Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Кафедра методики преподавания физико-математических дисциплин

Е.П. Гринько, Н.А. Каллаур

Методика преподавания математики (часть I)

Электронный учебно-методический комплекс
для студентов физико-математического факультета

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2021

УДК 372.851
ББК 74.262.21я73
Т-32

Рекомендовано редакционно-издательским советом учреждения образования «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Авторы:
заведующий кафедрой методики преподавания физико-математических дисциплин
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
кандидат педагогических наук, доцент
Е.П. Гринько

доцент кафедры методики преподавания физико-математических дисциплин
УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»
кандидат педагогических наук, доцент
Н.А. Каллаур

Рецензенты:

кафедра профессионального развития работников образования
УО «Брестский областной институт развития образования»

учитель математики высшей категории
ГУО «Лицей №1 им. А.С. Пушкина г. Бреста»
И.Д. Потапова

Гринько, Е.П., Каллаур, Н.А. Методика преподавания математики (часть I) / Е.П. Гринько, Н.А. Каллаур – Брест : Изд-во БрГУ имени А.С. Пушкина, 2021. – 312 с.

Комплекс предназначен студентам специальности 1-02 05 01 Математика и информатика, написан в соответствии с программой обучения в вузе. В ЭУМК представлены лекции, вопросы для обсуждения, задания к практическим и лабораторным занятиям по всем темам курса «Методика преподавания математики», материалы для текущего и итогового контроля, дан перечень необходимой литературы. Предлагаются различные по форме информационно-содержательные средства осмысления, систематизации, обобщения знаний по методике преподавания математики и их практическому применению в педагогической деятельности.

ЭУМК может быть использован для организации учебной деятельности студентов, подготовки к итоговой аттестации, оценки уровня освоения дисциплины.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Одна из главных задач подготовки студентов к будущей профессиональной деятельности связана с формированием практических умений и навыков, составляющих основу технологии труда учителя. Настоящий ЭУМК ориентирован на творческое осмысление студентами теоретических знаний по методике преподавания математики.

Учебная дисциплина «Методика преподавания математики» относится к числу педагогических дисциплин и изучается студентами, уже получившими определенную философскую, педагогическую, психологическую, общедидактическую и математическую подготовку. Эти знания студентов систематически используются в курсе методики преподавания математики и находят свой выход в практике обучения школьников.

Структура ЭУМК:

1. Теоретический раздел, содержащий необходимые теоретические сведения.
2. Практический раздел, содержащий материал для семинаров.
3. Раздел контроля знаний, содержащий вопросы для самопроверки и тест.
4. Вспомогательный раздел, содержащий рекомендуемую литературу.

Значительное место в ЭУМК занимают вопросы, связанные с формированием творческого подхода к обучению математике, умением оценивать различные системы изложения материала с точки зрения педагогики, психологии, дидактики. Особое внимание в пособии уделяется рассмотрению вопросов по выработке профессиональных навыков и приемов работы, умению вести научно-исследовательскую деятельность, обращаться с техническими средствами обучения. Пособие содержит теоретический материал по общим вопросам методики преподавания математики, задания для практических и лабораторных занятий, список литературы, который поможет подготовиться к семинарским занятиям по методике преподавания математики, к зачетам и экзаменам.

В пособии разработаны практические и лабораторные занятия раздела «Общая методика» по темам курса «Методика преподавания математики». Цель практических занятий состоит в формировании у студентов следующих умений и навыков: проводить анализ учебно-методической литературы по математике, анализировать отдельные темы школьного курса математики, планировать учебную работу и учебный материал по математике, правильно выбирать методы, формы и средства обучения для каждой конкретной темы с учетом индивидуальных особенностей учащихся с целью активизации их познавательной деятельности, знакомиться с основными методами решения задач, оценивать работы учащихся, анализировать урок, планировать и проводить внеклассные мероприятия по математике в школе. Важно отметить, что предлагаемый материал опирается на современные подходы к изучению методики преподавания математики.

ЭУМК разработан в соответствии с требованиями ОСВО 1-02 05 01-2013 на основании учебного плана ФМ-24-19/уч. от 30.05.2019 и учебной программы УД-19-002-20 от 29.05.2020.

О программе учебной дисциплины «Методика преподавания математики»

Структура содержания учебной дисциплины «Методика преподавания математики» основана на изучении двух традиционных разделов: общая методика и специальная (частная) методика. Содержание учебной дисциплины представлено в виде тем, которые характеризуются относительно самостоятельными дидактическими единицами содержания.

Содержание учебной дисциплины «Методика преподавания математики» тесно связано с такими учебными дисциплинами, как «Психология», «Педагогика». Для изучения учебной дисциплины «Методика преподавания математики» необходимо также наличие у обучающихся академических компетенций по учебным дисциплинам «Элементарная математика», «Элементарная математика и практикум по решению задач», «Введение в математику», формирование которых необходимо обеспечить в рамках компонента учреждения высшего образования.

Целью преподавания учебной дисциплины является формирование профессиональных компетенций учителя математики в условиях современного образовательного процесса.

Основными ***задачами*** учебной дисциплины являются:

– осознание роли общего математического образования в решении задач современной общеобразовательной школы, значения математики как общеобразовательного предмета, психолого-педагогических основ его изучения, задач и целей преподавания предмета на разных уровнях его изучения школьниками;

– формирование представлений об основных методических концепциях школьного математического образования и подходах к отбору, структурированию и систематизации содержания;

– ознакомление студентов с содержанием всех компонентов методической системы обучения математике в их современной трактовке, требованиями образовательных стандартов, с содержанием программ, учебников и учебных пособий по математике для общеобразовательных учреждений, перспектив и направлений их усовершенствования на различных уровнях;

– обеспечение глубокого усвоения студентами содержания школьного курса математики и понимания основных методических идей, заложенных в нем;

– овладение конкретными знаниями по общей теории и методике организации обучения школьной математике;

– выработка у студентов профессиональных умений и навыков на уровне требований государственных стандартов к преподаванию математики в общеобразовательных учреждениях;

– формирование творческого подхода к решению методических проблем;

– обучение студентов применению наиболее эффективных методов, средств и организационных форм обучения школьников математике, использованию в своей деятельности новых технологий обучения;

– формирование умений вести исследовательскую деятельность, результаты которой находят непосредственное развитие в курсовых, дипломных и научных работах;

– выработка умений видеть современные проблемы методики изучения математики в школе и находить пути решения этих проблем адекватно возрастным особенностям учащихся, прогнозировать результаты своей педагогической деятельности и корректировать ее на основе критического анализа.

Основными методами, технологиями обучения, отвечающими целям изучения учебной дисциплины, являются:

– методы проблемного обучения (проблемное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;

– приемы организации учебно-исследовательской деятельности, технологии модульного обучения, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе;

– моделирование студентами фрагментов будущей профессиональной деятельности, проведение дидактических игр;

– использование видеоуроков конкурса «Учитель года», фрагментов видеоуроков, записанных во время педагогической практики студентов на семинарских и лабораторных занятиях;

– личностно-ориентированное обучение (обучение в сотрудничестве, метод проектов, дифференцированное обучение и др.)

– использование современных информационных технологий (лекции с использованием компьютерных демонстраций, электронные лекции в режиме слайд-шоу или с использованием мультимедиа, электронные конспекты и базы данных и др.), использование аудио и видео техники.

В процессе обучения студентов целесообразно использовать современные тенденции в развитии методики преподавания математики и психолого-педагогические закономерности формирования знаний.

В результате изучения учебной дисциплины «Методика преподавания математики» студент должен:

знать:

– цели и задачи среднего математического образования;

– теоретические подходы, современные концепции обучения математике;

– общие основы методики преподавания математики;

– психологические особенности обучения математике;

– современные педагогические технологии обучения математике;

– формы и методы организации внеклассной и внешкольной работы по математике;

– формы контроля, критерии оценки уровня усвоения знаний и сформированности умений учащихся по математике;

уметь:

– применять систему знаний о закономерностях и дидактических принципах организации учебного процесса по математике;

– использовать принципы, методы, формы и средства учебной и научно-исследовательской работы в сфере математического образования;

– применять методы методологического и научно-методического анализа содержания и структуры учебных средств по математике;

– использовать знания, которые относятся к современным технологиям обучения математике;

– применять методику изучения математических понятий, теорем, доказательств и решения задач;

– организовывать образовательно-воспитательный процесс обучения математике для различных возрастных групп учащихся, на разных ступенях и профилях обучения и в разных типах образовательных учреждений;

владеть:

– способами ориентации в профессиональных источниках информации (журналы, сайты, образовательные порталы и т.д.);

– различными средствами коммуникации в профессиональной педагогической деятельности;

– способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования возможностей информационной среды образовательного учреждения, района, области, страны;

– методами методологического и научно-методического анализа содержания и структуры учебных средств по математике;

– современными педагогическими технологиями обучения математике;

– методами учебной и научно-исследовательской работы в сфере математического образования;

– методами организации внеклассной и внешкольной работы по математике;

– навыком формирования профессиональной самооценки деятельности.

Успешное освоение системы знаний, умений, навыков по учебной дисциплине «Методика преподавания математики» позволит студентам достигнуть профессионально-методической грамотности, готовности выполнять профессионально-методическую деятельность в условиях современного образовательного процесса.

В рамках лекционного курса должны формироваться концептуальные взгляды будущих учителей на проблемы школьного математического образования. Задачи лекционного курса заложить основы профессионального отношения к указанным в программе вопросам, дать всестороннюю характеристику изучаемых проблем, представить аналитический обзор возможных подходов к их решению.

Практические занятия должны быть направлены на приобретение студентами навыков использования полученных теоретических знаний при решении конкретных методических задач. Их структура и содержание, а также организация и проведение должны содействовать развитию индивидуально-творческих способностей каждого студента, приобретению навыков самостоятельной работы, в том числе и исследовательской. При этом занятия должны ориентироваться на продуктивное использование современных компьютерных технологий и технических средств обучения.

На практических занятиях студенты знакомятся с содержанием образовательного стандарта по математике, учебных программ, учебников и учебных пособий; анализируют методику преподавания конкретных тем школьного курса в разных УМК (учебно-методических комплексах); учатся планировать учебный материал; знакомятся с принципами построения системы задач по отдельной теме и разработки дидактических материалов; обсуждают проблемы организации обучения на уроках разных типов, формы контроля и оценки знаний учащихся, проблемы внеклассной работы по предмету.

Лабораторные занятия проводятся по подгруппам и должны включать активные, практико-ориентированные виды деятельности, направленные на формирование умений и навыков самостоятельной педагогической работы в обучении математике. Их организация должна способствовать развитию методической культуры студента и его профессиональной самореализации.

На занятиях всех типов рекомендуется изучение студентами методики работы опытных учителей математики, проведение встреч с учеными, методистами, творчески работающими учителями, авторами УМК.

Роль и место дисциплины в методической и математической подготовке определяется ее возможностями в формировании методической компетентности будущих учителей.

Освоение курса «Методика преподавания математики» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

АК-1. Уметь применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач.

АК-2. Владеть методами научно-педагогического исследования.

АК-3. Владеть исследовательскими навыками.

АК-4. Уметь работать самостоятельно.

АК-5. Быть способным порождать новые идеи (обладать креативностью).

АК-6. Владеть междисциплинарным подходом при решении проблем.

АК-7. Иметь навыки, связанные с использованием технических устройств, управлением информацией и работой с компьютером.

АК-8. Обладать навыками устной и письменной коммуникации.

АК-9. Уметь учиться, повышать свою квалификацию в течение всей жизни.

СЛК-2. Быть способным к социальному взаимодействию.

CJIK-3. Обладать способностью к межличностным коммуникациям.

СЛК-5. Быть способным к критике и самокритике.

СЛК-6. Уметь работать в команде.

СЛК-7. Быть способным к осуществлению самообразования и самосовершенствования профессиональной деятельности.

ПК-1. Управлять учебно-познавательной и учебно-исследовательской деятельностью обучающихся.

ПК-2. Использовать оптимальные методы, формы, средства обучения.

ПК-3. Организовывать и проводить учебные занятия различных видов и форм.

ПК-4. Организовывать самостоятельную работу обучающихся.

ПК-11. Развивать учебные возможности и способности обучающихся на основе системной педагогической диагностики.

ПК-12. Развивать навыки самостоятельной работы обучающихся с учебной, справочной, научной литературой и др. источниками информации.

ПК-13. Организовывать и проводить коррекционно-педагогическую деятельность с обучающимися.

ПК-14. Предупреждать и преодолевать неуспеваемость обучающихся.

ПК-15. Формулировать образовательные и воспитательные цели.

ПК-16. Оценивать учебные достижения обучающихся, а также уровни их воспитанности и развития.

ПК-17. Осуществлять профессиональное самообразование и самовоспитание с целью совершенствования профессиональной деятельности.

ПК-18. Организовать целостный педагогический процесс с учетом современных образовательных технологий и педагогических инноваций.

ПК-19. Анализировать и оценивать педагогические явления и события прошлого в свете современного гуманитарного знания.

Распределение аудиторного времени по семестрам:

Курс / Семестр	**Общее кол-во часов**	**Аудиторное количество часов**	**Лекции**	**Практические занятия**	**Лабораторные занятия**
2 курс / 3 семестр	118	66	32	30	4
2 курс / 4 семестр	124	60	28	28	4
3 курс / 5 семестр	98	60	30	28	2
3 курс / 6 семестр	66	36	16	18	2
4 курс / 7 семестр	144	42	24	16	2
Итого	**550**	**264**	**130**	**120**	**14**

На изучение учебной дисциплины «Методика преподавания математики» отводится всего 550 часов, из них 264 часа аудиторных занятий. Примерное распределение аудиторного времени по видам занятий: 130 часов – лекции, 120 часов – практические занятия, 14 часов – лабораторные занятия.

Итоговый контроль знаний проводится на зачетах (третий, пятый, шестой семестры) и на экзаменах (четвертый, седьмой семестры).

Содержание учебного материала

Раздел 1. Общие основы методики обучения математике

1.1. Предмет, цели, задачи и методы методики преподавания математики. Связь методики преподавания математики с другими науками. Основные этапы развития методики преподавания математики, современные тенденции методики преподавания математики.

Предмет методики преподавания математики. Методы методики обучения математике. История развития методики преподавания математики. Связь методики обучения математике с другими науками (с математикой, педагогикой, психологией, философией и др.). Основные противоречия процесса обучения математике. Актуальные проблемы методики преподавания математики.

1.2. Математика как наука и как учебный предмет в школе. Цели и содержание обучения математике. Модернизация математического образования. Концепция и стандарт учебного предмета «Математика».

Этапы развития математики. Особенности современного этапа развития школьного математического образования. Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования. Реформистское движение за модернизацию математического образования. Концепция и стандарт учебного предмета «Математика». Характеристика основных программ и учебных пособий по математике для средней школы. Проблема интеграции школьного курса математики.

1.3. Психолого-педагогические основы обучения математике. Основные дидактические принципы в процессе преподавания математики.

Особенности интеллектуального развития в подростковом возрасте. Модели обучения математике, построенные с учетом психологических закономерностей умственного развития учащихся. Дидактические принципы обучения математике. Особенности реализации дидактических принципов при обучении математике в условиях смены парадигм образования.

1.4. Общедидактические методы обучения математике и их классификация.

Проблема методов обучения. Классификация методов обучения. Объяснительно-иллюстративный метод. Репродуктивный метод. Проблемное обучение. Частично-поисковый (эвристический) метод. Исследовательский метод в обучении математике. Программированное обучение.

1.5. Методы научного познания в обучении математике.

Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез. Математические методы познания.

1.6. Методика изучения математических понятий.

Понятие. Содержание и объем понятия. Зависимость между объемами понятий. Определение понятия. Классификация понятий. Формирование математических понятий: психологические закономерности формирования математических понятий, методика введения математических понятий, применение понятий и их определений. Некоторые особенности усвоения математических понятий и их определений учащимся.

1.7. Методика изучения математических предложений.

Математические суждения и умозаключения. Основные виды математических суждений. Условная форма математических предложений. Четыре вида предложений, записанных в условной форме. Связь между их истинностью. Необходимые и достаточные условия. Сущность понятия доказательства. Методы доказательства теорем. Методика изучения теорем. Методические задачи, решаемые при изучении теорем. Воспитание у учащихся потребности в доказательствах. Методика обучения учащихся теоремам и их доказательствам. Подготовка учителя к доказательству теорем на уроке.

1.8. Задачи в школьном курсе математики.

Роль задач в обучении математике. Функции задач в обучении математике. Основные этапы в решении задачи. Общие умения по решению задач. Общие методы решения математических задач. Классификация задач. Роль алгоритмов и эвристик в обучении решению задач. Организация обучения решению математических задач. Методика обучения школьников решению текстовых задач арифметическим методом.

1.9. Формы организации обучения математике. Урок. Основные требования к уроку. Анализ урока математики. Средства обучения математике. Контроль и оценка знаний учащихся.

Современные формы организации обучения математике. Урок. Типы уроков. Основные требования к современному уроку. Организация современного урока (годовое или полугодовое планирование, тематическое планирование, поурочное планирование). Особенности организации учебного процесса на разных этапах и уровнях обучения математике, в различных образовательных технологиях. Средства обучения математике. Печатные средства обучения математике (учебник, учебное пособие, сборники задач и дидактических материалов, тетради с печатной основой, методические пособия, учебно-методические комплексы). Дидактические требования к учебнику по математике как основному средству обучения. Электронные средства обучения математике (компьютерные обучающие и контролирующие программы; электронные учебники и т.д.). Средства наглядности при изучении математики, дидактические требования к их качеству и использованию в учебном процессе. Дистанционные технологии обучения в традиционном образовательном процессе.

Анализ урока. Его роль в интенсификации учебного процесса. Организация контроля и оценки знаний, навыков и умений школьников по математике, виды контроля (текущий, тематический, итоговый), формы контроля (устные опросы, письменные работы, зачеты, экзамены, централизованное тестирование). Методика работы учителя по подготовке учащихся к устному и письменному экзамену по математике.

1.10. Дифференциация при обучении математике в системе основного и дополнительного образования. Внеклассная работа по математике. Организация исследовательской деятельности учащихся.

Проблема развития математических способностей у школьников.

Внешняя и внутренняя дифференциация при обучении учащихся математике. Основное образование учащихся, повышенный уровень изучения математики в гимназиях и лицеях. Дополнительное образование по математике. Постоянные и непостоянные формы внеурочной работы в рамках дополнительного образования по математике (кружки, факультативные занятия, курсы по выбору, заочные школы, олимпиады, конференции и т. п.). Организация исследовательской деятельности учащихся, подготовка к участию в научно-исследовательской работе, математических турнирах различного уровня.

1.11. Развитие мышления и воспитание учащихся в процессе обучения математике

Компоненты математического мышления. Качества математического мышления. Развитие познавательного интереса школьников при обучении математике. Воспитание в процессе обучения математике.

Раздел 2. Частная методика

2.1. Методика изучения числовых множеств в школьном курсе математики.

Историческая и логическая последовательности изучения числовых множеств. Общий принцип расширения числовых множеств. Общая схема методики изучения новых чисел. Методика повторения и дальнейшего изучения натуральных чисел. Методика изучения обыкновенных и десятичных дробей. Изучение процентов. Основные задачи на проценты. Методика введения и изучения рациональных и иррациональных чисел.

2.2. Методика изучения тождественных преобразований выражений в школьном курсе математики.

Тождественные преобразования в школьном курсе математики. Методика изучения понятия тождества. Тождество на множестве. Основные виды тождественных преобразований в школьном курсе математики. Методика формирования навыков и умений тождественных преобразований целых и дробных рациональных выражений, иррациональных, трансцендентных (показательных, логарифмических, тригонометрических) выражений. Типичные ошибки, допускаемые учащимися в тождественных преобразованиях и пути их предупреждения. Методика формирования культуры тождественных преобразований.

2.3. Обобщение понятия степени в школьном курсе математики.

Методика введения и изучения свойств степеней с показателями из разных числовых множеств. Методика изучения степени с натуральным и целым показателем. Корень n-ой степени в школьном курсе математики. Методика введения и изучения степени с иррациональным показателем.

2.4. Понятие функции. Методика изучения алгебраических функций в школьном курсе математики. Функции натурального аргумента.

Понятие функции. Разные трактовки понятия функции. Возможная методическая схема изучения функций в базовой школе. Методика изучения алгебраических функций. Числовые последовательности и прогрессии. Методика изучения арифметической и геометрической прогрессий в курсе математики средней школы.

2.5. Методика изучения тригонометрических функций в школьном курсе.

Понятие синуса, косинуса, тангенса, котангенса в курсе геометрии. Методика введения тригонометрических функций любого угла. Методические особенности изучения первых трансцендентных функций в школе. Построение графиков тригонометрических функций. Методические особенности изучения и использования свойств тригонометрических функций в курсе математики средней школы.

2.6. Методика изучения показательной и логарифмической функций.

Особенности методики изучения показательной и логарифмической функций в средней школе. Функциональная линия в школьном курсе математики и ее дидактические особенности.

2.7. Методика изучения производной. Применение производной в школьном курсе математики.

О проблеме введения понятия предела в школьный курс. Методика изучения производной функции в школьном курсе математики. Механический и геометрический смыслы производной. Применение производной к исследованию функций. Уточнение понятия касательной к графику функции.

Уравнение касательной к графику функции.

2.8. О понятиях равносильности и следования в курсе школьной математики. Методика обучения учащихся решению алгебраических уравнений, неравенств и их систем. Обучение школьников решению текстовых задач методом составления уравнений, неравенств, их систем.

Разные трактовки понятия уравнения и соответствующие им определения. Уравнения и неравенства в средней школе. Равносильность уравнений и неравенств. Понятие следования в курсе школьной математики. Рациональные уравнения и неравенства, их системы. Потеря и приобретение корней в процессе решения иррациональных уравнений. Метод интервалов как наиболее общий подход при решении неравенств школьной математики. Решение текстовых задач методом составления уравнений и неравенств.

2.9. Методика решения трансцендентных уравнений, неравенств и их систем.

Тригонометрические уравнения и неравенства. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Методика обучения школьников решению логарифмических и показательных уравнений и неравенств. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств.

2.10. Методика изучения начал систематического школьного курса планиметрии.

Значение курса геометрии в развитии учащихся. Пропедевтика и систематический курс геометрии. Методика изучения первых разделов систематического курса геометрии. Понятие равенства фигур в школьном курсе геометрии. Различные подходы к построению школьного курса геометрии. Особенности обучения доказательству первых теорем.

2.11. Методика изучения четырехугольников, их свойств.

Понятие многоугольника. Методика изучения четырехугольников, их свойств и признаков.

2.12. Методика изучения величин в школьном курсе планиметрии.

Методика формирования понятия каждой из геометрических величин (длина, мера угла, мера дуги, площадь) через усвоение соответствующей системы аксиом. Различные подходы к обоснованию формул площади прямоугольника. Методика обоснования формул площадей многоугольников. Обучение школьников решению задач на нахождение величин.

2.13. Методика изучения основных соотношений между элементами треугольника.

Методика изучения соотношений между сторонами и углами треугольников. Решение треугольников.

2.14. Методика изучения подобия фигур.

Определение и признаки подобия треугольников в школьном курсе планиметрии. Теорема Фалеса. Обучение школьников применению метода подобия при доказательстве теорем и решении задач планиметрии.

2.15. Методика изучения основных соотношений в круге. Вписанные и описанные многоугольники.

Взаимное расположение прямой и окружности. Углы, ассоциируемые с окружностью. Методика изучения метрических соотношений в окружности и треугольнике. Замечательные точки треугольника. Методика изучения свойств вписанных, описанных четырехугольников и правильных многоугольников.

2.16. Методика формирования у учащихся навыков решения задач по планиметрии. Обучение школьников решению задач на построение циркулем и линейкой.

Методика обучения школьников решению задач планиметрии. Основные методы решения планиметрических задач. Последовательность введения элементарных геометрических построений при обучении математике. Особенности конструктивных задач на плоскости. Схема решения задачи на построение при обучении планиметрии.

2.17. Методика изучения первых разделов систематического курса стереометрии. Особенности методики работы с многогранниками.

Трудности при изучении аксиом стереометрии и пути их преодоления. Методика введения многогранников на первых уроках. Обучение школьников решению задач при изучении аксиом стереометрии и первых следствий из них. Методические особенности обучения школьников решению задач на построение сечений многогранников аксиоматическими методами. Использование систем динамической геометрии (GeoGebra, «Живая геометрия» и др.).

2.18. Методика изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.

Взаимное расположение прямых в пространстве. Скрещивающиеся прямые. Методика изучения параллельности прямых и плоскостей в пространстве. Методические особенности изучения параллельного проектирования в школе. Изображение плоских и пространственных фигур. Перпендикулярность прямых в пространстве, перпендикулярность прямой и плоскости, двугранный угол, угол между плоскостями, перпендикулярность двух плоскостей. Роль многогранников при изучении первых разделов стереометрии. Вопросы существования и единственности геометрических фигур при изучении начал стереометрии. Особенности методики обучения школьников решению задач первых разделов стереометрии.

2.19. Методика обучения учащихся нахождению углов и расстояний в пространстве.

Методика изучения понятий угла между прямыми, прямой и плоскостью, двумя плоскостями. Двугранный угол. Понятие расстояния между геометрическими фигурами в пространстве. Методика обучения школьников вычислению расстояний и углов между геометрическими фигурами в пространстве.

2.20. Методика изучения многогранников и их свойств.

Роль и место многогранников на разных этапах изучения стереометрии. Особенности изучения призм и пирамид. Правильные многогранники. Обучение школьников решению задач на доказательство и использование свойств многогранников.

2.21. Методика изучения тел вращения, их свойств.

Методика введения понятий цилиндра, конуса и сопровождающих их понятий в школьных учебных пособиях и учебниках стереометрии. Определение сферы и шара. Взаимное расположение сферы и плоскости. Обучение школьников решению задач.

2.22. Методика изучения площадей поверхностей и объемов многогранников и тел вращения.

Методика формирования понятия объема в школьном курсе математики. Методика изучения объемов и площадей поверхностей многогранников. Методические особенности доказательства формул для вычисления объемов и площадей поверхностей тел вращения.

2.23. Методика обучения школьников решению задач на комбинации многогранников и тел вращения.

Понятие касательной прямой и плоскости сферы (шара), конуса цилиндра. Комбинации многогранников и тел вращения. Обучение школьников решению задач на комбинации пространственных тел.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов: Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР
1	2	3	4	5	6	7
1.	**ОБЩИЕ ОСНОВЫ МЕТОДИКИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ (82 ч)**	**40**	**38**		**4**	
	3 семестр (66 часов)	*32*	*30*		*4*	
1.1	**Предмет, цели, задачи и методы методики преподавания математики. Связь методики преподавания математики с другими науками. Основные этапы развития методики преподавания математики, современные тенденции методики преподавания математики (6 ч)**	**4**	**2**			
1.1.1	Предмет и задачи методики преподавания математики. Методы методики обучения математике. История развития методики преподавания математики.	2				
1.1.2	Связь методики обучения математике с другими науками (с математикой, педагогикой, психологией, философией и др.). Основные противоречия процесса обучения математике. Актуальные проблемы методики преподавания математики.	2				

1.1.3	Связь методики обучения математике с другими науками (с математикой, педагогикой, психологией, философией и др.). Основные противоречия процесса обучения математике.		2			
1.2	**Математика как наука и как учебный предмет в школе. Цели и содержание обучения математике. Модернизация математического образования. Концепция и стандарт учебного предмета «Математика» (8 ч)**	**4**	**4**			
1.2.1	Этапы развития математики. Особенности современного этапа развития школьного математического образования. Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования. Реформистское движение за модернизацию математического образования. Проблема интеграции школьного курса математики.	2				
1.2.2	Концепция и стандарт учебного предмета «Математика».	2				
1.2.3	Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования.		2			
1.2.4	Характеристика основных программ и учебников по математике для средней школы.		2			
1.3	**Психолого-педагогические основы обучения математике. Основные дидактические принципы в процессе преподавания математики (4 ч)**	**2**	**2**			
1.3.1	Особенности интеллектуального развития в подростковом возрасте. Модели обучения математике, построенные с учетом психологических закономерностей умственного развития учащихся.	2				
1.3.2	Дидактические принципы обучения математике. Особенности реализации дидактических принципов при обучении математике в условиях смены парадигм образования.		2			

1.4	**Общедидактические методы обучения математике и их классификация (6 ч)**	**2**	**4**			
1.4.1	Общее понятие о методах, приемах обучения. Проблема методов обучения. Классификация методов обучения.	2				
1.4.2	Информационные методы обучения.		2			
1.4.3	Методы проблемного обучения. Программированное обучение. Исследовательский метод в обучении математике.		2			
1.5	**Методы научного познания в обучении математике (8 ч)**	**4**	**4**			
1.5.1	Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Математические методы познания.	2				
1.5.2	Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез.	2				
1.5.3	Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Математические методы познания.		2			
1.5.4	Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез.		2			
1.6	**Методика изучения математических понятий (12 ч)**	**6**	**4**		**2**	
1.6.1	Понятие. Содержание и объем понятия. Зависимость между объемами понятий. Определение понятия.	2				
1.6.2	Формирование математических понятий: психологические закономерности формирования математических понятий.	2				
1.6.3	Классификация понятий. Логическая структура определений.	2				
1.6.4	Правила определения понятий.				2	
1.6.5	Методика введения математических понятий, применение понятий и их определений.		2			

Начало
Содержание
Страница 27 из 312
Назад
На весь экран
Закрыть

1.6.6	Некоторые особенности усвоения математических понятий и их определений учащимися.		2			
1.7	**Методика изучения математических предложений (12 ч)**	**6**	**4**		**2**	
1.7.1	Математические суждения и умозаключения. Основные виды математических суждений. Условная форма математических предложений. Четыре вида предложений, записанных в условной форме. Связь между их истинностью. Необходимые и достаточные условия.	2				
1.7.2	Сущность понятия доказательства. Методы доказательства теорем.	2				
1.7.3	Методика изучения теорем. Методические задачи, решаемые при изучении теорем. Воспитание у учащихся потребности в доказательствах.	2				
1.7.4	Методика обучения учащихся теоремам и их доказательствам.		2			
1.7.5	Подготовка учителя к доказательству теорем на уроке.		2			
1.7.6	Изучение теорем в школьном курсе математики				2	
1.8	**Задачи в школьном курсе математики (10 ч)**	**6**	**4**			
1.8.1	Понятие «задача». Роль задач в обучении математике. Функции задач в обучении математике. Основные этапы в решении задачи. Общие умения по решению задач.	2				
1.8.2	Общие методы решения математических задач. Классификация задач.	2				
1.8.3	Роль алгоритмов и эвристик в обучении решению задач. Организация обучения решению математических задач. Требования к подбору задач.	2				
1.8.4	Организация обучения решению математических задач.		2			
1.8.5	Методика обучения школьников решению нестандартных задач.		2			
	Контрольная работа		2			

Лекция 1. Предмет и задачи методики преподавания математики. Методы методики обучения математике. История развития методики преподавания математики.

