; 1; 0,5 и значение x, при котором $y=-1$; 1; -3», «Постройте графики функций $y=3x-4$ и $y=3x+2,5$ в одной системе координат, чем обусловлено их взаиморасположение?», «Выясните, проходит ли график функции $y=-3x+8$ через точки: A (2;2) и B (11;15)».

Также полезно включить ряд заданий на обобщение, используя их в процессе фронтального опроса по линейной функции, в частности: «Среди указанных функций назовите те, графики которых: проходят через начало координат, пересекают ось ординат в точке с положительной (отрицательной) ординатой, параллельны оси абсцисс», «Выделите функции, графики которых составляют с осью абсцисс острый угол и тупой угол».

При выполнении вышеуказанных заданий полезно использовать процесс взаимопроверки и взаимооценки обучающимися друг друга, так как при таком подходе более эффективно проходит процесс запоминания и обобщения основных моментов изученного материала и его систематизации, что, в свою очередь, и является целью урока контроля.

В отличие от урока контроля, урок открытия нового знания обладает более сложной структурой, также включающей несколько этапов.

Первый этап – мотивирование обучающихся к учебной деятельности предполагает осознанное вхождение ученика в пространство и сферу учебной деятельности на уроке. Мотивирование к учебной деятельности состоит из трех компонентов: актуализация требования к ученику со стороны учебной деятельности, так называемый, компонент «надо», создание условий для становления внутренней потребности ученика включиться в учебную деятельность– компонент «хочу» и установление тематических рамок, компонент «могу». При изучении функциональной линии на данном этапе целесообразно показать практическое применение функций в жизни: в быту, профессиях, науке и технике.

В процессе мотивации к учебной деятельности происходят процессы адекватного самоопределения ученика в учебной деятельности и самополагания в ней. Данные процессы предполагают сопоставление и сравнение обучающимся своего реального «Я» с образом «Я–идеальный ученик», и осознанное подчинение системе нормативных требований учебной деятельности, на основе этого сопоставления, а также, выработку внутренней готовности к обучению.

Второй этап, предполагающий актуализацию и фиксирование индивидуального затруднения в пробном учебном действии, организует подготовку и мотивацию обучающихся к самостоятельному выполнению пробного учебного действия, его реализации и фиксации индивидуального затруднения.

Таким образом, этап актуализации предполагает:

- Актуализацию освоенных способов действий, необходимых для построения нового знания, а также, их обобщение, анализ и фиксацию.
- Актуализацию мыслительных операций и познавательных процессов, необходимых для данных способов действий.
- Мотивацию к пробному учебному действию и его самостоятельное осуществление
- Фиксацию индивидуальных трудностей и проблем при выполнении пробного учебного действия или его обосновании.

На этапе актуализации следует напомнить обучающимся, когда ранее в школьном курсе математики они сталкивались с различными зависимостями, например, при решении задач на скорость, время, расстояние, и насколько простым и логичным был тот давний материал.

Третий этап подразумевает работу по выявлению места и причины затруднения. Для решения данной задачи обучающиеся должны осуществить следующие действия:

- Восстановить выполненные операции и зафиксировать место возникновения затруднения.
- Соотнести и сравнить собственные действия с используемым способом действий, на основе чего выявить и зафиксировать причину затруднения (конкретные знания, умения и навыки, которых недостает для решения задачи и задач такого класса).

На данном этапе следует выявить, какие свойства, виды отображения или типы функций (в зависимости от содержания урока) вызвали наибольшее затруднение и по какой причине. Основной причиной, как правило, является новизна и «непривычность» материала, так как тема функции является первой в школьном курсе математики, совмещающей элементы алгебры, геометрии и математического анализа.

Четвертый этап работы подразумевает построение плана или проекта выхода из выявленного затруднения. Обязательными компонентами подобного проекта являются тема, цель, способ, план и средство.

На этапе проекта выхода из затруднения обучающиеся в коммуникативной форме обдумывают проект будущих учебных действий. Они ставят цель, каковой в большинстве случаев выступает устранение возникшего затруднения, согласовывают тему урока и способ, строят план реализации цели и определяют средства ее достижения. Педагог должен всецело руководить данным процессом, вначале с помощью подводящего диалога, впоследствии, путем побуждающего и исследовательского методов. Наилучшим выходом на данном этапе представляется предложение ученикам ряда заданий на исследование функций и продолжение решения упражнений такого типа на пятом этапе, однако, уже с подведением итогов.

Пятый этап включает в себя реализацию построенного проекта, подразумевающую обсуждение разнообразных вариантов, предложенных обучающимися, и выбор оптимального из них. Построенный на этапе проектирования способ действий используется для решения задачи, вызвавшей затруднение. В завершение этапа уточняется характер вновь полученного знания и фиксируется преодоление возникшего затруднения.

На шестом этапе осуществляется первичное закрепление с проговариванием во внешней речи, при котором обучающиеся в форме коммуникации, фронтально, в парах или группах, решают типовые задания на новый способ действий с проговариванием хода решения вслух.

Седьмой этап включает в себя самостоятельную работу с самопроверкой по эталону. При проведении седьмого этапа предпочитается индивидуальная форма работы, при которой обучающиеся самостоятельно выполняют задания нового типа и реализуют самопроверку, пошагово сравнивая полученный результат с эталоном. В завершение седьмого этапа существует необходимость организации исполнительской рефлексии процесса реализации построенного проекта учебных действий и контрольных процедур.

Эмоциональная направленность седьмого этапа состоит в организации для каждого обучающегося ситуации успеха, мотивирующей его к включению в дальнейшую познавательную деятельность. Шестой и седьмой этапы наилучшим образом организуются при работе и взаимопроверке знаний в парах самими обучающимися друг у друга.

Восьмой этап подразумевает включение в систему знаний и повторение пройденного материала. На восьмом этапе выявляются практическая значимость нового знания и границы его применимости, а также, выполняются задания, в которых новый способ действий предусматривается как промежуточный шаг.

При организации восьмого этапа педагог подбирает задания, в которых тренируется использование изученного материала, имеющего методическую ценность для введения в дальнейшем новых способов действий. На восьмом этапе происходит как автоматизация умственных действий по изученным нормам, так и подготовка к введению в будущем новых норм. При изучении функций на данном этапе необходимо выработать автоматизированный навык построения графиков, определения их свойств, переведения графиков в формулы. Для достижения автоматизма необходимо дать ряд разнородных заданий из каждой ранее изученной темы раздела «функции».

Девятый и итоговый этап включает рефлексию учебной деятельности на уроке. На данном этапе фиксируется новый материал, изученный на уроке, и организуется самооценка учениками своей учебной деятельности. В завершение этапа рефлексии соотносятся ее цель и результаты, устанавливается степень их соответствия, и намечаются дальнейшие цели деятельности.

Существуют иные варианты типологии урока в рамках системно-деятельностного подхода, но все они, так или иначе, согласуются с приведенной выше классификацией. Типология урока для работы может быть выбрана любая, отвечающая условиям системно-деятельностного подхода, однако при построении урока в рамках системно-деятельностного подхода следует иметь ввиду критерии результативности урока, вне зависимости от того, какая типология выбрана.

Таким образом, независимо от цели и вида урока, а также, форм его проведения для реализации системно-деятельностного подхода следует придерживаться следующих правил:

- Цели урока необходимо задавать с тенденцией передачи функции от педагога к обучающемуся.
- Педагог должен систематически обучать детей осуществлять рефлексивное действие, в частности, оценивать собственную готовность, обнаруживать пробелы в знаниях, находить причины затруднений и проблем.
- Следует использовать разнообразные формы, методы и приемы обучения, повышающие степень познавательной активности обучающихся в учебном процессе.

- Педагог должен владеть технологией диалогового взаимодействия и учить обучающихся грамотно задавать и адресовать вопросы.
- Педагог должен продуктивно и адекватно цели урока сочетать репродуктивную и проблемную формы обучения, а также обучать детей работать как по утвержденному алгоритму или правилу, так и творчески.
- Необходимо четко ставить перед обучающимися учебные задачи и заранее определять критерии самоконтроля и самооценки, с целью становления у детей специальной контрольно-оценочной деятельности.
- Необходимо добиваться осмысления учебного материала всеми обучающимися, используя для этого специальные технологии, методы и приемы.
- Педагог должен оценивать реальное продвижение каждого обучающегося, максимально создавать для каждого ситуации успеха, поощрять и поддерживать минимальные достижения.
- Педагог должен заранее планировать коммуникативные задачи урока.
- Педагог должен принимать и поощрять, выражаемую учеником, собственную позицию или мнение, а также, обучать корректным формам их выражения.
- Стиль и тон отношений, задаваемый на уроке, а также обстановка урока должны создавать атмосферу сотрудничества, сотворчества и психологического комфорта.

На основании вышеизложенного, следует отметить, что поиск идеальной формы урока, соответствующей условиям системно-деятельностного подхода, является одной их основных целей научных и методических поисков как ученых-педагогов, так и педагогов-практиков.

Повышение продуктивности урока и реализация системно-деятельностного подхода предполагает решение качественно новых задач:

- Целеполагание с учетом личностных и возрастных особенностей обучающихся, а также, их способностей, возможностей и интересов.
- Конструирование содержания образования таким образом, чтобы оно способствовало «обучению действию».
- Совершенствование форм, технологий и методов обучения.
- Постоянное психолого-педагогическое сопровождение образовательного процесса.

Методика формирования понятий общих свойств функций

В школьной математике функции образуют классы, обладающие общностью аналитического способа задания, сходными особенностями графиков, областей применения. В курсе алгебры происходит вживление основных понятий функциональной линии. Каждая функция представлена в виде объекта, и её освоение происходит в сопоставлении черт, специфических для неё. Переходя к изучению класса функций (например, линейных) необходимо исследовать данную функцию, как член класса и изучить свойства всего класса на примере типичной функции.

Связи внутри функциональной линии при изучении функций:

1) Индивидуально-заданная функция

Общее понятие функции данная функция характерные приёмы изучения и исследования данной функции

2) Функция, входящая в класс

Общее понятии функции данная функция общие свойства класса функций характерные приёмы изучения и исследования функций данного класса ведущие примеры функций данного класса.

Методическая схема введения понятия функции

Понятие функции вводится конкретно-индуктивным способом;

На основании конкретной формулы устанавливаются характеристические свойства общего понятия функции: области определения, значения, зависимость: каждому - единственное значение.

Формулируются определения функции, сообщается учителем область определения и область значения.

Проиллюстрировать сказанное рисунком.

Привести контрпример понятия функции: область определения; область значений.

Рассмотреть упражнения.

Закрепить формулировку понятия функции.

По этой же схеме можно изучать и остальные общие функциональные свойства: чётность, монотонность, периодичность и т.д.

Методическая схема изучения функций. Изучение функций в классе функций

Методические схема изучения функции.

Рассмотреть подводящую задачу, с помощью которой мотивируется изучение новой функции.

На основе математизации эмпирического материала сформулировать определение функции (сообщить формулу).

Составить таблицу значений функции и построить "по точкам" её график.

Провести исследование основных свойств функции (преимущественно по графику).

Рассмотреть задачи и упражнения на применение изученных свойств функции.

Особенность схемы-исследования функции имеет наглядно-геометрический подход, аналитическое исследование имеет ограниченный характер. Схема применима в изучении линейной, квадратичной, степенной и других функций, с которыми учащиеся знакомятся в курсе алгебры.

Изучение функций в классе функций. Класс линейных функций

Типичный для математики класс функций – линейные. Первоначальное представление связывается с равномерным прямолинейным движением или с построением графика некоторой линейной функции. Рассматривая второй источник можно убедиться в том, что график отдельно взятой линейной функции не может привести к формулированию представлений об основных свойствах графиков всех линейных функций.

Первый способ: использование загущения точек на графике. а) нанесение нескольких точек; б) наблюдение – все построенные точки расположены на одной прямой; в) проверка – берём произвольное значение аргумента и вычисляем по нему значения функции; г) наносим точку на координатную плоскость – она принадлежит построенной прямой. Такой приём приведёт к пониманию того, что график любой линейной функции – прямая (выделение одного из свойств линейной функции), на его проведение потребует очень много времени и общие свойства формулируется на изолированных примерах.

Второй способ: по двум точкам. Этот способ предполагает знание соответствующего свойства графиков линейных функций, выявление новых свойств не происходит.

При обучении происходит последовательная схема этих способов.

Для изучения класса линейных функций в совокупности его общих свойств перед учащимися ставится познавательная задача исследовать класс функций $y=kx+b$ в зависимости от параметров, здесь лучше всего рассмотреть несколько функций с различными параметрами,

Например: Постройте графики функций $y=0.5x$; $y=0.5x+0.5$; $y=1.5x$; $y=1.5x+0.5$.

Дальше необходимо их сравнить, обращая внимание на особенности, связанные с числовыми значением коэффициентов.

Например, изучая геометрический смысл коэффициентов при переменной, отличаем одинаковость углов наклонов к оси, чем меньше этот коэффициент, тем меньший угол наклона образует прямая с осью. После этого формулируется вывод о зависимости рассмотренного угла от коэффициента и вводится понятие “угловой коэффициент”. Закрепляющие упражнения: на одном и том же чертеже изображены графики функций $y=3x+2$; $y=34x+2$. Построить на этом чертеже графики функций $y=3x-1$; $y=34x-1$; объяснить построение.

Самостоятельная работа 3.5
Функция. Линейная функция и ее свойства
Вариант 1

№ 1. Из данных точек выберите точку, принадлежащую графику функции $y = 3 - x$:

а) A(0;-3); б) B(-1;4); в) C(-3;0); г) D(1;-3).

№ 2. Из данных функций выберите ту, график которой параллелен графику функции $y=7x+4$:

а) y=x+7; б) y=1+7x; в) y=4x; г) y=-7x+4.

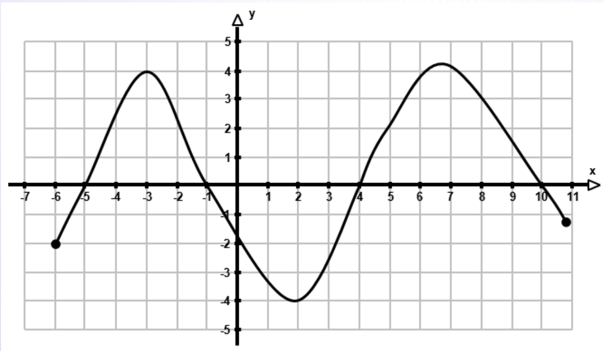
№ 3. Найдите нуль функции: $y=-3x+15$.

№ 4. Постройте график функции: $y=x-3$.

№ 5. График линейной функции $y=-4x$ проходит через точку, ордината которой равна 24. Чему равна абсцисса этой точки?

№ 6. Функция задана формулой $f(x)=-3x+2$. Найдите значение выражения $f(-1)+f(0)$.

№ 7. Функция $y=f(x)$ задана графиком:

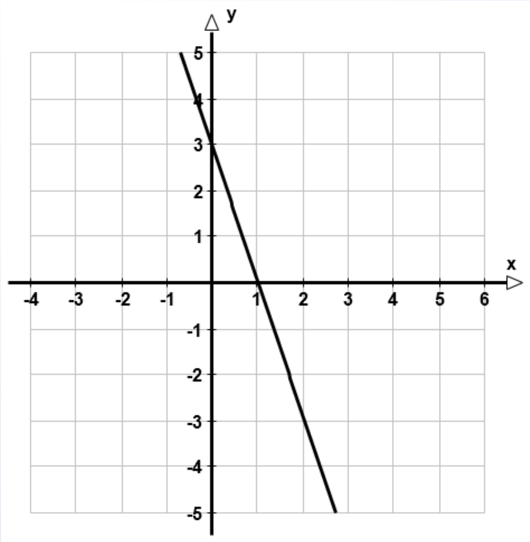


Начало
Содержание
Страница 293 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

Найдите: а) нули функции; б) при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения.

№ 8. Запишите формулу и постройте график линейной функции, если известно, что он проходит через начало координат и параллелен графику функции $y=5\text{-}6x$.

№ 9. На рисунке изображен график функции $y=kx+b$.



Найдите k и b.

№ 10. Найдите, при каком значении числа b точка $A(b+3;2\text{-}b)$ принадлежит графику функции $y=\text{-}3x+1$.

Вариант 2

№ 1. Из данных точек выберите точку, принадлежащую графику функции $y=2-x$:
а) A(0;-2); б) B(-1;1); в) C(-2;4); г) D(-1;-3).

№ 2. Из данных функций выберите ту, график которой параллелен графику функции $y=8x+3$:
а) y=3x; б) y=-8x+3; в) y=1+8x; г) y=x+8.