Слово методика в переводе с древнегреческого означает способ познания, путь исследования. Метод – это путь достижения какой-либо цели, решения конкретной учебной задачи.

Существуют разные точки зрения на содержание понятия методика:

- методика преподавания математики – наука о математике как учебном предмете и закономерностях процесса обучения математике учащихся различных возрастных групп и способностей;

- методика обучения математике – это педагогическая наука о задачах, содержании и методах обучения математике. Она изучает и исследует процесс обучения математике в целях повышения его эффективности и качества. Методика обучения математике рассматривает вопрос о том, как надо преподавать математику;

- методика преподавания математики – раздел педагогики, исследующий закономерности обучения математике на определенном уровне ее развития в соответствии с целями обучения подрастающего поколения, поставленными обществом. Методика обучения математике призвана исследовать проблемы математического образования, обучения математике и математического воспитания.

Цель методики обучения математике заключается в исследовании основных компонентов системы обучения математике в школе и связей между ними. Под основными компонентами понимают цели, содержание, методы, формы и средства обучения математике.

Предметом методики обучения математике являются цели и содержание математического образования, методы, средства и формы обучения математике.

На функционирование системы обучения математике оказывает влияние ряд факторов: общие цели образования, гуманизация и гуманитаризация образования, развитие математики как науки, прикладная и практическая направленность математики, новые образовательные идеи и технологии, результаты исследований в психологии, дидактике, логике и т.д.

Основными задачами методики преподавания математики являются:

- определение конкретных целей изучения математики по классам, темам, урокам;

- отбор содержания учебного предмета в соответствии с целями и познавательными возможностями учащихся;

- разработка наиболее рациональных методов и организационных форм обучения, направленных на достижение поставленных целей;

- выбор необходимых средств обучения и разработка методики их применения в практике работы учителя математики.

Методика преподавания математики призвана дать ответы на три вопроса: Зачем надо учить математике? Что надо изучать? Как надо обучать математике?

Предусмотренное программой содержание школьного математического образования, несмотря на происходящие в нем изменения, в течение достаточно длительного времени сохраняет свое основное ядро. Такая устойчивость основного содержания программы объясняется тем, что математика, приобретая в своем развитии много нового, сохраняет и все ранее накопленные научные знания, не отбрасывая их как устаревшие и ставшие ненужными. Каждый раздел, вошедший в это ядро, имеет свою историю развития как предмет изучения в средней школе. Вопросы изучения подробно рассматриваются в специальной методике преподавания математики.

В теории познания *метод* **определяется** как система последовательных действий, которые приводят к достижению результата, соответствующего намеченной цели.

Методы обучения – это способы взаимодействия учителя и учащихся, направленного на достижение целей образования, воспитания и развития школьников в ходе обучения.

По исследованиям Ю. К. Бабанского, учителя вдвое чаще испытывают затруднения в выборе метода обучения, чем в выборе содержания. Чтобы преодолеть это затруднение, необходимо хорошо знать все многообразие методов, их характеристики. Этой цели служат различные *классификации методов обучения.*

Нужно отметить, что проблемой методов обучения и их классификациями занимается педагогика, а точнее — дидактика, так как большинство методов используется при обучении любому предмету, в том числе и математике.

В классификации Ю. К. Бабанского все методы делятся на методы организации, стимулирования учебно-познавательной деятельности учащихся и контроля за эффективностью этой деятельности.

1. *Методы организации учебно-познавательной деятельности.*

- словесные: рассказ, лекция (учебная), беседа;
- наглядные: демонстрация, иллюстрация, ТСО;
- практические: упражнения, учебный эксперимент, лабораторная работа.

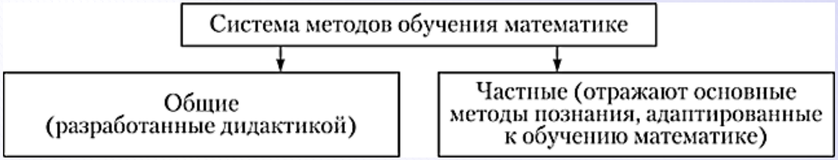
2. *Методы стимулирования учебно-познавательной деятельности:*

- дидактические игры;
- метод поощрения;
- учебные дискуссии;
- создание ситуации успеха.

3. *Методы контроля за эффективностью учебно-познавательной деятельности.*

- устный;
- письменный;
- лабораторный;
- индивидуальный;
- фронтальный;
- программированный.

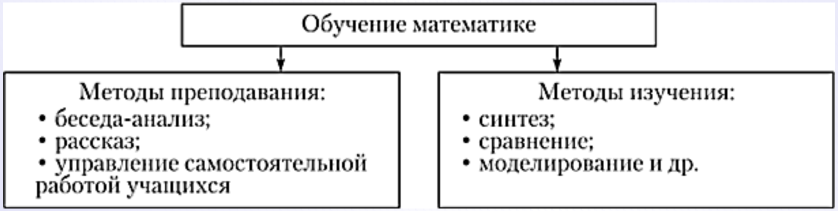
Другую классификацию предлагают Р. С. Черкасов и А. А. Столяр. Она непосредственно относится к методам обучения математике.



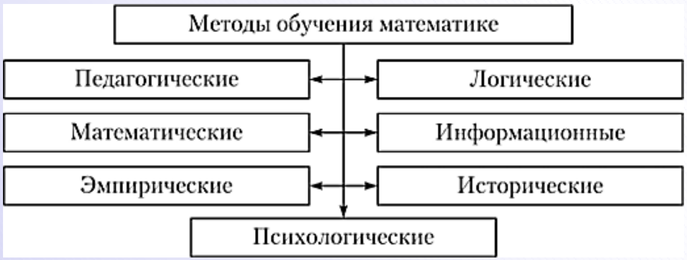
Вопросы практики

Назовите несколько основных методов познания и приведите пример использования каждого из них при обучении математике.

Классификация Ю. М. Колягина:



Классификация О. Б. Епишевой:



Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 32 из 312
Назад
На весь экран
Закрыть

К методам педагогики относятся, например, объяснительно-иллюстративный метод обучения или метод проблемного обучения. Методы логики – это прежде всего методы доказательных рассуждений, которые широко используются в математике, например метод рассуждений «от противного». К математическим методам можно отнести, например, метод геометрических преобразований, который используется при обучении построению графиков функций. Методы информатики используются при обучении действиям, выполняемым по алгоритмам, которые обычно строятся учащимися с помощью учителя. Эмпирические методы – методы исследования моделей математических объектов для усмотрения их свойств или связей. Использование эмпирических методов позволяет получить гипотезы, которые в дальнейшем должны быть доказаны. Методы истории, прежде всего метод исторического анализа, используются в случаях рассмотрения истории возникновения и развития математических понятий и утверждений. Методы психологии – методы осуществления мыслительной деятельности. Дальше они будут рассмотрены более подробно.

Остановимся подробнее на методах психологии в обучении математике. К ним обычно относят:

- анализ и синтез;
- сравнение;
- обобщение и специализацию;
- абстрагирование и конкретизацию;
- классификацию;
- систематизацию.

Нужно отметить, что методы психологии (в классификации О. Б. Епишевой) фактически совпадают с основными методами познания (в классификации Р. С. Черкасова и А. А. Столяра), а также с частными методами обучения математике (в классификации Ю. М. Колягина).

Раскроем вкратце суть указанных методов психологии в обучении математике.

Анализ – форма мышления, исследования и познания, когда изучаемый объект мысленно или практически расчленяется на составные части, каждая из которых изучается отдельно, с тем чтобы в дальнейшем соединить с помощью синтеза в единое целое, рассматриваемое уже на более высоком уровне:

• метод рассуждения, при котором мысль движется от неизвестного к известному;

• метод мышления от целого к частям этого целого;

• прием мышления, при котором переходят от следствия к его причине;

• (с точки зрения психологии) особая форма процесса мышления, когда объект включается во все новые связи и в силу этого выступает во все новых качествах, которые фиксируются в новых понятиях.

Синтез – форма мышления, исследования и познания, когда изучаемый объект мысленно или практически соединяется в единое целое составных частей объекта, расчлененного в процессе анализа:

• метод рассуждения, при котором мысль движется от известного к неизвестному;

• метод мышления от частей к целому;

• прием мышления, при котором переходят от причины к ее следствию;

• (с точки зрения психологии) особая форма процесса мышления, когда происходит соотнесение, сопоставление и всякое установление связи между различными элементами.

Анализ и синтез используются при решении задач на доказательство, на построение и с помощью уравнений, при отыскании различных множеств точек и т.д. Анализ и синтез психологи рассматривают как важнейшие операции процесса мышления. Процесс мышления, по мнению С. Л. Рубинштейна, – это прежде всего анализирование и синтезирование того, что выделяется анализом; это затем абстракция и обобщение, являющиеся производными от них.[1]

Обобщение – мысленное выделение, фиксирование каких-нибудь свойств, принадлежащих только данному множеству объектов и объединяющих эти объекты воедино.

Специализация – мысленное выделение некоторого свойства из множества свойств изучаемого объекта. Например, число п — число 7; треугольник — равнобедренный.

Сравнение – мысленное установление сходства или различия объектов изучения.

Аналогия – метод познания, с помощью которого сходство предметов, выявленное в результате их сравнения, распространяется на новое свойство. Использование аналогии привлекает внимание учащихся, приводит к лучшему запоминанию свойств объектов. Но нужно иметь в виду, что много проблем возникает при использовании ошибочных аналогий.

Абстрагирование – мысленное отвлечение общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных для нашего изучения свойств рассматриваемых объектов или отношений.

Конкретизация – мыслительная деятельность, при которой односторонне фиксируется одна сторона объекта изучения, вне связи с другими его сторонами.

Классификация – отнесение единичного объекта или явления к соответствующей общей группе на основе общих и существенных признаков.

Систематизация – соединение отдельных признаков понятий или ряда соотносящихся понятий или явлений не только по сходству их основных признаков с такими же предметами и явлениями целого класса, но и выделение в этой группе более мелких подгрупп.

История развития методики преподавания математики

Что касается определения периодизации методики преподавания математики как науки, то И.К. Андронов изучает зарождение, созревание, развитие, а также становление науки «педагогики математики» и выделяет четыре этапа:

1. Стадия зарождения предмета педагогики математики (конец XVII – нач. XIX вв.);

2. Этап созревания педагогики математики, связанной с рациональным обучением математике в школе (вторая половина XIX в.);

3. Этап развития педагогики и дидактики математики (первая половина XX в.);

4. Этап становления педагогики математики, как педагогической науки (вторая половина XX в. и до наших дней).

В статье Р.С. Черкасова приводится периодизация в которой рассматривается не только история отечественного математического образования, но и развитие методики преподавания математики:

1. Период создания первых светских школ (1700 – 1800 гг.);

2. Период становления светского школьного образования. Первые научные исследования в области методики преподавания математики (1800 – 1860 гг.);

3. Период развития массового среднего образования. Широкое обсуждение проблем методики преподавания математики (1860 – 1900 гг.);

4. Период всероссийских съездов преподавателей математики (1900 – 1917 гг.);

5. Период становления послереволюционной школы. Поиск новых путей математического образования (1918 - 1932 гг.);

6. Период совершенствования общеобразовательной трудовой политехнической школы (1932 – 1964 гг.);

7. Период реформы школьного математического образования и неожиданной ее приостановки (1965 – 1984 гг.);

8. Период поиска путей восстановления и развития идей реформы (1984 – 1990 гг.);

9. Период современных преобразований (1990-й и последующие годы).

Несмотря на большинство совпадений, стоит обратить внимание и на некоторые различия в приведенных периодизациях.

Например, у Т.С. Поляковой, так же как и у Р.С. Черкасова, выделено девять периодов. Однако, свою периодизацию Т.С. Полякова начинает с периода зарождения математического образования Киевской Руси, а Р.С. Черкасов с создания первых светских школ (1700-1800 гг.).

Следует заметить, что согласно периодизации, предложенной Т.С. Поляковой, XVIII век относится ко второму этапу и характеризуется как этап становления математического образования.

Можно указать еще одно отличие – Р.С. Черкасов в качестве самостоятельного этапа выделяет время проведения всероссийских съездов (1900 – 1917 гг.), которое у Т.С. Поляковой присоединено к четвертому периоду – реформации классической системы школьного математического образования (60 70-е гг. XIX в. – 1917 г.).

Каждый из авторов в основу построения периодизации кладет какой-либо принцип. Так, например у Т.С. Поляковой – это политика Министерства образования, его уставы, реформы; у О.А. Саввиной – значение, роль и место высшей математики в процессе обучения, у О.В. Тарасовой – становление и развитие геометрического образования; у Ю.М. Колягина – государственные и политические интересы.

Таким образом, в этих периодизациях, имеются как общие тенденции, так и разночтения.

МПМ начала разрабатываться чешским ученым Я.А. Коменским. Как самостоятельная дисциплина МПМ впервые возникла в трудах швейцарского педагога И.Г. Песталоцци (1746-1827 гг.), опубликовавшего в 1803 г. работу «Наглядное учение о числе». В России первым пособием по методике математики стала книга Ф.И. Буссе «Руководство к преподаванию арифметики для учителей», вышедшей в 1831г.

Создателем русской методики арифметики для народной школы считается П.С. Гурьев, который критерием правильности решения методических проблем признавал опыт и практику.

Лекция 2. Связь методики обучения математике с другими науками (с математикой, педагогикой, психологией, философией и др.). Основные противоречия процесса обучения математике. Актуальные проблемы методики преподавания математики.

Методика обучения математике связана с такими науками, как философия, психология, педагогика, логика, информатика, история математики и математического образования, физиология человека, и прежде всего с математикой – ее базовой дисциплиной.

Цель методики – отобрать основные данные математической науки и, дидактически обработав и адаптировав их, включить в содержание школьных курсов математики.

Философия разрабатывает методы познания, которые используются в педагогических, методических исследованиях и в обучении математике: системный подход (компоненты методики преподавания математики и их взаимосвязь); методы научного познания (аналогия, обобщение, конкретизация, абстрагирование и т. д.); философские законы; диалектический метод познания.

Логика исследует законы «правильного» мышления. Такие понятия, как выражение, теорема, доказательство, уравнение, правило вывода, являются логическими понятиями. Доказательства математических утверждений базируются на логических действиях. Формирование математических понятий осуществляется на основе логических законов.

Методика преподавания математики тесно связана с педагогикой, в частности с дидактикой. В дидактике основным отношением, характеризующим обучение, является «преподавание – учение», в методике – «преподавание – учебный материал – учение». Педагогика определяет методы обучения, цели воспитания, методы научного исследования. Взяв за основу эти методы и цели из педагогики, методика вносит как в учебный процесс, так и в научные исследования свое конкретное математическое содержание.

Методика обучения математике ориентируется на особенности учащихся определенных возрастных групп с использованием закономерностей индивидуальных особенностей школьников в определенном возрасте (память, мышление, внимание и т. д.). Влияние психологии на методику обучения математике усиливается в связи с внедрением личностно ориентированного образования, характеризующегося усилением внимания к ученику, его саморазвитию, самопознанию, к воспитанию умения искать и находить свое место в жизни.

Методика обучения математике связана с историей математики. Она обращает внимание учителя на трудности, с которыми он может встретиться при изучении школьного курса математики, придает математическим знаниям личностно значимый характер.

Информатика – наука, изучающая проблемы получения, хранения, преобразования, передачи и использования информации. В последнее время, в связи с развитием информатики, усиливается ее влияние на методику обучения математике: формируется определенный стиль мышления, связанный с использованием компьютера, кодированием информации; применяются информационные технологии, ориентированные на повышение эффективности обучения математике.

МПМ связана с такими науками, как математика, философия, психология, педагогика, логика, информатика, история математики и математического образования, физиология человека и использует достижения этих наук для решения своих проблем.

ПРОТИВОРЕЧИЯ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Белорусской школой накоплен огромный опыт активизации обучения школьников. Однако проблема воспитания творческой активности школьников до сих пор не теряет своей актуальности. Ее решение связано с преодолением присущих процессу обучения противоречий:

- между объемом и содержанием учебного материала, которые жестко определены программой, и естественным стремлением творчески работающего учителя выйти за ее границы, рассмотреть тот или иной вопрос в трактовке, отличной от принятой в учебнике;

- между экономичностью (проявляющейся в сообщении учащимся готовых знаний и приводящих часто к формальному их усвоению) и неэкономичностью во времени индуктивных методов (широко используемых в проблемном обучении и активизирующих самостоятельную познавательную деятельность школьников);

- между повседневной коллективной учебной работой школьников и индивидуальными особенностями усвоения ими знаний, формирования их умений и навыков, их темпом и характером работы;

- между массовостью школьного математического образования, неизбежно приводящей к известной стандартизации, и подчеркнуто индивидуальным характером познания (выход из этого противоречия в дифференциации обучения на основе вариативности образования и обучения);

- между развитием математики и методикой преподавания математики: если математика развивается необычайно быстро, приобретая все новые и новые знания, находящие свое отражение в школьных курсах, то методика преподавания математики, особенно в условиях массового обучения, развивается намного медленнее.

ПРОБЛЕМЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Актуальными для методики преподавания математики являются следующие проблемы:

- стандартизация образования;
- дифференциация содержания образования;
- методическое обеспечение преподавания математики в связи с постоянным обновлением содержания школьного математического образования;
- нарушение межпредметных связей;
- несовершенная система контроля и оценки знаний учащихся при обучении математике;
- кадровое обеспечение учебного процесса и др.

Лекция 3. Этапы развития математики. Особенности современного этапа развития школьного математического образования. Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования. Реформистское движение за модернизацию математического образования. Проблема интеграции школьного курса математики.

В истории математики принято различать следующие четыре периода:

1. Период накопления первоначальных математических сведений; (до VI в. до н.э.).

2. Период математики постоянных величин; (VI в. до н.э. - XVI в н.э.) (средневековье) (э Возрождения, начало XV-XVI.

3. Период математики переменных величин (XVII-XX вв.).

4. Период современной математики (XX).

Период накопления начальных математических сведений заканчивается в Древней Греции VI в. до н.э., он включает в себя происхождение первых натуральных чисел и первых геометрических фигур и тел, математику Древнего Египта, сведения о пирамидах. Важнейшим из дошедших до нас текстов является папирус **Райнда**, содержащий 84 задачи. Носителями научных знаний в Древнем Египте были «писцы» – чиновники состоящие на государственной или храмовой службе. Положение писца в Древнем Египте было привилегированным. Работа в письме не облагалась налогами.

Писцы обучались в специальных школах, имелись и высшие писцовые школы, которые торжественно назывались «дома жизни». Зафиксированы должности писца дома документов, писца войска, писца царских работ и т.д. Математические знания древнего писца позволяли ему производить расчеты при строительных работах, сборе налогов, разделе имущества, обмене и распределении продуктов, измерении площадей полей, объема плотин, зернохранилищ и т.п. Все задачи сводятся к вычислениям с конкретными количествами, числа как таковые, и методы решения не становятся еще предметом рассмотрения. Задачи группируются по темам (задачи на емкость, задачи на площадь и т.д.). Каждая задача решается заново, без каких-либо пояснений в числах, лишь иногда дается проверка найденного решения. Математика первого периода в Древнем Египте еще не разделяется на арифметику и геометрию, а представляет собрание примеров решения простейших прикладных задач.

Другим источником изучения математики первого периода являются математические клинописные тексты Древнего Вавилона, обнаруженные при археологических раскопках или найденные в развалинах старых сооружений. Среди разрозненного по музеям мира множества глиняных табличек самых разных эпох (от начала III тысячелетия до н. э.) обнаружено примерно 150 текстов математических задач и приблизительно 200 – с числовыми таблицами. Как и в Древнем Египте, в Древнем Вавилоне носителями научных знаний были «писцы». Они руководили общественными работами, занимались учетом хозяйств – составлением торговых документов и деловой перепиской. Писцы были связаны с храмами, где хранили клинописи. В Древнем Вавилоне специальность писца была в почете. «Тот, кто в совершенстве овладеет искусством писца на табличках, тот будет сверкать подобно солнцу». Писцы относились к правящему классу и нередко писцами становились сыновья правителей. Обучались писцы в академии – **«Дом табличек»**. Писец должен был уметь писать понятно, хорошо знать математику, уметь межевать земли, примирять спорщиков.

Задачи, решаемые в вавилонских клинописных текстах также как и в древнеегипетских папирусах, являются чисто практическими вычислительными задачами и излагаются догматически без каких-либо пояснений. Отличие, однако, состоит в том, что искусство счета вавилонян более совершенное, а решаемые математические задачи разнообразнее и сложнее. В Древнем Вавилоне впервые возникла позиционная система счисления, разработана алгебра линейных и квадратных уравнений, решаются простейшие теоретико-числовые задачи. Здесь же мы можем отметить начавшееся разделение математики на арифметику и геометрию, видеть и зачатки алгебры и теории чисел, а также появление и «теоретических» задач, т.е. задач не связанных с практикой, а обусловленные потребностью самой математики.

Математика в древних цивилизациях развивалась очень медленно. Иногда на протяжении целых веков не было никакого прогресса. Тенденция резко изменилась в VI в. до н.э. Так в Древней Греции математика за несколько десятилетий из набора примеров для решения простейших прикладных задач, превращается в строгую дедуктивную науку.

Формируются первые математические понятия и аксиомы, строятся первые математические теории.

Интересно отметить, что греки приписывали радикальные перемены во всех областях общественной жизни, в том числе математики, возникшему в то время в Греции, новому демократическому строю.

2-ой период развития математики с VI в. до н.э. по XVI в. н.э. принято считать периодом математики постоянных величин. Его следует рассматривать как развитие математики Древней Греции, Римской Империи, математику средневекового Китая, средневековой Индии, стран ислама, средневековой Европы и математики эпохи возрождения.

Обратимся к каждому из названных течений.

Первые математические теории были доказаны учеными **ионийской** школы натурфилософии в первой половине VI в. до н.э. Основателем школы считался **Фалес** – купец, политический деятель, философ, астроном и математик, живший в Милете – богатой греческой колонии Малой Азии. Но коренное преобразование математики начинается с **Пифагора** (VI в. до н.э.). В V в. до н.э. **Прокл** напишет: «**Пифагор** *преобразовал математику, рассматривал принципы чисто абстрактным образом и исследовал теоремы не с материальной, не с интеллектуальной точки зрения»*.

В школе **Пифагора** разрабатывается арифметика целых чисел выстраивается первая теория отношений, имеет место открытие несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, представляется теория делимости, основывается геометрическая алгебра, в которой задачи решаются построением с помощью циркуля и линейки. Все это относится к VI-V в. до н. э. Развивая математику пифагорейцев, греки в IV-III в. до н.э. выстраивают теорию канонических сечений (**Менехм, Апполоний**); создают новую теорию отношений (**Евдокс**); первый метод пределов (**Евдокс**); первые интегральные и дифференциальные методы (**Архимед**). Достижения греческих математиков были приведены в систему в **«Началах» Евклида** (III в. до н.э.). Со II в. до н.э. начинается спад греческой математики, вызванный началом тяжелых разрушительных войн, приведших к созданию Римской империи, и только в начале нашей эры греческая математика вновь начинает оживать. Уже в I в. н.э. в Александрии работают такие математики как **Герон** и **Менелай**, в середине II в. н.э. – **Птоломей**, в III в. н. э. создает свою алгебру **Диофант**.

Значительная часть знаменитой Александрийской библиотеки сгорела в I в. н.э. при захвате римлянами Александрии и в последующем – христианами-фанатиками, лишь немногие рукописи уцелели и их перевод в VIII в. н.э. послужил толчком развития математики в странах Ислама и Европы.

Второй период развития математики нельзя представить без рассмотрения особенностей эволюции китайской математики. Необходимо отметить, что китайская цивилизация длительное время была почти полностью изолирована от остального мира. Это наложило свой отпечаток и на развитие китайской математики.

Наиболее древние, дошедшие до нас математические тексты относятся к II в. до н.э. Исторические документы свидетельствуют, что в **Китае** математике уделялось большое внимание издавна, уже во II-й половине в. до н.э. были поставлены математическое образование и экзамены. В VII-X вв. в Императорской гимназии математика изучалась семь лет. Для занятия места чиновника в

Китае требовалось сдать экзамены по математике кроме прочих. В течение многих веков переиздавались «Десять классических трактатов», содержащих основы китайской математики. Однако китайской математике был свойственен догматизм, проявляющийся в неизменности математических произведений – «классических трактатов» со II в. до н.э. по IV в. н.э., в то время как греческие математические работы при переписке подвергались значительной обработке, дополнялись, комментировались. Исследования показывают, что математика Древнего и Среднего Китая вплоть до XIV в. развивалась преимущественно как совокупность вычислительных алгоритмов. Наиболее значительные из этих алгоритмов – метод «**ФАН-ЧЕН**» решения системы линейных уравнений и метод «**ТЯНЬ-ЮАНЬ**» приближенного решения алгебраических уравнений. Достижение Китайской математики – введение отрицательных чисел.

Необходимо отметить особое место и математики средневековой **Индии**. Первые индийские математические тексты относятся к VII-V в до н.э. Можно назвать крупнейших индийских математиков V-VII вв. н.э. – **Ариабхата** (V-VI в. н.э.), **Брахмапутра** (VII в. н.э.), Магавира (IX в. н.э.), **Шридхара** (IX-X вв. н.э.), **Бхаскара** (XП в. н.э.) Уже с первых веков н.э. прослеживается связь математики **Индии** с математикой **Китая**. Особенно усилившаяся в период распространения Буддизма и в это же время индийская математика распространяется на территории стран ислама.

Важнейшим достижением индийской математики является: создание арифметики на основе десятичной позиционной системы счисления, разработка тригонометрии, создание алгебраической символики.

В VII в. н.э. сторонники ислама, Халифы, подчинили себе Сирию, Междуречье, Иран, Египет, Среднюю Азию, Северную Африку, а позднее – Испанию, Сицилию и юг Италии, часть Закавказья и часть Индии.

Образование исламского халифата совпало со становлением феодального строя. В этот период образовались научные центры: Багдад – столица халифата, Бухара

Хорезм, Каир, Кордова, Исфахан, Марага и многие другие. В IX-X вв. н.э. работают такие известные математики как **Ал-Хорезми, Ал-Беруни, Абу Камил, Ал-Мисри, Хасан ибн Ал-Хасан**. А в XI в. н.э. - **Омар Хаям**, а в XIII в. н.э. – **Насир ад-Дин ат-Туси**, в XV в. – **Ал-Каши** и т.д. Из достижений арабских математиков отметим работы по теории параллельных, алгебре и тригонометрии. Немаловажно было то, что арабские математики переписывали труды греческих математиков, комментировали их и совершенствовали их, переняли у индийской математики их десятичную позиционную систему счисления и все это послужило основой для последующего развития математики в Европе.

Социальный и политический климат, тип сложившейся формации определяют и состояние науки, в том числе и математической. Так, в середине I в. н.э. произошел политический распад Римской Империи вызванной кризисом рабовладельческой формации. Время господства феодальных отношений, продолжавшийся с V-VI вв. по XV-XVI вв. именуется средними веками.

Основой развития науки служило интенсивное развитие Ремесел, товарного производства и торговли. Для развития математики большую роль сыграли переводы на латинский язык сочинений арабских математиков, особенно в XI-XIII вв.. Благодаря переводам европейцы знакомятся с трудами **Архимеда, Полония, Евклида, Диофанта** и других греческих математиков. Важную роль в развитии математики сыграло открытие **университетов:** древнейшего медицинского в **Солерне** (XI в.), юридического в **Болонье** (1100 г.), **Парижского** (XII в.), в XII-XIII вв. – **Оксфордского, Кембриджского** (1209 г), затем в **Праге** (1348 г.), **Кракове** (1364 г.), в **Вене** (1365 г.), в **Лейпциге** (1409 г.), **Базеле** (1469 г.) и т.д. Главными направлениями в университетах были: искусство, богословие, право, медицина.

В течение нескольких веков математика в университетах остается вспомогательной дисциплиной в Европе и это отрицательно сказывалось на знаниях студентов, но, несмотря на это, университеты были основными центрами, распространения математики. Из стен средневековых университетов вышли такие математики как **Томас Брадверди** в Англии, **Николь Орем** во Франции, **Иоган Мюллер-Региомонтан** в Германии, **Николай Коперник** в Польше и др.

XI-XVI вв. вошли в историю Европы под названием «эпоха Возрождения», при этом имелось в виду возрождение того уровня культуры, который был достигнут в античном мире. Кроме того, надо отметить, что это период возрождения новой формации – буржуазного общества. Новый тип производства и отношений требует новых технических усовершенствований и изобретений, возрастает торговля, активизируется мореплавание и т.п. Все это ведет к тому, что научные знания становятся необходимым элементом общественной жизни, совершается культурная революция.

Развитию математики, с одной стороны, способствовали чисто практические (прикладные) соображения, а с другой – религиозные традиции, утверждавшие, что Вселенная построена богом по математическому плану.

В XV-XVI вв. математика развивалась, главным образом, в Италии Франции, Германии, а с конца XVI в. в Голландии, пережившей буржуазную революцию. В эпоху Возрождения математика выходит за пределы знаний, унаследованных от греков и народов Востока, в это время идет проникновение индийской математики – вводится десятичная позиционная система счисления, вводятся десятичные дроби, отрицательные, иррациональные и мнимые числа, создается развитая алгебраическая символика. Тогда же были решены в радикалах алгебраические уравнения 3-ей и 4-ой степени, разработаны плоская и сферическая геометрия, усовершенствованы вычислительные методы.

Образование – это организованный процесс постоянной передачи предшествующими поколениями последующим социально значимого опыта.

Образование на современном этапе характеризуется усилением внимания к ученику, к его саморазвитию и самопознанию, общечеловеческим знаниям, обращенностью ученика к окружающему миру и себе, к воспитанию умения искать и находить свое место в жизни.

В определении целей образования учитываются потребности общества (социальный аспект) и потребности личности (личностный аспект).

Цели образования один из определяющих компонентов педагогической системы, они зависят от современных условий, социального заказа общества на образование граждан.

Цели современного образования – предельно полно достижимое развитие тех способностей личности, которые нужны и ей, и обществу, включение ее в социально ценную активность; обеспечение возможностей эффективного самообразования за пределами образовательных систем.

Математическое образование – процесс и результат овладения учащимися системой математических знаний, познавательных умений и навыков, формирование на этой основе мировоззрения, нравственных и других качеств личности, развития ее творческих сил и способностей.

Основной целью математического образования является воспитание у школьников умения рассматривать явления реального мира с математической точки зрения, видеть практическую направленность математики и ее приложений.

Цели обучения математике

Основные цели обучения математике в школе:

1. Овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования.

2. Интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценного функционирования в обществе, формирование представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности.

3. Формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для общественного прогресса.

Цели обучения математике (в узком смысле):

Общеобразовательные: овладение учащимися системой математических знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математики, ее языке и символике, математическом моделировании, о математических приемах и методах познания, применяемых в математике.

Воспитательные: воспитание активности, самостоятельности, ответственности; устойчивого интереса к предмету; нравственности, культуры общения; эстетической культуры, графической культуры школьников; воспитание трудолюбия, ответственности за принятие решений; стремления к самореализации.

Развивающие: формирование мировоззрения учащихся, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления; развитие пространственного воображения.

Практические: формирование умений строить математические модели простейших реальных явлений, исследовать явления по заданным моделям, конструировать приложения моделей; ознакомление с ролью математики в научно-техническом прогрессе, современном производстве.

Функции обучения математике.

1. Образовательная функция предполагает овладение школьниками системой математических знаний, дающей представление о предмете математики, ее методах и приложениях. Данная функция во многом обусловливает развитие мировоззрения школьников, которое представляет сплав знаний, умений и убеждений.

2. Воспитательная функция характеризуется формированием интереса к изучению математики, развитием устойчивой мотивации к учебной деятельности.

3. Развивающая функция заключается в формировании познавательных психических процессов и свойств личности, таких как внимание, память, мышление, познавательная активность и самостоятельность, способности, в формировании логических приемов мыслительной деятельности (анализа, синтеза, обобщения, абстрагирования и т.д.)

4. Информационная функция – в процессе обучения ученик знакомится с историей возникновения математических идей, их развитием, биографией ученых, разными точками зрения на те или иные концепции.

5. Эвристическая функция предполагает создание учителем в процессе обучения условий, которые обеспечивают развитие способностей ребенка.

6. Прогностическая функция ориентирована на формирование у школьников прогностических умений: обнаруживать нерешенные проблемы, выдвигать гипотезы, видеть альтернативное решение проблем и т.д.

7. Эстетическая функция – приобщение учащихся к красоте, воспитание у них эстетических вкусов. Учебный материал должен быть изложен логически последовательно, системно и привлекательно.

8. Практическая функция – ориентация обучения на решение задач, на формирование умения математически исследовать явления реального мира, на практическую направленность учебного материала.

9. Контрольно-оценочная функция – осуществление контроля, коррекции, оценки знаний и умений учащихся (тестирование).

10. Корректирующая функция – корректировка информации, получаемой учащимися, т.к. значение и сущность информации, полученной из различных источников, может быть различной.

11. Интегрирующая функция заключается в формировании системности знаний, в понимании взаимосвязи между изучаемыми понятиями, теоремами, способами деятельности, методами.

п. 4. Содержание математического образования

Содержание школьного математического образования отражается в нормативных документах, учебниках, учебных планах, учебных программах, методических пособиях. Базисный учебный план является обязательным для всех учебных заведений, дающих среднее образование. Это основной документ для разработки учебных программ, учебно-методического планирования. Учебные программы по математике включают перечень тем изучаемого материала, рекомендации по количеству времени на каждую тему, перечень знаний, умений и навыков по предмету.

Варианты расположения математического материала в учебных программах:

1) линейное – материал располагается последовательно;

2) концентрическое – некоторые разделы изучаются с повтором на новом уровне;

3) спиральное – материал располагается последовательно по циклам.

Составные части содержания образования: знания, умения и навыки.

Знания – это понимание, сохранение в памяти и умение воспроизводить и применять на практике основные научные факты и теоретические обобщения, знание выражается в понятиях, категориях, принципах, законах, закономерностях, фактах, идеях, символах, концепциях, теориях, гипотезах. Математические знания представляют собой математические понятия, законы, символику, математический язык и т.д.

Умения – это владение способами, приемами применения усваиваемых знаний на практике. Умения включают знания и навыки. Формирование знаний, умений и навыков зависит от способностей человека.

Навыки – это элементы умения, т.е. автоматизированные действия, доведенные до высокой степени совершенства. Под умениями понимают «творческие действия, в структуру которых включаются знания и навыки». Д. Пойя: «Умение – это мастерство, это способность использовать имеющиеся у вас сведения для достижения своих целей; умение должно еще охарактеризовать как совокупность определенных навыков». (Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание).

Содержание современного образования строится с учетом:

1) соответствия логике математики как науки,

2) соответствия принципам обучения (научность, последовательность, системность и т.д.)

3) психологических возможностей и возрастных особенностей школьников разных ступеней обучения (младший школьник 1-4 классы, средний школьник – 5-9 классы, старший школьник – 10-11 классы).

4) адекватности потребности личности в образовании (дифференцированное обучение, коррекционное обучение и т.д.)

5) формирования профессиональной направленности школьников.

УТВЕРЖДЕНО
Приказ
Министерства образования
от 29.05.2009 № 675

КОНЦЕПЦИЯ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА»

1. Введение

Математика занимает одно из центральных мест в системе образования как важное средство интеллектуального развития, формирования общей культуры, решения общеобразовательных и воспитательных задач. Математические знания необходимы для изучения явлений природы, без них невозможно достижение успехов в развитии производства и науки. Знания о количественных отношениях и пространственные представления необходимы практически во всех сферах деятельности человека.

В условиях нашей страны из-за ограниченности природных ресурсов приоритетным становится расширение наукоёмких производств, основой которых является, с одной стороны, развитие специальных разделов математики, с другой — достаточно высокая общематематическая культура работников, занятых на этих производствах.

Роль математики в структуре содержания общего среднего образования заключается в том, что она является опорным учебным предметом, обеспечивающим качественное изучение дисциплин естественно-научного цикла, позволяет развивать логическое и образное мышление учащихся, что является одной из важных задач гуманизации образования. Математика — один из элементов общечеловеческой культуры. Её идеи и методы оказывают большое влияние на методологию научного познания действительности. Завершённость, изящество математических формулировок, убедительная сила доказательств способствуют эстетическому воспитанию учащихся.

Уровень современного математического образования нашей страны в целом приемлем. Вместе с тем в нём всё ещё превалирует теоретичность, формализм, недостаточные практическая направленность и внимание к развивающей функции, запросам и возможностям учащихся.

Концепция математического образования направлена на:

• развитие общеинтеллектуальных и общеучебных умений учащихся;

• определение системы математических знаний, умений и навыков, необходимых в повседневной жизни, для продолжения образования, а также в будущей профессиональной деятельности;

• обеспечение внутрипредметной и межпредметной интеграции, использование методов математики в разных областях научной и практической деятельности;

• обеспечение педагогическим работникам общеобразовательных учреждений права на выбор методов и форм обучения и воспитания (образовательной технологии), учебников и учебных пособий, средств обучения, обеспечивающих необходимое качество образовательного процесса;

• обеспечение систематического объективного контроля результатов учебной деятельности учащихся в целях определения их соответствия требованиям образовательного стандарта и учебной программы.

2. Методологические посылки и принципы построения содержания учебного предмета «Математика»

2.1. При определении содержания учебного предмета «Математика» необходимо руководствоваться требованием разумной достаточности: понятия, факты, методы должны быть базовыми в математике как науке и востребованными в дальнейшем при продолжении образования и практической деятельности. В содержании учебного предмета для общеобразовательных учреждений базовыми являются понятия числа, фигуры, величины, переменной, соответствия, операции.

2.2. При отборе содержания математического образования предпочтение отдаётся его развивающей функции, а не информационной. Для обязательного усвоения выделяется минимальный объём информации, акцент делается на овладение обобщёнными универсальными способами деятельности, а также умениями применять их для анализа и исследования отдельных фактов.

2.3. Содержание математического образования должно быть личностно ориентированным, приобретаемые знания должны помогать учащимся успешно решать проблемы, возникающие в повседневной жизни, быть применимыми в различных ситуациях.

2.3. Дифференциация образования реализуется посредством проведения факультативных занятий. Содержание учебной программы составляет основу построения содержания факультативных занятий.

2.5. Содержание математического образования должно сформировать у учащихся понимание того, что математика является важнейшим элементом общечеловеческой культуры, значимым для устойчивого развития современного общества. Организация обучения математике должна способствовать освоению учащимся достижений математической культуры, которое позволит ему ориентироваться в информационных потоках, находить и использовать нужные знания.

2.6. При отборе и структурировании содержания математического образования учитываются следующие общие принципы: единство содержательной и процессуальной сторон обучения, структурного единства содержания обучения на разных этапах, научности, практической направленности, доступности, оптимизации, дифференциации и интеграции, гуманизации и преемственности обучения, наглядности, сознательности и активности учащегося, прочности знаний.

2.7. На каждом этапе изучения математики должна быть обеспечена относительная завершённость содержания математического образования, а также его преемственность на каждой из трёх ступеней общего среднего образования.

2.8. Гуманитаризация образования отражается в содержании учебного предмета посредством эколого-социальных, исторических, культурологических, экономических материалов, национальных традиций.

3. Цели математики как учебного предмета

3.1. Формирование у учащегося системы математических знаний, умений и навыков, необходимых в повседневной жизни, для продолжения образования, будущей профессиональной деятельности.

3.2. Развитие общих интеллектуальных умений (сравнение, обобщение, классификация, анализ, синтез, систематизация, абстрагирование, конкретизация), познавательных и общих учебных умений (поставить вопрос, сформулировать проблему, высказать и проверить гипотезу, сделать вывод, выделить главное, точно и лаконично выразить свои мысли).

3.3. Развитие математических способностей, включающих такие компоненты, как гибкость мышления, логика рассуждения, степень абстрагирования, пространственное воображение, математическая интуиция, навыки обосновательной и доказательной деятельности и умение использовать их для решения практических задач.

3.4. Развитие у учащихся интереса к математике, формирование представления о её месте в системе наук, её методологическом значении, роли в формировании общей культуры, осознания того, что средствами математики описываются и исследуются явления, процессы действительности.

3.5. Формирование в процессе обучения математике таких качеств личности, как самостоятельность, критичность, настойчивость, принципиальность, любознательность, целеустремлённость, умение преодолевать трудности, делать ответственный выбор.

4. Дидактические основы построения содержания математического образования

4.1. При разработке содержания математического образования учитываются общие принципы единства содержательной, структурной и организационной сторон обучения на разных его этапах, а также дидактические принципы.

4.2. Содержание математического образования должно учитывать интересы и запросы учащихся.

4.3. Внешняя дифференциация при обучении учащихся математике реализуется посредством проведения факультативных занятий, увеличения количества учебных часов на изучение математики в VII–IX классах гимназий (гимназий-колледжей), создания классов физико-математического направления на III ступени общего среднего образования в гимназиях (гимназиях-колледжах) и лицеях. Внутренняя дифференциация реализуется посредством использования соответствующих технологий, вариативности уровня изложения программного материала, сложности математических задач.

4.4. При определении содержания математического образования необходимо руководствоваться принципами разумной ограниченности системы понятий. В содержание обучения включаются те понятия, которые необходимы для формирования научного мировоззрения, профессиональной деятельности, дальнейшего обучения математике и другим учебным предметам.

4.5. При построении содержания учебного предмета целесообразно сохранить национальные традиции обучения, среди которых особенно заслуживают внимания:

- систематический характер изложения программного материала;
- рассмотрение задач как главного средства обучения;
- формирование навыков обоснований и вычислений.

4.6. При построении содержания математического образования должна быть усилена его практическая направленность посредством:

- увеличения роли и значения моделирования;
- использования графиков, диаграмм, таблиц для наглядного представления количественной и статистической информации;
- комплексного сочетания арифметического, алгебраического и геометрического материала как средства математического развития учащихся.

4.7. В преподавании математики целесообразно отдать преимущество логическому упорядочению завершённых частей учебной программы. Учебная программа строится на основе сочетания интуиции и логики как равнозначных и взаимно дополняющих средств познавательной деятельности.

5. **Общая характеристика и особенности построения содержания учебного предмета «Математика»**

5.1. Содержание математического образования группируется вокруг следующих основных содержательных линий:

- чисел и вычислений;
- выражений и их преобразований;
- уравнений и неравенств;
- координат и функций;
- геометрических фигур и их свойств;
- геометрических величин;
- геометрических построений.

Это содержание отражает длительный опыт обучения математике в нашей стране и в основном соответствует мировой практике.

5.2. Целесообразно выделить следующие этапы изучения учебного предмета «Математика»: первый этап – I–IV классы; второй – V–VI классы; третий – VII–IX классы и четвёртый этап – X–XI классы. Содержание математического образования на каждом этапе изучения учебного предмета строится в тесной взаимосвязи содержания арифметического, алгебраического и геометрического компонентов. В I—IV и V–VI классах содержание алгебраического и геометрического компонентов предъявляется на пропедевтическом уровне. В VII–IX и X–XI классах могут выделяться алгебраический и геометрический компоненты.

5.3. Содержание и основные цели обучения математике в I–IV классах направлены преимущественно на усвоение учащимися понятия натурального числа, отношений равенства и неравенства, овладение арифметическими действиями над натуральными числами. На этом этапе осуществляется знакомство с основными величинами (длина, площадь, масса, время) и единицами их измерения, с простейшими геометрическими фигурами, решаются несложные арифметические задачи. Изучение геометрического материала рассматривается как геометрическая пропедевтика систематического курса геометрии.

5.4. В V–VI классах продолжается развитие содержательных линий I–IV классов в целях усвоения десятичной системы счисления, развития навыков действий над числами, знакомства с геометрическими фигурами и их свойствами. На этом этапе значительное внимание уделяется обыкновенным и десятичным дробям и действиям над ними, процентам и пропорциям. С целью повышения развивающего потенциала учебного предмета в V–VI классах усиливается значение текстовых задач, которые систематически решаются арифметическими методами. На пропедевтическом уровне продолжается изучение геометрического материала, который позволяет развивать конструктивные навыки учащихся и готовит их к доказательным рассуждениям.

5.5. Содержание алгебраического компонента в VII–IX классах ориентировано на дальнейшее развитие понятия числа, преобразование алгебраических выражений, решение уравнений, неравенств и их систем, изучение основных элементарных функций и их свойств. Усиление практической направленности предмета осуществляется за счёт решения текстовых задач, заданий с межпредметным содержанием.

5.6. Содержание геометрического компонента в VII–IX классах характеризуется рациональным сочетанием логической строгости и геометрической наглядности. Здесь осуществляется систематическое изучение свойств геометрических фигур на плоскости, развиваются пространственные представления учащихся. Увеличивается теоретическая значимость учебного материала, усиливается роль дедукции. Значительное внимание придаётся формированию умений проводить доказательные рассуждения.

5.7. С учётом сложившихся традиций содержание алгебраического компонента в X–XI классах предусматривает изучение тригонометрических, степенных, показательных, логарифмических выражений, уравнений, неравенств, функций; знакомство с понятием производной. Содержание геометрического компонента в этих классах также традиционно: взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, основные геометрические тела. Логическая строгость изложения программного материала должна сочетаться с высокой степенью наглядности и доступности.

6. Состав и структура учебно-методического комплекса по учебному предмету «Математика»

6.1. В учебно-методический комплекс в качестве основных средств обучения входят учебники (учебные пособия), сборники задач, дидактические материалы, книги для учителя. Могут также использоваться таблицы, рабочие тетради, электронные учебные пособия, компьютерные программные продукты и др. Органичное сочетание названных средств должно содействовать повышению эффективности обучения учащихся математике.

6.2. При разработке теоретического содержания учебников (учебных пособий) по математике необходимо обеспечить доступность излагаемого учебного материала в сочетании с его научностью. Научные понятия, рассматриваемые на каждом этапе изучения математики в общеобразовательных учреждениях, должны быть адаптированы к возрастным и познавательным возможностям учащихся. В учебниках (учебных пособиях) должны сочетаться исторический и логический подходы изложения учебного материала.

6.3. Система дидактических материалов должна включать разноуровневые самостоятельные и контрольные работы, тестовые задания и системы тестов с целью повышения эффективности индивидуальной работы, объективности и оперативности текущего и тематического контроля результатов учебной деятельности учащихся.

6.4. На уроках, факультативных занятиях, а также во внеклассной работе наряду с традиционными средствами обучения целесообразно использовать электронные средства, к которым относятся мультимедийные устройства, интерактивные компьютерные модели, электронные энциклопедии и справочники, электронные тренажёры и другие средства обучения. Они применяются с целью повышения степени наглядности, конкретизации изучаемых понятий, углубления интереса и создания положительного эмоционального отношения к учебной информации.

6.5. Учебно-методическое обеспечение математики должно быть пригодным для самообразования учащегося и использования разных методических систем и образовательных технологий.

7. Возможности изучения математики на повышенном уровне в системе основного и дополнительного образования

7.1. Учащиеся могут изучать математику в системе основного и дополнительного образования. Основное образование учащиеся общеобразовательных учреждений получают на уроках, а дополнительное – на факультативных занятиях, во внеклассной и внешкольной деятельности, а также в учреждениях внешкольного воспитания и обучения.

7.2. Основное образование по математике обеспечивается согласованностью образовательного стандарта, типовых учебных планов для каждого типа общеобразовательных учреждений и учебных программ. Дополнительное образование может осуществляться на всех ступенях общего среднего образования посредством постоянных и непостоянных форм внеурочной и внешкольной работы по математике и других видов деятельности.

7.3. Повышенный уровень изучения математики обеспечивается в гимназиях (гимназиях-колледжах) и лицеях на уроках, а в других типах общеобразовательных учреждений – на факультативных занятиях. Увеличение количества учебных часов на изучение математики в VII—IX классах гимназий (гимназий-колледжей), X—XI классах физико-математического направления гимназий (гимназий-колледжей) и лицеев позволит учащимся не только овладеть обязательным минимумом умений, но и расширить его посредством решения задач.

7.4. Главной целью факультативных занятий по математике является углубление в содержание, определённое основной учебной программой, развитие интереса к предмету, привитие навыка самостоятельной работы, воспитание и развитие их инициативы и творчества. Проведение факультативных занятий по математике осуществляется по утверждённым в установленном порядке учебным программам.

7.5. Постоянные формы внеурочной работы в рамках дополнительного образования по математике проводятся с определённой периодичностью в течение всего учебного года. К ним относятся математический кружок, интеллектуальный клуб, заочная математическая школа, групповая и индивидуальная работа с одарёнными учащимися и другие формы. Математический кружок в отличие от факультативных занятий может не иметь регламентирующей программы. Программа работы кружка утверждается непосредственно в самом учреждении образования и может быть ориентирована в условиях общеобразовательных учреждений, расположенных в сельских населённых пунктах, на учащихся из разных классов. Интеллектуальный клуб, заочная математическая школа могут объединять учащихся общеобразовательных учреждений определённого региона. При этом занятия могут проводиться как при непосредственном участии учащихся, так и дистанционно.

7.6. Непостоянные формы работы по математике могут проводиться как в самих общеобразовательных учреждениях, так и в учреждениях внешкольного воспитания и обучения, высших учебных заведениях и других организациях. Такие формы ориентированы на участие в предметных олимпиадах и конференциях, подготовку и проведение математических вечеров и конкурсов, выполнение ученических научных работ и др.

УТВЕРЖДЕНО
Постановление
Министерства образования
Республики Беларусь
26.12.2018 № 125

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ СРЕДНЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Предисловие

1. РАЗРАБОТАН Министерством образования Республики Беларусь совместно с Научно-методическим учреждением «Национальный институт образования» Министерства образования Республики Беларусь.

2. УТВЕРЖДЕН постановлением Министерства образования Республики Беларусь от 26 декабря 2018 г. № 125 «Об утверждении образовательных стандартов общего среднего образования».

3. ВВЕДЕН В ДЕЙСТВИЕ ВЗАМЕН постановления Министерства образования Республики Беларусь от 10 января 2007 г. № 2 «Об утверждении образовательного стандарта общего среднего образования», постановления Министерства образования Республики Беларусь от 3 октября 2008 г. № 96 «О внесении изменений и дополнений в постановление Министерства образования Республики Беларусь от 10 января 2007 г. № 2», постановления Министерства образования Республики Беларусь от 29 мая 2009 г. № 32 «Об утверждении образовательных стандартов учебных предметов в общеобразовательных учреждениях».

СОДЕРЖАНИЕ

4. Цели образования на III ступени общего среднего образования и ожидаемые результаты среднего образования

4.1. Цели образования на III ступени общего среднего образования

4.2. Ожидаемые результаты среднего образования

5. Требования к учебно-программной документации образовательной программы среднего образования, максимальной учебной нагрузке учащихся

6. Требования к организации образовательного процесса при реализации образовательной программы среднего образования

6.1. Общие требования к образовательному процессу при реализации образовательной программы среднего образования

6.2. Особенности организации образовательного процесса при реализации образовательной программы среднего образования

6.3. Основные требования к организации образовательного процесса при изучении учебных предметов

7. Требования к результатам освоения содержания образовательной программы среднего образования

1. Область применения

Образовательный стандарт среднего образования обязателен для применения во всех учреждениях образования, реализующих образовательную программу среднего образования.

2. Термины и определения

В настоящем образовательном стандарте среднего образования используются следующие основные термины и их определения.

Базовый уровень изучения учебного предмета – изучение содержания соответствующего учебного предмета, которое является обязательным при освоении учебной программы по этому учебному предмету.

Воспитание – целенаправленный процесс формирования духовно- нравственной и эмоционально-ценностной сферы личности обучающегося.

Занятия по физической реабилитации – занятия, направленные на поддержание, восстановление и (или) улучшение функционального состояния органов и систем организма учащегося санаторной школы-интерната.

Качество образования – соответствие образования требованиям образовательного стандарта, учебно-программной документации соответствующей образовательной программы.

Компетенции – приобретаемые в процессе обучения и воспитания способности осуществлять деятельность в соответствии с полученным образованием.

Консультации – занятия, направленные на преодоление трудностей в изучении учебных предметов (отдельных тем учебных программ по учебным предметам) учащимися, получающими среднее образование в заочной форме получения образования.

Музыкально-ритмические занятия – занятия, направленные на развитие двигательных навыков и умений учащихся санаторных школ-интернатов.

Максимальная допустимая учебная нагрузка в неделю на одного учащегося в каждом классе – учебная нагрузка, устанавливаемая в соответствии со специфическими санитарно-эпидемиологическими требованиями и гигиеническими нормативами и включающая обязательную учебную нагрузку и учебную нагрузку на факультативных занятиях по соответствующему классу.

Образование – обучение и воспитание в интересах личности, общества и государства, направленные на усвоение знаний, умений, навыков, формирование гармоничной, разносторонне развитой личности учащегося.

Образовательный стандарт среднего образования – технический нормативный правовой акт, определяющий содержание образовательной программы среднего образования посредством установления требований к образовательному процессу и результатам освоения ее содержания.

Образовательная программа среднего образования – совокупность документации, регламентирующей образовательный процесс, и условий, необходимых для получения в соответствии с ожидаемыми результатами среднего образования.

Образовательный процесс – обучение и воспитание, организованные учреждением образования в целях освоения учащимися содержания образовательных программ.

Обучение – целенаправленный процесс организации и стимулирования учебной деятельности учащихся по овладению ими знаниями, умениями и навыками, развитию их творческих способностей.

Обязательная учебная нагрузка в неделю на одного учащегося в каждом классе – общее количество учебных часов, установленных на изучение учебных предметов по соответствующему классу.

Повышенный уровень изучения учебного предмета – изучение содержания соответствующего учебного предмета, которое включает в себя базовый уровень изучения этого учебного предмета с углублением его содержания.

Поддерживающие занятия – занятия, направленные на преодоление трудностей в изучении учебных предметов (отдельных тем учебных программ по учебным предметам) учащимися, получающими среднее образование в очной форме получения образования.

Получение образования на дому – организация образовательного процесса, при которой освоение содержания образовательных программ среднего образования учащимся, который временно или постоянно не может посещать учреждение образования, осуществляется на дому.

Практика (трудовая, творческая, медицинская) – занятия, направленные на овладение определенными видами профессиональной деятельности.

Стимулирующие занятия – занятия, направленные на развитие творческих способностей одаренных и талантливых учащихся.

Типовой учебный план общего среднего образования – это технический нормативный правовой акт, который состоит из типовых учебных планов учреждений общего среднего образования каждого вида.

Учебно-полевые сборы – занятия, направленные на формирование умений и основ культуры воинской службы, необходимых для освоения обязанностей защитника Отечества.

3. Общие положения

3.1. Цели и назначение образовательного стандарта среднего образования

Образовательный стандарт среднего образования (далее – Стандарт) определяет содержание образовательной программы среднего образования с учетом достижений современной науки, приоритетов государственной политики в сфере образования и направлен на обеспечение:

доступности среднего образования;

духовно-нравственного развития, воспитания учащихся и сохранения их здоровья;

формирования гражданской идентичности учащихся;

достижения учащимися личностных, метапредметных и предметных образовательных результатов;

развития творческих способностей учащихся, вовлечения их в различные виды социально значимой деятельности;

преемственности и непрерывности образовательных программ общего среднего образования;

преемственности и непрерывности уровней общего среднего образования, профессионально-технического, среднего специального и высшего образования;

подготовки к продолжению образования и началу трудовой деятельности;

равенства белорусского и русского языков;

сохранения и развития национальной культуры; культурного и языкового наследия национальных меньшинств, проживающих на территории Республики Беларусь;

развития государственно-общественного характера управления образованием;

формирования основ оценки результатов учебной деятельности учащихся при освоении содержания образовательной программы среднего образования, деятельности педагогических работников, самоконтроля за обеспечением качества образования, осуществляемого учреждением образования;

государственных гарантий по соответствующему финансированию образовательной программы среднего образования, реализуемой через образовательный процесс на учебных занятиях (занятиях) в соответствии с учебным планом и учебными программами.

Стандарт является основой:

для разработки учебно-программной документации образовательной программы среднего образования, учебно-методической документации, учебных изданий, контрольно-измерительных материалов;

организации образовательного процесса при реализации образовательной программы среднего образования;

осуществления контроля качества образования;

построения системы самоконтроля обеспечения качества образования в учреждении образования при реализации образовательной программы среднего образования;

аттестации педагогических работников учреждений образования, реализующих образовательную программу среднего образования;

аккредитации учреждений образования, реализующих образовательную программу среднего образования;

организации подготовки, переподготовки и повышения квалификации педагогических работников.