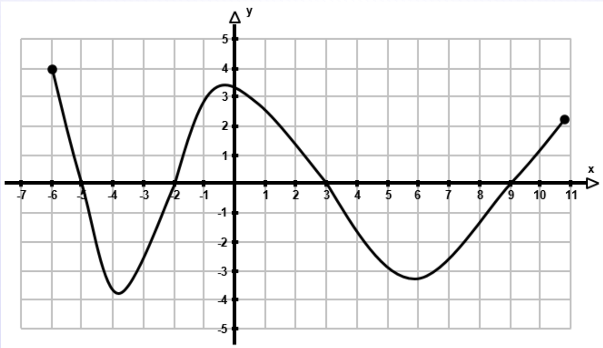
№ 3. Найдите нуль функции $y=-4x+12$.

№ 4. Постройте график функции $y=x-2$.

№ 5. График линейной функции $y=-3x$ проходит через точку, ордината которой равна 15. Чему равна абсцисса этой точки?

№ 6. Функция задана формулой $f(x)=-4x+1$. Найдите значение выражения $f(-1)+f(0)$.

№ 7. Функция $y=f(x)$ задана графиком:

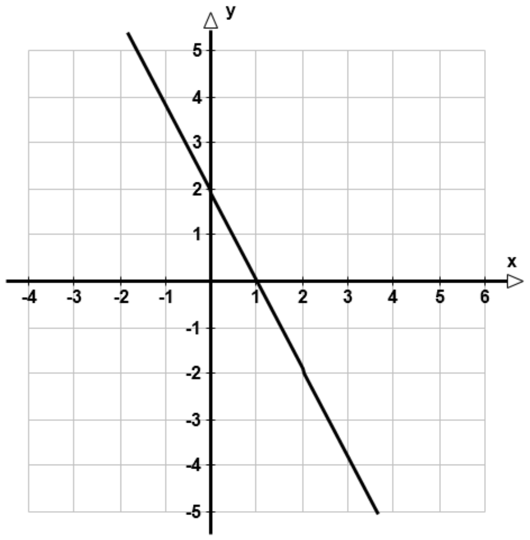


Найдите: а) нули функции; б) при каких значениях аргумента функция принимает отрицательные значения.

Начало
Содержание
Страница 295 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

№ 8. Запишите формулу и постройте график линейной функции, если известно, что он проходит через начало координат и параллелен графику функции $y=7\text{-}4x$.

№ 9. На рисунке изображен график функции $y=kx+b$.



Найдите k и b.

№ 10. Найдите, при каком значении числа b точка $A(b+2;3\text{-}b)$ принадлежит графику функции $y=\text{-}2x+1$.

Контрольная работа № 3
Линейные уравнения. Линейные неравенства. Линейная функция
Вариант 1

№ 1. Из данных точек выберите точку, принадлежащую графику функции $y{=}x{+}2$:

а) A(0;-2); б) B(-1;1); в) C(-2;4); г) D(1;2).

№ 2. Известно, что $m{<}n$. Выберите верное неравенство:

а) $\frac{m}{8} > \frac{n}{8}$; б) $m{+}8{<}n{+}8$; в) $-8m{<}-8n$; г) $m{-}8{>}n{-}8$.

№ 3. Найдите значение функции $y{=}5x{-}1$ при значении аргумента, равном 3.

№ 4. Решите неравенство: $3x{-}4{<}x{+}1$.

№ 5. Постройте график функции $y{=}{-}3x{+}2$.

№ 6. Катер проходит за 4 часа против течения реки такое же расстояние, какое проходит за 3 часа по течению. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

№ 7. Решите уравнение $\frac{4x+5}{6} = \frac{3x-2}{4} + \frac{2x-5}{3}$.

№ 8. Решите неравенство $(x-3)^2 \geqslant x(x-5)+6$.

№ 9. Докажите, что уравнение $6(1{,}2x{-}0{,}5){-}3(2{,}7x{-}1){=}5{-}0{,}9x$ не имеет корней.

№ 10. Нуль функции $y{=}(a{+}1)x{+}a{-}1$ равен 2. Найдите число a.

Вариант 2

№ 1. Из данных точек выберите точку, принадлежащую графику функции $y{=}x{+}3$:

а) A(-3;6); б) B(0;3); в) C(-1;4); г) D(1;3).

№ 2. Известно, что $m{>}n$. Выберите верное неравенство:

а) -6m>-6n; б) m-6<n-6; в) $\frac{m}{6} > \frac{n}{6}$; г) m+6<n+6.

№ 3. Найдите значение функции $y{=}7x{-}1$ при значении аргумента, равном 4.

№ 4. Решите неравенство: $3x{-}6{>}x{+}1$.

№ 5. Постройте график функции $y{=}{-}2x{+}3$.

№ 6. Катер проходит за 3 часа против течения реки такое же расстояние, какое проходит за 2 часа по течению. Найдите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

№ 7. Решите уравнение $\frac{7x-4}{9} - \frac{8-2x}{6} = \frac{3x+3}{4}$.

№ 8. Решите неравенство $(x-2)^2 \leqslant x(x-3)+8$.

№ 9. Докажите, что уравнение $6(1{,}3x{+}0{,}25){-}2(2{,}3x{-}1){=}3{,}2x$ не имеет корней.

№ 10. Нуль функции $y{=}(a{+}2)x{+}a{-}5$ равен 3. Найдите число a.

Лекция 12. Методика изучения арифметической и геометрической прогрессий в курсе математики средней школы

Из Программы (9 класс):

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Числовая последовательность. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Формулы n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий.

ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Учащиеся должны:

знать термины и правильно использовать понятия:

• числовая последовательность; арифметическая прогрессия, разность арифметической прогрессии; геометрическая прогрессия; член прогрессии; знаменатель геометрической прогрессии;

знать:

• формулы n-го члена и суммы n первых членов арифметической прогрессии;

• формулы n-го члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии;

уметь:

• находить разность арифметической прогрессии и знаменатель геометрической прогрессии;

• находить n-й член и сумму n первых членов арифметической и геометрической прогрессий;

• решать задачи на формулы n-го члена и суммы n первых членов арифметической и геометрической прогрессий.

Методика формирования математических понятий включает следующие этапы:

1) введение определения;

2) усвоение определения;

3) закрепление понятия.

Введение определения может осуществляться двумя методами: конкретно-индуктивным (на основе рассмотрения конкретных примеров или задач приходим к новому понятию и его определению) или абстрактно-дедуктивным (определение понятия формулируется сразу после объявления нового термина). Желательно мотивировать введение понятия и полепить происхождение термина. При конкретно-индуктивном введении понятия следует рассматривать пример, который носит общий, а не частный характер.

На этапе усвоения реализуются две цели: запомнить определение и научиться проверять, подходит объект под рассматриваемое понятие или лет. Этот этап осуществляется на специально составленных упражнениях - упражнениях на «да» и «нет», которые формулируются, начиная со слов «Является ли..,». Аргументируя свой ответ, ученики осваивают признаки понятия и выучивают определение. При составлении примеров на «да», учитель варьирует несущественные признаки (включает частные случаи, изменяет размеры, расположение фигур), при составлении примеров на «нет» отвергаем один или несколько существенных признаков. Этап усвоения требует подведения итогов, где повторяется определение понятия его существенные признаки, а также некоторые несущественные признаки (расположение, размеры, частные случаи).

На этапе закрепления решаются более сложные задачи, где используются как определение понятия, так и его свойства, В процессе закрепления регулярно подводятся итоги, где обсуждается, что нового узнали о понятии, что научились делать в рассматриваемым понятием, какие виды задач научились решать. Поэтому процесс закрепления понятия называют его обогащением.

Существует несколько подходов к изучению прогрессий. По традиционной методике **арифметическая** и **геометрическая прогрессия** рассматриваются на уроках раздельно. В заключении же проводится отдельное обобщающее занятие, позволяющее систематизировать полученные знания. В подобной ситуации изучение темы прогрессий проходит поэтапно — от простого к сложному, от знакомства к анализу.

Альтернативой указанной методике является одновременное изучение двух разнотипных прогрессий. В таком случае материал подается с точки зрения сравнения — поиска аналогии и различий. Это вынуждает использовать в один момент слишком много учебной литературы, зато максимально включается в работу логическое мышление.

Если объединить два вышеупомянутых метода, то можно добиться высокой эффективности усвоения материала учениками. В таком случае параллельно рассматриваются только ключевые понятия: что такое геометрическая и арифметическая прогрессия, как находится ее n-ый член. После этого ознакомление с этими двумя числовыми рядами проходит раздельно и последовательно. В результате школьники приобретают важные навыки: сопоставление понятий; нахождение схожести и различия; определение закономерностей; создание математических моделей и т.п. Усвоение учебного материала при указанном подходе максимальное. Плюс активно развивается логика, зрительная память, грамотная с точки зрения математики речь.

"Прогрессия" – латинское слово, означающее "движение вперед", было введено римским автором Боэцием (VI век) и понималось в более широком смысле, как бесконечная числовая последовательность.

На связь между прогрессиями первым обратил внимание Архимед (ок. 287-212 г.г. до н.э).

Сведения, связанные с прогрессиями, впервые встречаются в дошедших до нас документах Др. Греции. Уже в V в. до н.э. греки знали следующие прогрессии и их суммы:

$1+2+3+...+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$;

$2+4+6+...+2n=n\cdot(n+1)$.

Будучи учеником начальной школы Карл Гаусс (1777-1855) нашел сумму всех натуральных чисел от 1 до 100:

1+2+...+99=(1+99)+(2+98)+...+(49+51)+50=100·49+50=4900+50=4950.

Сравнение арифметической и геометрической прогрессии (см. таблица).

Методика изучения понятия арифметической прогрессии

Согласно методике изучения понятий, важной является работа с признаками понятия, зафиксированными в его определении. Выделению этих признаков способствует логико-математический анализ определения. Выделенные признаки помогают составить упражнения на подведение под понятие (упражнения на «да» и «нет»). Для этого полезно составить таблицу учета (или опровержения) соответствующих признаков. К тому же таблица позволяет проанализировать составленные примеры по объему (рассмотрены ли все частные случаи учтены ли все существенные признаки и т.д.).

Логико-математический анализ определения

При подготовке к уроку учителю необходимо провести анализ логико-математической структуры определения с целью выделения существенных признаков понятия, положенных в основу определения, что позволит составить примеры на подведение объектов под определение.

Проведем анализ определения: арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Термин - арифметическая прогрессия.

Род - последовательность.

Видовые отличия - каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (или в таком виде: $a_{n+1}=a_n+d$, где a_1 и d заданы, n - любое натуральное).

Это определение рекурсивное, так как в видовых отличиях указаны действия получения последующего члена, если известен предыдущий. Видовые отличия можно расписать подробнее: второй член равен сумме первого и какого-то числа, третий равен второму, сложенному с этим же числом, и т.д. Выполним действия подведения объектов под определение, результаты занесем в таблицу (табл. 1).

Таблица 1

№ п/п	**Примеры**	**Последовательность (да - «+», нет - «–»).**	**Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (да - «+», нет - «–»).**	**Вывод: данный объект есть арифметическая прогрессия (да - «+», нет - «–»).**
1.	0; -5; -10; -15; ...; -5(n-1),...	+	+	+
2.	1; 3; 5; 10	+	–	–
3.	x+7	–	–	–
4.	7; 7; 7; 7	+	+	+
5.	$\frac{1}{3}$;$\frac{2}{3}$;1;1$\frac{1}{3}$	+	+	+

В таблице представлены вес виды арифметической прогрессии; возрастающая, убывающая, постоянная, конечная, бесконечная, разность может быть положительным, отрицательным числом и нулем; члены прогрессии могут быть натуральными, целыми, дробными.

Этапы формирования понятия арифметической прогрессии

Введение определения

Приведем фрагмент урока по введению понятия арифметической прогрессии.

Запись на доске. 42, 44, 46… - размеры одежды.

Схема №1	Схема №2	Схема №3
1- $\boxed{42}$	1- $\boxed{42}$	1- $\boxed{a_1}$
2- $\boxed{44}$	2- $\boxed{42}+\boxed{2}$	2- $\boxed{a_1}+\boxed{d}$
3- $\boxed{46}$	3- $\boxed{44}+\boxed{2}$	3- $\boxed{a_2}+\boxed{d}$
4- $\boxed{48}$	4- $\boxed{46}+\boxed{2}$	4- $\boxed{a_3}+\boxed{d}$
…	…	…
…	…	…
n - $\boxed{a_n}$	n - $\boxed{a_{n-1}}+\boxed{2}$	n - $\boxed{a_{n-1}}+\boxed{d}$
		(n+1) - $\boxed{a_n}+\boxed{d}$

Рассмотрим последовательность размеров одежды. Назовите первый, второй, третий и так далее члены заданной последовательности.

(Ученики отвечают по очереди. Учитель заполняет окошки схемы №1).

Какая закономерность прослеживается в записи членов этой последовательности?

Если возникает затруднение в ответе на этот вопрос, то предлагается дополнительное задание.

Сравним каждый последующий член последовательности с предыдущим, заполнив окошки схемы №2.

Итак, каждый член последовательности, начинал со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 2, Такая последовательность является примером арифметической прогрессии.

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Это определение можно записать в виде формулы, которую получим, заполнив окошки схемы №3.

Пусть члены прогрессии записаны в виде: a_1; a_2; a_3; ...;a_n.

Число, которое прибавляется к каждому члену прогрессии, может быть не только 2, обозначим его буквой d (заполняются окошки схемы №3).

Итак, для любого натурального n выполняется условие $a_{n+1} = a_n + d$, где d - некоторое число.

d - называют разностью арифметической прогрессии, так как $d = a_{n+1} - a_n$.

Усвоение определения

Цель этапа усвоения определения: выучить его и научиться определять, является ли последовательность арифметической прогрессией или нет. Эти две задачи решаются одновременно, если ученики дают пояснения, почему предлагаемая последовательность является или не является арифметической прогрессией.

Задание 1. Назовите примеры арифметических прогрессий среди последовательностей, записанных на доске. Объясните свой ответ.

1) 0; -5; -10; -15;...; -5(n+1)...
2) 1; 3; 5; 10;...
3) x+7
4) 7; 7; 7; 7;...
5) $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 1\frac{1}{3}; \ldots$
6) 0; 0; 0; 0; 0.
7) -1; -1; -1; -1.
8) -1; 0; -1; 0; -1.
9) 5; 3; 1; -1; -3; -5.
10) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$;

В случае арифметической прогрессии назовите ее разность и ее первый член.

Задание 2.

1. Приведите свой пример арифметической прогрессии.

2. Мы рассматривали размеры одежды и пришли к понятию арифметической прогрессии. Где еще в практической жизни можно встретиться с арифметической прогрессией? (Номера домов четной стороны улицы, размеры обуви).

3. На размеры одежды можно посмотреть как на последовательность чисел, делящихся на 2. Будет ли последовательность чисел, которые при делении на число 2 дают остаток 1, являться арифметической прогрессией? Приведите свой пример.

Итак, мы рассмотрели примеры арифметических прогрессий, заданных перечислением своих членов. Рассмотрим иное задание арифметической прогрессии.

Задание 3. Запишите несколько первых членов арифметической прогрессии, заданных первым членом и разностью:

а) $a_1 = 3, d = 2$; г) $a_1 = -\frac{1}{5}, d = -3$;
б) $a_1 = 0, d = -2$; д) $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$.
в) $a_1 = -3, d = 0$;

Итак, каким способом может быть задана арифметическая прогрессия? Предложите свои примеры арифметических прогрессий, заданных этим способом.

Что в связи с понятием арифметической профессии мы узнали?

Определение, виды, два способа задания.

Замечание. Возможен другой вариант введения понятия арифметической прогрессии, когда арифметическая и геометрическая прогрессии изучаются совместно.

Закрепление понятия арифметической прогрессии

Закрепление понятия арифметической прогрессии осуществляется при выводе и использовании формулы n-го члена для решения как прямых, так и обратных задач, причем арифметическая прогрессия может быть задана разными способами (перечислением своих членов, первым членом и разностью, любыми двумя членами), при выводе и использовании формулы суммы n первых членов, при решении задач, где предварительно требуется доказать, что заданная последовательность чисел является арифметической прогрессией, а затем уже найти недостающие члены прогрессии или сумму заданных чисел и т.д.

Методика формирования математических умений

Методика формирования математических умений опирается на следующие психолого-педагогические требования; при формировании умения следует четко выделять этапы его выполнения (или его алгоритм):

1) выделенные этапы следует формулировать в общем виде, что позволяет решать целый класс задач;

2) каждый этап должен быть отработан отдельно от других с помощью специально подобранных упражнений;

3) при первоначальной отработке умения каждый этап следует проговаривать вслух, поскольку многие ученики не могут пропустить этап «внешней речи» при переходе от общего к частному;

4) желательно, чтобы учащиеся самостоятельно составляли алгоритм выполнения данного умения, хотя результаты выполнения умения в этом случае будут теми же, что и в случае, когда алгоритм будет дан в готовом виде. Участие учеников в создании алгоритма способствует их развитию.