3.2. Методологическая основа Стандарта

Методологической основой Стандарта являются:

системно-деятельностный подход (совокупность взглядов и способов проектирования и организации образовательного процесса, в котором системообразующим элементом являются различные виды деятельности, учащийся как субъект обучения и воспитания занимает активную позицию, а деятельность является основой, средством и условием развития его личности; обучение и воспитание осуществляются через активизацию деятельности учащегося);

культурологический подход (совокупность взглядов и способов проектирования и организации образовательного процесса на основе ценностно ориентированного содержания образовательной программы среднего образования, приоритета культуры, развития общей интеллектуальной культуры и духовного начала личности, обеспечения ведущей роли социокультурного контекста развития учащегося, установки на диалог культур, изучения традиций и ценностей, самобытности национальной культуры в контексте мировой);

личностно ориентированный подход (совокупность взглядов и способов проектирования и организации образовательного процесса, при которых личность понимается как главное действующее лицо образовательного процесса; создание условий для развития личности в ее целостности, уникальности и автономности; обеспечение дифференциации и индивидуализации обучения, возможности выбора индивидуальной образовательной траектории в соответствии со способностями, потребностями, интересами, запросами учащихся);

компетентностный подход (совокупность взглядов и способов проектирования и организации образовательного процесса, которые характеризуются нацеленностью на формирование компетенций, направленных на подготовку к продолжению образования и началу трудовой деятельности, и универсальных учебных действий, усилением практической ориентированности учебной деятельности учащихся для подготовки к жизни и получению профессии, использованием накопленного и созданием условий для формирования у учащихся социального опыта, в том числе в процессе самостоятельной деятельности).

3.3. Структура Стандарта

Стандарт определяет область его применения, содержит используемые термины и их определения, общие положения, а также включает:

цели образования на III ступени общего среднего образования и ожидаемые результаты среднего образования;

требования:

к учебно-программной документации образовательной программы среднего образования, максимальной учебной нагрузке учащихся;

организации образовательного процесса и результатам освоения содержания образовательной программы среднего образования.

4. Цели образования на III ступени общего среднего образования и ожидаемые результаты среднего образования

4.1. Цели образования на III ступени общего среднего образования

Целями образования на III ступени общего среднего образования являются:

формирование личности учащегося как носителя ценностей национальной и мировой культуры, гражданина и патриота, его социальных компетенций и нравственной зрелости, готовности к жизни в поликультурном мире и непрерывному образованию, способности к социальному самоопределению и самостоятельному жизненному выбору, ценностного отношения к здоровому образу жизни и окружающей среде;

развитие способностей и интересов учащихся, формирование у них навыков умственного и физического труда, учебно-познавательных компетенций, компетенций социального взаимодействия, коммуникативной и информационно-коммуникационной компетенций, ценностного отношения к творчеству, науке и инновациям на основе использования личного и социального, накопления нового опыта учебно-познавательной деятельности;

системное овладение учащимися основами наук, освоение при изучении учебных предметов разнообразных способов деятельности, применимых как в рамках образовательного процесса, так и в реальных жизненных ситуациях, совершенствование владения предметными компетенциями.

4.2. Ожидаемые результаты среднего образования

Ожидаемые результаты среднего образования воплощает учащийся, осознанно принимающий общечеловеческие и национальные духовно-нравственные ценности;

любящий Беларусь, уважающий народ, живущий в ней, его культуру, традиции, историю; владеющий государственными языками Республики Беларусь; сохраняющий семейные ценности;

осознающий себя гражданином белорусского государства;

соблюдающий принятые в обществе правовые и морально-этические нормы, обладающий чувством долга и ответственности перед членами семьи, обществом и государством;

проявляющий толерантность к людям;

способный и готовый к социальному самоопределению;

понимающий ценность образования и науки;

осознающий ответственность перед обществом за экологическую безопасность окружающего мира;

осознанно руководствующийся правилами здорового образа жизни;

владеющий навыками самостоятельной учебной деятельности, мотивированный на образование в течение жизни;

способный к сотрудничеству и коммуникации в различных ситуациях и условиях;

умеющий получать, анализировать и критически воспринимать информацию, в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий, и применять ее в учебно-познавательной деятельности и социальной жизни;

умеющий управлять своей учебно-познавательной деятельностью и способный применять полученные знания на практике;

способный к личностной самореализации, творческой и инновационной деятельности с целью создания личностно и социально значимого продукта, умеющий находить новые решения, проявляющий гибкость в условиях динамичных социальных изменений.

5. Требования к учебно-программной документации образовательной программы среднего образования, максимальной учебной нагрузке учащихся

5.1. Учебно-программная документация образовательной программы среднего образования включает в себя типовой учебный план общего среднего образования, учебные программы по учебным предметам, учебные программы факультативных занятий.

5.2. Типовой учебный план общего среднего образования устанавливает перечень обязательных для изучения учебных предметов по классам и количество учебных часов на их изучение в неделю, количество учебных часов на проведение факультативных, стимулирующих, поддерживающих занятий, консультаций (для учащихся вечерней школы, осваивающих содержание образовательной программы среднего образования в заочной форме получения образования), занятий по физической реабилитации, музыкально-ритмических занятий (для учащихся санаторной школы-интерната), учебно-полевых сборов (медицинской практики).

6. Требования к организации образовательного процесса при реализации образовательной программы среднего образования

6.1. Общие требования к образовательному процессу при реализации образовательной программы среднего образования

К общим требованиям к образовательному процессу при реализации образовательной программы среднего образования относятся:

обеспечение качества образования;

обеспечение реализации образовательной программы среднего образования с учетом возрастных и индивидуальных особенностей учащихся, состояния их здоровья;

обеспечение равенства белорусского и русского языков;

соблюдение принципов системности и единства педагогических требований;

соответствие форм и методов обучения и воспитания целям среднего образования;

соблюдение установленных законодательством в сфере общего среднего образования продолжительности учебного года и каникул, сроков и форм аттестации, норм оценки результатов учебной деятельности по учебным предметам; максимальной допустимой учебной нагрузки в неделю на одного учащегося;

охрана здоровья учащихся, соблюдение специфических санитарно-эпидемиологических требований и гигиенических нормативов;

создание условий для активизации самостоятельной учебной деятельности учащихся, удовлетворения их индивидуальных образовательных запросов, развития творческих способностей, включение учащихся в различные виды социально значимой деятельности;

создание безопасных условий организации образовательного процесса.

6.2. Особенности организации образовательного процесса при реализации образовательной программы среднего образования

В структуре общего среднего образования III ступень общего среднего образования является завершающей и направлена на профессиональное самоопределение. Учебная деятельность для учащихся X и XI классов с учетом их возрастных особенностей (стремление углубить знания в определенной предметной области, к самостоятельной исследовательской деятельности, потребность проявить свои способности в социально значимой деятельности) является средством реализации жизненных планов и направлена на структурную организацию, пополнение и систематизацию индивидуального опыта.

Образовательный процесс при реализации образовательной программы среднего образования направлен на формирование гуманистических мировоззренческих позиций, гражданской ответственности и правового самосознания, духовности и норм культуры, самостоятельности, инициативности, способности к успешной социализации в обществе; развитие индивидуальности и творческих способностей с учетом профессиональных намерений, интересов и образовательных запросов учащегося.

Дальнейшее совершенствование и расширение общеучебных умений, навыков и способов деятельности при освоении содержания образовательной программы среднего образования содействует успешному развитию и социализации учащегося (готовности к самостоятельному жизненному выбору, началу трудовой деятельности и продолжению образования, непрерывному образованию, производительному труду, созидательному и ответственному участию в жизни семьи, общества и государства).

На III ступени общего среднего образования может осуществляться профильное обучение как целенаправленный процесс организации и стимулирования учебной деятельности учащихся на основе индивидуализации при изучении учебных предметов, в том числе учебных предметов, изучаемых на повышенном уровне, учебных предметов с профессиональной ориентацией содержания (профильных учебных предметов), и проведении факультативных занятий, содержание которых связано с определенным видом профессиональной деятельности.

Изучение учебных предметов на III ступени общего среднего образования осуществляется на двух уровнях: базовом и повышенном.

Базовый уровень изучения учебного предмета предусматривает минимально необходимый объем содержания учебного материала, достаточный для формирования у учащихся социальной и функциональной грамотности.

Изучение учебного предмета на повышенном уровне осуществляется на основе теоретического обобщения и систематизации ранее усвоенного социального опыта в контексте изучения фундаментальных вопросов бытия, формирования современной научной картины мира, нравственных и мировоззренческих основ личности учащегося.

6.3. Основные требования к организации образовательного процесса при изучении учебных предметов

6.3.1. Предметом изучения учебного предмета «Математика» являются трансцендентные выражения, пространственные фигуры и их свойства.

Содержание алгебраического компонента предусматривает изучение тригонометрических выражений, числовой переменной, тригонометрических функций, знакомство с понятиями арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, усвоение методов решения тригонометрических уравнений. Вводятся понятия корня n-й степени, степени с рациональным и действительным показателями, логарифма.

Изучаются преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы, которые используются при решении соответствующих уравнений и неравенств; степенная, показательная и логарифмическая функции, их графики и свойства. Рассматривается простейшее применение производной.

Содержание геометрического компонента предусматривает изучение прямых и плоскостей в пространстве, многогранников, тел вращения и их свойств, усвоение способов нахождения площадей поверхностей и объемов тел.

При изучении учебного предмета «Математика» на повышенном уровне рекомендуется, наряду с развитием общих интеллектуальных умений (сравнения, обобщения, классификации, анализа, синтеза, систематизации, абстрагирования, формализации, конкретизации, структурирования, моделирования), познавательных и общих учебных умений (ставить вопрос, формулировать проблему, выдвигать и проверять гипотезу, делать вывод, выделять главное, планировать, определять цели;

строго, ясно, точно выражать свои мысли), развивать специальные математические умения, интуицию, пространственные представления, навыки деятельности по обоснованию и доказательству и умения использовать их для решения задач математики, задач иных учебных предметов, практических задач.

Практикумы по решению задач проводятся в группах, на которые делится класс.

Лекция 5. Особенности интеллектуального развития в подростковом возрасте. Модели обучения математике, построенные с учетом психологических закономерностей умственного развития учащихся

Подростковый и юношеский возраст в современной международной традиции рассматривается в единстве и часто обозначается одним термином - подростковый возраст. Так, этот возраст рассматривается в границах: от 10 до 17 лет, с выделением подросткового возраста и первого периода юности (Фельдштейн Д.И., 1999); от 12 до 18 лет (Квинн В., 2000); от 11 до 19 лет, с выделением раннего и старшего подросткового возраста (Райе Ф.,2000); от 12 до 19 лет (Эриксон Э., 1963; Крайг Г., 2000).

Основная особенность подросткового возраста – резкие, качественные изменения, затрагивающие все стороны развития. Активизация и сложное взаимодействие гормонов роста и половых гормонов вызывают интенсивное физическое и физиологическое развитие.

Часто интеллектуальное развитие школьника существенно опережает развитие личностных особенностей: по интеллекту он уже подросток, а по особенностям личности – ребенок. Одни стороны психики развиваются быстрее, другие медленнее.

Интенсивный рост скелета, опережает развитие мускулатуры. Все это приводит к некоторой непропорциональности тела, подростковой угловатости. Дети часто ощущают себя в это время неуклюжими, неловкими. Для подростков характерны повышенная утомляемость, перепады настроения, неуравновешенность. Эмоциональную нестабильность усиливает сексуальное возбуждение, сопровождающее процесс полового созревания.

Социальная ситуация развития - эмансипация от взрослых и группирование, представляет собой переход от зависимого детства к самостоятельной и ответственной взрослости. Подросток занимает промежуточное положение между детством и взрослостью. Ведущей деятельностью подростка является общение со сверстниками. Общение - специфический вид эмоционального контакта. Дает чувство солидарности, эмоционального благополучия, самоуважения. Главная тенденция – переориентация общения с родителей и учителей на сверстников.

В интеллектуальной сфере происходят качественные изменения: продолжает развиваться теоретическое и рефлексивное мышление. В этом возрасте появляется мужской взгляд на мир и женский. Активно начинают развиваться творческие способности. Изменения в интеллектуальной сфере приводят к расширению способности самостоятельно справляться со школьной программой. Появляется отношение подростка к себе как к взрослому. Он претендует на равноправие в отношениях со старшими и идет на конфликты, отстаивая свою "взрослую" позицию. Чувство взрослости проявляется и в стремлении к самостоятельности, желании оградить какие-то стороны своей жизни от вмешательства родителей.

Основные линии развития подростков связаны с прохождением личностных кризисов: кризиса идентичности и кризиса, связанного с отделением от семьи и приобретением самостоятельности.

Внешне это проявляется в активном интересе к себе: подростки постоянно что-то доказывают друг другу и самому себе. Как следствие, в этом возрасте наблюдается резкое понижение ценности общения в семейном кругу: самыми большими авторитетами становятся друзья, а не родители. Требования, идущие со стороны родителей, в этот период сохраняют свое влияние на подростка лишь при условии, что они значимы и за пределами семьи, в противном случае они вызывают протест.

Познание себя через сходство с другими происходит у подростков при общении со сверстниками. Подростки имеют свои собственные нормы, установки, специфические формы поведения, которые образуют особую подростковую субкультуру. Для них очень важно чувство принадлежности, возможность занять свое место в референтной группе.

Таким образом, можно сказать, что в подростковом возрасте резко падает авторитет взрослого и возрастает значимость мнения сверстников. В подростковом возрасте у молодых людей активно формируется самосознание, вырабатывается собственная независимая система эталонов самооценивания и самоотношения, все более развиваются способности проникновения в свой собственный мир.

В этом возрасте подросток начинает осознавать свою особенность и неповторимость, в его сознании происходит постепенная переориентация с внешних оценок (преимущественно родительских) на внутренние. Наряду с этим поведение родителей и их отношение к подростку в значительной мере определяют, насколько легко подросток овладевает различными навыками, приобретает самостоятельность, уверенность в своих силах, положительную самооценку. В свою очередь, грубость и непонимание родителей, их пренебрежение к своим родительским обязанностям могут привести к множеству трудностей в дальнейшей жизни подростка.

Таким образом, постепенно у подростка формируется Я-концепция, которая способствует дальнейшему, осознанному или неосознанному, построению поведения молодого человека.

Р.Бернс пишет: «Если родители, выступающие для ребёнка как социальное зеркало, проявляют в обращении с ним любовь, уважение и доверие, ребёнок привыкает сам относиться к себе как к человеку достойному этих чувств» [1].

И.Ю.Кулагина, В.Н.Колюцкий подчёркивают, что у детей с завышенной или заниженной самооценкой изменить её уровень крайне сложно [3].

Старшим школьникам присущи своеобразные черты. Экспериментально доказано, что восприятие физического облика другого человека в сознании подростка, затем переносится и на восприятие подростком самого себя.

Так, именно в этот возрастной период, когда происходят важнейшие преобразования в организме, когда внешний облик подростка и его физические черты начинают сильно волновать его, тогда соответствие физического развития ребенка стандартам, принятым в группе его сверстников, становится определяющим фактором в его социальном признании, положении в группе. Осознание особенностей своей внешности также влияет на формирование у подростка уровня самооценки.

По данным В. Н. Куницыной, в образе воспринимаемого человека любого возраста главными для подростка являются физические особенности, элементы облика, затем одежда и прическа и выразительное поведение.

С возрастом увеличиваются объем и адекватность оцениваемых признаков; расширяется круг используемых категорий и понятий; снижается категоричность суждений и появляется большая гибкость и разносторонность; в физическом облике другого человека, его одежде, прическе начинают отмечаться признаки, отражающие характер, своеобразие, индивидуальность, неповторимость.

Восприятие подростком других людей может быть обусловлено как объективными, так и субъективными факторами: характером эмоционального отношения к воспринимаемому человеку, степенью развития познавательных способностей подростка, его умственным развитием, эмоционально-психическим состоянием и прошлым опытом.

Установка воспринимать других людей определенным образом может быть обусловлена также индивидуальными особенностями подростка, влиянием на него группового мнения и сложившихся в обществе стереотипов (Куницина В. Н., 1968).

В этот возрастной период другой человек начинает занимать в жизни подростка совершенно особое место. С этим связана специфика восприятия подростками физического облика других людей. И уже посредством восприятия и понимания другого подросток приходит к пониманию себя.

При этом сохраняется та же последовательность, что и в познании качеств другого, т. е. вначале выделяются чисто внешние, физические характеристики, затем качества, связанные с выполнением каких-либо видов деятельности, и наконец личностные качества, более скрытые свойства внутреннего мира.

Л.С. Выготский подчеркивал, что за негативным симптомом подросткового кризиса «скрывается позитивное содержание, состоящее обычно в переходе к новой и высшей форме». Попытки взрослых избежать кризиса, как правило являются безрезультатными. Подросток пытается преодолеть запреты родителей, чтобы иметь возможность узнать пределы собственной самостоятельности, удовлетворить потребность в самоутверждении.

Интеллектуальное воспитание учащихся является одной из приоритетных задач современной общеобразовательной школы. Создание интеллектоемких технологий, их внедрение в процесс школьного обучения невозможно без учета закономерностей возрастных изменений структуры интеллекта, особенно в сензитивные периоды развития личности. Как отмечает Л.С Выготский: «Традиционная психология переходного возраста склонна видеть в эмоциональных изменениях центральное ядро и главное содержание всего кризиса и противопоставлять развитие эмоциональной жизни подростка интеллектуальному развитию школьника» [1]. Однако, именно перестройка интеллектуальной сферы является основой дальнейшего фундаментального преобразования всей системы личности подростка. Благодаря развитию интеллекта в подростковом возрасте происходит расширение сферы сознания ребенка, закладываются предпосылки адекватного понимания других людей, а также основы самопознания и сознательной интеллектуальной саморегуляции. Наиболее пристальное внимание к проблеме развития интеллекта подростков находим в работах Л.С. Выготского и Ж. Пиаже. Несмотря на существующие различия, оба автора отмечают, что начиная с 11 — 12 лет происходит практически полная перестройка интеллекта ребенка, в результате которой не только возникают новые его формы, но и в связи с их возникновением перестраиваются на этой основе прежние. Центральным новообразованием интеллектуальной сферы подростка Л.С. Выготский считает возникновение понятийного мышления. Благодаря понятиям ребенок становится способным упорядочивать воспринимаемый мир во всем его многообразии, происходит интеллектуальная перестройка элементарных познавательных функций, открываются новые возможности самопознания. «Интеллект возникает как эффект изменения межфункциональных связей, как результат особого рода «сплава» (синтеза, интеграции) познавательных процессов, перестроенных категориальным аппаратом понятийного мышления» [7]. Ж. Пиаже связывает качественную перестройку интеллекта в подростковом возрасте с появлением формально-логического мышления (стадия формальных операций). И Выготский, и Пиаже подчеркивают, что качественная перестройка интеллекта, характерная для подросткового возраста, значительно растянута во времени. «Ошибочно был о бы представлять себе, что все мышление подростка проникнуто понятиями» [2], равно как и то, что взрослый человек мыслит только по законам формальной логики. Абстрактное мышление не является количественно доминирующей формой, особенно в младшем подростковом возрасте. В связи с этим интересно проследить количественные и качественные изменения структуры интеллекта подростков. Исследования возрастной динамики интеллектуального развития подростков, проведенные рядом отечественных психологов, выявили ряд закономерностей. Так, В.А. Аверин, по результатам эксперимента Ж.А. Балакшиной, подчеркивает неравномерность процесса интеллектуального развития в подростковом возрасте и выделяет два периода: сензитивный (12—13 лет) и критический (13—14 лет). Для первого характерны наиболее высокие темпы развития, особенно показателей осведомленности, умения обобщать , а для второго — стабилизация большинства вербальных и невербальных показателей интеллекта при некотором снижении ряда показателей [1]. Аналогичные выводы можно сделать по результатам других исследований. Так, по данным И.А. Пинчук и Н.К. Шеляховской при переходе от 5 к 6 и 7 классу, значимо повышается уровень вербально-логической рефлексии подростков, а к 8 классу — несколько снижается [4]. Результаты комплексного лонгитюдного исследования, проведенного в 1981—1982 годах на учащихся 7—8 классов, обнаруживают большую осведомленность семиклассников и стабильность успешности выполнения интеллектуальных тестов учащимися при переходе от 7 к 8 классу. На этой же выборке Д.Б. Богоявленской была проанализирована динамика развития творческой направленности личности учащихся. Основной тенденцией является снижение интеллектуальной активности учащихся к 8 классу.

Подросток учится рассуждать на основе общих посылок путем построения гипотез и их проверки.

Новое в развитии мышления подростка заключается в его отношении к интеллектуальным задачам, которые требуют их предварительного мысленного решения. Умение оперировать гипотезами в решении интеллектуальных задач — важнейшее приобретение подростка в анализе действительности. Подросток на этом уровне развития мышления развивает способность не только абстрагироваться, но и сосредоточивать внимание на собственных интеллектуальных операциях (рефлексивное мышление).

Вместе с тем у подростка возникает интерес к разнообразным абстрактным философским, политическим, этическим проблемам. Подросток рассуждает об идеалах, будущем, формирует все более обобщенный взгляд на мир, т. е. происходит становление мировоззрения.

Подростки все чаще обращаются к творчеству...

Некоторые начинают писать стихи, заниматься другими видами творчества. Л. С. Выготский предположил, что фантазия подростка — это игра ребенка, переросшая в фантазию.

Если в реальной жизни у подростка не удовлетворяются его потребности, то он легко переходит в мир фантазий. В ряде случаев это приносит успокоение, снимает напряженность, устраняет внутриличностный конфликт.

Память подростка

В подростковом возрасте улучшается запоминание словесного и образного материала, повышается скорость запоминания; увеличивается объем материала, хранимого в памяти; усиливается продуктивность памяти.

Память наиболее тесно связана с мышлением на различных этапах психического развития. Память подростка все больше обогащается и замещается мышлением. Мышление активно участвует в запоминании и воспроизведении.

У младших школьников преобладает установка на запоминание материала и привычка заучивать материал путем логического осмысления, у подростка сформирована установка на понимание, заучивание логическое, осмысленное. Развивается логическая память. Возрастает число учащихся, сознательно и целенаправленно применяющих приемы опосредствованного запоминания. Существует прямая зависимость между уровнем владения приемами запоминания и использованием их учащимися. И чем продуктивнее запоминание, тем продуктивнее воспроизведение.

Усложнение и значительное увеличение объема изучаемого материала приведет к перестройке организации мыслительных процессов.

Ситуация. В подростковый период значительно развивается логическая память, развитие механической памяти замедляется. Вместе с тем возникают проблемы с запоминанием, и подростки жалуются на плохую память.

Какие могут быть возможные причины подобных жалоб?

Решение. Это может быть связано с появлением новых учебных предметов и со значительным увеличением количества информации, которую необходимо запоминать механически. И у подростков появляется интерес к способам улучшения запоминания.

Учитель должен уделять большое внимание развитию у подростков умения логически обрабатывать материал (поиск ассоциаций, выделение опор, смысловая группировка, составление плана, моделирование). В процессе овладения этими приемами подросток ведет работу со специфическими для каждого материала областями, находит их внутреннюю логику. В результате учебной работы у подростка увеличиваются глубина и прочность знаний, развиваются интеллект и способности.

Ситуация. В подростковый период воображение интеллектуализируется, сближается с теоретическим мышлением. Охарактеризуйте особенности воображения подростка.

Решение. Сближение теоретического мышления с воображением способствует творчеству: подросток начинает писать стихи, заниматься разного вида конструированием и т. п. От самого творческого процесса он получает удовольствие даже больше, чем от готового продукта. Нередко неудовлетворенные желания, острые личностные проблемы подростка легко используются в мире фантазий. Фантазирование доставляет ему удовольствие и приносит успокоение, так как собственные влечения предстают в яркой образной форме и осознаются. В свой мир фантазии подросток никого не допускает. Этим он может поделиться лишь в своем дневнике.

Ситуация. Порой подросток не знает причин своего поведения.

— Тебе не интересно?

— Нет, интересно.

— Что, тебе учитель не нравится?

— Нет, нравится.

— Что, ты не слушаешь?

— Нет, слушаю.

— А почему учитель говорит, что не слушаешь? Смущенно:

— Слушаю, но отвлекаюсь...

С чем связано такое проявление внимания подростка? Решение. Внимание подростка, особенно в первый период полового созревания, очень колеблется. Ему бывает трудно сфокусироваться на одном объекте (деле) длительное время. Подростку об этом стыдно говорить, а взрослый часто не хочет этого понять. И только после полового созревания внимание подростка становится более устойчивым.

Психологически ориентированные модели обучения, построенные с учетом психологических механизмов умственного развития учащихся и связанные с созданием инновационных форм и методов образовательного процесса.

1. «Свободная модель». В процессе обучения в максимальной мере учитывается внутренняя инициатива ученика. При наличии определенной помощи со стороны учителя ребенок тем не менее сам определяет интенсивность и продолжительность своих учебных занятий, свободно планирует собственное время, самостоятельно выбирает средства обучения. Отсутствует сколько-нибудь жесткая система педагогических воздействий. Напротив, поощряется импровизация и детей, и учителя относительно как содержания, так и способов обучения. Разновидности этой модели («свободный день», «свободный класс» и т. п.) объединяет неформальное отношение к процессу обучения: отсутствие классноурочной системы, обязательных учебных программ, контроля и оценки знаний учащихся. Ключевой психологический элемент — «свобода индивидуального выбора» (Р. Штайнер, Ф. Г. Кумбе, Ч. Сильберман и др.).

2. «Диалогическая модель». Отмечается необходимость изменения содержания и формы школьного образования в направлении освоения детьми культурных основ человеческого познания. В центре внимания — целенаправленное развитие интеллекта учащихся, понимаемого в качестве «глубинно развитого разума». На первый план выходит формирование диалогизма как основного определения человеческой мысли (в виде диалога культур; диалога идей за счет освоения «точек превращения», в которых одна форма понимания переходит в другую (иную); диалога знания и незнания, поскольку знание в его высших формах оказывается полным сомнения и проблематичности; диалога в сознании ученика голосов поэта и теоретика и т. д.).

Признается непредсказуемость, самобытность интеллектуального развития личности, в том числе возможность для ребенка самостоятельного, «одинокого» учения (дома, за книгой). Создаются условия для индивидуального интеллектуального творчества, в частности, поощряется появление «монстров» в виде странных на первый взгляд выдумок самих детей, которые являются личностными открытиями, часто не зависимыми от логики учебного процесса.

Вместо учебников в данной модели используются тексты как произведения соответствующей культуры. Отсутствует единая программа, не практикуются обычные отметки. Ключевой психологический элемент — «диалогичность индивидуального сознания» (В. С. Библер, С. Ю. Курганов и др.).

3. «Личностная модель». Основной задачей обучения является общее развитие учащегося, в том числе развитие его познавательных, эмоционально-волевых, нравственных и эстетических возможностей. Организация учебного процесса подчиняется определенным взаимосвязанным принципам, таким как обучение на высоком уровне трудности; ведущая роль теоретических знаний на начальном этапе обучения; быстрый темп изучения учебного материала; осознанный характер учения; одновременная работа по развитию слабых и сильных учащихся. Конечная цель личностной модели — дать школьникам целостную картину мира на основе науки, литературы и искусства с учетом трех основных линий общего психического развития учащихся (наблюдения, мышления и практических действий).

Особое внимание уделяется созданию на уроке атмосферы доверительного общения. Методика преподавания отвечает требованиям многогранности (направленности на развитие разных сторон личности ученика), процессуальности (последовательного усложнения усваиваемого знания), проблемности (опоры на коллизии) и вариантности (гибкости в использовании форм и способов обучения в зависимости от сложившейся на уроке ситуации) (Л. Н. Занков, М. В. Зверева, И. И. Аргинская, Н. В. Нечаева и др.). Разновидностью этой модели является система обучения, основанная на личностно-гуманном подходе к детям. В качестве ее отличительной особенности выступает подчеркнутое внимание к индивидуальности каждого ребенка и направленность на сотрудничество с детьми (Ш. Амонашвили). Ключевой психологический элемент — «целостный личностный рост».

4. «Развивающая модель». Характеризует такой тип обучения, который ориентирован на развитие теоретического мышления в младшем школьном возрасте. Согласно этой модели, основная задача обучения заключается в

формировании специально организованной учебной деятельности школьников. В частности, в качестве основы учебной деятельности выступает содержательное обобщение: анализируя некоторую предметную область, ученик с помощью учителя обнаруживает ее генетически исходное основание и учится мысленно прослеживать происхождение ее частных характеристик (т. е. у ученика формируется способность мыслить по принципу «от общего — к частному»). Детям предлагаются учебные задачи, в ходе решения которых ученик ищет общий способ подхода к многочисленным частным ситуациям. Выполняя такого рода учебные задачи, учащиеся обучаются определенным мыслительным действиям, таким как анализ, планирование и рефлексия. В результате уже в младшем школьном возрасте дети осваивают учебное знание на уровне научных понятий, овладевают новыми средствами учебной деятельности (в виде знаковых моделей), при этом меняется характер учебной активности учащихся (дети включаются в исследовательскую деятельность, работают в режиме диалога и т. п.). Ключевой психологический элемент — «способы учебной деятельности» (Д. Б. Эльконин, В. В. Давыдов, В. В. Репкин и др.).

5. «Структурирующая модель». Особое внимание уделяется организации учебной информации, в частности, созданию содержательных комплексов (блоков) в виде «укрупненных дидактических единиц». Укрупненная дидактическая единица (УДЕ) — это «клеточка» учебного процесса, состоящая из различных элементов, обладающих в то же время информационной общностью. УДЕ обладает качествами системности и целостности, устойчивостью во времени и быстрой актуализацией в памяти ученика. Обучение на основе укрупнения учебной информации предполагает: совместное и одновременное изучение родственных разделов, взаимосвязанных действий и операций; самостоятельное усвоение школьниками знаний на основе сравнения, обобщения и аналогии; учет единства образного и логического в мышлении; обратимость мыслительных действий при выполнении упражнений; выход на перспективы развития знания за счет свертывания и

развертывания учебной информации и т. д. Ключевой психологический элемент — «систематизация знаний» (П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев).

6. «Активизирующая модель». Направлена на повышение уровня познавательной активности учащихся за счет включения в учебный процесс проблемных ситуаций, опоры на познавательные потребности и интеллектуальные чувства. В рамках этой модели сохраняются все основные моменты традиционного обучения, в том числе средства контроля за усвоением нормативных знаний, умений и навыков. Однако учитываются два основных психологических фактора эффективности обучения: познавательная мотивация и мыслительная активность школьников в условиях разрешения учебных проблемных ситуаций. Ключевой психологический элемент — «познавательный интерес» (А. М. Матюшкин, М. И. Махмутов, М. Н. Скаткин, Г. И. Щукина и др.).

7. «Формирующая модель». Основывается на утверждении, что влиять на умственное развитие ребенка — значит осуществлять целенаправленное управление процессом усвоения знаний и умений. При условии прохождения учеником всех его необходимых этапов с учетом специально организованной учителем ориентировочной основы действий можно гарантировать сформированность знаний и умений с наперед заданными качествами. В частности, ученик должен в строгой последовательности пройти следующие этапы: мотивацию, составление схемы ориентировочной основы действий, материализованные действия, проговаривание на уровне внешней речи, речь про себя, умственное действие — под управляющим влиянием «команд» учителя.

Не составляет исключения и творческая деятельность, поскольку последняя, согласно данному подходу, является нормативным процессом, выполняемым на осознаваемом уровне планомерно, теоретическим путем. Разновидностью этой модели является программированное и алгоритмическое обучение. Ключевой психологический элемент — «умственное действие» (Н. Ф. Талызина, И. П. Калошина, В. П. Беспалько и др.).

Детальный анализ вышеуказанных моделей (и предлагаемых технологий обучения) позволяет заметить, что все эти модели образуют своего рода иерархическую «лестницу» в зависимости от баланса двух составляющих: «мера свободы субъективного выбора ребенка — объем управляющих воздействий». Соответственно «свободная модель» отвечает критерию «максимум свободы субъективного выбора — минимум управляющих воздействий», а «формирующая модель» — критерию «минимум свободы субъективного выбора — максимум управляющих воздействий».

Все перечисленные модели, несомненно, способствуют повышению качества школьного образования, поскольку на первом плане оказывается ученик как субъект деятельности, и основные педагогические усилия направляются на его познавательное и личностное развитие. Поэтому неудивительно, что на уровне конкретных методических приемов эти модели в той или иной степени пересекаются.

Следует заметить, что в некоторых из моделей не ставится вопрос о необходимости разработки учебников нового типа. Так, в «свободной» и «диалогической» моделях учебники как таковые (или стабильные учебные тексты) принципиально не используются, тогда как в «формирующей» и «активизирующей» моделях, как правило, используются традиционные учебники с дополнительными методическими указаниями учителю по организации учебной деятельности. Исключение составляют «личностная», «развивающая» и «структурирующая» модели, в рамках которых поставлена задача создания качественно новых учебных текстов.

Кроме того, каждая из указанных моделей сталкивается с серьезным вопросом: как, обучая (а обучение всегда предполагает достаточно строгий контроль интеллектуального поведения детей через приобщение их к обязательным нормам человеческого познания), в то же время гарантировать каждому ученику возможность свободного и продуктивного интеллектуального саморазвития с учетом своеобразия склада его ума? Ведь как бы там ни было, но, формируя у ребенка «систему прочных знаний», «способы решения задач», «научные понятия», «умственные действия с заданными качествами» и т. д., мы тем самым вольно или невольно очерчиваем границы его личной интеллектуальной свободы. С другой стороны, предоставляя ребенку полную свободу действий и произвольно варьируя содержание его учебных занятий, мы рискуем превратить ученика в интеллектуального иждивенца, неспособного к напряженной и продуктивной интеллектуальной работе.

Психологически ориентированные модели обучения

К психологически ориентированным моделям обучения отнесем модели, построенные с учетом психологических механизмов умственного развития учащихся и связанные с содержанием инновационных форм образовательного процесса. Перечислим эти модели: «Свободная модель» (Р. Штайнер, Ф.Г. Кумбе, Ч. Сильберман и др.); «Диалогическая модель» (В.С. Библер, С.Ю. Курганов и др.); «Личностная модель» (Л.Н. Занков, М.В. Зверев, Н.В. Нечаева и др.); «Развивающая модель» (Д.Б. Эльконин, В.В. Давыдов, В.В. Репкин и др.); «Структурирующая модель» (П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев); «Активизирующая модель» (А.М. Матюшкин, М.И. Махмутов, М.Н. Скаткин и др.); «Формирующая модель» (Н.Ф. Талызына, И.П. Калошина, В.П. Беспалько и др.).

В основу классификации моделей обучения могут быть положены разные основы.

Так, например, Г.К. Селевко различает следующие основания для классификации: по уровню применения (общепедагогические, частнометодические (предметные) и локальные (модульные); по философской основе; по ведущему фактору психического развития личности; по научной концепции; по ориентации на личностные структуры; по характеру содержания и структуры и др.

С точки зрения Г.Б. Корнетова существующее многообразие систем, технологий, методик обучения и воспитания может быть сведено к трем базовым моделям образовательного процесса, представленным парадигмами авторитарной педагогики, манипулятивной педагогики и педагогики поддержки.

В «обогащающей модели» обучения осуществляется интеллектуальное воспитание учащихся на основе обогащения их ментального(умственного) опыта. Слово «обогащение» означает, во-первых, формирование основных компонентов умственного опыта учащихся – на уровне когнитивного, метакогнитивного и эмоциональнооценочного опытов, и, во-вторых, рост индивидуального своеобразия склада ума каждого ученика на основе учета индивидуальных познавательных склонностей (в том числе познавательных стилей). Конструирование содержания образования в различных моделях обучения Одним из эффективных средств реализации той или иной модели обучения является создание содержания образования, отражающего психологические закономерности умственного развития учащихся. Так, например, в «обогащающей модели» обучения создана типология учебных текстов, способствующих актуализации и обогащению различных форм умственного опыта учащихся; разработана концепция курса математики для 5-9 классов.

Основные элементы дидактической системы в каждой из моделей обучения В каждой модели обучения имеется вполне определенное отношение и соответствующая практика относительно следующих элементов дидактической системы: содержание образования, роль учителя, урок, критерии эффективности, роль ученика

Методика формирования математических понятий в «обогащающей модели» обучения Одним из центральных вопросов методики преподавания математики является вопрос о формировании математических понятий. В «обогащающей модели» обучения разработаны требования к формированию понятийного мышления, отражающие психологические закономерности усвоения учащимися понятий, условия их усвоения

Методика обучения решению задач в разных моделях обучения. Обучение решению задач включает несколько этапов: понимание условия задачи; составление плана ее решения; осуществление плана; проверка и исследование полученного решения. Во многих моделях обучения имеется система заданий, которая способствует формированию умений работы на каждом из данных этапов.

Лекция 6. Общее понятие о методах, приемах обучения. Проблема методов обучения. Классификация методов обучения

Метод (от греч. methodos – путь исследования) – способ достижения цели.

Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез. Математические методы познания.

Для решения своих проблем методика преподавания математики использует следующие методы:

- эксперимент;
- изучение и использование отечественного и зарубежного опыта обучения учащихся;
- анкетирование, беседы с учителями и учащимися;
- анализ;
- моделирование.

Методологическую основу исследований составляют диалектика, системный анализ и деятельностный подход.

Эксперимент – специально организуемое обучение с целью проверки гипотезы, фиксации реального уровня знаний, умений, навыков, развития ученика, сравнения результативности предлагаемых методик и традиционно используемых, обоснования различных утверждений.

Существует несколько видов эксперимента.

На этапе обоснования гипотезы используется констатирующий эксперимент, в процессе ее проверки – обучающий.

Констатирующий эксперимент позволяет выявить состояние объекта исследования или проверить предположение, уточнить отдельные факты.

Обучающий эксперимент (поисковый, формирующий) проводится с целью выявить эффективность разработанной методики.

Для проведения эксперимента отбирают экспериментальные и контрольные классы. В контрольных классах обучение ведется по традиционной схеме, а в экспериментальных – по разработанной исследователем.

В организации эксперимента используются такие методы, как наблюдение за деятельностью учителя и учащихся, беседы с ними, анкетирование, качественный и количественный анализ результатов обучения. В конструировании предмета исследования используется моделирование, а гипотезы – анализ литературы по проблеме исследования. Основанием для качественного анализа результатов исследования являются контрольные работы и тесты школьников контрольных и экспериментальных групп, а количественного – результаты статистической обработки контрольных работ и тестов.

Методологическую основу исследований составляют:

- диалектика;
- системный анализ;
- деятельностный подход.

Термин *«диалектика»* используется в двух значениях. Первое заключается в том, что исследование основывается на наиболее общих законах развития природы, общества и мышления (основные законы – единство и борьба противоположностей, переход количественных изменений в качественные, отрицание отрицания). Второе значение диалектики предполагает рассмотрение познаваемых объектов и явлений в развитии, обусловленности их изменений различными факторами, взаимосвязи с другими объектами и явлениями.

Суть *системного анализа* заключается в том, что исследуемый объект рассматривается как система с определенными компонентами, указывается лидирующий компонент и выделяются связи между его составляющими.

Деятельностный подход применяется в разных смыслах:

1. Как составляющая методологической основы методике обучения математике.
2. Как обучение способам деятельности.

3. Как обучение различным действиям, адекватным содержанию обучения математике.

4. Как учебная деятельность.

Деятельностью называют процесс активности человека, характеризуемый предметом, потребностью и мотивом, целями и условиями их достижения, действиями и операциями.

Важнейшим видом деятельности является учебная деятельность, т.е. деятельность ученика, направленная на приобретение теоретических знаний о предмете изучения и общих приемах решения связанных с ним задач. В учебной деятельности выделяют следующие компоненты: понимание школьником учебной задачи, осуществление учебных действий, выполнение им действий контроля и оценки.

Для оценки эффективности разработанной методики обучения используются различные статистические методы К общенаучным методам познания относятся аналогия, наблюдение и опыт, анализ и синтез, индукция и дедукция, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Методы познания выступают как элементы содержания образования – с одной стороны, и как приемы мышления – с другой. Обладая высокой эвристичностью, методы научного познания широко используются в обучении математике.

Аналогия. Под аналогией понимают сходство предметов в каких-либо свойствах, признаках или отношениях. Умозаключение по аналогии – это такое умозаключение, в результате которого делается вывод о том, что исследуемый предмет, возможно, имеет еще один признак X, поскольку остальные известные нам признаки этого предмета сходны с признаками другого предмета, обладающего, кроме того, и признаком X. В качестве предмета могут выступать объекты, явления, процессы и т. д.

Анализ деятельности применения аналогии в различных конкретных ситуациях позволил выделить следующие действия:

1) составлять аналогии различных заданных объектов и отношений;

2) находить соответственные элементы в заданных аналогичных предложениях;

3) составлять предложение, аналогичное данному;

4) составлять задачу, аналогичную заданной, т. е. задачу, имеющую с данной сходное условие или заключение;

5) проводить рассуждение при решении задачи по аналогии с решением сходной задачи.

Обобщение и конкретизация. Обобщение как форма перехода от частного к общему имеет целью выделение общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов. Использование обобщения при решении задач основано на: а) расширении области изменения параметра; б) переходе от данного множества к более широкому множеству, содержащему данное. Первое преимущественно применяется в алгебре, второе – в геометрии. Например, рассматривая равенства: $3+5=8$, $1+7=8$, $15+17=32$, учащиеся замечают, что в правой части каждого равенства записана сумма двух нечетных чисел, а в левой – четное число. Затем осуществляется переход от множества конкретных нечетных чисел к множеству чисел и от множества конкретных четных чисел к множеству четных чисел, т. е. делаем обобщение.

Анализ – логический прием, состоящий в том, что изучаемый предмет мысленно расчленяется на составные элементы, каждый из которых затем исследуется в отдельности.

Синтез – мысленное соединение частей предмета, расчлененного в процессе анализа, установление взаимодействия и связей частей и познание этого предмета как единого целого. Синтез всегда связан с анализом. В нашем мышлении существует аналитико-синтетический метод, в котором анализ и синтез взаимно проникают друг в друга, сочетаясь в диалектическом единстве. В процессе формирования понятия анализ используется при выделении существенных признаков понятия, которые затем объединяются и образуют содержание понятия.

Анализ представляет наиболее трудную, творческую стадию процесса решения задачи. Очевидно, что составляющими его являются базовые эвристики: выведение следствий, преобразование требования задачи в равносильное ему, составление промежуточных задач. Поэтому владение анализом основывается на умении применять данные эвристики. Один из путей обучения анализу состоит в устном его обсуждении. Например, учащемуся можно предложить задание: не решая уравнения или неравенства, рассказать, какую последовательность преобразований он собирается выполнить и почему такая последовательность приведет к уравнению или неравенству уже известного типа. Анализ следует использовать не только при решении задач на построение, но и на доказательство. В практике анализ в чистом виде, как правило, не используется, он применяется в сочетании с синтезом. Выбор достаточного для того или иного утверждения условия осуществляется в соотнесении этого утверждения с условием задачи, с выведением из него следствий. Анализ помогает учащимся понять необходимость выполнения дополнительных построений. Анализ можно использовать, как уже было сказано, для построения системы вспомогательных упражнений, адекватной решаемой задаче.

Наблюдение и опыт. Индукция и дедукция. В обучении математике существенная роль принадлежит и таким методам познания, как наблюдение и опыт, индукция и дедукция. В процессе наблюдения и опыта устанавливается некоторое представление об исследуемом объекте, а результаты служат посылками для индуктивных выводов. В I–VI классах основную роль играют опытные методы установления фактов. Например, при обучении элементам геометрии в V–VI классах следует шире использовать вырезание фигур из бумаги, различные эксперименты с листом бумаги: сгибание, наложение и т. д. Даже в более старших классах можно применять «визуальные» доказательства.

Индуктивный метод может использоваться и в старших классах. Например, с его помощью может быть открыто утверждение: сумма числа вершин многогранника и числа его граней больше числа его ребер на два.

Следует иметь в виду, что выводы, сделанные по индукции, т. е. на основании определенного числа наблюдений, не исчерпывающих всех частных случаев, являются правдоподобными, но недостоверными. История математики знает случаи, когда выводы, сделанные по индукции одним ученым, опровергались другими. Например, предложение П. Ферма о том, что числа вида $2^{2''} + 1$ простые, было опровергнуто Л.Эйлером.

Л.Эйлер нашел, что при n $=$ 5 число $2^{2'} + 1$ не является простым.

При обучении математике следует уделять внимание упражнениям, в которых предлагается учащимся сделать вывод, найти закономерность, пользуясь индукцией. Вопросы, что вы подметили, какой вывод можно сделать и т. д., должны постоянно сопровождать изучение материала.

Термин «дедукция» используется для обозначения метода рассуждений, заключающегося в переходе от общего к частному. Применение изученных теорем к решению задач иллюстрирует пример использования дедукции.

Термин «дедукция» используется и в смысле формы изложения материала. Дедуктивная форма изложения предполагает:

1) выделение основных (неопределяемых) понятий;

2) выделение системы предложений, формулируемых в виде аксиом;

3) определение всех остальных понятий, кроме основных, через основные или уже введенные понятия;

4) доказательство всех предложений, кроме аксиом, посредством аксиом или ранее доказанных предложений.

Одним из наиболее плодотворных методов математического познания действительности является *метод построения математических моделей* изучаемых реальных объектов или объектов, уже описанных в других областях знаний, с целью их глубокого изучения и решения всех возникающих в этих реальных ситуациях задач с помощью математического аппарата.

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений, выраженное на языке математической теории (с помощью алгебраических функций или их систем, дифференциальных или интегральных уравнений или неравенств, системы геометрических предложений или других математических объектов).

Метод математического моделирования состоит из этапов:

1. Поиск языка и средств для перевода задачи в математическую, то есть построение математической модели.

2. Изучение математической модели, ее исследование. Если полученная конкретная модель принадлежит уже изученному в математике классу моделей, то математическая задача решается уже известными методами. Если же полученная модель не укладывается ни в один из известных классов моделей, то возникает внутриматематическая проблема исследования нового класса моделей, что приводит к дальнейшему развитию одной из существующих математических теорий или к появлению новой.

3. Это развитие математической теории находит затем применение к изучению той области знаний, в которой возникла исходная задача, а также и других объектов реального мира, приводящих к математическим моделям того же класса.

Процесс обучения математике должен в какой-то мере имитировать процесс исследования в самой математике, раскрывать ее связи с реальным миром, с другими областями знаний, в которых она находит все новые приложения.

Обучение, как правило, должно начинаться с рассмотрения реальных ситуаций и возникающих в них задач, с поиска средств для их математического описания, построения соответствующих моделей. Затем объектом изучения должны стать уже сами эти модели, их исследование, приводящее к расширение теоретических знаний учащихся. После того, как соответствующая теория построена (с участием самих учащихся), ее аппарат применяется к решению исходной задачи. А также других задач, связанных с другими областями знаний, но приводящих к моделям этого же класса.

К методу математического моделирования в учебном процессе приходится прибегать при решении любой задачи с практическим содержанием. Чтобы решить такую задачу математическими средствами, ее необходимо вначале перевести на язык математики (построить математическую модель). В процессе математического моделирования широко используются абстракции отождествления, осуществимости, идеализация. Понятия числа, геометрической фигуры, уравнения, неравенства, функции, производной являются примерами математических моделей.

Методом математического моделирования решаются многие задачи межпредметного характера. С помощью метода математического моделирования раскрывается двойная связь математики с реальным миром. С одной стороны, математика служит практике по изучению и освоению объектов окружающего нас реального мира, с другой – сама жизнь, практика способствует дальнейшему развитию математики и направляет это развитие.

Аксиоматический метод также относится к числу наиболее характерных методов математики. Аксиоматический метод можно рассматривать как метод построения теорий, как научный метод познания, как метод обучения математике.

Аксиоматический метод как метод обучения служит для систематизации знаний учащихся, выяснения того, «что из чего следует», для установления истинности предложений специфическим для математики способом, для вывода новых знаний из имеющихся.

Методы обучения – это упорядоченные способы взаимосвязанной деятельности учителя и учащихся, направленные на достижение учебно-воспитательных задач.

Классификация методов обучения

Методы передачи и восприятия учащимися информации посредством чувств:

- словесные (рассказ, беседа, лекция, дискуссия);

- наглядные (демонстрация, иллюстрация, схемы, графики);

- практические (упражнение, практическая работа, лабораторная работа, практикум).

Логические методы:
- сравнение и аналогия;
- обобщение, абстрагирование;
- конкретизация;
- анализ и синтез;
- индукция и дедукция.

Эмпирические методы:
- наблюдение;
- эксперимент (опыт);
- измерения.

Методы организации и осуществления мыслительной деятельности:
- репродуктивные;
- проблемно-поисковые.

Методы самоуправления учебными действиями:
- работа с книгой;
- работа с приборами.

Методы контроля и оценки:
- устный;
- письменный;
- машинный;
- взаимоконтроль;
- самоконтроль.

Методы стимулирования и мотивации учения:
- методы формирования интереса;
- методы формирования долга и ответственности.

Метод – это способ достижения цели, т.е. совокупность приемов и операций, используемых для достижения цели.

Метод обучения – способ передачи знаний учащимся и способ организации познавательной и практической деятельности учащихся, направленной на усвоение ими знаний умений и навыков, на овладение ими методами познания, на формирование логики.

Методы обучения, выделяемые по источнику знаний

Словесные методы.

Рассказ – словесный метод обучения, который:

1) предполагает устное повествовательное изложение учебного материала;

2) применяется при изложении учебного материала, носящего ознакомительный характер;

3) не прерывается вопросами к учащимся;

4) позволяет при минимальных затратах времени сообщить максимум знаний;

5) предполагает использование таких методических приемов, как изложение информации, активизация внимания, ускорение запоминания, а также логических приемов сравнения, сопоставления, выделение главного, резюмирования;

6) характеризуется недостаточной долей самостоятельного познания учащихся, ограниченностью элементов поисковой деятельности;

7) затрудняет обратную связь: учитель не получает достаточной информации о качестве усвоения знаний, не может учесть индивидуальных особенностей всех учащихся.

Существует несколько видов рассказа:

- рассказ-вступление – проводится в начале урока с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала, который может быть изложен и другими методами. Главная его цель – вызвать интерес к новой теме;

- рассказ-изложение – раскрывает содержание новой темы. Материал излагается по плану, выделяется главное, применяются различные наглядные пособия;

- рассказ-заключение – проводится в конце урока. Учитель делает выводы, обобщает материал, дает задания для самостоятельной работы по теме.

Условиями эффективного применения рассказа являются тщательное продумывание плана, выбор наиболее рациональной последовательности раскрытия темы, удачный подбор примеров и иллюстраций, поддержание должного эмоционального тона изложения.

Беседа – работа учителя с учащимися с помощью системы вопросов, подводящих учеников к усвоению материала.

Виды беседы:

1. Беседа объяснительного характера – с помощью вопросов учителя ученики вспоминают, систематизируют, обобщают ранее изученное, этот вид беседы рассчитан на активизацию памяти.

2. Беседа эвристического характера – учащиеся под руководством учителя с помощью вопросов сами отыскивают возможные ответы на проблемные вопросы.

3. Беседа мотивирующего характера – проводится с целью возбуждения интереса к теме.

4. Беседа инструктивно-методического характера – дают рекомендации по выполнению лабораторной работы, решению задачи.

Эффективность беседы зависит от того, насколько умело подобраны вопросы, которыми направляется беседа. Составление вопросов облегчается, если учебный материал разбивается сначала на отдельные смысловые части, затем подбираются вопросы таким образом, чтобы облегчить учащимся переход от одной части к другой. Беседу хорошо проводить когда материал не очень сложный и у учащихся есть определенная база. Метод беседы чаще всего используется в среднем звене, хотя имеет место и в начальной школе и в старших классах.

Лекция – устное изложение материала, отличающееся большим объемом, сложностью логических построений, доказательств и обобщений. В отличии от рассказа лекция охватывает весь урок или два урока (пару).

Изложение материала лекционным способом позволяет:

1. Излагать учебный материал крупными порциями, показывая логическую

связь между отдельными вопросами, которая может ускользнуть от ученика при рассмотрении материала отдельными фрагментами.

2. Уделить больше внимания межпредметным связям, мировоззренческим вопросам, прикладным вопросам, истории математики.

3. Освободить время для решения задач.

4. Воспитать у учащихся умение слушать в течение длительного времени, тем самым готовить их к продолжению образования.

5. Учить конспектированию.

Лекция может быть по теоретическому материалу, разбору решения «ключевых» задач, комбинированной. При подготовке к лекции особое внимание необходимо уделить отбору материала и по содержанию и по объему. Материал, изложенный на лекции, должен быть логически завершенным и содержать теоретические вопросы, предусмотренные программой и необходимые для решения задач.

В школьной лекции можно выделить этапы.

Актуализация опорных знаний (повторение материала, необходимого для понимания и усвоения нового). Постановка проблемы, показ ее значения для практики. Сообщение темы и плана лекции. Изложение материала по плану урока.

Наглядные методы воздействуют на чувства человека и дают сведения об окружающем мире, которые затем с помощью мыслительной деятельности преобразуются в понятия.

Метод иллюстраций предполагает показ учащимся различных иллюстративных пособий: плакатов, таблиц, чертежей, схем, рисунков из учебника, зарисовок и записей на доске, моделей геометрических фигур, натуральных предметов и т.д.

Метод демонстрации обычно связан с демонстрацией приборов, моделей, опытов, показом кинофильмов, диафильмов, слайдов, кодопозитивов, использование учебного телевидения, магнитофонных записей и т.д.

Условия успешного применения наглядных средств обучения:

1) хорошее обозрение наглядного пособия, должно отвечать эстетическим

требованиям;

2) постановка учебной цели, четкое выделение главного при демонстрации пособия;

3) умелое сочетание слова и показа средства наглядности, осуществление ориентации действий учащихся на достижение учебной цели с помощью средства наглядности;

4) привлечение учащихся к нахождению желаемой информации (с помощью наглядного пособия), постановка перед ними проблемных заданий.

Наглядные методы наиболее успешно решают следующие дидактические задачи:

1. Способствуют развитию наглядно-образного мышления.
2. Активизируют внимание.
3. Активизируют учебно-познавательную деятельность.
4. Позволяют конкретизировать изучаемые теоретические вопросы.
5. Стимулируют интерес к учению.

Практические методы:

- Метод письменных упражнений – решение задач, построение графиков и т.п.
- Метод упражнений лабораторного характера – практические работы, измерительные работы с техническими средствами.

При выполнении письменных упражнений осуществляется непосредственное применение на практике полученных теоретических знаний. Требования к системе упражнений:

1) система должна обеспечить целостное применение на практике полученных теоретических знаний;

2) каждое упражнение должно подготавливать к усвоению следующего;

3) число упражнений долюно быть минимально-необходимым;

4) при выполнении упражнений необходимо четко ставить перед учащимися цель, порядок выполнения, характер отчет;

5) планируя упражнения, учитель должен предвидеть возможные ошибки и

способы их предупреждения. По ходу выполнения надо своевременно замечать типичные ошибки и информировать весь класс.

Методы научного познания в обучении математике

Логические методы познания особенно необходимы при отыскании решения задач.

Сравнение – мысленное установление сходства или различия объектов изучения. Используя метод сравнения, необходимо иметь в виду следующие принципы сравнения.

1. Сравнивать можно только такие объекты, которые имеют определенную связь друг с другом, то есть сравнение должно иметь смысл (сравниваемые понятия однородные).

2. Сравнение осуществляется по таким признакам, которые имеют существенное значение.

3. Сравнение должно проходить планомерно, т.е. требуется четкое выделение тех свойств, по которым проводится сравнение (по периметру, по площади, по объему и т.п.).

4. Сравнение по одним и тем же свойствам материальных объектов должно быть полным, доведенным до конца.

Аналогия (соответствие, сходство) – умозаключение по сходству частых свойств (признаков), имеющихся у двух математических понятий (фигур, отношений и т.д.). С помощью аналогии сходство предметов, выявленное в результате их сравнения, распространяется на новое свойство (или свойства). Благодаря своей наглядности и доступности аналогия используется в преподавании математике:

1) при изучении десятичных дробей аналогия с натуральными числами;

2) свойства алгебраических дробей аналогичны свойствам обыкновенных дробей;

3) методы решения задач на составление уравнений первой степени аналогичны методам решения задач на составление уравнений второй степени;

4) свойства арифметической и геометрической прогрессий;

5) свойства планиметрии и стереометрии.

Схема рассуждения по аналогии:

A обладает свойствами a, b, c, d;

B обладает свойствами a, b, c;

Вероятно (возможно) B обладает и свойством d.

Заключение по аналогии является вероятным, но не достоверным. Аналогия наводит на гипотезу, которая нуждается в доказательстве. Аналогия полезна тем, что она наводит на догадки, т.е. служит эвристическим методом. В обучении математике не менее важно, чем учить доказывать, это учить догадываться, что именно подлежит доказательству и как найти это доказательство.

В школьном курсе имеется много возможностей для использования аналогии, но используется она недостаточно, т.к. с помощью аналогии можно прийти к ложному заключению.

Пример. На плоскости: $a \perp b, b \perp c \Rightarrow a \perp c$

Необходимо приучать учащихся к мысли, что заключение по аналогии нуждается в доказательстве или опровержении.

Возможные ошибки при использовании метода аналогии:

1) при сокращении $\frac{2a}{ab} = \frac{2}{b}$ и $\frac{sin2\alpha}{2} = sin\alpha$;

2) $a(b+c) = ab + ac$ и $lg(b+c) = lgb + lgc$;

3) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}(a, b \geq 0)$ и $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha + sin\beta$.

Обобщение – это мысленное выделение, фиксирование каких-нибудь общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов или отношений.

Абстрагирование – это мысленное отвлечение, отделение общих, существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных для нашего изучения или необщих свойств рассматриваемых объектов или отношений и отбрасывание (в рамках нашего изучения) этих несущественных свойств.

Несущественные с математической точки зрения свойства. Например, один и тот же предмет изучается и математикой и физикой. Для физики существенны одни его свойства – твердость, теплопроводность, электропроводимость и т.д., а для математики эти свойства несущественны, она изучает форму, размеры, расположение предмета.

Обобщение и абстрагирование в процессе познания почти всегда применяются совместно и неизменно применяются в процессе формирования понятий, при переходе от представлений к понятиям.

Пример. При изучении переместительного закона сложения: 2+3=3+2 (для палочек), 1+5=5+1 (для тетрадей и т.п.), далее отвлекаемся 4+7=7+4 (просто для чисел), $... + ... = ... + ...$, $\bigcirc + \bigtriangledown = \bigtriangledown + \bigcirc$, $a + b = b + a$ - получаем закон.

Конкретизация – это мыслительная деятельность, при которой односторонне фиксируется та или иная сторона объекта изучения вне связи с другими его сторонами. Конкретизация используется при описании конкретных ситуаций с помощью сформированных ранее понятий.

Конкретизация может выступать и как наглядная иллюстрация, и как подтверждение какого-либо абстрактного положения, и как приложение некоторого свойства в конкретных условиях.