Формирование умений включает три этапа.

- Введение алгоритма. Введение может осуществляться двумя методами: конкретно-индуктивным, когда алгоритм составляется на основе примера, и абстрактно-дедуктивным, когда алгоритм дается в готовом виде или на основе теоретического положения (формулы, определения, теоремы). На этом этапе демонстрируется образец выполнения задания и обосновывается алгоритм решения. Если какой-то шаг алгоритма может быть выполнен неоднозначно, то необходимо рассмотреть на том же задании все возможные способы решения.
- Усвоение алгоритма. Усвоение преследует следующие цели: усвоить признаки, позволяющие определить, что можно пользоваться изученным алгоритмом, усвоить отдельные шаги алгоритма, выучить алгоритм выполнения умения, изучить частные случаи применения алгоритма.
- Закрепление умения. Этап закрепления включает различные случаи и ситуации применения алгоритма. В процессе закрепления важно подводить итоги по обогащению знаний по формируемому умению.

Методика формирования умения определять, является ли данное число членом данной арифметической прогрессии

I. Введение схемы решения

Решается задание: Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9;... число 156?

Сначала в процессе диалога выясняется идея решения, которая позволяет составить план ответа на вопрос задачи.

Как на языке последовательности сказать иначе, что последовательность содержит (или не содержит) какое-то число?

Это значит, что число является (или не является) членом последовательности.

Чем определяется место члена последовательности?

Номером члена последовательности

Каким числом является номер?

Натуральным.

Итак, если нам удастся определить номер числа 156 в арифметической прогрессии, то как мы ответим на вопрос задачи?

Прогрессия содержит число 156.

Что известно об арифметической прогрессии и достаточно ли этих данных для ответа на этот вопрос?

В прогрессии известны первый и второй члены, значит, прогрессия задана полностью, поэтому данных достаточно.

Что позволит найти номер члена прогрессии?

Формула n-го члена (записывается на доске, и анализируются известные величины). В ней известны n-й член и первый, разность прогрессии можем найти по условию задачи. Значит, сможем найти число n.

• Составляется план решения и вписывается решение.

1. Найдем для данной арифметической прогрессии разность d по формуле $x_2 - x_1 = d$, то есть d=9-2=7.

2. Запишем формулу n-го члена арифметической прогрессии.

3. Подставим в эту формулу значения x_1 и d, а вместо x_n данное число 156, получим уравнение: 156=2+7(n-1).

4. Решим полученное уравнение относительно n.

156=2+7n-7; 7n=151; n=23.

5. Так как n, равное 23, является натуральным числом, то делаем вывод, что данная арифметическая прогрессия содержит число 156, оно будет 23-м членом этой прогрессии.

Ответ: число 156 является членом данной арифметической прогрессии.

• Составляется схема выполнения заданий рассмотренного вида:

1. Найти или указать первый член и разность арифметической прогрессии (x_1 и d).

2. Записать формулу n-го члена прогрессии.

3. Подставить в эту формулу найденные значения x_1 и d, а вместо x_n - заданное число.

4. Решить полученное уравнение относительно n.

5. Сделать вывод: если n натуральное число, то данное число является членом прогрессии; если n не является натуральным числом, то данное число не является членом данной арифметической прогрессии.

6. Записать ответ.

II. Выполнение упражнений на отработку шагов алгоритма

• Упражнения на повторение умения находить первый член и разность для арифметической прогрессии (1-й шаг алгоритма).

1. Найдите разность арифметической прогрессии

а) $-\frac{1}{2}; 1; \ldots$ г) $y_1 = 8, y_2 = 24$.

б) 4,5; -6;... д) $a_1 = 3\frac{1}{2}, a_7 = 9\frac{1}{2}$.

в) 3; $4\frac{1}{2}$;...

2. Найти первый член арифметической прогрессии, если:

а) $a_5 = 162, d = 2;$ б) $a_8 = -27, d = -1,5.$

3. Найти первый член арифметической прогрессии, если известно:

а) $c_5 = -2; c_8 = -9;$ б) $a_3 = 5,5; a_9 = 14,5.$

• Упражнения на формирование умения составлять уравнения и находить номер заданного члена последовательности (3-4-й шаги алгоритма).

1) Найдите номер члена арифметической прогрессии:

а) равного 2,94, если $a_1 = -1,36$ и d=4,3;

б) равного 50, если заданы два первых члена прогрессии

• Упражнения на формирование умения делать вывод о принадлежности заданного числа данной прогрессии (5-й шаг алгоритма).

1) Может ли член арифметической прогрессии иметь номер, равный:

а) $-1\frac{2}{3}$; б) 0; в) 24; г) 1,5; д) $-\frac{1}{3}$; е) -7?

III. Закрепление умения

Выполняются упражнения на закрепление умения определять, является ли данное число членом данной арифметической прогрессии или нет.

1. Содержит ли арифметическая прогрессия 2, 9;... число:

а) 269; б) 16,1; в) -7.3; г) 0?

2. Дана арифметическая прогрессия (a_n) у которой $a_1 = 23$, d=-1,5. Является ли членом этой прогрессии число:

а) 0; б) -28; в) 47.

3. Является ли членом арифметической прогрессии число 34, если:

а) $y_1 = 10, y_2 = 22;$ б) $x_{32} = 138, d = 4.$

4. Является ли число 45 членом арифметической прогрессии (a_n), если $a_4 = 25$, $a_7 = 40$?

Тема: «Формула суммы n-первых членов геометрической прогрессии»

Цель урока:

1. Вывести формулу суммы n-первых членов геометрической прогрессии.

2. Научиться находить сумму n-первых членов геометрической прогрессии используя формулы.

Тип урока: урок изучения нового материала.

Методы обучения: метод проблемной ситуации

Ход урока

1. Орг. момент.

- Приветствие.

2. Повторение ранее изученного материала

- Что мы с вами изучали на предыдущих уроках?*(Арифмет. и геометр. прогрессии, вычисляли n-ый член геометрической и арифметической прогрессии, находили сумму n-первых членов арифметической прогрессии).*

- Сегодня мы продолжим работать с геометрическими прогрессиями, выполним следующее задание: из данных последовательностей записанных на доске 1 варианту выписать в тетрадь арифметическую последовательность и указать разность, а 2 варианту выписать геометрическую прогрессию и указать знаменатель геометрической прогрессии.

1. 2,12,22,32...
2. 5,5,5,...
3. 1,3,9,27,...
4. 1,2,3,4,5...
5. 1,4,9,16,...
6. -2,-6,-10,...
7. 2,4,8,16,...

- Запишите формулы по которой вычисляются n-ый член геометрической прогрессии и арифметической прогрессии.

- Вычислите 6 член любой арифметической прогрессии.

- Вычислите 5 член любой геометрической прогрессии.

Оцените свою работу. Поставьте на полях отметки.

3. Мотивация.

Однажды незнакомец постучал в окно к богатому купцу и предложил такую сделку: “Я буду ежедневно в течение 30 дней приносить тебе по 100 000 руб. А ты мне в первый день за 100 000 руб. дашь 1 копейку, а во второй день за 100 000 руб.- 2 копейки, и так каждый день будешь увеличивать предыдущее число денег в два раза. Если тебе выгодна сделка, то с завтрашнего дня начнем”.

Купец обрадовался такой удаче. Он подсчитал, что за 30 дней получит от незнакомца 3 000 000 руб. На следующий день пошли к нотариусу и узаконили сделку.

Вопрос: Кто в этой сделке проиграл: купец или незнакомец?

Учащиеся предлагают записать геометрическую прогрессию и найти сумму 30-ти первых ее членов.

(b_n): 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, :,где b_1= 1, g = 2, n = 30.

Вопрос: Можно ли решить эту задачу более рациональным способом?

Да, если будем знать формулу суммы n-членов конечной геометрической прогрессии.

Сформулируйте тему нашего урока.*(Формула суммы n- членов геометрической прогрессии.)*

Какова цель урока? *(вывести формулу n-членов геометрической прогрессии, научиться находить используя формулу сумму n-членов геометрической прогрессии)*

4. Изучение нового материала.

На доске записано вычисление 5 члена геометрической прогрессии. Используя решение, приведенные ниже, попробуйте составить формулы для вычисления суммы n-членов конечной геометрической прогрессии.

1 группа	2 группа
Дана геометрическая прогрессия a_n: 1;2;4 $a_5 = 1 \cdot 2^{5-1} = 16$; $S_5 = \frac{16 \cdot 2 - 1}{2-1} = \frac{31}{1} = 31$.	Дана геометрическая прогрессия a_n: 1;2;4 $S_5 = \frac{1(2^5-1)}{2-1} = \frac{1(32-1)}{1} = 31$.

Какие формулы получили?

Сравните получившиеся формулы с формулами в учебнике.

Запишите формулы на доску.

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$, $q \neq 1$ (1) $\qquad S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, $q \neq 1$ (2)

Вернемся к нашей задаче просчитаем:

$S_{30} = \frac{1(2^{30}-1)}{2-1} = 2^{30} - 1 = (2^5)^6 - 1 = 1073741823$(коп.)=10737418,23(руб.).

Так кто же выиграл сделку?

5. Закрепление нового материала.

(Решают задачи 1 человек у доски остальные в тетради)

1. Дана геометрическая прогрессия первый член, которой равен 3, а знаменатель 2. Найдите сумму пяти первых членов прогрессии.

2. Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии, первый член которой равен -10, а знаменатель равен 3.

(Решают самостоятельно, потом проверяют. Решение записано с обратной стороны доски)

6. Самостоятельная работа

1) Найти сумму восьми первых членов геометрической прогрессии -2. -4, -8...

2) Вычислить S_6, если $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$.

Проверка самостоятельной работы:

1) $S_8 = -510$, $\qquad$ 2) $S_6 = 126$.

7. Подведение итогов.

Какова была цель урока? Смогли мы достичь поставленных целей? Где возникли трудности? Какой вывод можно сделать?

Лекция 13. Понятие синуса, косинуса, тангенса, котангенса в курсе геометрии. Методика введения тригонометрических функций любого угла.

Из Программы

IX класс
Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема синусов. Теорема косинусов. Решение треугольников.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать термины и правильно использовать понятия:

• решение треугольника;

знать:

• теорему косинусов; теорему синусов;

уметь:

• находить неизвестные углы и стороны треугольника, используя теорему косинусов и теорему синусов;

• применять теоремы синусов и косинусов при решении геометрических задач на доказательство и вычисление.

X класс
ТРИГОНОМЕТРИЯ (40 ч)

Градусная и радианная мера произвольного угла. Единичная окружность. Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса произвольного угла.

Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества).

Тригонометрические функции числового аргумента. Их свойства и графики.

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа.

Простейшие тригонометрические уравнения sinx=a, cosx=a, tgx=a, ctgx=a и уравнения, сводящиеся к простейшим.

Формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать термины и правильно применять понятия: единичная окружность, синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла; тригонометрические функции числового аргумента; арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа;

знать:

- свойства тригонометрических функций числового аргумента;
- тригонометрические тождества; формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение;
- числовые значения выражений sinx, cosx при x, равном $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ и tgx, ctgx для этих углов (в случае существования этих значений); значения выражений arcsina и arccosa при a, равном $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm1$, и выражений arctga и arcctga при a, равном $0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm1, \pm\sqrt{3}$;

- формулы решения простейших тригонометрических уравнений;

уметь:

- переводить градусную меру углов в радианную и наоборот;
- строить углы по их заданной градусной или радианной мере; использовать единичную окружность для нахождения значений синуса и косинуса заданных углов; строить углы по заданному значению их синуса, косинуса, тангенса;
- находить числовые значения тригонометрических выражений, используя значения тригонометрических функций и соответствующих формул;
- выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул;
- строить графики тригонометрических функций и применять свойства функций;

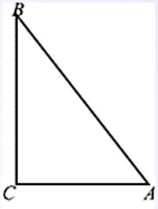
решать: простейшие тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к ним (методами разложения на множители, замены переменной), однородные тригонометрические уравнения.

Рассмотрим, как формируются представление о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе в школьном курсе математики. На уроках геометрии дается определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике. А позже изучается тригонометрия, где говорится о синусе, косинусе, тангенсе и котангенсе угла поворота и числа.

Наиболее принципиальными вопросами ***методики изучения тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника являются:*** 1) введение понятий синуса, косинуса и тангенса острого угла и 2) доказательство зависимости их только от градусной меры угла.

- 1. Перед введением понятий синуса и косинуса угла желательно выполнить упражнения на выделение катетов прямоугольных треугольников, прилежащих к углу, противолежащих углу, на составление отношений катетов к гипотенузе.

• 2. После выполнения упражнений вводятся определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.



Определение.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Определение.

Косинус острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Определение.

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение противолежащего катета к прилежащему.

Определение.

Котангенс острого угла в прямоугольном треугольнике – это отношение прилежащего катета к противолежащему.

Там же вводятся обозначения синуса, косинуса, тангенса и котангенса – sin, cos, tg и ctg соответственно.

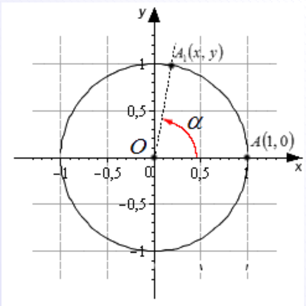
Например, если ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C, то синус острого угла A равен отношению противолежащего катета BC к гипотенузе AB, то есть, $sin\angle A = \frac{BC}{AB}$.

Эти определения позволяют вычислять значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла по известным длинам сторон прямоугольного треугольника, а также по известным значениям синуса, косинуса, тангенса, котангенса и длине одной из сторон находить длины других сторон.

Затем доказывается утверждение: *если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.* Доказательство основано на первом признаке подобия треугольников. После доказательства этого утверждения необходимо выполнить с учащимися несколько упражнений на построение угла по заданному косинусу (синусу) этого угла.

В **тригонометрии** на угол начинают смотреть более широко - вводят понятие ***угла поворота***. Величина угла поворота, в отличие от острого угла, не ограничена рамками от 0 до 90 градусов, угол поворота в градусах (и в радианах) может выражаться каким угодно действительным числом от $-\infty$ до $+\infty$.

Вводят определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса уже не острого угла, а угла произвольной величины - угла поворота. Они даются через координаты x и y точки A_1, в которую переходит так называемая начальная точка A(1,0) после ее поворота на угол α вокруг точки O – начала прямоугольной декартовой системы координат и центра единичной окружности.



Определение.

Синус угла поворота α - это ордината точки A_1, то есть, $sin\alpha = y$.

Определение.

Косинусом угла поворота α называют абсциссу точки A_1, то есть, $cos\alpha = x$.

Определение.

Тангенс угла поворота α - это отношение ординаты точки A_1 к ее абсциссе, то есть, $tg\alpha = \frac{y}{x}$.

Определение.

Котангенсом угла поворота α называют отношение абсциссы точки A_1 к ее ординате, то есть, $ctg\alpha = \frac{x}{y}$.

Синус и косинус определены для любого угла α, так как мы всегда можем определить абсциссу и ординату точки, которая получается в результате поворота начальной точки на угол α. А тангенс и котангенс определены не для любого угла. Тангенс не определен для таких углов α, при которых начальная точка переходит в точку с нулевой абсциссой (0, 1) или (0, -1), а это имеет место при углах $90^0 + 180^0 \cdot k$, $k \in Z$ ($\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ рад). Действительно, при таких углах поворота выражение $tg\alpha = \frac{y}{x}$ не имеет смысла, так как в нем присутствует деление на нуль. Что же касается котангенса, то он не определен для таких углов α, при которых начальная точка переходит к в точку с нулевой ординатой (1, 0) или (-1, 0), а это имеет место для углов $180^0 \cdot k$, $k \in Z$ ($\pi \cdot k$ рад).

Итак, ***синус и косинус определены для любых углов поворота, тангенс определен для всех углов, кроме*** $90^0 + 180^0 \cdot k$, $k \in Z$ ($\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k$ ***рад), а котангенс – для всех углов, кроме*** $180^0 \cdot k$, $k \in Z$ ($\pi \cdot k$ ***рад).***

В определениях фигурируют уже известные нам обозначения sin, cos, tg и ctg, они используются и для обозначения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла поворота (иногда можно встретить обозначения tan и cot, отвечающие тангенсу и котангенсу). При записи радианной меры угла обозначение «рад» часто опускают.

Начало
Содержание
Страница 319 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

Дальше возникает потребность отвязаться от углов и дать ***определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа, а не угла.***

Определение.

Синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом числа t называют число, равное синусу, косинусу, тангенсу и котангенсу угла поворота в t радианов соответственно.