Пример. Геометрическая интерпретация понятия производной функции в точке.

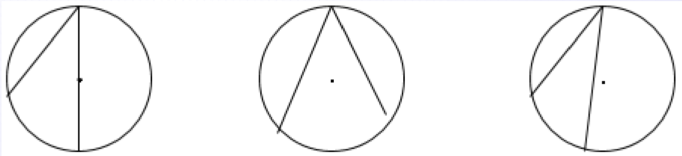
Индукция – умозаключение (вывод, метод рассуждений) от частного к общему, т.е. общий вывод, основанный на изучении свойств отдельных, частных фактов (частных экспериментов или наблюдений). Другими словами, индукция – это вывод общего заключения из частных посылок.

Использование этого метода рассуждений для получения новых знаний в процессе обучения называют индуктивным методом обучения.

Пример. Построив графики конечного числа линейных уравнений, делается заключение. Что график уравнений вида $ax + by + c = 0$ - прямая линия.

Индукция бывает полной и неполной. Индукция называется полной или совершенной, если общий вывод делается на основании изучения (рассмотрения) всех частных фактов (объектов, фигур, чисел и т.д.). Индукция называется неполной или несовершенной, если общий вывод делается на основании изучения только части множества всех фактов (объектов).

Пример. При доказательстве теоремы о вписанном в окружность угле рассматриваются все частные случаи расположения центра окружности по отношению к сторонам угла. Полученный вывод представляет собой полную индукцию.



Неполная индукция в процессе обучения применяется при изучении законов сложения.

Вывод, основанный на неполной индукции, может быть ошибочным, но ее значение в том, что рассмотрение частных случаев наводит на мысль о существовании той или иной закономерности, помогает высказать гипотезу, которую можно доказать дедуктивным путем. Такой прием применяется в школе при изучении прогрессий. Хотя индукция ввиду недостоверности заключения не может служить методом доказательства, она является мощным эвристическим методом, т.е. методом открытия новых истин.

Обычно говоря об индуктивном методе обучения, имеют в виду применение неполной индукции. Индуктивный метод обучения – основной метод в 1-6 классах, в дальнейшем является вспомогательным, уступая место дедуктивному методу. В среднем и старшем звене индуктивный метод приводит к гипотезе, которая потом доказывается.

Дедукция (выведение) – есть форма умозаключения, при которой от одного общего суждения идут к частному суждению. В широком смысле представляет собой форму мышления, состоящую в том, что новое предложение (выраженная в нем мысль) выводится чисто логическим путем, т.е. по определенным правилам логического вывода (следования) из некоторых известных предложений. Заключения по индукции лишь правдоподобно, дедуктивные рассуждения всегда дают достоверные заключения.

Дедуктивным методом доказательства называется доказательство, основанное на системе определенных аксиом. И поэтому дедуктивный метод называется аксиоматическим методом. Дедукция является строгим, логически обоснованным методом доказательства в математике.

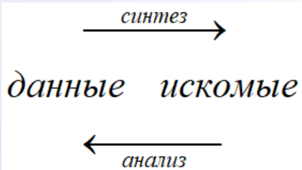
Анализ – метод (способ) рассуждения или доказательства, при котором отправляются от неизвестного к известному, от искомого к данному. Это логический прием, состоящий в том, что изучаемый объект мысленно (или практически) расчленяется на составные элементы (признаки, свойства, отношения), каждый из которых исследуется в отдельности как часть расчлененного целого.

Синтез – метод (способ) рассуждения, при котором следуют от известного к неизвестному, от данного к искомому, т.е. синтез – путь (метод мышления) от частей к целому.

Пример. Бытовой. Ребенок разбирает игрушку (анализ) и собирает ее (синтез).

Анализ и синтез играют в математике особенно важную роль. В обучении математике они выступают как методы решения задач, доказательства теорем, изучения свойств математических понятий и т.д. анализ и синтез практически неотделимы друг от друга, они сопутствуют друг другу, дополняя друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод.

Решая любую математическую задачу, мы имеем данные и искомые величины.



Начало
Содержание
Страница 112 из 312
Назад
На весь экран
Закрыть

Анализ и синтез применяются при решении задач. Ведущий вопрос при анализе: что надо знать, чтобы ответить на поставленный вопрос? Ведущий вопрос при синтезе: что мы можем узнать по данным условия?

Сущность аналитического метода утверждений состоит в том, что исходным пунктом для обоснования требуемого утверждения является само это утверждение, которое путем логически обоснованных шагов сводится к утверждению, известному как истинное. Сущность синтетического метода состоит в том, что отыскиваются такие истинные утверждения, которые можно было бы путем логически обоснованных шагов преобразовать в данное утверждение (требуемое утверждение). Сущность метода восходящего анализа: для того, чтобы A было верно, достаточно, чтобы было верно B. Преимущества восходящего анализа:

1) восходящий анализ обеспечивает сознательное и самостоятельное отыскание метода доказательства теоремы самими учащимися;

2) способствует развитию логического мышления;

3) обеспечивает осознанность, целенаправленность действий на каждом этапе доказательства;

4) дает возможность найти различные способы решения;

5) усвоение этого метода доступно для большинства учащихся, т.к. схема практического применения метода проста: что требуется доказать? Что для этого достаточно знать?

Восходящий анализ неудобен для изложения найденного доказательства, которое получается очень длинным, поэтому для отыскания доказательства пользуются восходящим анализом. А изложение ведут синтетическим методом.

Анализ – это путь к открытию, а синтез – это путь к обоснованию.

Лекция 7. Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Математические методы познания

Методы эмпирического исследования – наблюдение, сравнение, измерение, эксперимент.

Наблюдение – это целенаправленное восприятие объекта, обусловленное задачей деятельности. Основное условие научного наблюдения – объективность, т.е. возможность контроля путем либо повторного наблюдения, либо применения других методов исследования (например, эксперимента). Это наиболее элементарный метод, один из множества других эмпирических методов. В исследовании сравнением называется установление сходства и различия предметов и явлений действительности. В результате сравнения устанавливается то общее, что присуще двум или нескольким объектам, а выявление общего, повторяющегося в явлениях, как известно, есть ступень на пути к познанию закона.

Эмпирическое знание – это совокупность высказываний о реальных, эмпирических объектах. Эмпирическое знание основывается на чувственном познании. Рациональный момент и его формы (суждения, понятия и др.) здесь присутствуют, но имеют подчиненное значение. Поэтому исследуемый объект отражается преимущественно со стороны своих внешних связей и проявлений, доступных созерцанию и выражающих внутренние отношения. Эмпирическое, опытное исследование направлено без промежуточных звеньев на свой объект. Оно осваивает его с помощью таких приемов и средств, как описание, сравнение, измерение, наблюдение, эксперимент, анализ, индукция (от частного к общему), а его важнейшим элементом является факт (от лат. factum – сделанное, свершившееся).

1. Наблюдение – это преднамеренное и направленное восприятие объекта познания с целью получить информацию о его форме, свойствах и отношениях. Процесс наблюдения не является пассивным созерцанием. Это активная, направленная форма гносеологического отношения субъекта по отношению

к объекту, усиленная дополнительными средствами наблюдения, фиксации информации и ее трансляции. К наблюдению предъявляются требования: цель наблюдения; выбор методики; план наблюдения; контроль за корректностью и надежностью полученных результатов; обработка, осмысление и интерпретация полученной информации.

2. Измерение – это прием в познании, с помощью которого осуществляется количественное сравнение величин одного и того же качества. Качественные характеристики объекта, как правило, фиксируются приборами, количественная специфика объекта устанавливается с помощью измерений.

3. Эксперимент – (от лат. experimentum – проба, опыт), метод познания, при помощи которого в контролируемых и управляемых условиях исследуются явления действительности. Отличаясь от наблюдения активным оперированием изучаемым объектом, эксперимент осуществляется на основе теории, определяющей постановку задач и интерпретацию его результатов.

4 Сравнение представляет собой метод сопоставления объектов с целью выявления сходства или различия между ними. Если объекты сравниваются с объектом, выступающим в качестве эталона, то такое сравнение называется измерением.

Для того чтобы сравнение было плодотворным, оно должно удовлетворять двум основным требованиям:

1. Сравниваться должны лишь такие явления, между которыми может существовать определенная объективная общность. Нельзя сравнивать заведомо несравнимые вещи, – это ничего не дает. В лучшем случае здесь можно только к поверхностным и потому бесплодным аналогиям.

2. Сравнение должно осуществляться по наиболее важным признакам. Сравнение по несущественным признакам может легко привести к заблуждению.

Так, формально сравнивая работу предприятий, выпускающих один и тот же вид продукции, можно найти в их деятельности много общего. Если при этом будет упущено сравнение по таким важнейшим параметрам, как уровень производства, себестоимость продукции, различные условия, в которых функционируют сравниваемые предприятия, то легко прийти к методологической ошибке, ведущей к односторонним выводам. Если же учесть эти параметры, то станет ясным, в чем причина и где кроются действительные истоки методологической ошибки. Такое сравнение уже даст истинное, соответствующее реальному положению дел представление о рассматриваемых явлениях. Различные интересующие исследователя объекты могут сравниваться непосредственно или опосредованно – через сравнение их с каким-либо третьим объектом. В первом случае обычно получают качественные результаты (больше – меньше; светлее – темнее; выше – ниже и т.д.). Однако уже при таком сравнении можно получить простейшие количественные характеристики, выражающие в числовой форме количественные различия между объектами (больше в 2 раза, выше в 3 раза и т.п.). Когда же объекты сравниваются с каким-либо третьим объектом, выступающим в качестве эталона, количественные характеристики приобретают особую ценность, поскольку они описывают объекты безотносительно друг к другу, дают более глубокое и подробное знание о них (например, знать, что один автомобиль весит 1 т, а другой – 5 т, – это значит знать о них значительно больше того, что заключено в предложении: "первый автомобиль легче второго в 5 раз". Такое сравнение называется измерением. Оно будет подробно рассмотрено ниже. С помощью сравнения информация об объекте может быть получена двумя различными путями.

Во-первых, она очень часто выступает в качестве непосредственного результата сравнения. Например, установление каких-либо соотношений между объектами, обнаружение различия или сходства между ними есть информация, получаемая непосредственно при сравнении. Эту информацию можно назвать первичной.

Во-вторых, очень часто получение первичной информации не выступает в качестве главной цели сравнения, этой целью является получение вторичной или производной информации, являющейся результатом обработки первичных данных. Наиболее распространенным и наиболее важным способом такой обработки является умозаключение по аналогии. Это умозаключение было обнаружено и исследовано (под названием "парадейгма") еще Аристотелем. Сущность его сводится к следующему: если из двух объектов в результате сравнения обнаружено несколько одинаковых признаков, но у одного из них найден дополнительно еще какой-то признак, то предполагается, что этот признак должен быть присущ также и другому объекту. Коротко ход умозаключения по аналогии можно представить следующим образом: А имеет признаки $X_1, X_2, X_3, ..., X_n, X_{n+}, ...$. Б имеет признаки $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$. Вывод: "Вероятно, Б имеет признак X_{n+1}". Вывод на основе аналогии носит вероятностный характер, он может привести не только к истине, но и к заблуждению. Для того чтобы увеличить вероятность получения истинного знания об объекте, нужно иметь в виду следующее: умозаключение по аналогии дает тем более истинное значение, чем больше сходных признаков мы обнаружим у сравниваемых объектов; истинность вывода по аналогии находится в прямой зависимости от существенности сходных черт объектов, даже большое количество сходных, но не существенных признаков, может привести к ложному выводу; чем глубже взаимосвязь обнаруженных у объекта признаков, тем выше вероятность ложного вывода; общее сходство двух объектов не является основанием для умозаключения по аналогии, если у того из них, относительно которого делается вывод, есть признак, несовместимый с переносимым признаком. Иначе говоря, для получения истинного вывода надо учитывать не только характер сходства, но и характер различия объектов. Измерение исторически развивалось из операции сравнения, являющейся э основой. Однако в отличие от сравнения, измерение является более мощным и универсальным познавательным средством.

Измерение – совокупность действий, выполняемых при помощи средств измерений с целью нахождения числового значения измеряемой величины в принятых единицах измерения. Различают прямые измерения (например, измерение длины проградуированной линейкой) и косвенные измерения, основанные на известной зависимости между искомой величиной и непосредственно измеряемыми величинами.

Измерение предполагает наличие следующих основных элементов:

- объекта измерения;
- единицы измерения, т.е. эталонного объекта;
- измерительного прибора (приборов);
- метода измерения; наблюдателя (исследователя).

При прямом измерении результат получается непосредственно из самого процесса измерения (например, в спортивных соревнованиях измерение длины прыжка при помощи рулетки, измерение длины ковровых покрытий в магазине и т.п.). При косвенном измерении искомая величина определяется математическим путем на основе знания других величин, полученных прямым измерением. Например, зная размер и вес строительного кирпича, можно измерить удельное давление (при соответствующих расчетах), которое должен выдержать кирпич при строительстве многоэтажных домов. Ценность измерений видна уже хотя бы из того, что они дают точные, количественно определенные сведения об окружающей действительности. В результате измерений могут быть установлены такие факты, сделаны такие эмпирические открытия, которые приводят к коренной ломке устоявшихся в науке представлений. Это касается в первую очередь уникальных, выдающихся измерений, представляющих собой очень важные вехи в истории науки. Подобную роль сыграли в развитии физики, например, знаменитые измерения А. Майкельсоном скорости света. Важнейшим показателем качества измерения, его научной ценности является точность. Именно высокая точность измерений Т. Браге, помноженная на необыкновенное трудолюбие И. Кеплера (свои вычисления он повторил 70 раз), позволила установить точные законы движения планет. Практика показывает, что главными путями повышения точности измерений нужно считать: совершенствование качества измерительных приборов, действующих на основе некоторых утвердившихся принципов; создание приборов, действующих на основе новейших научных открытий. Например, сейчас время измеряется при помощи молекулярных генераторов с точностью до 11-го знака. В числе эмпирических методов исследования измерение занимает примерно такое же место, как наблюдение и сравнение. Оно представляет собой сравнительно элементарный метод, одну из составных частей эксперимента - наиболее сложного и значимого метода эмпирического исследования.

Эксперимент – исследование каких-либо явлений путем активного воздействия на них при помощи создания новых условий, соответствующих целям исследования, или же через изменение течения процесса в нужном направлении Это наиболее сложный и эффективный метод эмпирического исследования Он предполагает использование наиболее простых эмпирических методов – наблюдения, сравнения и измерения. Однако сущность его не в особой сложности, “синтетичности”, а в целенаправленном, преднамеренном преобразовании исследуемых явлений, во вмешательстве экспериментатора в соответствии с его целями в течение естественных процессов. Следует отметить, что утверждение экспериментального метода в науке - это длительный процесс, протекавший в острой борьбе передовых ученых Нового времени против античного умозрения и средневековой схоластики. (Например, английский философ-материалист Ф. Бэкон одним из первых выступил против эксперимента в науке, хотя ратовал за опыт.)

Основателем экспериментальной науки по праву считается Галилео Галилей (1564–1642), считавший основой познания опыт. Его некоторые исследования – основа современной механики: он установил законы инерции, свободного падения и движения тел по наклонной плоскости, сложения движений, открыл изохронность колебания маятника. Он сам построил телескоп с 32-кратным увеличением и открыл горы на Луне, четыре спутника Юпитера, фазы у Венеры, пятна на Солнце. В 1657 г., после его смерти, возникла Флорентийская академия опыта, работавшая по его предначертаниям и ставившая своей целью проведение прежде всего экспериментальных исследований. Научный и технический прогресс требует все более широкого применения эксперимента. Что же касается современной науки, то без эксперимента ее развитие просто немыслимо. В настоящее время экспериментальное исследование стало настолько важным, что рассматривается как одна из основных форм практической деятельности исследователей.

Преимущества эксперимента по сравнению с наблюдением:

1. В ходе эксперимента становится возможным изучение того или иного явления в “чистом” виде. Это означает, что всякого рода “юбочные” факторы, затемняющие основной процесс, могут быть устранены, и исследователь получает точное знание именно об интересующем нас явлении.

2. Эксперимент позволяет исследовать свойства объектов действительности в экстремальных условиях: при сверхнизких и сверхвысоких температурах; при высочайших давлениях: при огромных напряженностях электрических и магнитных полей и т.п. Работа в этих условиях может привести к обнаружению самых неожиданных и удивительных свойств у обыкновенных вещей и тем самым позволяет значительно глубже проникнуть в их сущность. Примером такого рода “странных” явлений, открытых в экстремальных условиях, касающихся области управления, может служить сверхпроводимость.

3. Важнейшее достоинство эксперимента – его повторяемость. В процессе эксперимента необходимые наблюдения, сравнения и измерения могут быть проведены, как правило, столько раз, сколько нужно для получения достоверных данных. Эта особенность экспериментального метода делает его весьма ценным при исследовании. Наиболее подробно все достоинства эксперимента будут рассмотрены ниже, при изложении некоторых специфических видов эксперимента.

Ситуации, требующие экспериментального исследования:

1. Ситуация, когда необходимо обнаружить у объекта неизвестные ранее свойства. Результатом такого эксперимента являются утверждения, не вытекающие из имевшегося знания об объекте. Классический пример – опыт Э. Резерфорда по рассеянию X-частиц, в результате которого была установлена планетарная

структура атома. Подобные эксперименты называются исследовательскими.

2. Ситуация, когда необходимо проверить правильность тех или иных утверждений или теоретических построений.

Математическое моделирование

Большинство психологов под «моделью» понимают систему объектов или знаков, воспроизводящую некоторые существенные свойства системы-оригинала. Наличие отношения частичного подобия («гомоморфизм») позволяет использовать модель в качестве заместителя или представителя изучаемой системы.

Иногда под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты.

Вот некоторые примеры моделей:

1) архитектор готовится построить здание невиданного доселе типа. Но прежде чем воздвигнуть его, он сооружает это здание из кубиков на столе, чтобы посмотреть, как оно будет выглядеть. Это модель.

2) на стене висит картина, изображающая бушующее море. Это модель [4].

«Моделирование – это есть процесс использования моделей (оригинала) для изучения тех или иных свойств оригинала (преобразования оригинала) или замещения оригинала моделями в процессе какой-либо деятельности» (например, для преобразования арифметического выражения можно его компоненты временно обозначить буквами) [24].

Математическое моделирование – частный случай моделирования. Является важнейшим видом знакового моделирования и осуществляется средствами языка математики. Знаковые образования и их элементы всегда рассматриваются вместе с определенными преобразованиями, операциями над ними, которые выполняет человек или машина (преобразования математических, логических, химических формул и т. п.).

Понятия «математическая модель» и «моделирование» широко используются в науке и на производстве. Роль знаковых моделей особенно возросла с расширением масштабов применения ЭВМ при построении знаковых моделей. Современная форма «материальной реализации» знакового (прежде всего, математического) моделирования – это моделирование на цифровых электронных вычислительных машинах, универсальных и специализированных.

Математическое моделирование предполагает использование в качестве специфического средства исследования оригинала его математическую модель, изучение которой дает новую информацию об объекте познания, его закономерностях (Н. П. Бусленко, Б. А. Глинский, Б. В. Гнеденко, Л. Д. Кудрявцев, И. Б. Новик, Г. И. Рузавин, К. А. Рыбников, В. А. Штофф). Предметом исследования при математическом моделировании является система «оригинал – математическая модель», где системообразующей связью выступает изоморфизм структур оригинала и модели. Структура служит инвариантным аспектом системы, раскрывающим механизм ее функционирования (Н.Ф. Овчинников).

Известно, что для математического исследования процессов и явлений, реально происходящих в действительности, надо суметь описать их на языке математики, то есть построить математическую модель процесса, явления. Математические модели и являются объектами непосредственного математического исследования.

Математической моделью называют описание какого-либо реального процесса или некоторой исследуемой ситуации на языке математических понятий, формул и отношений.

Математическая модель – это упрощенный вариант действительности, используемый для изучения ее ключевых свойств. Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для анализа универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта.

Математической моделью, с формальной точки зрения, можно назвать любую совокупность элементов и связывающих их операций. С содержательной точки зрения интересны модели, являющиеся изоморфным отображением реальных или реализуемых объектов, процессов и явлений.

С математическими моделями тесно связан математический метод познания отображаемых моделью объектов – метод математического моделирования.

Соотношение между элементами a, b и c, выражаемое формулой, - это математическая модель. Она изоморфно отображает операцию объединения двух «куч камней» с их числами a и b в общую «кучу камней», которых окажется. В этом смысле операция сложения изоморфна этому слиянию.

Этот пример поясняет общий математический метод познания. Он состоит в построении для объекта, процесса или явления изоморфной математической модели, изучении этой математической модели и переносе в силу изоморфизма результатов, полученных для модели, на исходный объект [5]. Другими словами, метод математического моделирования заключается в том, что для исследования какого-либо объекта выбирают или строят другой объект, в каком-то отношении подобный исследуемому. Построенный или выбранный объект изучают и с его помощью решают исследуемые задачи, а затем результаты решения этих задач переносят на первоначальное явление или объект.

Математическое моделирование – приближенное описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики. Это мощный метод познания внешнего мира, а также прогнозирования и управления.

Математическое моделирование расширяет творческие возможности специалиста в решении целого ряда профессиональных задач, существенно изменяет его профессиональную подвижность. Современному специалисту следует «хорошо знать» математику, то есть не просто уметь использовать ее для различных расчетно-вычислительных операций, а понимать математические методы исследования и их возможности. Только понимание сущности математического моделирования позволяет адекватно использовать этот метод в профессиональной деятельности.

Развитие у учащихся правильных представлений о природе математики и отражении математической наукой явлений и процессов реального мира является программным требованием к обучению математике. Доминирующим средством реализации этой программной цели является метод математического моделирования. Этот метод имеет своей основой моделирование (математическое и предметное). Применительно к обучению математике воспользуемся определением моделирования, которое предлагает И. Г. Обойщикова, и будем понимать под *моделированием* обобщенное интеллектуальное умение учащихся, состоящее в замене математических объектов, их отношений, способов деятельности моделями в виде изображений отрезками, числовыми лучами, схемами, значками.

Для моделирования привлекаются различные математические объекты: числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения алгебраические или дифференциальные и их системы, неравенства, системы неравенств (а также неравенств и уравнений), ряды, геометрические фигуры, разнообразные графосхемы, диаграммы Венна, графы.

Математическое моделирование находит применение при решении многих сюжетных задач. Уже уравнение, составленное по условию задачи, является ее алгебраической моделью. Моделированию, особенно алгебраическому и аналитическому, следует уделить в школе должное внимание, так как математические модели используются для решения (или хотя бы облегчения решения) сюжетных задач. Кроме того, при построении модели используется такие операции мышления, как анализ через синтез, сравнение, классификация, обобщение, которые являются операциями мышления, и способствует его развитию.

Составление математической модели задачи, перевод задачи на язык математики исподволь готовит учащихся к моделированию реальных процессов и явлений в их будущей деятельности.

При решении сюжетных задач особенно часто используются их алгебраические и аналитические модели. Такой моделью может быть функция, описывающая явление или процесс, уравнение, система уравнений, неравенство, система неравенств, система уравнений и неравенств и др. При составлении модели задача, таким образом, переводится на язык алгебры или математического анализа.

Лекция 8. Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез

Сравнение – выявление сходства и различия сравниваемых предметов. Например, 1) треугольник и четырехугольник общим имеют соответствие числа сторон числу углов; отличие в их количестве; 2) алгебраические и обыкновенные дроби: общее – не имеют смысла при нулевом знаменателе; наличие числителя и знаменателя; различие – в природе числителей и знаменателей.

Сравнение приводит к правильному выводу, если выполняются следующие условия: 1) сравниваемые понятия однородны; 2) сравнение осуществляется по таким признакам, которые имеют для них существенное значение. Иначе говоря, основные требования к сравнению: иметь смысл; планомерно; полно.

Сравнение – почва для аналогии (греческое – соответствие, сходство), которая осуществляется по схеме:

А обладает свойствами a, b, c, d

В обладает свойствами a, b, c

Вероятно В обладает и свойством d.

Заключение по аналогии правдоподобно, но не достоверно, поэтому аналогия не является доказательным рассуждением.

Аналогия — это приём познания, при котором на основе сходства объектов в одних признаках заключают об их сходстве и в других признаках. Различают две формы проявления аналогии в познании: ассоциативная и логическая аналогии. Ассоциативная аналогия проявляется в основном в психологических актах творчества. Она носит образный характер и играет большую роль в период первоначального зарождения новых научных идей. В ходе ассоциативной аналогии объединяются иногда весьма далёкие по своей природе явления и предметы. Иначе обстоит дело в том случае, когда исследователь с определённой степенью вероятности судит о родстве тех или иных явлений на основе их параллельного изучения. При таком исследовании имеет место логическая аналогия. Такое параллельное изучение и сравнение явлений позволяет быстрее проникнуть в их сущность.

Аналогия, кроме того, имеет большое значение в качестве иллюстрации, доказательства или объяснения тех или иных явлений. В этом случае имеет место поиск каких-либо прообразов изучаемых явлений, причём сами эти прообразы могут быть либо реальными ситуациями, призванными доказать или опровергнуть то или иное положение, либо искусственно конструируемыми ситуациями, которые помогают составить наглядные представления о ненаблюдаемых явлениях и тем самым помогают уяснить их сущность. Умозаключения по аналогии, понимаемые предельно широко, как перенос информации об одних объектах на другие, составляют гносеологическую основу моделирования.

Следует различать полезную и вредную аналогии.

Полезная аналогия:

прямоугольник – прямоугольный параллелепипед;

окружность – сфера;

прямая на плоскости – плоскость в пространстве.

Вредная аналогия:

$\frac{a+b}{c+b} = \frac{a}{c}$ - “аналогия” с основным свойством дроби;

$\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ - “аналогия” с извлечением корня из произведения

$log_c(a+b) = log_a + log_c b$

Анализ и синтез — две универсальные, противоположно направленные операции познавательного мышления:

1. ***Анализ*** — это приём мышления, который подразумевает разъединение целостного предмета на составляющие части (стороны, признаки, свойства или отношения) с целью их всестороннего изучения.

2. ***Синтез*** — это приём мышления, который подразумевает соединение ранее выделенных частей (сторон, признаков, свойств или отношений) предмета в единое целое.

Анализ и синтез выступают в самых разнообразных формах: как методы решения задач, доказательства теорем, изучение свойств математических понятий и т.д.

Первоначально анализ и синтез воспринимали как методы мышления: анализ – от целого к частям целого; синтез – от частей к целому; затем как прием мышления: анализ – от следствия приходят к причине, породившей это следствие; синтез – от причины переходят к следствию, порожденному этой причиной. Это иллюстрирует арифметическое и алгебраическое решение задачи: «Маше и Тане вместе 12 лет. Тане – 5 лет. Сколько лет Маше?»

анализ: 12-5=7

синтез: x+5=12, x=12-5; x=7.

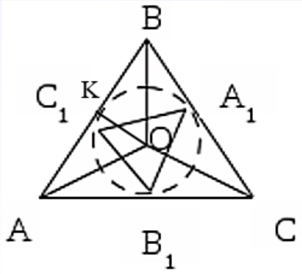
С точки зрения психологии, процесс мышления – это прежде всего анализирование и синтезирование того, что выделено анализом.

Формы анализа:

а) типа «фильтр» – хаотический способ решения данной задачи. Например, требуется из 6 спичек сложить 4 равносторонних треугольника (пространственное решение).

Задача: «Поверхность пруда постепенно зарастает ряской. Площадь поверхности занимаемая ряской, с каждым днем увеличивается в два раза. Весь пруд зарастает ряской в течение 100 дней. За сколько дней зарастает ряской половина поверхности пруда?»

б) анализ через синтез – объект в процессе мышления включается во все новые связи и в силу этого выступает во все новых качествах, которые фиксируются в новых понятиях; из объекта, таким образом, как бы вычерпывается все новые содержания. Например, доказать, что периметр равностороннего треугольника, описанного около окружности, вдвое больше периметра равностороннего треугольника, вписанного в эту окружность.



$$AO = R; OK = r;\ P_{\triangle ABC} = 2 \cdot P_{\triangle A_1B_1C_1};\ AB = OB\sqrt{3} = R\sqrt{3};\ OB_1 = \frac{1}{2}OB \Rightarrow$$
$$r = \frac{1}{2}R \Rightarrow A_1B_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}R\sqrt{3} \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 3AB = 3R\sqrt{3} = 2 \cdot P_{\triangle A_1B_1C_1}$$,ч.т.д.

Объективной предпосылкой этих познавательных операций является структурность материальных объектов, способность их элементов к перегруппировке, объединению и разъединению. Анализ и синтез являются наиболее элементарными и простыми приёмами познания, которые лежат в основе человеческого мышления, вместе с тем они являются и наиболее универсальными приёмами, характерными для всех его уровней и форм. Иногда они рассматриваются в качестве автономных процессов познавательного мышления, хотя в целом считается, что анализ и синтез не противостоят друг другу, но существуют в единых формах мыслительной активности.