Существует и другой подход к определению синуса, косинуса, тангенса и котангенса числа. Он состоит в том, что каждому действительному числу t ставится в соответствие точка единичной окружности с центром в начале прямоугольной системы координат, и синус, косинус, тангенс и котангенс определяются через координаты этой точки.

Покажем, как устанавливается соответствие между действительными числами и точками окружности:

- числу 0 ставится в соответствие начальная точка A(1, 0);
- положительному числу t ставится в соответствие точка единичной окружности, в которую мы попадем, если будем двигаться по окружности из начальной точки в направлении против часовой стрелки и пройдем путь длиной t;
- отрицательному числу t ставится в соответствие точка единичной окружности, в которую мы попадем, если будем двигаться по окружности из начальной точки в направлении по часовой стрелке и пройдем путь длиной |t|.

Определение.

Синусом числа t называют ординату точки единичной окружности, соответствующей числу t, то есть, sint=y.

Определение.

Косинусом числа t называют абсциссу точки единичной окружности, отвечающей числу t, то есть, cost=x.

Определение.

Тангенсом числа t называют отношение ординаты к абсциссе точки единичной окружности, соответствующей числу t, то есть, $tgt = \frac{y}{x}$. В другой равносильной формулировке тангенс числа t – это отношение синуса этого числа к косинусу, то есть, $tgt = \frac{sint}{cost}$.

Определение.

Котангенсом числа t называют отношение абсциссы к ординате точки единичной окружности, соответствующей числу t, то есть, $ctgt = \frac{x}{y}$. Другая формулировка такова: тангенс числа t – это отношение косинуса числа t к синусу числа t: $ctgt = \frac{cost}{sint}$.

Тригонометрические функции углового и числового аргумента

$sin\alpha$, $cos\alpha$, $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ - это функции угла α, другими словами – это функции углового аргумента.

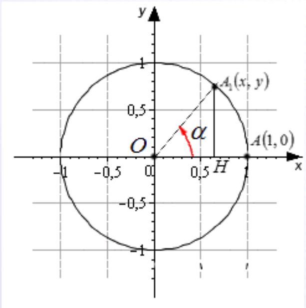
Аналогично можно говорить и про функции синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Действительно, каждому действительному числу t отвечает вполне определенное значение sint, как и cost.

Функции синус, косинус, тангенс и котангенс называют основными тригонометрическими функциями.

Связь определений из геометрии и тригонометрии

Если рассматривать угол поворота α величиной от 0 до 90 градусов, то данные в контексте тригонометрии определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла поворота полностью согласуются с определениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла в прямоугольном треугольнике, которые даются в курсе геометрии. Обоснуем это.

Изобразим в прямоугольной декартовой системе координат Oxy единичную окружность. Отметим точку A(1,0). Повернем ее на угол α величиной от 0 до 90 градусов, получим точку $A_1(x, y)$. Опустим из точки A_1 на ось Ox перпендикуляр A_1H.



Начало
Содержание
Страница 321 из 389
Назад
На весь экран
Закрыть

В прямоугольном треугольнике угол A_1OH равен углу поворота α, длина прилежащего к этому углу катета OH равна абсциссе точки A_1, то есть, |OH|=x, длина противолежащего к углу катета A_1H равна ординате точки A_1, то есть, $|A_1H| = y$, а длина гипотенузы OA_1 равна единице, так как она является радиусом единичной окружности. Тогда по определению из геометрии синус острого угла α в прямоугольном треугольнике A_1OH равен отношению противолежащего катета к гипотенузе, то есть, $sin\alpha = \frac{|A_1H|}{|OA_1|} = \frac{y}{1} = y$. А по определению из тригонометрии синус угла поворота α равен ординате точки A_1, то есть, $sin\alpha = y$. Отсюда видно, что определение синуса острого угла в прямоугольном треугольнике эквивалентно определению синуса угла поворота α при α от 0 до 90 градусов.

Аналогично можно показать, что и определения косинуса, тангенса и котангенса острого угла α согласуются с определениями косинуса, тангенса и котангенса угла поворота α.

Историческая справка

Слово «тригонометрия» состоит из двух греческих слов: «тригонон» — треугольник и «метрайн» — измерять. В буквальном смысле ***«тригонометрия» означает «измерение треугольников»***. Как и всякая наука, тригонометрия возникла из потребностей жизни. Развитие мореплавания требовало умения определять положение корабля в открытом море по солнцу и звездам. Войны, которые правители вели между собой, требовали умения определять большие расстояния и составлять карты местности. Землепашцу надо было знать смену времен года, чтобы своевременно производить необходимые сельскохозяйственные работы; лицам, связанным с исполнением религиозных обрядов, необходимо определять дни праздников и т. д.

Повседневная жизнь становилась немыслима без календаря. Все это и многое другое привело к необходимости развивать астрономию — науку о движении небесных светил, а развитие астрономии было немыслимо без развития тригонометрии.

Астрономия, а вместе с ней и тригонометрия возникли и развивались у народов с развитой торговлей и сельским хозяйством: у вавилонян, греков, индийцев, китайцев. Зародилась она много веков назад. Об этом мы можем судить не только по догадкам, но и изучая письменные памятники древности. Указывается, что в одной китайской рукописи, написанной около 2637 г. до и. э., имеются сведения по астрономии и применяются вычисления тригонометрического характера.

Вавилоняне уже в начале третьего тысячелетия до н. з. имели календарь с делением года на 12 месяцев. Значит, они умели определять положения солнца и звезд на небесном своде, то есть владели некоторыми познаниями тригонометрического характера.

Названия тригонометрических функций сложились исторически на протяжении ряда веков. ***Слово «синус» индийского происхождения. Полную хорду индийцы называли «лжива», т. е. тетива лука.*** Позднее при переводах с индийского на арабский и с арабского на латинский язык подлинный смысл слова был искажен. Понятия «косинус дуги», «тангенс дуги», «котангенс дуги» и другие впервые встречаются в книге «Шакл ул - Гита» знаменитого азербайджанскою ученого Насирэддина Туси. У него встречаются только соответствующие понятия, современных же терминов он не употребляет. Термины «косинус», «котангенс» и др. появились в XI—XVII вв.

Например, синус угла, дополняющий данный до 90^0, называли «синусом дополнения» (по-латыни sinus *complement*). В дальнейшем этот символ претерпел такие изменения: *sinus* co, co. — sinus. В 1600 г. английский ученый Э. Гёнтер употребил впервые слово «cosinus», а в 1748 г. Эйлер впервые употребил современную запись *cos* x.

Сирийский ученый ал-Баттани (X в.) первым пришел к выводу, что острый угол в прямоугольном треугольнике можно определить отношением одного катета к другому.

Слово «тангенс» (касающийся) взято из латинского языка, в Европе введено Томасом Финком в 1583 г.

Первые тригонометрические таблицы были составлены во втором веке до н.э. Их автором был греческий астроном Гиппарх. Таблицы эти до нас не дошли, но в усовершенствованном виде они были включены в «Альмагест» («Великое построение») александрийского астронома Птолемея.

В средние века наибольшие успехи в развитии тригонометрии были достигнуты учеными Средней Азии и Закавказья. В это время к тригонометрии начинают относиться как к самостоятельной науке, не связывая ее, как прежде, с астрономией. Большое внимание уделяется задаче решения треугольников. Одним из самых примечательных сочинений по тригонометрии этого периода является «Трактат о четырехугольнике» Насир Эддина (XIII век). В этом трактате введен ряд новых тригонометрических понятий, по-новому доказаны некоторые уже известные результаты. Основные работы но тригонометрии в Европе были выполнены почти на два столетия позднее. Здесь следует прежде всего отмстить немецкого ученого Региомонтана (XV век). Его главное произведение «Пять книг о различного рода треугольниках» содержит достаточно полное изложение основ тригонометрии. От наших нынешних учебников по тригонометрии это сочинение отличается в основном лишь отсутствием удобных современных обозначений. Все теоремы сформулированы словесно. После появления «Пяти книг» Региомонтана тригонометрия окончательно выделилась в самостоятельную науку, не зависящую от астрономии. Региомонтаном составлены также довольно подробные тригонометрические таблицы.

Лекция 14. Методические особенности изучения первых трансцендентных функций в школе. Построение графиков тригонометрических функций.

X класс
Функция (15 ч)

Функция числового аргумента. Свойства функции (область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства функции, четность и нечетность, периодичность, возрастание и убывание, точки максимума и минимума, максимум и минимум, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке).

Построение графиков функций:
$y = f(x \pm a), \quad y = f(x) \pm b, \quad a, b \in R;$
$y = kf(x), \quad k > 0, \quad k \in R;$
$y = -f(x)$
с помощью преобразования графика функции $y = f(x)$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия как функция натурального аргумента. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

иметь представление о понятиях: функция числового аргумента, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия как функция натурального аргумента;

знать термины и правильно применять понятия: область определения, множество значений, нули функции, промежутки знакопостоянства, четность и нечетность, периодичность и наименьший положительный период, возрастание и убывание, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия;

уметь:

• находить область определения и множество значений функции, нули функции, промежутки знакопостоянства, наименьший положительный период, промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке по аналитическому заданию функции и по графику функции;

• находить сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии;

• исследовать функцию на четность и нечетность по аналитическому заданию функции и по графику функции;

• выполнять построение графиков функций:

$y = f(x \pm a), \qquad y = f(x) \pm b, \qquad a, b \in R;$

$y = kf(x), \quad k > 0, \quad k \in R;$

$y = -f(x)$

с помощью преобразования графика функции $y = f(x)$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ (40 ч)

Градусная и радианная мера произвольного угла. Единичная окружность. Определение синуса, косинуса, тангенса, котангенса произвольного угла.

Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла (тригонометрические тождества).

Тригонометрические функции числового аргумента. Их свойства и графики.

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа.

Простейшие тригонометрические уравнения sinx=a, cosx=a, tgx=a, ctgx=a и уравнения, сводящиеся к простейшим.

Формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать термины и правильно применять понятия: единичная окружность, синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла; тригонометрические функции числового аргумента; арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа;

знать:

- свойства тригонометрических функций числового аргумента;
- тригонометрические тождества; формулы приведения, суммы и разности аргументов, двойного аргумента, преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение;
- числовые значения выражений sinx, cosx при x, равном $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ и tgx, ctgx для этих углов (в случае существования этих значений); значения выражений arcsina и arccosa при a, равном $0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm1$, и выражений arctga и arcctga при a, равном $0, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm1, \pm\sqrt{3}$;
- формулы решения простейших тригонометрических уравнений;

уметь:

• переводить градусную меру углов в радианную и наоборот;

• строить углы по их заданной градусной или радианной мере; использовать единичную окружность для нахождения значений синуса и косинуса заданных углов; строить углы по заданному значению их синуса, косинуса, тангенса;

• находить числовые значения тригонометрических выражений, используя значения тригонометрических функций и соответствующих формул;

• выполнять тождественные преобразования тригонометрических выражений с помощью тригонометрических формул;

• строить графики тригонометрических функций и применять свойства функций;

решать: простейшие тригонометрические уравнения и уравнения, сводящиеся к ним (методами разложения на множители, замены переменной), однородные тригонометрические уравнения.

XI класс
ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА ЧИСЛА (7 ч)

Степень с рациональным показателем. Свойства степени с рациональным показателем. Степень с иррациональным показателем.

Определение логарифма числа. Основное логарифмическое тождество.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: определение и свойства степени с рациональным показателем; определение логарифма числа; основное логарифмическое тождество;

уметь: применять основное логарифмическое тождество:

- для упрощения выражений;
- для представления положительного числа в виде степени с любым положительным основанием;
- применять полученные знания при решении задач практической направленности;
- решать задачи с практическим и межпредметным содержанием.

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ (20 ч)

Процессы показательного роста и показательного убывания. Показательная функция. Свойства показательной функции. Решение задач на применение свойств показательной функции.

Показательные уравнения. Решение показательных уравнений на основании свойств показательной функции. Решение показательных уравнений с помощью разложения на множители, заменой переменной, решение однородных показательных уравнений. Решение показательных неравенств.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: определение и свойства показательной функции, методы решения показательных уравнений и неравенств;

иметь представление о показательной функции как математической модели, которая находит широкое применение при изучении процессов и явлений окружающего мира (радиоактивный распад вещества, рост колонии бактерий);

уметь:

- строить графики показательной функции с различными основаниями;
- применять свойства и графики показательной функции с различными основаниями для сравнения значений показательной функции, для определения множества значений, наибольшего и наименьшего значений;
- решать показательные уравнения на основании свойств показательной функции, с помощью разложения на множители, заменой переменной;
- решать однородные показательные уравнения;
- решать показательные неравенства на основании свойств показательной функции с помощью разложения на множители, заменой переменной;
- решать однородные показательные неравенства;
- решать задачи с практическим и межпредметным содержанием.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ (30 ч)

Свойства логарифмов: логарифм произведения, частного, степени. Формула перехода от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием. Десятичный логарифм.

Логарифмическая функция. Свойства логарифмической функции. Решение задач на применение свойств логарифмической функции.

Решение логарифмических уравнений на основании свойств логарифмической функции и свойств логарифмов. Решение логарифмических уравнений заменой переменных. Решение систем логарифмических уравнений.

Решение логарифмических неравенств.

Основные требования к результатам учебной деятельности учащихся

Учащиеся должны:

знать: свойства логарифмов: логарифм произведения, частного, степени; формулу перехода от логарифма с одним основанием к логарифму с другим основанием; определение десятичного логарифма; определение и свойства логарифмической функции; методы решения логарифмических уравнений и неравенств;

уметь:

- строить графики логарифмической функции с различными основаниями;
- применять свойства и графики логарифмической функции с различными основаниями для сравнения значений логарифмической функции, для нахождения области определения и множества значений, наибольшего и наименьшего значений;
- решать логарифмические уравнения на основании свойств логарифмической функции, с помощью разложения на множители, заменой переменной;

решать: системы логарифмических уравнений, логарифмические неравенства, задачи с практическим и межпредметным содержанием.

Алгебраическими называют функции, составленные из букв и цифр, соединенных знаками действий сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в целую степень и извлечение корня.

Другими словами, **алгебраическими** называют элементарные функции, которые могут быть получены из двух основных функций $f(x)=x$ и $f(x)=1$ при помощи любого числа последовательно выполненных алгебраических действий (сложение, умножение, вычитание, деление, возведение в целую степень, извлечение корня) и умножения на числовые коэффициенты. **Алгебраические функции подразделяются на рациональные** и **иррациональные**.

Трансцендентными называют элементарные функции, которые не являются алгебраическими (то есть, они образованы при помощи возведения в иррациональную степень, логарифмирования, с использованием тригонометрических и обратных тригонометрических операций). По-другому, **трансцендентная функция** - это аналитическая функция, которая не удовлетворяет полиномиальному уравнению, в отличие от алгебраической функции. То есть она не может быть выражена в терминах конечной последовательности алгебраических операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведение в степень и извлечения корня.

Простейшими примерами трансцендентных функций служат **показательная функция**, **тригонометрические функции**, **логарифмическая функция**.

Традиционная методическая схема изучения тригонометрических функций такова:

1) вначале определяются тригонометрические функции для острого угла прямоугольного треугольника;

2) затем введенные понятия обобщаются для углов от 0 до 180;

3) тригонометрические функции определяются для произвольных угловых величин и действительных чисел.

Первые два этапа реализуются в курсе планиметрии. Геометрический характер определений тригонометрических функций объясняет тот факт, что они составляют единственный вид функций, который начинают изучать не в курсе алгебры, а в курсе геометрии. Для геометрии важен не “общефункциональный взгляд” на тригонометрические функции, а их прикладная сторона (решение прямоугольных треугольников, применение некоторых тригонометрических тождеств, теорем cos и sin, решение произвольных треугольников). Поэтому в курсе планиметрии нет термина “тригонометрические функции”.

Конкретизировать, например, понятие cos острого угла прямоугольного треугольника, можно по следующей ***методической схеме:***

построить на миллиметровой бумаге прямоугольный треугольник ABC;

обозначить величину острого угла A буквой α***;***

измерить (по клеткам) прилежащий катет AC и гипотенузу AB;

вычислить отношение;

записать значение cos α ***(делается следующая запись cos*** $\alpha \approx \ldots$***, в которой для*** α ***не указывается его конкретное значение);***

измерить транспортиром угол α***, найти его величину и записать значение косинуса этого угла данного прямоугольного треугольника.***

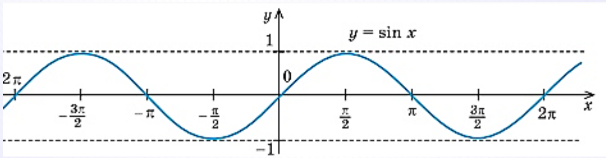
Определенные **трудности** в изучение элементов тригонометрии (по Пифагору) порождает теорема: “Косинус угла α зависит только от градусной меры угла”. Необходимость изучения данной теоремы можно разъяснить учащемуся так: Пусть требуется на основании определения найти cos 37. Предположим, что это задание выполняют отдельно друг от друга несколько человек. Чтобы найти cos 37, они построят прямоугольный треугольник (каждый свой) с углом в 37, измерят прилежащий катет и гипотенузу, найдут отношение прилежащего катета к гипотенузе. Полученное число и будет являться cos 37. Есть ли гарантия, что каждый ученик получит один и тот же ответ? Этот вопрос возникает по той причине, что каждый строит свой треугольник, получает свои значения длин прилежащего катета и гипотенузы. Так, может быть, и искомое отношение у каждого ученика будет какое-то свое? Понятно, что если бы значение cos 37 при переходе от одного прямоугольного треугольника к другому изменялось, то ценность такого понятия в математике была бы не велика. Изучаемая терема является ответом на поставленные вопросы. Она утверждает, что ***косинус острого угла зависит не от выбора прямоугольного треугольника, а только от меры угла.***

Систематическое изучение тригонометрических функций числового аргумента осуществляется в 10 классе. На подготовительном этапе целесообразно освоить с учащимися общие знания о функции: ее свойствах и графике.

Основные свойства: y = sinx

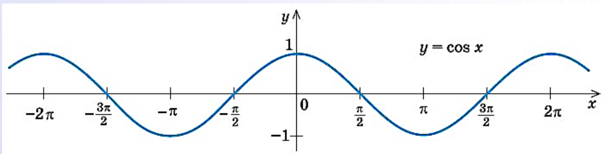
1. Область определения - вся числовая ось.
2. Функция ограниченная. Множество значений – отрезок [-1;1].
3. Функция нечетная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным 2π.

График функции y = sinx (синусоида)



Основные свойства: y = cosx

1. Область определения - вся числовая ось.
2. Функция ограниченная. Множество значений – отрезок [-1;1].
3. Функция четная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным 2π.



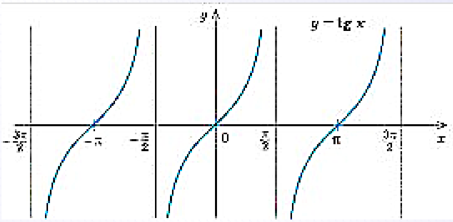
Основные свойства: y = tgx

1. Область определения - вся числовая ось, за исключением точек вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где k – целое.

2. Функция неограниченная. Множество значений - вся числовая прямая.

3. Функция нечетная.

4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным π.



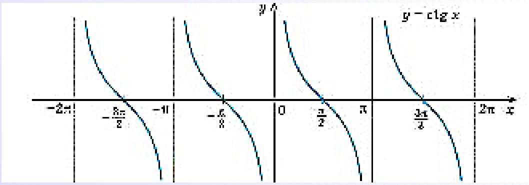
Основные свойства: y = ctgx

1. Область определения - вся числовая ось, за исключением точек вида $x = \pi k$, где k – целое.

2. Функция неограниченная. Множество значений - вся числовая прямая.

3. Функция нечетная.

4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом равным π.



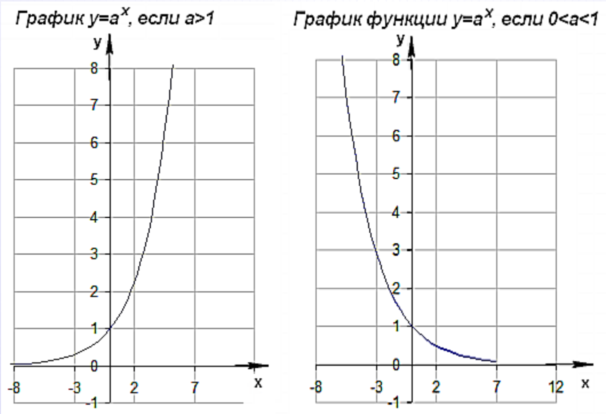
При изучении каждой из тригонометрических функций целесообразно организовать продуктивное обучение через создание и разрешение образовательных ситуаций (мотивация, проблематизация, создание продуктов образовательной деятельности, демонстрация продуктов и их сравнение, рефлексия).

Учитель задает направление поисковой деятельности учащихся:

а) построить график тригонометрической функции по точкам и сформулировать ее свойства;
б) исследовать формулу, задающую тригонометрическую функцию, и по результатам исследования построить график.

Показательной функцией называется функция вида: $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$ и является числом.

График функции имеет следующий вид:



Свойства показательной функции:

1) Областью определения функции является множество всех действительных чисел R.

2) Множеством значений функции являются все положительные числа.

3) Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

4) Функция не является ни нечетной, ни четной.

5) Функция непериодическая.

6) График функции пересекает координатную ось Oy в точке (0; 1).

7) Функция не имеет нулей.

8) При $a>1$ функция возрастает на всей числовой прямой; при $0<a<1$ функция убывает на множестве R.

9) Функция принимает положительные значения на всей области определения.

Если в качестве a (называемого также основанием) стоит число ***e***, то функция называется ***экспонентой***.

Прежде чем вводить понятие показательной функции, рекомендуется повторить понятие степени с действительным показателем и ее свойства, а также свойства степенной функции.

Свойства монотонности показательной функции обосновывается аналитически и иллюстрируются на графике. В дальнейшем основное внимание уделяется иллюстрации свойств функции по графику (чтение графика). Приводятся примеры применения показательной функции для описания различных физических процессов.

Изучение показательной функции в школе начинается с того, что рассматриваются процессы из жизни, приводящие к понятию показательной функции. *(Рост числа бактерий в идеальных условиях, радиоактивный распад веществ и др.).*

После рассмотрения примеров мы должны выйти на определение показательной функции. Задаем вопрос учащимся: «Что общего определяет эти процессы?» Таким образом, выходим на определение.

Определение: Функция вида $y = a^x$ при $a > 0$, $a \neq 1$ называется показательной функцией.

Следующим этапом в схеме изучения любой функции является исследование ее свойств. Изучение свойств может проходить на примерах:

$y = 2^x$ и $y = (\frac{1}{2})^x$.

Сначала будем рассматривать функцию $y = 2^x$.

<u>План исследования функции.</u>

1. Область определения функции;
2. Нули функции;
3. Четность (нечетность);
4. Промежутки возрастания и убывания функции;
5. Построение графика.

Часть свойств изучается аналитически, часть считывается с графика, принимая без доказательств.

1. Область определения функции (аналитически)

Неизвестная величина, или аргумент стоит в показателе степени, следовательно, при любом значении x мы можем всегда найти y, следовательно, D(y)= множество R чисел.

2. Нули функции (аналитически)

если x=0, то y=1; случая, когда y=0 быть не может, так как не существует такого значения x, чтобы при возведении в степень было равным 0. Переведем полученный результат на графический язык: график функции $y = 2^x$ пересекает ось ординат в точке (0;1), но не пересекает ось абсцисс. Делаем вывод о том, что график функции располагается выше оси OX и эта ось является горизонтальной асимптотой.

3. Четность (аналитически)

Проверяем, выполняются ли условия четности и нечетности для функции $y = 2^x$.

$F(-x) = y(-x) = (\frac{1}{2})^{-x} = 2^x$, то есть данная функция ни четная, ни нечетная.

Проиллюстрируем это свойство на примере : x=-1 и x=1, соответственно y=2 и $y = \frac{1}{2}$.

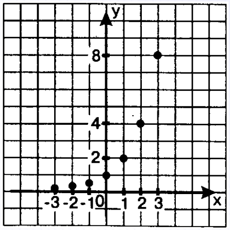
Делаем вывод о том, что график функции не симметричен относительно оси OY.

4. Построение графика функции (по точкам).

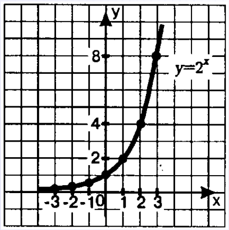
Строить график будем по выбранным значения x будем находить значения y.

В качестве x возьмем точки: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.

Построим в системе координат точечный график, опираясь на выше исследованные свойства.



Необходимо доступно объяснить, что построенные точки мы имеем право соединить плавной линией. Это устанавливается при помощи приближенного вычисления.



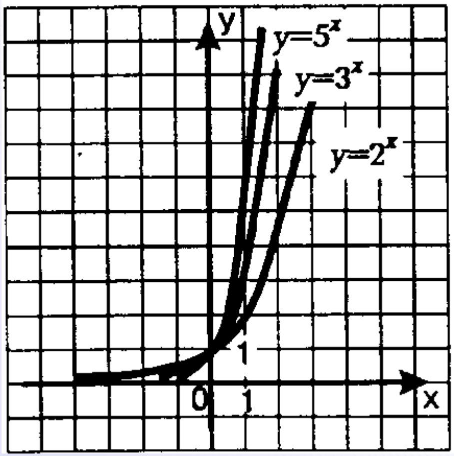
5. Осталось исследовать еще одно свойство, возрастания и убывания функции. Это свойство считаем с графика и докажем его аналитически:

Функция возрастает на всей числовой прямой, т.е. большему значению аргумента из ее области определения соответствует большее значение функции.

Функция $y = 2^x$ возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как на всем промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции (значения функции растут при движении слева на право).

Итак, запишем все основные свойства показательной функции $y = 2^x$:

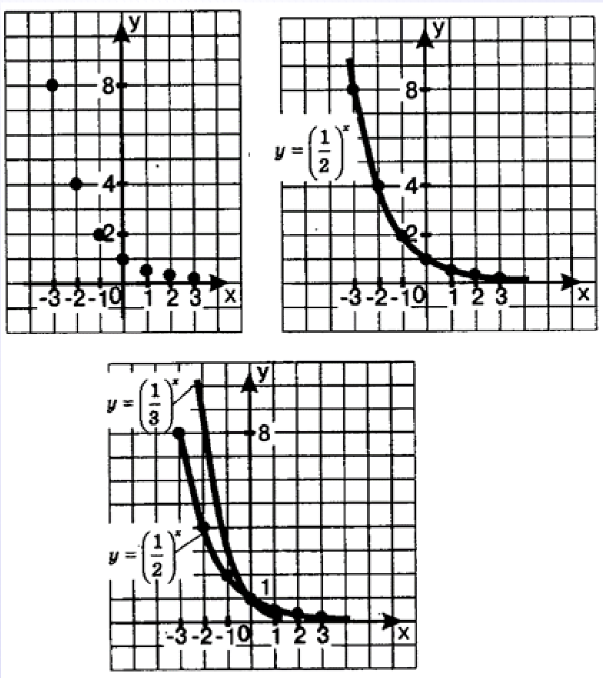
1. D(y)=R; E(y)=(0; +∞);
2. Нули функции: x=0, y=1;
3. Функция является ни четной, ни нечетной;
4. Возрастающая на всей области определения;
5. Если x<0, y <1, x>0, y>1.



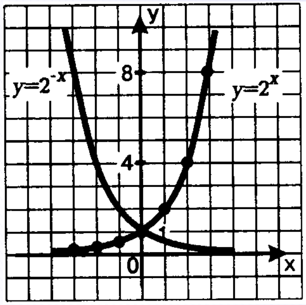
Аналогичная работа строится для исследования функции $y = (\frac{1}{2})^x$.

Итак, запишем все основные свойства показательной функции $y = (\frac{1}{2})^x$:

1. D(y)=R; E(y)=$(0; +\infty)$;
2. Нули функции: x=0, y=1;
3. Функция является ни четной, ни нечетной;
4. Убывающая на всей области определения;
5. Если x<0, y >1, x>0, y<1.

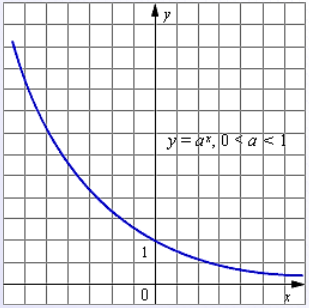


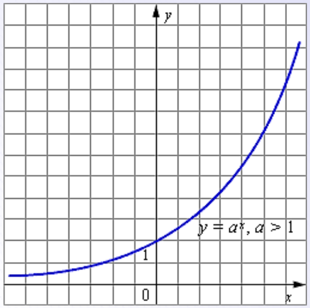
После полученных исследований замечаем, что все свойства одинаковы, кроме возрастания и промежутков знакопостоянства. Это основной вывод, который должны усвоить дети.



Дальше обобщаем полученные выводы:

1) показательная функция $y = a^x$ монотонно убывает на всей области определения при 0<a<1;





2) показательная функция $y = a^x$ монотонно возрастает на всей области определения при a>1.

Дальнейшее изучение показательных функций сводится к решению показательных уравнений и неравенств.

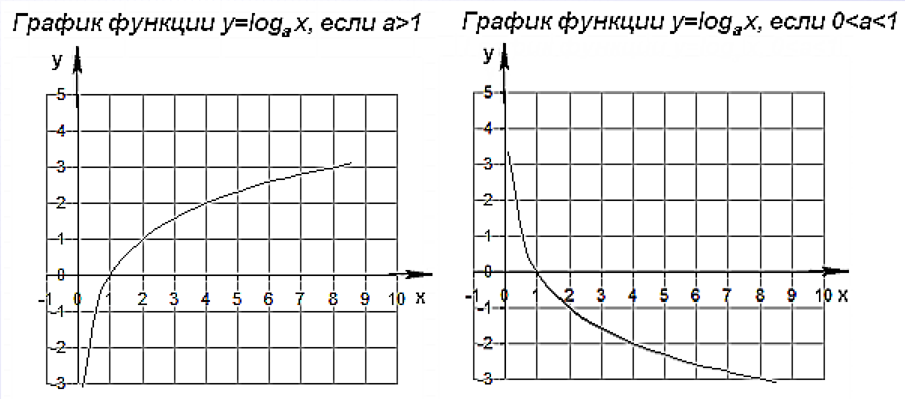
Логарифмическая функция – новый математический объект для учащихся. К понятию логарифма учащихся подводят в процессе решения показательного уравнения $a^x = b$ в том случае, если b нельзя представить в виде степени с основанием a. Наше уравнение в случае b>0 имеет единственный корень, который называют логарифмом b по основанию a и обозначают $log_a b$, т.е. $a^{logab} = b$. Одновременно с введением нового понятия учащиеся знакомятся с основным логарифмическим тождеством. При работе с логарифмами применяются следующие их свойства, вытекающие из свойств показательной функции:

При любом a и любых положительных x и y, выполнены равенства:

1. $log_a 1 = 0$;
2. $log_a a = 1$;
3. $log_a xy = log_a x + log_a y$;
4. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$;
5. $log_a x^p = p log_a x$.

Логарифмической функцией называется функция вида $y = log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$ и является числом.

График функции имеет следующий вид:



Свойства логарифмической функции:

1) Областью определения функции является множество всех положительных чисел.

2) Множеством значений функции являются все действительные числа R.

3) Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

4) Функция не является ни нечетной, ни четной.

5) Функция непериодическая.

6) График функции пересекает координатную ось Ox в точке (1; 0).

7) При $a>1$ функция возрастает; при $0<a<1$ функция убывает.

Методическая схема изучения функций в школе:

1. Рассмотреть конкретные ситуации или задачи, приводящие к данной функции.

На этом этапе учащиеся должны убедиться в целесообразности изучения данной функции, исходя из практики или необходимости дальнейшего развития теории.

2. С формулировать определение функции и записать её в виде формулы.

На этом этапе учащиеся выявляют существенные свойства данной функции, формулируют её определения, записывают функцию формулой, проводят исследование входящих в эту формулу параметров. Здесь же идет усвоение определения функции, выполняются упражнения на распознавание.

3. Ознакомить учащихся с графиком данной функции.

На этом этапе учащиеся учатся изображать изучаемую функцию графически, отличать по графику данную функцию от других, заданных графиками функций, устанавливать влияние параметров на характер графического изображения функции.

4. Исследовать функцию на основные свойства.

Здесь учащиеся находят **область определения и множество значений функции, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, нули, экстремумы функции, исследуют её на четность или нечетность, периодичность, ограниченность, непрерывность и т.д.**

В школе свойства функций устанавливаются по её графику, то есть на основе наглядных соображений, и лишь немногие обосновываются аналитически. В 7-9 классах школьники учатся истолковывать свойства функций на трёх «языках»: *графическом, словесном и символическом.* Это умение формируется постепенно и имеет большое дидактическое значение.

5. Использовать изученные свойства функций при решении различных задач, в частности уравнений и неравенств.

Этот этап является этапом закрепления основных понятий и теоретических положений, связанных с изучаемой функцией, а также этапом формирования соответствующих умений и навыков.

Эта методическая схема является планом - программой для изучения любой функции.