Анализ объекта в процессе мышления предполагает действие особого механизма анализа через синтез, то есть включения познаваемого объекта во всё новые связи и отношения с другими объектами, и выявления, таким образом, его новых качеств и свойств. Анализ при этом — не простое разъединение некой целостности на составные части, он не может осуществляться без трансформации исследуемого объекта, без выражения его существенных сторон в понятийной форме. Синтез предполагает не столько объединение определённых элементов в структуру, но воссоздание всеобщих свойств предмета в различных его конкретных проявлениях. Поэтому в основе деления «аналитичность — синтетичность» лежит не столько доминирование изолированных процессов анализа или синтеза, сколько качественные особенности единых аналитико-синтетических процессов и форм мысли. В научном исследовании они используются как на эмпирическом уровне при изучении внешних признаков и свойств, так и на теоретическом — при выяснении сущности явлений. Анализ и синтез в процессе научного познания, как правило, связаны с рядом других познавательных операций, в частности, с такими, как абстрагирование, обобщение, индукция, дедукция и другими.

Абстрагирование — это приём мышления, который заключается в отвлечении от ряда свойств и отношений изучаемого явления с одновременным выделением интересующих исследователя свойств и отношений. Результатом абстрагирующей деятельности мышления является образование различного рода абстракций, которыми являются как отдельно взятые понятия и категории, так и их системы. Процесс абстрагирования носит двухступенчатый характер, предполагая, с одной стороны, установление относительной самостоятельности отдельных свойств, а с другой — выделение интересующих исследователя свойств и отношений.

Предметы объективной действительности обладают бесконечным множеством различных свойств, связей и отношений. Одни из этих свойств сходны между собой и обусловливают друг друга, другие же отличны и относительно самостоятельны. В процессе познания и практики устанавливают прежде всего эту относительную самостоятельность отдельных свойств, выделяют те из них, связь между которыми важна для понимания предмета и раскрытия его сущности. Процесс такого выделения предполагает, что эти свойства и отношения должны быть обозначены особыми замещающими знаками, благодаря которым они закрепляются в сознании в качестве абстракций. Абстрагирование — универсальный приём познания, без которого немыслимы как научное, так и обыденное познание, как эмпирический, так и теоретический уровни исследований.

Обобщение — это приём мышления, в результате которого устанавливаются общие свойства и признаки объектов. Операция обобщения осуществляется как переход от частного или менее общего понятия и суждения к более общему понятию или суждению. Обобщение осуществляется в тесной связи с абстрагированием. Когда мышление абстрагирует некоторое свойство или отношение ряда объектов, то тем самым создаётся основа для их объединения в единый класс. По отношению к индивидуальным признакам каждого из объектов, входящих в данный класс, объединяющий их признак выступает как общий. На определённых ступенях познания существует предел такому расширению понятий, заканчивающийся выработкой философских категорий предельно широких понятий, составляющих основу научного знания.

Обобщение широко используется в науке не только в эмпирическом исследовании и на первых ступенях построения теоретических знаний, но и является мощным орудием построения самих фундаментальных теорий. В этом смысле обобщение может рассматриваться как переход от менее общего понятия к более общему (где действует формально-логический закон обратного соответствия между содержанием и объёмом понятия), и в более широком плане, — как переход от частного знания к знанию общему. Причём в последнем случае расширение объёма знания не ведёт к обеднению его содержания, наоборот, такое расширение предполагает одновременно и обогащение последнего. Двигаясь, таким образом, по ступенькам абстрагирования и обобщения, от частного к общему, от менее общего к более общему, познание постепенно проникает в сущность изучаемых явлений.

Примеры: обобщения. 1) Изучение формулы n-го члена арифметической прогрессии начинается с рассмотрения конкретных примеров на вычисление различных членов арифметической прогрессии по заданному первому ее члену и разности. При проведении этих вычислений учащиеся используют равенства: $a_2 = a_1 + d; a_3 = a_2 + 2d; \ldots$ Естественно возникает полезное обобщение этих равенств в одну форму: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Под конкретизацией понимают обратный переход – от более общего к менее общему, от общего к единичному. Если обобщение используется при формировании понятий, то конкретизация используется при описании конкретных ситуаций с помощью сформированных ранее понятий.

Пример: а) наглядная иллюстрация; б) подтверждение абстрактных понятий; в) применение к конкретным теоремам = характеристика конкретизации.

б) 1) $a + b = b + a \to 3 + 5 = 5 + 3$;

в) 2) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \to \sqrt{81^2 - 63^2} = \sqrt{(81 + 63)(81 - 63)} = \ldots$

скрещивающиеся прямые (определение и отыскание их в окружающей нас действительности).

В процессе научного поиска исследователю часто приходится, опираясь на уже имеющиеся знания, делать заключения о неизвестном. Переходя от известного к неизвестному, исследователь может либо использовать знания об отдельных фактах, подходя при этом к открытию общих принципов, либо, наоборот, опираясь на общие принципы, делать заключения о частных явлениях. Подобный переход осуществляется с помощью таких логических операций, как индукция и дедукция.

1. ***Индукция*** — это способ рассуждения и метод исследования, в котором общий вывод строится на основе частных посылок.

2. ***Дедукция*** — это способ рассуждения, посредством которого из общих посылок с необходимостью следует заключение частного характера.

Индукция и дедукция широко используются во всех областях научного познания. Они играют важную роль при построении эмпирических знаний и переходе от эмпирического знания к теоретическому.

Индукция представляет собой вид обобщений, связанных с предвосхищением результатов наблюдений и экспериментов на основе данных прошлого опыта. Основой индукции являются опыт, эксперимент и наблюдение, в ходе которых собираются отдельные факты. Затем, изучая эти факты, анализируя их, исследователь устанавливает общие и повторяющиеся черты ряда явлений, входящих в определённый класс. На этой основе он строит индуктивное умозаключение, в качестве посылок которого выступают суждения о единичных объектах и явлениях с указанием их повторяющегося признака, и суждение о классе, включающем данные объекты и явления. В качестве вывода получают суждение, в котором признак, выявленный у совокупности единичных объектов, приписывается всему классу. Ценность индуктивных выводов состоит в том, что они обеспечивают переход от единичных фактов к общим положениям, позволяют обнаруживать зависимости между явлениями, строить эмпирически обоснованные гипотезы и приходить к обобщениям.

В индуктивных рассуждениях различают полную и неполную индукцию.

Полная индукция применима в тех случаях, когда класс изучаемых объектов обозрим и все объекты этого класса могут быть перечислены. Полная индукция основана на изучении каждого из объектов, входящих в класс, и на нахождении на этой основе их общих характеристик. Однако в ряде случаев просто нет необходимости рассматривать абсолютно все предметы того или иного класса, в других случаях это невозможно сделать в силу необозримости класса изучаемых явлений или же в силу ограниченности человеческой практики. Тогда применяют неполную индукцию.

Неполной индукцией является такой приём рассуждения, в котором общий вывод строится на основе изучения ограниченного числа объектов какого-либо определённого класса. Существуют две разновидности неполной индукции: популярная индукция (или индукция через простое перечисление) и научная индукция:

1. Популярная индукция строится как обобщение ряда наблюдений за сходными явлениями, в которых фиксируется какой-либо повторяющийся признак. Фиксация нового признака у ряда объектов происходит здесь, как правило, без предварительного плана исследований: обнаружив сходный признак у первых попавшихся предметов некоторого класса и не встретив ни одного противоречащего случая, переносят указанный признак на весь класс предметов. Отсутствие

противоречащего случая является главным основанием для принятия индуктивного вывода. Обнаружение же такого случая опровергает индуктивное обобщение.

Вывод, полученный путём индукции через простое перечисление, обладает сравнительно малой степенью достоверности и при продолжении исследований, основанном на расширении класса изученных случаев, часто может оказаться ошибочным. Поэтому популярная индукция может применяться в научном исследовании при выдвижении первых и приближённых гипотез. К ней часто прибегают на первых этапах знакомства с новым классом объектов, но в целом она не может служить надёжной основой для получаемых наукой индуктивных обобщений. Такие обобщения строятся главным образом на базе научной индукции.

2. Научная индукция характеризуется поиском причинных зависимостей между явлениями и стремлением обнаружить существенные признаки объектов, объединяемых в класс. Выделяют три основных вида научной индукции:

1. Индукция через отбор случаев. В отличие от популярной индукции, где учитывается лишь количество исследуемых случаев, индукция через отбор случаев принимает во внимание особенности каждой их группы.

2. Индукция через исследование причинных связей. Научная индукция широко используется и как метод нахождения причинных связей путём изучения некоторой совокупности обстоятельств, предшествующих наблюдаемому явлению. Варьируя обстоятельства и осуществляя каждый раз наблюдение за некоторым явлением, исследователь устанавливает его причину. Такой способ характеризует в частности многие виды экспериментального изучения объектов.

3. Индукция через изучение единственного представителя некоторого класса. Научная индукция может строиться не только на основе изучения ряда явлений или объектов, входящих в некоторый класс, но и на основе изучения единственного представителя указанного класса. В этом случае при рассуждении о принадлежности или отсутствии определённого признака у объекта не должны использоваться такие его индивидуальные свойства, которые отличают его от других предметов того же класса.

Указанные разновидности неполной индукции играют исключительно важную роль в познании. Неполная индукция позволяет сократить научный поиск и прийти к общим положениям, раскрытию закономерностей, не дожидаясь, пока будут подробно исследованы все явления данного класса. Однако она заключает в себе и существенную ограниченность, состоящую в том, что вывод неполной индукции чаще всего не даёт достоверного знания. В меньшей степени это относится к научной индукции, некоторые разновидности которой дают достоверные выводы, целиком же — к популярной индукции. Знание, полученное в рамках неполной индукции, обычно является проблематичным, вероятностным. Отсюда возникает возможность многочисленных ошибок, являющихся следствием поспешных обобщений. Подобного рода обобщения особенно характерны для ранних стадий научного исследования.

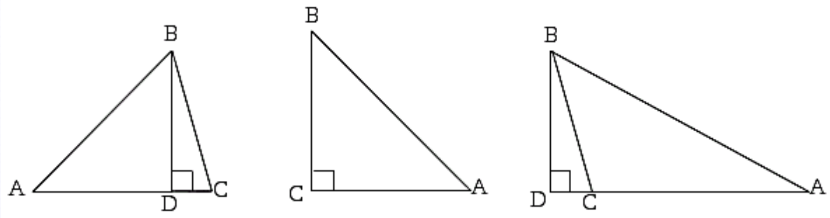
Проблематичный характер большинства индуктивных выводов требует их многократной проверки практикой, сопоставления с опытом следствий, выводимых из индуктивного обобщения. По мере того, как эти следствия совпадают с результатом опыта, увеличивается степень достоверности индуктивного вывода. В этом процессе обоснование знаний, полученных путём индукции, обязательно предполагает движение от индуктивных обобщений к тому или иному частному случаю. Такого рода вывод представляет собой уже дедуктивное умозаключение. Тем самым индукция дополняется дедукцией, что и обеспечивает переход от вероятностного к достоверному знанию.

Индукция имеет три значения:

вид умозаключения: $20 \vdots 10$, $30 \vdots 10$, 20 и 30 оканчиваются цифрой ноль число, оканчивающиеся нулем, делятся на 10 (истинно);

метод исследования: поиск формулы простого числа: $f(n) = n^2 - n + 41 \Rightarrow$
$f(1) = 41, f(2) = 43, f(3) = 47$ и т.д.,
$f(40) = 40^2 - 40 + 41 = 40 \cdot 39 + 41 = 1560 + 41 = 1601$ - простые числа,
однако $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ – число составное;

метод обучения: знакомя учащихся с понятием о высоте треугольника, учитель чертит на доске остроугольный прямоугольный, тупоугольный треугольники и в каждом из них проводит высоту. Из рассмотрения этих чертежей учащиеся приходят к выводу, что если углы прилежащие к основанию треугольника, острые то высота пересекается с основанием, а если один из двух углов, прилежащих к основанию треугольника, тупой, то высота пересекается с продолжением этого основания.



Различают два основных вида индуктивных умозаключений: неполную и полную индукции.

Полной индукцией называется умозаключение, основанное на рассмотрении всех единичных и частных суждений (случаев), относящихся к рассматриваемой ситуации.

Единичные суждения:

окружность может пересекаться с прямой не более чем в двух точках;

эллипс может пересекаться с прямой не более чем в двух точках;

парабола может пересекаться с прямой не более чем в двух точках.

Частные суждения:

Эллипс (в частности, окружность), парабола представляют собой виды конических сечений, образуя множество кривых второго порядка.

На основании этих суждений получаем новое: кривые второго порядка могут пересекаться с прямой не более чем в двух точках (истинное).

Если число случаев конечно и все они рассмотрены, то вывод, сделанный посредством полной индукции можно считать обоснованным.

Например:
от 1 до 10 четыре простых числа;
описать все возможные решения уравнения $x^2 = a : a < 0, a = 0, a > 0$.

Таким образом, заключение, основанное на полной индукции, является в полнее достоверным и она может использоваться как метод строгого научного доказательства (теорема о величине вычисленного угла; «доказать, что запись квадрата числа натурального не может оканчиваться цифрой 7»).

Неполная индукция (как метод исследования) – индукция, при которой не исчерпываются все частные случаи, относящиеся к данной ситуации.

С точки зрения логики неполной индукцией называется умозаключение, основанное на рассмотрении одного или нескольких (но не всех) единичных или частных суждений, относящихся к рассматриваемому понятию (или системе понятий).

В процессе обучения неполная индукция проявляется, например, при изучении переместительного закона сложения, который ведется по схеме: $5+2 = 2+5$, значит: $a + b = b + a$.

В процессе обучения методом неполной индукции не следует пренебрегать, т.к. 1) реализуется принцип обучения «от простого к сложному»; 2) изучение новых абстрактных понятий и суждений проходит естественным путем через опыт и наблюдение, через восприятие и представления; 3) обучает математической деятельности.

Дедукция отличается от индукции прямо противоположным ходом движения мысли и представляет собой переход от общего к частному. В дедукции, опираясь на общее знание, делают вывод частного характера, поэтому одной из посылок дедукции обязательно является общее суждение. Если оно получено в результате индуктивного рассуждения, тогда дедукция дополняет индукцию, расширяя объём полученного знания. Наибольшее познавательное значение дедукции проявляется в том случае, когда в качестве общей посылки выступает не просто индуктивное обобщение, а какое-то гипотетическое предположение, новая научная идея. В этом случае дедукция играет не просто вспомогательную роль, дополняя индукцию, а является отправной точкой зарождения новой теоретической системы. Созданное таким путём теоретическое знание предопределяет дальнейший ход эмпирических исследований и целенаправляет построение новых индуктивных обобщений. В целом, на начальной стадии научного исследования преобладает индукция, в ходе же развития и обоснования научного знания большую роль начинает играть дедукция. Таким образом, эти две операции научного познания неразрывно связаны и дополняют друг друга.

Изучая свойства и признаки явлений, исследователь не может познать их сразу, целиком, во всём объёме, а подходит к их изучению постепенно, раскрывая шаг за шагом всё новые и новые свойства. Изучив некоторые из свойств предмета, он может обнаружить, что они совпадают со свойствами другого уже хорошо изученного предмета. Установив такое сходство и найдя, что число совпадающих признаков достаточно большое, исследователь может сделать предположение о том, что и другие свойства этих предметов совпадают. Ход рассуждения такого рода составляет основу аналогии.

Дедукция имеет три значения:

вид умозаключения: 1) умозаключение от более общего положения к менее общему (или единичному) положению (общее суждение: НОД(a, b)=1, если a и b взаимно простые числа; частное суждение: НОД(14, 15)=1 $\Rightarrow$ новое частное суждение: числа 14 и 15 – взаимно простые); 2) умозаключение от общего положения к общему положению (все частные числа кратны 2; все нечетные не кратные 2 $\Rightarrow$ ни одно четное число не является одновременно нечетным числом); 3) умозаключение от единичного к частному: (число 3 – простое число; число 3 натуральное число $\Rightarrow$ некоторые натуральные числа являются простыми).

метод исследования: для получения нового знания о некотором объекте (понятии, свойстве) находят ближайший к данному объекту (понятию) класс объектов (ближайшее родовое понятие), и применяют к этому объекту (понятию) существенные свойства этого класса объектов (признак рода). Например, изучая свойства квадрата, мы можем сначала установить то, что квадрат является ромбом. Следовательно, все свойства, имеющие место для ромба, имеют место и для квадрата (в частности, диагонали квадрата взаимно перпендикулярны).

метод обучения. Включает: 1) обучение дедуктивным доказательствам и 2) обучение расширению дедуктивной системы включением в нее новых предложений, т.е. преобразованию совокупности предложений, полученных опытным путем, или с помощью индукции, аналогии или других эвристических приемов (методов), в систему предложений, упорядоченных отношением следования, расширяющую уже изученный фрагмент теории.

1) под обучением доказательству понимается обучение мыслительным процессам поиска и построения доказательства, а не воспроизведению и заучиванию готовых доказательств, т.е. учим рассуждать. Обучение поиску и построению доказательств направляется тремя основными вопросами: «Что?», «Откуда?», «Как?».

а) «Что?» – что доказывается?, каково доказываемое предложение, для которого мы ищем доказательство?, как оно формулируется?, все ли понятно в этой формулировке? Нельзя ли иначе сформулировать доказываемое предложение? Что «дано»?, что «требуется» доказать? Эти вопросы связаны с изучением доказываемого предложения, с возможным приведением его к более удобному для выяснения условий и заключения виду («вертикальные углы равны» или: если углы вертикальные, то они равны).

б) «Откуда?» – откуда, из каких посылок следует (может следовать) доказываемое предложение? Из каких же известных истинных предложений данной области (аксиом, определений, ранее доказанных теорем) можно было бы «вывести» это предложение?

в) «Как?» – как доказываемое предложение получается (выводится), из ранее известных предложений (аксиом, определений, теорем)?

Моделирование – это изучение объекта (оригинала) путём создания и исследования его копии (модели), замещающей оригинал с определённых сторон, интересующих познание. Модель всегда соответствует объекту оригиналу - в тех свойствах, которые подлежат изучению, но в то же время отличается от него по ряду других признаков, что делает модель удобной для исследования изучаемого объекта. Метод моделирования представляет собой универсальный приём познания, который использовался ещё в глубокой древности, хотя и не осознавался в качестве особого метода исследования. Использование моделирования в научном познании диктуется необходимостью раскрыть такие стороны объектов, которые либо невозможно постигнуть путём непосредственного изучения, либо непродуктивно изучать их таким образом в силу каких-либо ограничений. К методу математического моделирования в учебном процессе приходится прибегать при решении любой задачи с практическим содержанием. Чтобы решить такую задачу математическими средствами, ее необходимо вначале перевести на язык математики (построить модель), используя абстракции отождествления, идеализации, обобщения.

Задача. 6 коров за 3 дня съедают траву на участке 0,2 га, 8 коров за 4 дня съедают траву на участке 0,3 га. Сколько дней смогут пастись 12 коров на участке площадью 0,6 га? (Прирост травы на участке пропорционален его площади и времени).

x – количество травы, съедаемое одной коровой в день;

y – начальное количество травы на 1 га;

z – прирост травы на 1 га в день;

6 коров за 3 дня съедают траву на участке 0,2 га:

6*x*3=y*0,2+3*z*0,3.

8 коров за 4 дня съедают траву на участке 0,3 га:

8*x*4=y*0,3+4*z*0,3

Решим эту систему:

$$\begin{cases} 18x = 0,2y + 0,6z \\ 32x = 0,3y + 1,2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,1y + 0,3z = 9x \\ 32x = 0,3y + 1,2z \end{cases}$$

Определим первоначальное количество травы на одном га:

$$\begin{cases} 0,3z = 9x - 0,1y \\ 32x = 0,3y + 36x - 0,4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0,1y : 4 = \dfrac{1}{40}y; \\ z = (\dfrac{9}{40}y - \dfrac{1}{10}y)\dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{40}\dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{12}y. \end{cases}$$

12 коров за t дней съедают траву на участке 0,6 га:

$$12tx = 0,6y + 0,6zt \Rightarrow 12t\frac{1}{40}y = \frac{3}{5}y + \frac{3}{5}t\frac{5}{12}y \Rightarrow \frac{3}{10}t = \frac{3}{5} + \frac{1}{4}t \Rightarrow (\frac{3}{10} - \frac{1}{4})t = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 1} = 12.$$

Ответ: 12 дней.

Лекция 9. Понятие. Содержание и объем понятия. Зависимость между объемами понятий. Определение понятия

Понятие – это форма мышления, отражающая предметы в их существенных признаках. Как форма мысли понятие выполняет две задачи: 1) отличает объекты интересующего нас множества от всех остальных объектов; 2) выражает сущность объекта данного множества.

Признак – это то, в чем предметы сходны друг с другом или чем они друг от друга отличаются, т.е. это свойства предмета или отношение между предметами.

Признаки бывают существенные и несущественные, единичные и общие.

Существенные – это признаки, которые необходимо принадлежат предмету, выражают его внутреннюю природу.

Несущественные – это признаки, которые могут принадлежать, но могут и не принадлежать предмету.

Единичные – это признаки, которые характеризуют отдельный предмет.

Общие – принадлежат определенной группе предметов.

В языке понятие выражается словом или словосочетанием.

Содержание и объем понятия

Всякое понятие со стороны структуры характеризуется наличием определенного содержания и объема.

Содержание – это совокупность существенных признаков предмета, которые мыслятся в данном понятии.

Объем – это совокупность предметов, которыя мыслятся в понятии.

В математике понятие обозначается не только термином (слово или группа слов), но и символом – знаком.

С помощью анализа выделяют признаки объектов, а с помощью синтеза соединяют существенные признаки, отвлекаясь от остальных, несущественных, в единое целое – понятие. Кроме абстрагирования здесь имеет место еще процесс обобщения, когда в рассматриваемом множестве предметов находят признаки, присущие всем элементам данного множества. Каждое понятие имеет свои ***существенные признаки***, составляющие содержание понятия. Множество всех тех и только тех объектов, которые обладают этими признаками, составляют ***объем понятия***. Между содержанием и объемом понятия существует ***обратно пропорциональная зависимость***, а, именно, чем шире объем понятия, тем беднее его содержание и наоборот. Например, объем понятия «ромб» шире, чем объем понятия квадрат, зато содержание первого, (все стороны равны) меньше чем содержание второго (все стороны равны и углы прямые).

Если объем понятия состоит из одного предмета, то оно называется ***единичным***. Примерами единичных понятий являются пустое множество, трехмерное евклидово пространство и т.д. Если объем понятия включает в себя более одного предмета, а признаки понятия являются общими для всех этих предметов, то понятие называется ***общим***. Например, такие понятия как, точка, уравнение, задача – общие понятия. Единичные понятия не следует путать с конкретными (отражающими конкретные вещи) и общие с абстрактными (взятые как самостоятельный объект мысли). Например, модель куба – понятие общее и конкретное, а куб – понятие общее и абстрактное. Между понятиями существуют отношения, отражающие связи соответствующих понятиям множеств объектов. Важнейшей формой связи понятий является их ***родовидовое подчинение***, которое складывается при формировании понятий и обнаруживается там и тогда, где и когда имеет место непосредственная преемственность в переходах от одних понятий к другим. Например, объединение понятий «сложение», «вычитание», «умножение», «деление» приводит к понятию «арифметическая операция». Оно будет подчинять четыре предыдущих понятия как ***видовые*** и станет для них ***родовым***.

На базе понятий (видовых) «арифметические операции», «возведение в степень» и «извлечение корня» образуется новое (родовое) понятие «алгебраическая операция», с которыми связаны такие понятия, как «алгебраическое выражение», «алгебраическое уравнение» и др.

Не всегда легко и однозначно можно определить ближайший род. Если между зависимыми понятиями нельзя поставить еще одно понятие, будем иметь отношение ближайшего рода и вида. Так между понятиями «прямоугольник» (ПК) и «четырехугольник» (ЧК) можно поставить понятие «параллелограмм» (ПМ), поэтому ближайшим родом для понятия ПК является понятие ПМ, хотя прямоугольник – такой же четырехугольник, как и параллелограмм.

Для понятия «квадрат» (КТ) имеется несколько ближайших понятий: «прямоугольник» (ПК) и «ромб» (РБ), а ПМ не является ближайшим понятием. Если символами КТ, ПК, РБ обозначить соответствующие множества фигур (объемы понятий), то с помощью символа пересечения множеств запишем КТ=ПК∩РБ, т.е. все квадраты являются одновременно и прямоугольниками и ромбами. Последовательная подчиненность понятий отражается в следующих записях: КТ⊂ПК⊂ПМ⊂ЧК, КТ⊂РБ⊂ПМ⊂ЧК. Перемещение по ступенькам лестницы родовидовых отношений понятий в направлении от вида к роду ведет к расширению, обобщению понятий, а обратный переход – к их ограничению.

Существуют и другие отношения понятий, которые дают возможность характеризовать понятия как сравнимые, когда у них есть общие признаки (например, треугольник и квадрат), и несравнимые, когда таких признаков нет (например, треугольник и процент). Сравнимые понятия могут быть совместимыми и несовместимыми в зависимости от того, совпадают их объемы (полностью или частично) или не совпадают. Совместимые понятия могут быть равнозначащими (совпадающими, например, полупрямая и луч), перекрещивающимися (пересекающимися, например, целое число и положительное число) подчиненными и подчиняющими (квадрат числа и степень числа), соподчиненными (ромб и прямоугольник по отношению к параллелограмму). Несовместимые понятия могут быть противоположными (например, равносторонний и неравнобедренный треугольники), противоречащими (например, равнобедренный и неравнобедренный треугольники), соподчиненными (например, логарифмическое и тригонометрическое уравнения по отношению к трансцендентному уравнению).

Определение понятия (или дефиниция, сокращено Df) есть раскрытие содержания этого понятия, перечисление его существенных, отличительных признаков с помощью которых выделяются все обладающие этими признаками объекты, и только такие объекты и объединяются в единое целое с помощью данного понятия.

Понятия находятся в родовидовом отношении, и наиболее удобный общий способ определения понятия – ***определение через ближайший род и видовое отличие***. К отысканию ближайшего рода следует стремиться потому, что в таком случае мы подходим ближе к определяемому понятию, его объему и благодаря этому уменьшается совокупность видовых признаков в определении.

Например, для квадрата ближайшими родовыми понятиями будут «прямоугольник» и «ромб» и в каждом случае определение содержит по одному видовому признаку квадрата: «Квадрат есть прямоугольник, у которого все стороны равны»; «Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые».

Если же взять не ближайший род – параллелограмм, то видовых признаков квадрата будет два: «Квадратом называется параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые».

Определение через ближайший род и видовое отличие является самым распространенным в математике. Однако наряду с ним используются и другие разновидности определений, многие из которых можно свести к родовидовой форме определения.

Генетическое определение показывает, как возникает, образуется данный предмет или явление. Например, «Линейным углом двугранного угла называется плоский угол, получающийся в пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру этого двугранного угла». В генетическом определении часто заложен также способ построения этого объекта. Например, в определении линейного угла содержится алгоритм его построения: нужно выбрать точку на ребре двугранного угла и в этой точке восстановить лучи, перпендикулярные ребру в каждой из граней двугранного угла. Генетическое определение можно дать также окружности, кругу, сфере, шару, цилиндру, конусу и ряду других понятий.

Существуют ***рекуррентные или индуктивные определения*** (арифметическая и геометрическая прогрессии), когда указывается способ получения нового, кроме первого, члена через предыдущий.

Встречаются иногда определения, раскрывающие значение термина путем такого перечисления объектов, которое создает представление об объеме и содержании понятия. Например, «Натуральный ряд чисел – это 1,2,3, и т.д.».

В математике некоторые определения удобно выражать символическим языком в виде равенств: (-a)(-b)=+ab.

Существуют логические формы, которые не являются определениями, но близки к определению, иногда заменяют или дополняют его. Приведем примеры. Описание понятия обычно применяется в тех случаях, если невозможно или нецелесообразно вводить определение. Таким образом вводятся первичные понятия – число, точка, прямая плоскость, множество и др. В определении определяемое понятие вводится через уже известное понятие, но самое первое понятие каждой науки еще не к чему сводить, поэтому ввести его через определение невозможно. Описательно приходится вводить несколько первичных понятий. Иногда заменяют описанием логически возможное, но слишком сложное, громоздкое и неудобное понятие. Иногда описание понятия может не только заменить его определение, но и дополнять такой информацией, которая конкретизирует понятие, расширяет связи с другими понятиями, полнее раскрывает его содержание, помогает учащимся глубже понять и прочнее усвоить новое понятие. Особенно часто этот прием введения новых понятий используется в младших и средних классах, когда определению понятия предшествует его описание, рассмотрение различных примеров и задач где используется это понятие.

В средней школе встречается еще так называемое ***косвенное определение*** понятия с помощью аксиом. Так в геометрии аксиомы раскрывают свойства и отношения первичных понятий «точка», «прямая» и др. В математике применяется аксиоматическое определение, которое дается с помощью совокупности аксиом, включаемых в определение понятия без дополнительного описания его. Например, определения натуральных чисел с помощью системы аксиом Пеано, понятие группы, поля, кольца и др.

Отметим **правила построения определения**: 1) оно должно быть полным и точным, четким и ясным; 2) нельзя определять понятие через неизвестное понятие или неизвестный признак; 3) нельзя допускать логического круга: А определять через В, а В – через А; 4) избегать отрицательных определений, т.е. указаний на то, чем определяемый объект не обладает (например, определение «нечетная функция есть функция не являющаяся четной» не будет верным определением, поскольку существуют функции которые не являются ни четными, ни нечетными).