Изучение функций в школе связано с новым видом специфической учебной деятельности - ***исследовательской.*** Специфическая особенность функционального материала выражается в том, что *функции есть модели реальных процессов.* Изучение отдельных свойств процессов осуществляется путем исследования функций. Конкретные функции обладают определенными свойствами, которые есть абстракции реальных свойств процессов. Установить наличие и специфику для конкретной функции определенных свойств - значит исследовать функцию.

Методы выяснения определенных свойств функций есть методы исследования. Они могут выполняться средствами: 1) координатного метода; 2) элементарного анализа (с помощью уравнений и неравенств); 3) математического анализа (с помощью производной).

Исследовательские умения, необходимые при изучении функций - это умения выделить условия, при которых функция обладает определенным свойством, и умения выяснить, как с изменением условий изменяются свойства функций. Формирование названных специфических исследовательских умений окажет влияние на формирование исследовательской деятельности вообще.

При изучении функций в школе формируются и используются следующие специфические исследовательские действия: установить числовое множество, на котором функция существует, и то множество значений, которое она может принимать на этом множестве; выяснить, убывающая или возрастающая функция на своей области определения или некоторых её частях, имеет ли максимумы или минимумы, каковы нули функции, если они есть, четна функция или нечетна, периодична или нет, какой вид графика данной функции и т.д.

Задания к практическим и лабораторным занятиям

Практическое занятие 1

1. Особенности организации учебного процесса на разных этапах и уровнях обучения математике.

2. Раскройте содержание требований к уроку математики.

3. Охарактеризуйте типологии уроков математики и их блоков.

4. Проанализируйте различные формы написания конспекта урока.

5. Раскройте содержание понятия технологии обучения. Как связаны между собой теория, методика и технология обучения?

6. Особенности организации учебного процесса в различных образовательных технологиях.

7. Охарактеризуйте обучение: а) проблемное; б) программированное; в) развивающее; г) эвристическое; д) модульное.

8. Раскройте содержание путей создания проблемных ситуаций и проиллюстрируйте их примерами.

9. Один учитель решил изучать теорему о вписанном угле путем объяснения, другой – рассмотреть с учащимися лишь один частный случай, другие же частные случаи должны изучить учащиеся самостоятельно, третий считает наиболее эффективным методом самостоятельное изучение теории по данному учащимся плану. Как вы оцениваете действия каждого из этих учителей и как бы вы поступили в этой ситуации сами? Как можно определить наиболее эффективный прием?

10. Один из учителей решил излагать тему «Прямоугольный треугольник» лекционным методом, другой – путем объяснения с привлечением учащихся к обоснованию признаков равенства прямоугольных треугольников, третий решил «подвести» учащихся к открытию признаков с последующим их самостоятельным изучением на уроке и дома. Какой из этих способов вы считаете наиболее удачным? А как бы поступили вы?

11. Охарактеризуйте нестандартные уроки математики. Обоснуйте причины их эффективности в обучении математике.

12. Методика проведения нестандартных уроков. Разработайте конкретные: а) урок-семинар; б) урок-зачет; в) урок одной задачи; г) урок-бенефис; д) урок-мастерскую. Аргументируйте целесообразность выбранного вами типа урока (по 2 человека по списку на каждый тип урока).

Литература

1. Выбор методов обучения в средней школе / под ред. Ю. К. Бабанского. – М.: Педагогика, 1981.

2. Дидактика средней школы / под ред. М. Н. Скаткина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1982.

3. Епишева, О. Б. Общая методика преподавания математики в школе : курс лекций : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / О. Б. Епишева. – Тобольск : Изд-во ТГПИ им. Д. И. Менделеева, 1997.

4. Занков, Л. В. Обучение и развитие : Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии / под ред. И. И. Ильясова, В. Я. Ляудис. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1981.

5. Хуторской, А. В. Эвристическое обучение : Теория, методология, практика / А. В. Хуторской. – М. : МПА, 1988.

6. Чошанов, М. А. Гибкая технология проблемно-модульного обучения : метод. пособие / М. А. Чошанов. – М. : Народное образование, 1996.

7. Шаталов, В. Ф. Точка опоры / В. Ф. Шаталов .– М.: Педагогика, 1987.

8. Эрдниев П. М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения : в 2 ч. / П. М. Эрдниев. – М. : Просвещение, 1992.

9. Метельский, Н. В. Дидактика математики / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

10. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности : кн. для учителя / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М. : Просвещение, 1990.

11. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

12. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

13. Столяр, А. А. Педагогика математики : Курс лекций / А. А. Столяр. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Высшая школа, 1974.

14. Селевко, Г. К. Современные образовательные технологии : учеб. пособие / Г. К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.

15. Беспалько, В. П. Педагогика и прогрессивные технологии обучения / В. П. Беспалько. – М. : Изд-во Института профессионального образования МО России, 1995. – 342 с.

16. Беспалько, В. П. Слагаемые педагогической технологии / В. П. Беспалько. – М. : Педагогика, 1993. – 213 с.

17. Махмутов, М. И. Организация проблемного обучения в школе / М. И. Махмутов. – М. : Просвещение, 1999. – 189 с.

18. Кашлев, С. С. Современные технологии педагогического процесса : пособие для педагогов / С. С. Кашлев. – Минск : Университетское, 2000.

19. Селевко, Г. К. Энциклопедия образовательных технологий : в 2 т. / Г. К. Селевко. – М. : НИИ школьных технологий, 2006. – Т. 1.

20. Сластенин, В. А. Педагогика : учеб.пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов ; под ред. В. А. Сластенина. – М. : Издательский центр «Академия», 2002.

Практическое занятие 2

1. Перечислите основные средства обучения математике.

2. Охарактеризуйте печатные средства обучения математике (учебник, учебное пособие, сборники задач и дидактических материалов, тетради с печатной основой, методические пособия, учебно-методические комплексы).

3. Перечислите дидактические требования к учебнику по математике как основному средству обучения.

4. Охарактеризуйте электронные средства обучения математике (компьютерные обучающие и контролирующие программы; электронные учебники и т.д.).

5. Типология электронных средств обучения математике.

6. Дидактические и методические функции ЭСО математике. Отбор программных средств для уроков математики.

7. Особенности проектирования уроков математики с применением ЭСО и этапы проектирования.

8. Разработайте урок математики с использованием программы ***«GeoGebra»***.

9. Перечислите средства наглядности при изучении математики, дидактические требования к их качеству и использованию в учебном процессе.

10. С помощью программы «Учебный графопостроитель» постройте графики функций по темам: «Квадратичная функция», «Преобразование графика функции».

Литература

1. Андреев, А. А. Компьютерные и телекоммуникационные технологии в сфере образования / А. А. Андреев // Школьные технологии. –2001. – № 3. – С.154–169.

2. Бершадский, М. Е. Дидактические и психологические основания образовательной технологии / М. Е. Бершадский, В. В. Гузеев. – М. : Центр «Педагогический поиск», 2003. – С.122–125.

3. Брыксина, О. Ф. Конструирование урока с использованием средств информационных технологий и образовательных электронных ресурсов / О. Ф. Брыксина // Информатика и образование. – 2004. – № 5. – С. 34–38.

4. Гончарик, Л. П. Методология дистанционного обучения : учеб. пособие / Л. П. Гончарик ; Академия управления при Президенте Республики Беларусь. – Минск, 2002. – 163 с.

5. Захарова, И. Г. Информационные технологии в образовании : учеб. пособие для студентов пед. вузов / И. Г. Захарова. – Москва : Академия, 2003. – 192 с.

6. Кравченя, Э. М. Средства обучения в педагогическом образовании. Монография / Э. М. Кравченя. – Минск : БГПУ, 2004. – 235 с.

7. Полат, Е. С. Теория и практика дистанционного обучения : учеб. пособие / Е. С. Полат, М. Ю. Бухаркина [и др.]. – М : Академия, 2004. – 416 с.

8. Потапенко, Н. И. Электронные средства обучения : методические рекомендации / Н. И. Потапенко. – Минск : РИПО, 2005. – 81 с.

9. Хуторской, А. В. Практикум по дидактике и методикам обучения / А. В. Хуторской. – СПб. : Питер, 2004. – 514 с.

10. Хуторской, А. В. Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения / А. В. Хуторской. – М. : Изд-во МГУ, 2003. – 416 с.

11. Новик, И. А. Компьютер как средство обучения. Практикум / И. А. Новик – Минск : БГПУ, 1996. – 27 с.

Практическое занятие 3

1. Математические способности (определение, основные характеристики компонентов математических способностей).

2. Развитие математических способностей учащихся как психолого-педагогическая проблема.

3. Особенности работы учителя математики по развитию математических способностей учащихся в условиях современной школы.

4. Цели и содержание обучения учащихся в профильных классах (математических).

5. Охарактеризуйте виды задач, которые развивают математические способности:

1. Задачи с не сформулированным вопросом.
2. Задачи с недостающими данными.
3. Задачи с лишними данными.
4. Задачи с взаимопроникающими элементами.
5. Система однотипных задач.
6. Составление задач заданного типа.
7. Составление уравнений по условиям задачи.
8. Задачи с несколькими решениями.
9. Прямые и обратные задачи.
10. Задачи на соображение, логическое рассуждение.

Какие компоненты математических способностей они развивают?

6. Дайте характеристику следующим понятиям: исследовательская и проектная деятельность; внеклассная и внеурочная деятельность; использование практико-ориентированных задач; исследовательская работа учащихся.

7. В книге «Спасибо за урок, дети!» (М.: Просвещение, 1988) известный учитель математики А. А. Окунев описывает один урок, который, по его мнению, не получился. Это был урок геометрии в по теме «Перпендикуляр и наклонная». Воспроизведем его.

1. На доске дан рисунок, изображающий точку P и линию, ограничивающую озеро. Требуется изобразить отрезок, соединяющий данную точку с некоторой точкой этой линии, длину которого можно было бы назвать расстоянием от точки P до озера.

2. Затем предлагается рассмотреть следующую ситуацию: имеется озеро, ограниченное окружностью (рисунок дан). Вопрос: что можно назвать расстоянием от некоторой точки A до озера?

3. Формулируется определение расстояния от точки плоскости до некоторой фигуры, лежащей в этой плоскости.

4. Предлагается изобразить отрезок, длину которого назвали расстоянием от точки до фигуры, если фигура – прямая линия.

5. Возникает необходимость доказать, что перпендикуляр из точки P до прямой – самый короткий отрезок, соединяющий эту точку с точками прямой.

6. Вводится определение наклонной.

7. Сравниваются два объекта по общему их свойству – длине. Формулируется утверждение о сравнительной длине перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной точки.

8. Вводится понятие проекции, сравниваются наклонная и проекция.

9. Выясняется истинность утверждений:

а) перпендикуляр, проведенный к прямой, всегда меньше наклонной, проведенной к этой же прямой;

б) если из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр всегда меньше наклонной;

в) наклонная всегда длиннее перпендикуляра, проведенного из одной точки к некоторой прямой;

г) из любой точки можно провести перпендикуляр, который будет длиннее наклонной, проведенной из этой же точки.

10. Предлагается на угольнике показать перпендикуляр и прямую, к которой он проведен, наклонную, ее проекцию.

11. Выясняется, можно ли утверждать, что катет – это наклонная к гипотенузе.

12. Проводится осмысление изучаемых понятий на модели.

13. Записывается в тетрадь доказательство теоремы о сравнении длин проекций равных наклонных.

14. Формулируется ответ на вопрос: что является расстоянием от точки до прямой?

15. Нахождение расстояний от вершин куба до плоскости одной из его граней.

16. Формулируется (по аналогии) определение расстояния от точки, лежащей вне плоскости, до этой плоскости.

17. Решается задача: «Дана пирамида $PABC$. Как найти расстояние: а) от точки C до прямой AB; б) от точки P до прямой AB_1».

Изучите план урока и ответьте на вопросы:

1) Какую роль в изучении перпендикуляра и наклонной играет понятие расстояния от точки плоскости до фигуры, лежащей в этой же плоскости?

2) Сформулируйте цель девятого пункта.

3) Как вы оцените роль семнадцатого пункта?

4) Проследите этапы формирования изучаемых понятий и роль практических задач в этом процессе.

5) В чем, по вашему мнению, неудача урока?

Указание. По мнению А. А. Окунева, урок не содержал интриги, способной заворожить.

Изучите с. 45–50 названной книги и выделите то задание, которое и призвано было придать «изюминку» уроку.

8. Подготовка и проведение математических олимпиад. Методика подготовки учащихся к олимпиадам.

9. Научное сообщество учащихся, основные направления деятельности. Проведение научно-практических конференций.

10. Факультативные занятия по математике и методика их проведения.

11. Разработайте внеклассное мероприятие по математике.

12. Проведите анализ олимпиадных задач из журнала «Математика».

Литература

1. Венгер, Л. А. Педагогика способностей / Л. А. Венгер. – М. : Знание, 1973. – 96 с.

2. Выплов, Ю. Развитие мыслительной деятельности учащихся / Ю. Выплов // Математика. –2003. – № 24. – С. 2.

3. Гнеденко, Б. В. Развитие мышления и речи при изучении математики / Б. В. Гнеденко // Математика в школе. – 1991. – № 4. – С. 3–9.

4. Гусев, В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В. А. Гусев. – М. : Вербум ; М : Академия, 2003. – 432 с.

5. Колмогоров, А. Н. Математика – наука и профессия / А. Н. Колмогоров. – М. : Наука, 1988. – 288 с.

6. Крутецкий, В. А. Психология математических способностей школьников / В. А. Крутецкий. – М. : Просвещение, 1968. – 304 с.

7. Педагогика : Большая современная энциклопедия / сост. Рапацевич Е. С. – Минск : Современное слово, 2005. – 720 с.

8. Холодная, М. А. Психология интеллекта: парадоксы исследования / М. А. Холодная. – Томск : Изд-во Том. ун-та ; М. : Изд-во «Барс», 1997. – 392 с.

9. Шадриков, В. Д. О структуре познавательных способностей / В. Д. Шадриков // Психологический журнал. – 1985. – Т.6. – № 3. – С.38–46.

10. Юркевич, В. С. А.Н. Колмогоров и проблема развития математической одаренности / В. С. Юркевич // Вопросы психологии. – 2001. – № 3. – С.107–116.

11. Якиманская, И. С. Психологические основы математического образования : учеб. пособие для студ. пед. вузов / И. С. Якиманская. – М. : Издательский центр «Академия», 2004. – 320 с.

12. Лейтес, Н. С. Умственные способности и возраст / Н. С. Лейтес. – М. : Просвещение, 1971.

Практическое занятие 4

1. Охарактеризуйте сущность познавательного интереса школьников при обучении математике.

2. Дайте характеристику основных стадий развития познавательного интереса школьников при обучении математике.

3. Как взаимосвязаны воспитательные задачи обучения математике с развитием познавательного интереса школьников при обучении математике.

4. Каковы пути и средства развития познавательного интереса школьников при обучении математике.

5. Методические особенности проведения логических разминок, дидактических игр, творческих заданий, работ поискового и исследовательского характера.

6. Разработайте фрагмент урока математики с использованием дидактической игры (по классам по списку).

Литература:

1. Виноградова, Л. В. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие / Л. В. Виноградова. – Ростов н/Д : Феникс, 2005.

2. Егорова, Л. И. Создание ситуации успеха на уроке / Л. И. Егорова // Математика в школе. – 1996. – № 6.

3. Карпушина, Н. М. Считать скучно, а играть интересно / Н. М. Карпушина // Математика в школе. – 2006. – № 9.

4. Кордина, Н. Е. Учение с увлечением / Н. Е. Кордина // Математика в школе. – 2004. – № 2.

5. Лавринович, К. В. Богатство интересов – закон обучаемости / К. В. Лавринович // Математика в школе. – 1990. – № 6.

6. Маркова, В. А. Что такое исследовательская деятельность школьников / В. А. Маркова // Математика. Приложение к газете «Первое сентября». – 2007. – № 12.

7. Смирнова, И. М. Об измерении интереса на уроках математики / И. М. Смирнова // Математика в школе. – 1998. – № 5.

8. Усатова, Е. В. Соревнования на уроках математики / Е. В. Усатова // Математика в школе. – 1993. – № 6.

9. Финкельштейн, Е. Н. Заинтересовать учеников / Е. Н. Финкельштейн // Математика в школе. – 1993. – № 2.

10. Щукина, Г. И. Активизация познавательной деятельности учащихся в учебном процессе : учеб. пособие для студентов пед. институтов / Г. И. Щукина. – М. : Просвещение, 1979.

Практическое занятие 5

Методика изучения рациональных чисел

1. Историческая и логическая последовательности изучения числовых множеств.
2. Охарактеризуйте общий принцип расширения числовых множеств в школьном курсе математики.
3. Опишите общую схему методики изучения новых чисел.
4. Охарактеризуйте линию чисел в школьном курсе математики.
5. Методика повторения и дальнейшего изучения натуральных чисел. Разработайте конспект одного из уроков изучения натуральных чисел (на выбор).
6. Разработайте методику изучения сложения и вычитания натуральных чисел, основу которой составляет концепция укрупнения дидактических единиц.
7. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей.
8. Методика введения и изучения рациональных чисел.
9. Выполните анализ учебного материала по теме «Рациональные числа» и выделите те эвристические приемы, которые могут быть использованы при изложении темы.
10. Разработайте методику обобщающего урока по теме «Рациональные числа» в контексте дифференциации.

Литература

1. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2019. – Ч. 2: Специальные основы методики преподавания математики (частные методики). – 333 с.
2. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев [и др.] ; сост. В. И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.
3. Действующие учебные пособия по математике.

Практическое занятие 6

1. Методические особенности введения понятия «Процент» в современных учебных пособиях.

2. Методика обучения учащихся решению задач на проценты.

3. Основные типы задач на проценты.

4. Подберите задачу и разработайте методику ее решения (по 2 человека по списку):

Задача 1. Нахождение процента $p\%$ от числа b.

Задача 2. Нахождение числа a по данному проценту $p\%$.

Задача 3. Нахождение процентного отношения чисел a и b.

Задача 4. Увеличения на $p\%$.

Задача 5. Уменьшение на $q\%$.

Задача 6. Начисление простых процентов.

Задача 7. Начисление сложных процентов.

5. Проанализируйте материалы централизованного тестирования за последние 5 лет. Выберите из них задачи на проценты, разработайте методику их решения (по одной задаче, задачи не должны повторяться).

6. Разработайте конспект обобщающего урока по теме «Проценты».

Литература

1. Изучение процентов в основной школе / сост. : Дорофеев Г. В., Кузнецова Л. В., Минаева С. С., Суворова С. Б. // Математика в школе. – 2002. – № 1 – С. 19–24.

2. Столяр, А. А. Методы обучения математике / А. А. Столяр. – Минск : Высшая школа, 1966. – 191 с.

3. Шевкин, А. В. Еще раз об изучении процентов / А. В. Шевкин // Математика в школе. – 1993. – № 1. – С. 20–22.

4. Действующие учебные пособия по математике.

Практическое занятие 7

1. Теоретические основы тождественных преобразований выражений.

2. Перечислите и охарактеризуйте типичные ошибки, допускаемые учащимися в тождественных преобразованиях.

3. Назовите причины типичных ошибок учащихся в тождественных преобразованиях.

4. Выполняя тождественные преобразования, учащиеся допускают типичные ошибки: незнание правил, определений, формул; непонимание правил, определений, формул; неумение применять правила, определения, формулы; неверное применение формул; вычислительные ошибки. Как Вы думаете, как избежать этих ошибок?

5. Разработайте методику работы над понятиями: тождество, тождественно равные выражения, тождественные преобразования выражений (по классам).

6. Проиллюстрируйте на примерах, что тождественные преобразования выражений служат аналитическим аппаратом при:

- *доказательстве теорем и выводе формул,*
- *решении уравнений, неравенств и их систем,*
- *упрощении выражений,*
- *нахождении значений выражений,*
- *исследовании функций и др.*

7. Подберите содержательные задачи, средством для решения которых являются тождественные преобразования иррациональных выражений (упрощение выражений, рационализация вычислений, сокращение дробей, решение уравнений и неравенств, нахождение значения выражений и др.).

8. Составьте лист взаимоконтроля по теме «Арксинус, арккосинус».

Литература

1. Далингер, В. А. Типичные ошибки учащихся по математике и их причины / В. А. Далингер // Современные наукоемкие технологии. – 2014. – № 12-1. – С. 94–97. – Режим доступа: http://www.top-technologies.ru/ru/article/view?id=34851. – Дата доступа: 20.04.2018.
2. Баум, И. В. Тождественные преобразования выражений / И. В. Баум, Ю. Н. Макарычев // Преподавание алгебры в 6–8 классах / сост. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М. : Просвещение, 1980. – С. 77–90.
3. Виленкин, Н. Я. Равенства, тождества, уравнения, неравенства / Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1970. – № 4.
4. Гастева, С. А. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С. А. Гастева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпин [и др.] ; под общей ред. С.Е. Ляпина.– М. : Просвещение, 1965. – Гл. 5.– С. 351 (Целые и дробные выражения).
5. Столяр, А. А. Методы обучения математике / А. А. Столяр. – Минск : Высшая школа, 1966. – 191 с.
6. Действующие учебные пособия по математике.

Практическое занятие 8

1. Место и назначение изучения различного вида алгебраических выражений и их преобразований в школьном курсе математики.

2. Алгебраический и функциональный подходы к тождественным преобразованиям.

3. Понятие «выражение», свойства выражений, тождественно равные выражения, тождество, тождественное преобразование выражений.

4. Содержание линии тождественных преобразований в школьном курсе математики. Целые выражения, дробно-рациональные выражения, алгебраические дроби, иррациональные выражения, трансцендентные выражения.

5. Методическая схема изучения линии тождественных преобразований и ее реализация на конкретной теме учебного материала (целые выражения, дробно-рациональные выражения, алгебраические дроби, иррациональные выражения, трансцендентные выражения) (по 2 человека на тему по списку).

6. Типичные ошибки учащихся при выполнении тождественных преобразований на конкретной теме учебного материала (целые выражения, дробно-рациональные выражения, алгебраические дроби, иррациональные выражения, трансцендентные выражения) (по 2 человека на тему по списку).

7. Составьте лист взаимоконтроля по теме «Квадратные корни».

Литература

1. Баум, И. В. Тождественные преобразования выражений/ И. В. Баум, Ю. Н. Макарычев // Преподавание алгебры в 6–8 классах./ сост. Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М. : Просвещение, 1980. – С. 77–90.

2. Виленкин, Н. Я. Равенства, тождества, уравнения, неравенства / Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1970. – № 4.

3. Гастева, С. А. Методика преподавания математики в восьмилетней школе / С. А. Гастева, Б. И. Крельштейн, С. Е. Ляпин [и др.] ; под общей ред. С. Е. Ляпина.– М. : Просвещение, 1965. – Гл. 5.– С. 351 (Целые и дробные выражения).

4. Канин, Е. С. К формированию умений и навыков в вычислениях и тождественных преобразованиях/ Е. С. Канин // Математика в школе. – 1984. – № 5.

5. Колягин, Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Е. Л. Мокрушин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – С. 78–95.

6. Крючкова, В. В. Об опыте работы с правилами в теме «Многочлены» / В. В. Крючкова // Математика в школе. – 1984. – № 5.

7. Лященко, Е. И. Методика обучения математике в 4–5 классах / Е. И. Лященко, А. А. Мазаник. – Минск : Нар.асвета, 1976. – Гл. 4.– С. 187–196.

8. Макарычев, Ю. Н. Тождественные преобразования многочленов / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. С. Муравин // Математика в школе. – 1973. – № 1.

9. Миндюк, Н. Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований алгебраических выражений классов / Н. Г. Миндюк // Математика в школе. – 1985. – № 5.

10. Действующие учебные пособия по математике.

Практическое занятие 9

1. Основная цель и значение изучения степеней в школе.

2. Характеристика этапов по обобщению понятия «степень» и подготовка к изучению показательной функции на множестве действительных чисел.

3. Примерная схема рассуждений, относящихся к методике уроков систематизации и обобщения сведений о степенях.

4. Выяснить характер ошибок учащихся при работе с определением понятия «степень» и причины этих ошибок.

5. Подготовьте соответствующие презентации, помогающие организовать мыслительную деятельность учащихся в поисках определения степени с любым действительным показателем.

6. Назовите способ определения понятий «степень с нулевым показателем», «степень с отрицательным показателем», «степень с рациональным показателем».

7. Составьте лист взаимоконтроля по теме «Степень с целым показателем».

8. Разработайте проблемную ситуацию при изучении понятия «степень» для разных классов (по 2 человека на тему по списку).

Литература

1. Епишева, О. Б. Общая методика преподавания математики в средней школе: курс лекций : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / О. Б. Епишева. – Тобольск : Изд-во ТГПИ им. Д. И. Менделеева, 1997. – 191 с.

2. Епишева, О. Б. Специальная методика обучения арифметике, алгебре и началам анализа в средней школе / О. Б. Епишева. – Тобольск : Изд-во ТГПИ им. Д. И. Менделеева, 2000.

3. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. М. Колягин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 480 с.

4. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев [и др.] ; сост. В. И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

5. Новоселов, С. И. Специальный курс элементарной алгебры / С. И. Новоселов. – М., 1965. – С.144, 435.

6. Действующие учебные пособия по математике.

Практическое занятие 10

1. Теоретические основы изучения функций в школьном курсе математики.

2. Предпосылки развития функциональной содержательно-методической линии в курсе алгебры средней школы.

3. Понятие функции. Разные трактовки понятия функции. Определение понятий: аргумент, область определения, область значений, график функции.

4. Функциональная линия в школьном курсе математики и ее дидактические особенности.

5. Возможная методическая схема изучения функций в базовой школе.

6. Методика введения понятий: функции, аргумента, области определения

7. Методика изучения линейной, квадратной и кубической функции, прямой и обратной пропорциональной зависимости (по списку).

8. Используя индуктивный подход и знания о пропорции, на нескольких примерах подведите к пониманию понятий прямой и обратной пропорциональной зависимости.

9. Постройте графики функций: y=0,5x; y=0,5x+0,5; y=-1,5x; y=-1,5x+0,5. Опишите методику выяснения геометрического смысла коэффициентов при переменной x.

10. Подготовьте конспект внеклассного мероприятия по теме «Функция» для 8 класса.

Литература

1. Ананчанка, К. А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К. А. Ананчанка. – Мінск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие / сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985. – 336 с.

3. Епишева, О. Б. Общая методика преподавания математики в средней школе : курс лекций / О. Б. Епишева. – Табольск, 2008.

4. Учебная программа для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения. Математика V–XI классы. – Минск : Национальный институт образования, 2009. – 55 с.

5. Учебники и учебные пособия по математике для средней школы.

6. Алгебра : учеб. пособие для 9 класса / Е. П. Кузнецова ; под ред. Л. Б. Шнепермана. – Минск : Нар. асвета.

7. Алгебра : учеб. пособие для 8 класса / Е. П. Кузнецова ; под ред. Л. Б. Шнепермана. – Минск : Нар. асвета.

8. Алгебра : учеб. пособие для 7 класса / Е. П. Кузнецова ; под ред. Л. Б. Шнепермана. – Минск : Нар. асвета.

Практическое занятие 11

1. Прогрессии: арифметическая и геометрическая (основные теоретические сведения).

2. Методический анализ темы «Прогрессии».

3. Возможная методическая схема изучения арифметической прогрессии.

4. Возможная методическая схема изучения геометрической прогрессии.

5. Найдите примеры существования и применения прогрессий в нашей жизни.

6. Проанализируйте задачный материал учебного пособия по теме «Арифметическая прогрессия», определите его дидактическую значимость, покажите методику решения одной задачи (по выбору).

7. Проанализируйте задачный материал учебного пособия по теме «Геометрическая прогрессия», определите его дидактическую значимость, покажите методику решения одной задачи (по выбору).

8. Изучите наличие задач по теме «Арифметическая прогрессия» в сборнике [7, 8], предложите методику решения одной из них.

9. Изучите наличие задач по теме «Геометрическая прогрессия» в сборнике [7, 8], предложите методику решения одной из них.

10. Подготовьте конспект внеклассного мероприятия по теме «Арифметическая и геометрическая прогрессии».

Литература

1. Ананчанка, К. А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К. А. Ананчанка. – Мінск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие / сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985. – 336 с.

3. Епишева, О. Б. Общая методика преподавания математики в средней школе : курс лекций / О. Б. Епишева. – Табольск, 2008.

4. Учебная программа для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения. Математика V–XI классы. – Минск : Национальный институт образования, 2009. – 55 с.

5. Учебники и учебные пособия по математике для средней школы:

6. Сборник заданий для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на III ступени общего среднего образования. – НИО : Аверсэв, 2019.

7. Сборник заданий для подготовки к выпускному экзамену по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на II ступени общего среднего образования. – НИО : Аверсэв, 2020.

Практическое занятие 12

1. Роль и место тригонометрических функций в школьном курсе математики. Аналитический и геометрический пути их введения.

2. Основные сведения о прямоугольном треугольнике.

3. Значение тригонометрических функций в школьном курсе математики и различные подходы к их изложению.

4. Методика изучения тригонометрических функций на уроках геометрии в 8–9 классах:

а) введение понятий синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника;

б) определение синуса, косинуса и тангенса любого угла от 0^0 до 180^0;

в) разработайте конспект обобщающего урока.

5. Даны прямоугольные треугольники $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1 (\angle C = \angle C_1 = 90^0)$.

Кроме того, $\angle A = \angle A_1 = \alpha$.

Докажите, что $sin\angle A = sin\angle A_1$, $cos\angle A = cos\angle A_1$, $tg\angle A = tg\angle A_1$.

Разработайте методику решения этой задачи.

6. Проанализируйте задачный материал учебного пособия по геометрии, посвященный изучению синуса, косинуса, тангенса, котангенса, определите его дидактическую значимость, покажите методику решения ключевых задач (по выбору).

Литература

1. Ананчанка, К. А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К. А. Ананчанка. – Мінск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие / сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985. – 336 с.

3. Епишева, О. Б. Общая методика преподавания математики в средней школе : курс лекций / О. Б. Епишева. – Табольск, 2008.

4. Учебная программа для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения. Математика V–XI классы. – Минск : Национальный институт образования, 2009. – 55 с.

5. Учебники и учебные пособия по математике для средней школы:

6. Сборник заданий для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на III ступени общего среднего образования. – НИО : Аверсэв, 2019.

7. Сборник заданий для подготовки к выпускному экзамену по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на II ступени общего среднего образования. – НИО : Аверсэв, 2020.

Практическое занятие 13

1. Подготовьте материал для беседы об истории тригонометрии, обратив особое внимание на первоначальное толкование названия тригонометрических функций.

2. Методические особенности изучения и использования свойств тригонометрических функций в курсе математики средней школы.

3. Охарактеризуйте возможные системы изложения материала о тригонометрических функциях. Выделите основные этапы их изучения.

4. Методическая схема изучения тригонометрических функций.

5. Предложите фрагмент урока по построению графика одной из тригонометрических функций с помощью единичной окружности. В чем состоит общий принцип построения графиков этим способом?

6. Разработайте фрагмент урока изучения темы «Графики тригонометрических функций» с использованием компьютерных обучающих программ.

7. Продумайте и изложите возможности наглядной иллюстрации всех основных свойств тригонометрических функций

8. На основе анализа задачного материала выделите основные типы тригонометрических упражнений.

9. Составьте опорный сигнал по взаимосвязи формул тригонометрии.

10. Проанализируйте материалы ЦТ на предмет включения тригонометрических заданий. В чем могут возникнуть трудности у учащихся?

Литература

1. Алексеев, А. Тригонометрические подстановки / А. Алексеев, Л. Курляндчик // Квант. – 1995. – № 2. – С. 40–42.

2. Гилемханов, Р. Г. О преподавании тригонометрии в 10 классе по курсу В / Р. Г. Гилемханов // Математика в школе. – 2001. – № 6. – С. 26–28.

3. Горнштейн, П. И. Тригонометрия помогает алгебре / П. И. Горнштейн // Квант. – 1989. – № 5. – С. 68–70.

4. Дорофеев, Г. Периодичность и не периодичность функций / Г. Дорофеев, Н. Розов // Квант. – 1977. – № 1. – С. 43–48.

5. Зарецкий, В. И. Изучение тригонометрических функций в средней школе / В. И. Зарецкий. – Минск : Народная асвета, 1970.

6. Земляков, А. Периодические функции / А. Земляков А., Б. Ивлев // Квант. – 1976. – № 12. – С. 34–39.

7. Мордкович, А. Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А. Г. Мордкович // Математика в школе. – 2002. – № 6. – С. 32–38.

8. Раббот, Ж. Тригонометрические функции / Ж. Раббот // Квант. – 1972. – № 5. – С. 36–38.

9. Смирнова, И. М. Необычный способ получения синусоиды / И. М. Смирнова // Математика в школе. – 1993. – № 3. – С. 56–58.

10. Цукарь, А. Я. Упражнения практического характера по тригонометрии / А. Я. Цукарь // Математика в школе. – 1993. – № 3. – С. 12–15.

11. Учебная программа для общеобразовательных учреждений с русским языком обучения. Математика. – Минск : Национальный институт образования, 2019.

12. Учебники и учебные пособия по математике для средней школы.

13. Сборник заданий для выпускного экзамена по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на III ступени общего среднего образования. – НИО : Аверсэв, 2019.

14. Сборник заданий для подготовки к выпускному экзамену по учебному предмету «Математика» за период обучения и воспитания на II ступени общего среднего образования. – НИО : Аверсэв, 2020.

15. Материалы ЦТ по математике.

Лабораторная работа «Организация контроля и оценки знаний, навыков и умений школьников по математике»

1. Ознакомьтесь с документом «НОРМЫ оценки результатов учебной деятельности учащихся общеобразовательных учреждений по учебным предметам, Приказ Министерства образования Республики Беларусь 29.05.2009 № 674», размещенным на сайте НИО РБ.

2. Какова цель контроля и оценки знаний и умений учащихся по математике?

3. Ведущие принципы оценки качества образования обучающихся по математике и их характеристика.

4. Выделите особенности организации контрольно-оценочной и рефлексивной деятельности на учебном занятии по математике.

5. Охарактеризуйте виды и формы организации текущего и тематического контроля (виды контроля (текущий, тематический, итоговый), формы контроля (устные опросы, письменные работы, зачеты, экзамены, централизованное тестирование)).

6. Методика проверки и коррекции контрольных, самостоятельных, проверочных работ по математике.

7. Разработайте систему упражнений, на основе выполнения которой можно проверить уровень усвоения учащимися правил сложения обыкновенных дробей.

8. Разработайте тесты с выборочным ответом по любой теме школьного курса математики.

9. Разработайте задания для проверки изучения способов решения квадратных уравнений на уровне применения их в знакомой ситуации и на уровне переноса знаний в новую ситуацию.

10. Составьте вопросы для зачета по любой теме геометрии с применением практического материала.

Литература

1. https://www.adu.by / Образовательный процесс. 2019/2020 учебный год / Общее среднее образование / Учебные предметы. V–XI классы / Математика.

2. Амонашвили, Ш. А. Воспитательная и образовательная функции оценки учения школьников / Ш. А. Амонашвили. – М. : Педагогика, 1984.

3. Учебные пособия по математике для средней школы.

Лабораторная работа «Методика изучения общефункциональных понятий»

1. Сформулируйте основные этапы исторического развития понятия функции в математике и характерные их черты, приведите различные определения функции (И. Бернулли, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского, П. Дирихле) и раскройте их особенности, используя краткие исторические экскурсы из школьных учебников.

2. Каков развивающий потенциал функциональной линии в курсе математики? Используйте статью: Горина, Л. А. О развивающем потенциале функционально-графической линии в курсе алгебры основной школы / Л. А. Горина // Математика в школе. – 2011. – № 2. – С. 69–73.

3. На основе изучения программы по математике выделите цели изучения функционального материала и соответствующие требования к математической подготовке учащихся.

4. Подберите типовые упражнения, подготавливающие изучение функционально-графической линии из учебных пособий по математике для средней школы.

5. Выделите материал, подготавливающий учащихся: 1) к введению понятия функции; 2) изучению способов задания функции; 3) исследованию свойств функций.

6. Подберите упражнения, которые целенаправленно готовят учащихся к введению понятия функции, способов ее задания, области определения функции.

7. Приведите основные типы задач по усвоению общего функционального материала.

8. Назовите общефункциональные понятия, которые встречаются впервые при изучении той или иной функции и в каком классе.

9. Составьте конспект урока по введению понятия функции.

10. Подготовьте презентацию урока по введению способов задания функции.

Литература

1. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / Е. И. Лященко [и др.] ; под. ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.

2. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – С. 256–267, 370–395.

3. Рогановский, Н. М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие / Н. М. Рогановский. – Минск : Высш. шк.,1990. – С. 139–175.

4. Столяр, А. А. Педагогика математики : учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов / А. А. Столяр. – Минск : Высш. шк., 1986. – С. 259–280, 296–330.

5. Учебные пособия по математике для средней школы.

Примерная контрольная работа по методике преподавания математики

Вариант 1

1. Современные формы организации обучения математике. Урок. Типы уроков. Основные требования к современному уроку.

2. Разработайте методику решения задачи: Смешали 8 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 12 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

3. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей.

Вариант 2

1. Средства обучения математике.

2. Разработайте методику решения задачи: Один раствор содержит 20 % соли, а второй – 70 %. Сколько граммов первого и второго раствора нужно взять, чтобы получить 100 г 50% раствора.

3. Методика изучения рациональных и иррациональных чисел.

Вариант 3

1. Организация контроля и оценки знаний, навыков и умений школьников по математике.

2. Разработайте методику решения задачи: Первый сплав содержит 10 % меди, второй – 25 % меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 30 кг, содержащий 20 % меди. Какое количество каждого сплава было использовано?

3. Методика изучения алгебраических функций.

Вариант 4

1. Внешняя и внутренняя дифференциация при обучении учащихся математике.

2. Разработайте методику решения задачи: При оплате услуг через платежный терминал взымается комиссия 5%. Терминал принимает суммы кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала?

3. Методика введения тригонометрических функций любого угла.

Вариант 5

1. Развитие познавательного интереса школьников при обучении математике.

2. Разработайте методику решения задачи: На покупку планшета взяли кредит 20000 р на 1 год под 16 % годовых. Вычислите, сколько денег необходимо вернуть банку, какова ежемесячная сумма выплат?

3. Методические особенности изучения и использования свойств тригонометрических функций в курсе математики средней школы.

Вариант 6

1. Особенности организации учебного процесса на разных этапах и уровнях обучения математике, в различных образовательных технологиях.

2. Разработайте методику решения задачи: В городе в настоящее время 48400 жителей. Известно, что население этого города увеличивается ежегодно на 10%. Сколько жителей было в городе два года назад?

3. Методика изучения арифметической и геометрической прогрессий в курсе математики средней школы.

Вопросы к экзамену
Теоретические вопросы

1. Общая методика

1. Предмет и задачи методики преподавания математики. Методы методики обучения математике.
2. Особенности современного этапа развития школьного математического образования.
3. Характеристика основных программ и учебников по математике для средней школы.
4. Математика как наука: определение, основные этапы развития.
5. Содержание математики как учебного предмета и основные этапы изучения математики.
6. Характеристика основных нормативных документов, регламентирующих деятельность учителя математики.
7. Цели обучения математике в школе. Постановка образовательных целей обучения математике.
8. Цели обучения математике в школе. Постановка развивающих целей обучения математике.
9. Цели обучения математике в школе. Постановка воспитательных целей обучения математике.
10. Модели обучения математике, построенные с учетом психологических закономерностей умственного развития учащихся.
11. Дидактические принципы обучения математике.
12. Проблема методов обучения. Классификация методов обучения.
13. Объяснительно-иллюстративный и репродуктивный методы обучения математике.
14. Методы проблемного обучения математике.

15. Информационные методы обучения математике.

16. Методы научного познания в обучении математике. Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент.

17. Методы научного познания в обучении математике. Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез.

18. Методы научного познания в обучении математике. Математические методы познания.

19. Понятие и его характеристики. Определение и способы введения определений. Классификация понятий.

20. Формирование математических понятий.

21. Основные виды математических суждений. Сущность понятия доказательства. Методы доказательства теорем.

22. Методика обучения учащихся теоремам и их доказательствам.

23. Понятие «задача». Роль задач в обучении математике. Функции задач в обучении математике.

24. Основные этапы в решении задачи. Общие умения по решению задач.

25. Общие методы решения математических задач. Классификация задач.

26. Урок. Типы уроков. Основные требования к современному уроку.

27. Анализ урока. Его роль в интенсификации учебного процесса.

28. Особенности организации учебного процесса на разных этапах и уровнях обучения математике, в различных образовательных технологиях.

29. Организация контроля и оценки знаний, навыков и умений школьников по математике, виды контроля (текущий, тематический, итоговый), формы контроля (устные опросы, письменные работы, зачеты, экзамены, централизованное тестирование).

30. Средства обучения математике.

31. Дифференциация при обучении математике в системе основного и дополнительного образования.

32. Развитие мышления и воспитание учащихся в процессе обучения математике.

2. Частная методика

1. Историческая и логическая последовательности изучения числовых множеств. Требования к расширению числовых множеств. Содержание линии «Числа и вычисления».

2. Методика изучения натуральных чисел и действий над ними.

3. Методика изучения обыкновенных дробей и действий над ними.

4. Методика изучения десятичных дробей и действий над ними.

5. Изучение процентов. Основные задачи на проценты.

6. Методика введения отрицательных чисел.

7. Методика введения и изучения рациональных и иррациональных чисел.

8. Различные трактовки понятия «тождество». Содержание линии «Выражения и преобразования».

9. Методика изучения тождественных преобразований целых рациональных выражений.

10. Методика изучения тождественных преобразований логарифмических выражений.

11.Методика изучения тождественных преобразований тригонометрических выражений.

12. Методика формирования культуры тождественных преобразований.

13. Методика введения и изучения свойств степеней с показателями из разных числовых множеств.

14. Методика изучения степени с натуральным и целым показателем.

15. Корень n-ой степени в школьном курсе математики.

16. Методика введения и изучения степени с иррациональным показателем.

Практическая часть

Методика решения упражнений по темам:
- Числовые множества в школьном курсе математики.
- Тождественные преобразования выражений в школьном курсе математики.
- Обобщение понятия степени в школьном курсе математики.

Тест

Литература

1. Ананчанка, К.А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К. А. Ананчанка. – Минск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

2. Арнольд, А.А. Урок-консультация//Математика в школе. – 1994 – №2. – С. 23–24.

3. Гельфман, Э.Г. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитанние учащихся / Э.Г. Гельфман, М.А. Холодная. – СПб. : Питер, 2006. – 380 с.

4. Гринько, Е.П. Формирование готовности учителя математики к работе с одаренными детьми : монография / Е.П. Гринько ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2014. – 222 с.

5. Гринько, Е.П. Подготовка в университете будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : монография / Е.П. Гринько ; М-во образования Респ. Беларусь ; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2017. – 241 с.

6. Гринько, Е.П. Основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми : электронное учебно-методическое пособие / Е.П. Гринько. – Рег. № 9/2012 от 03.10.2012.

7. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В. А. Гусев. – М. : Вербум-М, 2003. – 432 с.

8. Груденов, Я.И. Совершенствование работы учителя математики / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.

9. Костицын, В. Н. Моделирование на уроках геометрии: теория и методические рекомендации / В. Н. Костицын, В. Н. Крстицын. – Москва: ВЛАДОС, 2000. – 158 с.

10. Ксензова, Г.Ю. Перспективные школьные технологии. Учебно-методическое пособие / Г.Ю. Ксензова. – М. : Педагогическое общество России, 2000. – 224 с.

11. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: книга для учителя / С. Г. Манвелов. – Москва: Просвещение, 2002. – 173 с.

12. Математика для каждого: технология, дидактика, мониторинг: сборник / Вып. 4 / Л. А. Аверкиева, И. Ю. Ананьева, М. В. Астанина [и др.] / Ассоц. "Школа 2000...". – Москва: Школа 2000. . . , 2002. – 271 с.

13. Метельский, Н.В. Дидактика математики / Н.В. Метельский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

14. Методика обучения геометрии : Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев [и др.] ; под общ. ред. В.А. Гусева. – М. : Изд. центр «Академия», 2004. – 368 с.

15. Методика преподавания математики в средней школе: частные методики/ Учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. институтов / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Е. Л. Мокрушин и др. – Москва: Просвещение, 1977. – 479 с.

16. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М. Колягин [и др.]. – Москва: Просвещение, 1975. – 461 с.

17. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие / Сост. : Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985. – 336 с.

18. Методика преподавания математики в средней школе : Частная методика : учеб. пособие / А.Я. Блох [и др.] ; сост. В.И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

19. Окунев, А.А. Спасибо за урок, дети! - М.: Просвещение, 1988.

20. Пивоварук, Т.В. Педагогическая практика по математике : электронное учебно-методическое пособие / Т.В. Пивоварук, С.В. Селивоник. – Рег. № 44/2016 от 06.12.2016.

21. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2018. – Ч. 1 : Общие основы методики преподавания математики (общая методика). – 175 с.

22. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2019. – Ч. 2: Специальные основы методики преподавания математики (частные методики). – 333 с.

23. Столяр, А.А. Педагогика математики : учеб. пособие / А.А. Столяр. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.

24. Учебники и учебные пособия по математике для средней школы.

25. Эрдниев П.М. Обучение математике в школе. Укрупнение дидактических единиц. Книга для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М. : Столетие, 1996. – 320 с.

26. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Книга для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. – Москва: Просвещение: АО "Учебная литература", 1996. – 319 с.

27. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе / Л.В. Виноградова. – Ростов на/Д : Феникс, 2005. – 252 с.

28. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 5–9 классы : пособие для учителей учреждений общего среднего образования / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2019. – 165 с. - (Гриф МО)

29. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (методы решения олимпиадных задач) : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 1. – 184 с.

30. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (методы решения олимпиадных задач) : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 2. – 196 с.

31. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы : пособие для учителей учреждений общего среднего образования : в 2 ч. / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2018. – Ч. 1. – 129 с. - (Гриф МО)

32. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы : пособие для учителей учреждений общего средн. образования : в 2 ч. / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2018. – Ч. 2. – 115 с. - (Гриф МО)

33. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (Элементарная алгебра) : электронный учебно-методический комплекс / Е.П. Гринько, В.Я. Логвинович. – Рег. № 22/2016 от 18.10.2016.

34. Гринько, Е.П. Элементарная математика : электронный учебно-методический комплекс / Е.П. Гринько. – Рег. № 5/2016 от 15.01.2016.

35. Гринько, Е.П. Основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми : электронное учебно-методическое пособие / Е.П. Гринько. – Рег. № 9/2012 от 03.10.2012.

36. Далингер, В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике / В.А. Далингер. – М. : Просвещение, 1991. – 80 с.

37. Депман, И. Я. За страницами учебника математики: пособ. для уч-ся 5-6 кл. ср. шк. / И. Я. Депман, Н. Я. Виленкин. – Москва: Просвещение, 1989. – 287 с.

38. Калавур, М.А. Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач. Геаметрыя (Планіметрыя) : электронны вучэбна-метадычны комплекс / М.А. Калавур. – Рэг. пасв. № 2271816070 от 05.07.2018.

39. Калавур, М.А. Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач. Планіметрыя : вучэб.-метад. комплекс / М.А. Калавур ; Брэсц. дзярж. ун-т імя А.С. Пушкіна. – Брэст : БрДУ, 2014. – 48 с.

40. Методические журналы : «Матэматыка», «Математика в школе», «Математика для школьников», «Квант», «Репетитор» и т.д.

41. Организация контроля знаний учащихся в обучении математике : Пособие для учителей / Сост. З.Г. Борчунова, Ю.Ю. Батий. – М. : Просвещение, 1980. – 96 с.

42. Пивоварук, Т.В. Внеклассная работа по математике : электронный учебно-методический комплекс / Т.В. Пивоварук. – Рег. № 5/2015 от 22.06.2015.

43. Пивоварук, Т.В. Элементарная математика и ПРЗ. Тригонометрия : электронный учебно-методический комплекс / Т.В. Пивоварук. – Рег. № 12/2012 от 14.11.2012.

44. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии : учеб. пособие / Г. К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.

45. Селивоник, С.В. Решение задач с параметрами : электронный учебно-методический комплекс / С.В. Селивоник. – Рег. № 52/2016 от 08.12.2016.

46. Селивоник, С.В. Элементарная математика и практикум по решению задач (Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач) : электронный учебно-методический комплекс / С.В. Селивоник. – Рег. № 14/2015 от 02.10.2015.

47. Темербекова, А.А. Методика преподавания математики / А. А. Темербекова. – М. : Владос, 2003. – 176 с.

48. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – Львов : Квантор, 1991. – 215 с.

49. Пойа, Д. Математическое открытие. Решение задач : основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М. : Наука, 1970. – 452 с.

50. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике : учеб. пособие / Л.М. Фридман. – М. : Флинта, 1998. – 168 с.

51. Борисов, В.К. К выполнению и защите курсовой работы, дипломного проекта и отчета по практике : метод. рекомендации / В.К. Борисов ; Рос. междун. западно-подмосковный ин-т туризма : РМАТ – Москва, 2006. – 49 с.

52. Рогожин, М. Как написать курсовую и дипломную работы / М. Рогожин. – СПб : Питер, 2005. – 188 с.

53. Кульпанович, О. А. Подготовка, оформление и защита курсовых и дипломных работ, отчетов по практике : учеб.-метод. пособие / О.А. Кульпанович – Минск : МЦПЭР, 2006. - 46 с.

54. Бибило, В.Н. Рекомендации по оформлению курсовой работы. Минск, 2005. – 7 с.