Каждое понятие должно быть правильно понято, сознательно и четко усвоено всеми учащимися еще на уроке. Эта цель должна достигаться уже в процессе введения понятия, но понятие должно закрепляться на данном и повторяться на последующих уроках путем воспроизведения учащимися определения (или описания), приведения иллюстрирующих и конкретизирующих его примеров, проведения логического анализа определения и другой творческой работы, использования понятия в суждениях и умозаключениях. Контроль за усвоением понятия осуществляется обычно в виде опроса учащихся, при котором нужно, как правило, требовать подтверждение определения примерами, причем не только готовыми, взятыми из учебника, но и придуманными самостоятельно. Это требование должно стать правилом, причем ученики должны знать о нем, и дома, готовясь к занятиям, подыскивать свои примеры.

Вторым хорошим приемом при усвоении и запоминании определения понятия, является работа с самим определением, когда требуется среди несколько приведенных определений выбрать правильное и объяснить почему остальные определения являются неверными или неточными. Следует также проводить работу (особенно среди слабых учеников), требующую в текст определения вставить одно или несколько слов, словосочетаний. Все это приводит к неформальной работе над понятием и способствует активному запоминанию определений. Эта творческая мыслительная работа развивает мышление школьников и способствует сознательному, глубокому и прочному усвоению сущности, содержания и объема понятия, исключает его формальное изучение, механическое заучивание определения. Формальное, поверхностное усвоение понятий ведет к их смешению, неточному пониманию и неправильному использованию, а в конечном счете – к формальному прохождению всего курса, плохому, поверхностному его усвоению. Другие понятия, введенные через недостаточные осмысленные понятия, будут еще более туманными, и правильное самостоятельное использование их в умозаключениях становится для некоторых учащихся невозможным. Такие понятия не могут «работать», и в результате не будет работать вся совокупность формальных математических знаний, обреченная на скорое забывание. Умственное развитие от такого обучения также незначительно.

Каждый ученик должен знать определения изученных понятий, однако ***требовать заучивания формулировок понятий без их осознания не стоит, так как это может привести к формализму***. Надо ориентировать школьников на смысловое, логическое запоминание, которое должно стать результатом осмысливания определения, его структуры в процессе изучения и применения. Выделение родового понятия и видовых признаков, подыскание нескольких своих по возможности разнообразных примеров и проверка их на предмет полного удовлетворения всем требованиям определения – эффективное средство достижения сознательного усвоения понятия и его определения. Необходимо постепенно раскрывать перед учащимися общую логическую структуру определения, учить самостоятельно конструировать его для новых понятий. Ученики должны знать, что дословное соблюдение формулировки, данной в учебнике, весьма желательно, хотя от ее формы можно отступить, передать частично «своими словами», но все содержание книжной формулировки обязательно сохранить точно. Когда ученик формулирует определение «своими словами», здесь скорее всего возможны ошибки, которые помогают выявить значение некоторых необходимых элементов определения и пробелы в усвоении понятия, с тем чтобы неотложно устранить их. Заученная формулировка может скрывать подобные пробелы. Учитель должен учить школьников выражать мысли «своими словами», поощрять их к этому, терпеливо подводить к самостоятельному исправлению ошибки. При дословных книжных формулировках особенно необходимо проверять сознательность их усвоения учащимися. На примерах таких формулировок, в которых нельзя пропустить ни одного слова, учитель прививает ученикам вкус к высокой логической культуре мышления и речи, учит их выражаться лаконично и точно. Нельзя допускать поспешности при введении новых понятий, особенно если они сложны, трудны для учащихся и обладают высокой степенью абстракции (например, «функция», «предел», «производная», «интеграл» и др.). Практика показывает, что время, дополнительно затраченное при введении нового понятия на всестороннее, глубокое его изучение и сознательное усвоение, окупается в дальнейшем благодаря более легкому и результативному усвоению последующих связанных с этим понятием вопросов. И наоборот, результатом чрезмерной поспешности при изучении нового сложного понятия являются дальнейшие затруднения и не всегда восполнимые потери в достигаемом уровне знаний. В этом и заключается одна из причин того, что одна и та же тема или раздел учебного материала у одних учителей считается трудным для учащихся, а у других никаких затруднений не вызывает. Например, при введении достаточно сложного понятия «призма», можно поступить следующим образом. Вначале разбирается наглядный пример какой-то призмы, хотя до этого школьники уже не раз сталкивались с этим многогранником при решении задач, отмечаются ее наиболее характерные свойства: равенство и параллельность оснований, равенство и параллельность боковых ребер и др. Затем вводится точное определение понятия призмы. Призмой называется многогранник, у которого две грани – n-угольники, а все остальные n граней – параллелограммы. После этого следует еще поработать с этим определением, предлагая учащимся найти ошибки в следующих «определениях». 1) Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы. 2) Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные n-угольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные n граней – параллелограммы. 3) Призмой называется многогранник, у которого две грани –n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней – параллелограммы. 4) Призмой называется многогранник, у которого две грани – плоские n-угольники, а все остальные n граней – параллелограммы. Такая неформальная работа с определением призмы позволит школьникам яснее осознать это понятие и лучше его усвоить. При всех видах повторения продолжается работа по дальнейшему усвоению математических понятий. Главное внимание при этом уделяется не воспроизведению определений, а различным видам творческой работы учащихся с понятиями, их применениями при решении разного рода задач, различным видам связей и отношений между понятиями.

Отметим некоторые ***ошибки***, допускаемые учащимися в определениях. Иногда учащиеся допускают «порочный круг» в определении. Например, прямой угол определяют, как угол со взаимно перпендикулярными сторонами, а взаимно перпендикулярные прямые – через понятие прямого угла. Но определить прямой угол через понятие перпендикулярности прямых имеем право лишь в том случае, если перпендикулярность прямых была уже определена ранее, причем не через понятие прямого угла, а через другое известное понятие.

Другим примером «порочного круга» может служить определение иррациональных чисел через вещественные («вещественные, не являющиеся рациональными») и вещественных через иррациональные («числа рациональные и иррациональные называются вещественными»). Иногда ученики действие сложения определяют через сумму, а сумму через сложение. Чтобы избежать таких логических ошибок, учащимся следует разъяснять необходимость придерживаться определенной последовательности введения понятий, принятой в том учебнике, по которому изучается курс математики в данном классе. Недопустима в определениях тавтология, когда объект определяют через самого себя, хотя и в других выражениях, например: «Делением называется действие, при котором одно число делят на другое»; «Многоугольники называются подобными, если они подобны между собой» и т.п. Логически несовершенное определение получают тогда, когда в него включают логически зависимые друг от друга свойства. Например, в одном из школьных учебников содержалось такое определение: «Треугольники называются подобными, если 1) углы одного соответственно равны углам другого; 2) стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого». Каждое из этих двух свойств может служить признаком определяемого понятия, а другое можно выбросить из определения и доказать, как теорему (это фактически есть первый и третий признаки подобия треугольников). Иногда учащиеся дают такое определение: «Параллелограммом называется такой четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны и параллельны», т.е. включают свойство равенства противоположных сторон, которое является логическим следствием признака понятия (попарной параллельности противоположных сторон) и составляет содержание следствия из теоремы. Хотя включение в определение логически зависимых друг от друга свойств и не ведет к фактическому изменению содержания и объема понятия, однако оно является свидетельством невысокого логического уровня математических знаний ученика. В такой ситуации следует предложить ученику привести пример такого параллелограмма, в котором противоположные стороны были бы попарно параллельны, но не равны. Такой фигуры ученик не придумает, а соответствующая теорема подскажет, что ее и быть не может. Следовательно, нет основания включать в определение параллелограмма требование равенства противоположных сторон, ибо оно и без того выполняется. В определении параллелограмма встречаются ошибки, изменяющие содержание понятия и искажающие сущность определения: «Параллелограммом называется четырехугольник с параллельными сторонами» (или: «у которого имеются параллельные стороны»). Выражение «с параллельными сторонами» неопределенно: все четыре стороны четырехугольника параллельными между собой быть не могут, поэтому оно означает параллельность двух сторон, т.е. признаки вида указаны не полностью, содержание понятия сузилось, а объем его расширился (охватывает параллелограммы и трапеции). Это результат пропуска в определении только одного слова («попарно»). Здесь как правило, необходимо привести ученика к исправлению своей ошибки, что можно сделать, например, так: «Нарисуйте параллелограмм АВСД; сколько параллельных сторон? (четыре); следовательно, АВ$\|$АД? (нет, не параллельны); можно здесь говорить о четырех параллельных сторонах? (нельзя); значит в вашем определении говорилось только о двух параллельных сторонах и вот такую фигуру (учитель рисует трапецию) придется называть параллелограммом». Полученное противоречие отвергает определение, данное учеником, и в этом заключается один из основных методов опровержения ошибочных суждений и определений – приведение к противоречию. Часто ученики дают следующее определение: «Угол, больший прямого, называется тупым» (по аналогии с определением острого угла). В качестве контрпримера учитель предлагает угол в 300^0 , с помощью которого выясняется, случайно ли упущено ограничение «меньше 2d».

Учащиеся допускают ошибки в использовании родового понятия, когда они либо совсем опускают это понятие и заменяют его другими словами, либо берут не ближайший род. Например, медиану определяют не через понятие отрезок, а как «прямую, соединяющую вершину треугольника с серединой противоположной стороны». Но медиана - отрезок, а не прямая. Требуя от учащихся содержательной точности определений, учитель добивается точности в усвоении математических понятий, знаний и оттачивает логическое мышление. Как правило, ошибки следует разбирать, привлекая всех учащихся к их выявлению и устранению, пользуясь при этом контрпримерами или приведением к противоречию.

Классификацией понятия называется деление (разбиение) объема этого понятия на подмножества (классы), удовлетворяющие следующим требованиям: 1) деление производится по одному и тому же существенному признаку – основанию деления; 2) все подмножества не пересекаются; 3) объединение всех подмножеств должно давать объем понятия; 4) для подмножеств (видов) множество должно быть ближайшим родовым понятием, а виды соподчиненными. Отметим, что данное определение классификации относится к разновидности аксиоматических определений: четыре включенных в него требования выступают в роли аксиом – априорно присвоенных определяемому понятию свойств.

Родословная понятия – это построение логического «дерева» возникновения понятия. Например, родословная понятия «треугольник» отражает этапы формирования этого понятия, начиная от первичных понятий. Напомним определение. «Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки.» Чтобы построить родословную некоторого понятия, необходимо знать основные неопределяемые понятия, которые приведены в данном учебнике, а также основные отношения между ними и определения тех понятий, на которых базируется понятие, родословную которого мы строим. Например, в учебнике В.В. Шлыкова «Геометрия 8» 2005 года издания основными неопределяемыми понятиями являются: точка, прямая, плоскость, множество. Затем вводятся понятия фигуры, отрезка, ломаной, простой ломаной, замкнутой ломаной. Наконец дается следующее определение треугольника. «Треугольником называется фигура, образованная трехзвенной замкнутой ломаной и ограниченной частью плоскости, для которой эта ломаная служит границей.»

Виды понятий

Понятия можно классифицировать по объему и по содержанию.

По объему понятия делятся на ***единичные, общие и пустые; по содержанию – на конкретные и абстрактные; положительные и отрицательные; безотносительные и соотносительные; собирательные и несобирательные.***

Единичные – это понятия, объем которых составляет один элемент («Брестский государственный университет»).

Общие – это понятия, объем которых составляет более одного элемента («психолог», «факультет»).

Общие понятия могут быть ***регистрирующими*** и ***нерегистрирующими***.

Регистрирующие – это понятия, число элементов которых поддается учету, регистрируется, они имеют конечный объем («планеты Солнечной системы»).

Нерегистрирующие – это понятия, имеющие бесконечный объем, количество мыслимых в них элементов не поддается учету («студент», «здание»).

Пустые – это понятия, объем которых составляет пустое множество; в них мыслятся предметы, существование которых в принципе невозможно («Шурале», «вечный двигатель»).

Конкретные – это понятия, в которых мыслится предмет или совокупность предметов как нечто самостоятельно существующее («дерево», «компьютер»).

Абстрактные – это понятия, в которых мыслится не целый предмет, а один из его признаков, т.е. свойство или отношение («равенство», «белизна»).

Положительные – это понятия, характеризующие наличие у предмета признака («благородный», «порядок»).

Отрицательные – это понятия, характеризующие отсутствие у предмета признака; эти понятия в языке выражаются словом или словосочетанием с отрицательной частицей («беспорядок», «неблагородный»). Но если данное слово не употребляется без отрицательной частицы, то оно выражает положительное понятие («ненависть», «безалаберность»).

Безотносительные – это понятия, в которых мыслятся предметы, существующие самостоятельно, вне зависимости от другого предмета («город», «автомобиль»).

Лекция 10. Формирование математических понятий: психологические закономерности формирования математических понятий

Теория формирования научных понятий у школьников разрабатывалась многими психологами: Д.Н. Богоявленским, Л.С. Выготским, П.Я. Гальпериным, В.В.Давыдовым, Е.Н. Кабановой-Меллер, Н.Я. Менчинской, Н.Ф. Талызиной и др.

Все психологи неразрывно связывают усвоение понятий с мышлением. Термин «усвоение» по отношению к понятиям введен в психологию для обозначения процесса образования научных понятий у школьников. Существуют различные точки зрения по вопросу усвоения понятий. Л.С. Выготский считает, что научные понятия становятся доступными ребенку не сразу. «Они могут быть долго непостижимы в системе, хотя каждое из них порознь и понятно ребенку». Он вводит термин «спонтанное» (то есть «житейское») понятие, которое формируется у ребёнка в дошкольном возрасте путём «проб и ошибок» и отмечает, что «развитие спонтанных понятий должно достигнуть некоторого уровня, создать предпосылки в умственном развитии, для того чтобы усвоение научных понятий вообще стало для ребенка возможным». Отрезок развития ребенка, с которого началось развитие научных представлений, он называет зоной «ближайшего развития». Точку зрения Л.С. Выготского во взгляде на продолжительность формирования понятий во времени разделяет Н.Я. Менчинская и другие психологи, которые считают, что содержание понятия усваивается не сразу, а постепенно, по частям. «Данное извне понятие формируется в той мере, в какой оно является результатом мыслительной деятельности учащихся». Отсюда возникают последовательные этапы в овладении содержанием понятия, постепенное «движение от неполного знания к полному». Иное мнение по этому вопросу высказывают П.Я. Гальперин и Н.Ф. Талызина. Они полагают, что формирование понятий не следует растягивать на продолжительный период времени, что это можно осуществить в один прием, когда содержание нового понятия усваивается одновременно, в полном объеме и в правильном соотношении признаков, сразу применяется на всем диапазоне намеченного обобщения. П.Я. Гальперин вводит понятие «динамического стереотипа», который автоматически срабатывает при встрече ребенка с новым материалом и «прежде, чем ребенок приступает к «сознательному анализу» материала, перед ним выделяется совокупность значащих признаков и он непосредственно видит понятие (или наоборот, видит, что его нет)». «Видеть» понятие - значит уметь определить, обладает наблюдаемый объект выделенной совокупностью существенных признаков или нет.

Следует сказать, что содержание многих математических понятий не может быть раскрыто на одном уроке, а иногда и в процессе изучения одной темы. По мере изучения математики знания о содержании и объёме понятий постоянно углубляются. В этом случае содержание понятия раскрывается постепенно, на основе установления связей и отношений данного понятия с другими.

В работах психологов высказываются и обосновываются различные точки зрения на способы формирования научных понятий у школьников.

Н.А. Менчинская отмечает, что усвоение понятий в процессе обучения подчиняется определенным закономерностям. «Решающую роль в этом отношении играет характер того источника, той основы, на которой формируется понятие. В одних случаях сущность последнего может быть раскрыта в процессе восприятия фактов и явлений, в других основным источником является самоопределение, в котором сущность понятия выражена в обобщённой форме». Отсюда два пути усвоения понятия ребёнком:

- от конкретного к общему;

- от бессодержательно-абстрактного к конкретному и через конкретное к подлинно абстрактному.

Мотивация изучения математических понятий

Вопросами мотивации учения занимались и занимаются такие психологи как Л.И. Божович, Д.Н. Богоявленский, В.В. Давыдов, Ю.Н. Кулюткин, Для характеристики активности личности во время обучения психологи вводят понятие «мотивационной сферы» учения - индивидуальную и постоянно изменяющуюся у каждого ребёнка структуру, состоящую из разных побуждений. Место доминирующего побуждения в этой структуре неустойчиво и может быть занято то одним, то другим побуждением, в зависимости от условий обучения, обстоятельств общения с окружающими и т. д. А. К. Маркова отмечает, что для успеха учебно-воспитательного процесса «необходимо учитывать сложное строение мотивационной сферы, воздействовать на каждую из её сторон».

Одна из составляющих мотивационной сферы, которую надо учитывать в процессе обучения, это потребность. Всякая деятельность, в том числе и деятельность по изучению понятий, начинается с потребностей. Нужда, потребность - главный источник психического развития человека. Под потребностью в психологии понимают «направленность активности ребёнка, психическое состояние, создающее предпосылку деятельности». Так как всякому ребёнку свойственна потребность в новых впечатлениях, то на неё учитель должен прежде всего опереться при изучении нового понятия, актуализировать эту потребность, сделать её более чёткой, осознанной у большинства учащихся. Примеры:

1. Мотивировать изучение смежных углов можно потребностью рассмотрения не только отдельных фигур, но и их объединений. Учитель предлагает учащимся построить угол и дополнить одну из его сторон до прямой. Получившаяся фигура является объединением двух углов (известных фигур), но обладает и новыми, присущими только ей свойствами, поэтому возникает потребность подробнее изучить эту фигуру.

2. Необходимость изучать квадратные уравнения ещё в древности была вызвана потребностью решать задачи с нахождением площадей земельных участков и с земляными работами военного характера, а также с развитием астрономии и самой математики. Поэтому предварить изучение понятия квадратное уравнение можно

решением практической задачи: «Найти длину и ширину сада, если его площадь 1,3 га, а одна из сторон на 30 м больше другой». Решая задачу учащиеся приходят к неизвестному им уравнению $x^2 + 30x - 13000 = 0$. Возникает потребность научиться его решать.

Другой важный аспект мотивационной сферы, выделяемый психологами, - мотив. «Мотивом, наиболее адекватным учебной деятельности, является направленность школьников на овладение новыми способами действий». Применительно к изучению математических понятий мотивом может служить желание овладеть способом решения задач нематематического характера (внешние мотивы), а для этого требуется познакомиться с новым математическим объектом и его свойствами. К числу таких задач относятся задачи практического, физического, биологического, химического характера и т.д. В психологии представление – это «чувственный образ явления или предмета, который в данный момент не воспринимается, но был воспринят ранее в той или иной форме». На основе таких представлений человек может описывать свойства предмета или явления, отсутствующего в настоящий момент. У человека нет иного способа общения с внешним миром, чем с помощью уже существующих и вновь создаваемых представлений.

В педагогической трактовке понятие «формирование» углубляет феномен развития. Формирование – это «процесс положительных качественных изменений, приведение к единым требованиям и придание цельности составным элементам каких-либо представлений, свойств, качеств человека, которые происходят под влиянием организованных педагогических воздействий». Отсюда следует, что **формирование элементарных математических представлений** – это процесс положительного качественного изменения тех образов, которые сложились в сознании ребенка обо всех компонентах этих представлений – количестве, числе, цифрах, счете, величине, формах, пространстве, времени, решении арифметических задач, логических операциях мышления – и придание этим представлениям определенной цельности и системности.

Пропедевтика (гр. propaideuo- обучаю предварительно) – введение в какую-либо науку. Следовательно, речь идет о предварительной подготовке учащихся к формированию математических понятий.

Математические понятия – важнейшая неотъемлемая часть науки и учебного предмета математики. Каждая математическая наука и учебная дисциплина начинается с первичных, основных неопределяемых понятий. Все другие определяются и называются определяемыми, выводными или производными. Это можно сделать в систематических курсах математических дисциплин, т.е. на определенном уровне развития учащихся.

На начальной ступени обучения учащиеся знакомятся с большинством математических понятий наглядно, путем созерцания конкретных примеров или практического оперирования ими, например, при счете их. При этом учитель опирается на жизненный опыт учащихся.

Способы введения мат. понятий на начальном этапе изучения математики:

1) первое знакомство с математическими понятиями в начальных классах школы фиксируется с помощью термина и символа, без описания или определения понятия. Например, фигуры треугольник, квадрат, прямоугольник - еще в детском саду. Термин «меньше» и символ $2<9$; термин «сложение» и символ «$+$» и т.д.;

2) появляются первые определения (2 кл.) – «Сложение одинаковых слагаемых называется умножением»;

3) некоторые понятия вводятся только с помощью термина (например, год, неделя, час, минута и др.);

4) описательное введение понятий (нумерация в пределах тысячи, меры длины);

5) некоторые понятия определяются генетически (окружность, 1м^2 - это квадрат со стороной 1 м).

Велика роль пропедевтики алгебраического и геометрического материала, особенно в 5-6 классах, где наряду с систематическим курсом арифметики изучаются начала алгебры и геометрии. Например, в учебнике Латотина Л.А., Чеботаревского Б.Д. «Математика 5»: геометрические понятия – окружность, круг, угол, смежные и вертикальные углы, прямоугольный параллелепипед, объем; алгебраические понятия - уравнение, выражение и его значение.

Таким образом, в курсе математики ведется подготовка к изучению курсов алгебры и геометрии. Но не только на уроках математики, возможна пропедевтика и в других курсах, например, физики – понятие производной (мгновенная скорость), черчения – изображение пространственных фигур в стереометрии и др.

В отдельных случаях, когда изучение понятия представляет собой существенные трудности, период первоначального ознакомления с понятием растягивается во времени, на протяжении которого учащиеся многократно сталкиваются с понятием, постепенно расширяя круг представлений о нем. Например, одно из важнейших понятий современного школьного курса математики - *функция*. Усвоение этого понятия возможно лишь при условии перехода от статического к диалектическому мышлению, что совершается не вдруг. В пятом и шестом классах сознание учащихся готовится к восприятию этого понятия. В качестве пропедевтики понятия функция в учебниках пятого и шестого классов рассматриваются различные упражнения. Функция как зависимость, закон соответствия, соответствие между отдельными элементами некоторых множеств проявляют себя в таких упражнениях, как составление выражений, отыскание значений выражения в зависимости от значений параметров, входящих в него. Функциональной пропедевтикой является изучение темы «Координатная плоскость».

Формирование понятий - сложный психологический процесс, начинающийся с образования простейших форм познания - ощущений - и протекающий часто по следующей схеме: **ощущения - восприятие - представление - понятие**.

Обычно разделяют этот процесс на две ступени: чувственную, состоящую в образовании ощущений, восприятия и представления, и логическую, заключающуюся в переходе от представления к понятию с помощью обобщения и абстрагирования.

Чувственная ступень в процессе формирования понятий соответствует первому этапу пути познания вообще, то есть “живому созерцанию”, и поэтому ее осуществление требует широкого применения наглядности. Если ученику никогда не показывали модель куба или предметы, имеющие форму куба, то у него не может образоваться представления, а, следовательно, и понятия куба.

Процесс формирования понятий будет эффективным, если он ориентирует учащихся на обобщение и абстрагирование существенных признаков (характеристического свойства) формируемого понятия.

Рассмотрим процесс формирования понятий на примере понятия куба.

Детям (6-7лет) показывают много предметов, отличающихся формой, размерами, окраской, материалом, из которого они сделаны, причем таких, что одни из них имеют форму куба, а другие нет. Дети, после того как им показывают на одно из этих тел и говорят, что это куб, безошибочно отбирают все те тела, которые имеют такую же форму, пренебрегая различиями, касающимися размера, окраски, материала. Здесь выделение из класса предметов подкласса, отождествление тел производится по одному еще недостаточно проанализированному признаку - внешней форме. Дети еще не знают свойств куба, они распознают его только по форме.

Дальнейшая работа по формированию понятия куба состоит в анализе этой формы с целью выяснения ее свойств. Учащимся предлагают путем наблюдения найти, что есть общего у всех отобранных тел, имеющих форму куба, чем они отличаются от остальных. Устанавливается, что у каждого куба 8 вершин, 6 граней. Но у некоторых тел, которые мы не отнесли к кубам, тоже 8 вершин и 6 граней. Оказывается, у куба все грани - квадраты (эта работа обычно проводится после аналогичной работы по выделению класса квадратов из множества плоских фигур).

Остается один шаг к образованию понятия куба - переход от представления к понятию путем абстрагирования, то есть отделения общих свойств от прочих, несущественных. Разумеется, на начальном этапе обучения нельзя еще говорить о полном абстрагировании этих свойств, у детей еще не образовывается понятие куба в чистом виде, они еще не определяют куб и противопоставляют его прямоугольному параллелепипеду с различными измерениями. В дальнейшем же, когда будет сконструирована логически упорядоченная система геометрических понятий (в рамках систематического курса геометрии), учащиеся узнают, что куб - это вид прямоугольного параллелепипеда. В этом - диалектика развития понятий.

Приведенный пример показывает, что процесс формирования понятий, как правило, длительный процесс, способствующий развитию обобщающей и абстрагирующей деятельности учащихся.

Однако формирование математических понятий не всегда протекает по приведенной выше схеме, начинающейся с ощущений. В частности, когда формируемое понятие связано, в той или иной форме, с категорией бесконечности (как, например, понятия прямой, плоскости, плотности множества рациональных чисел, предела и др.), то чувственная ступень играет меньшую роль, так как мы не в состоянии воспринимать бесконечное (ни в какой форме), и наглядность из средства, способствующего формированию понятия, иногда становится тормозящим фактором.

Например, бесконечность множества рациональных чисел, лежащих между любыми двумя рациональными числами, не подкрепляется, а, наоборот, “опровергается” конкретным восприятием конечного отрезка, содержащего это множество. Свойство плотности множества рациональных чисел нельзя обнаружить опытным путем, оно не подтверждается наглядными геометрическими представлениями, а устанавливается логически. Этот и другие многочисленные примеры подтверждают выводы психологов о том, что восприятие наглядного материала в силу объективных особенностей этого материала может играть не только положительную, но и отрицательную роль.

Сущность этапа ***мотивации*** заключается в подчеркивании важности изучения понятия, в побуждении школьников к целенаправленной и активной деятельности, в стремлении вызвать интерес к изучению понятия.

Введение определения понятия может быть реализовано в рамках различных методов обучения: объяснительно-иллюстративного, когда учитель сам вводит новое понятие, и в рамках частично-поискового, когда учащиеся привлекаются к поиску нового определения. Эти методы получили названия соответственно абстрактно-дедуктивного и конкретно-индуктивного.

Схема применения *конкретно-индуктивного* метода:

- анализируется эмпирический материал (при этом, кроме индукции, привлекаются и другие логические методы: анализ, сравнение, абстрагирование, обобщение);

- выясняются общие признаки понятия, которые его характеризуют;

- формулируется определение;

- определение закрепляется путем приведения примеров и контрпримеров;

- дальнейшее усвоение понятия и его определения происходит в процессе их применения.

Схема применения *абстрактно-дедуктивного* метода:

- формулируется определение понятия;

- приводятся примеры и контрпримеры;

- дальнейшее усвоение понятия и его определения происходит в процессе их применения.

Абстрактно-дедуктивный метод применяется обычно в тех случаях, когда введение понятия хорошо подготовлено предшествующим обучением. Например, после введения понятия параллелограмма вводится понятие прямоугольника.

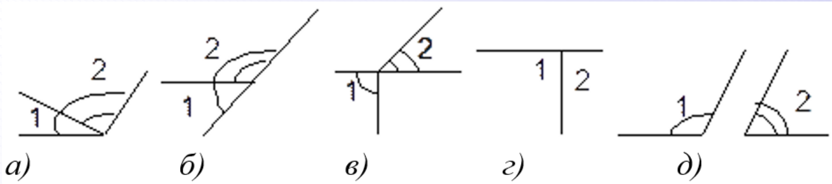
При том и другом методах содержанием обучения является выделение существенных свойств понятия и отделение их от несущественных. Конкретно-индуктивный метод требует больше учебного времени при своем использовании на уроке, но обеспечивает большую активность учащихся и обратную связь, на основании которой учитель делает выводы об эффективности работы по изучению понятий.

Введению определения на уроке предшествует работа учителя по выделению существенных и несущественных свойств понятия, определение которого подлежит изучению, анализу логической структуры этого определения, подбору примеров и контрпримеров для закрепления и возможностей их вариации, анализу ситуаций, в которых наиболее часто встречается вводимое понятие. Анализ заканчивается выбором метода введения определения.

Рассмотрим пример подготовки учителя к уроку по теме «Смежные углы». Определение смежных углов имеет два существенных свойства: наличие у обоих углов общей стороны и то, что вторые стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. Эти свойства связаны между собой конъюнктивно. Объект подпадает под понятие, если имеет место каждое свойство. Это значит, что контрпримеров этому понятию можно привести три: когда отсутствует первое или второе, или оба свойства сразу. Какими несущественными свойствами обладает это понятие, то есть какие свойства допускают вариации? Это соотношения между величинами углов, произвольность расположения на плоскости. Целесообразно вместе с учащимися выделять и проговаривать не только существенные свойства, но и несущественные. Такая работа позволяет учащимся легче узнавать объекты в наиболее часто встречающихся задачных ситуациях, в которых участвуют смежные углы. Такими ситуациями для смежных углов являются ситуации, когда две прямые пересечены третьей прямой, в треугольниках, в разных видах четырехугольников.

Поскольку вводимое понятие смежных углов не очень сложное, то учитель может предпочесть частично-поисковый метод введения понятия. При этом цель урока может быть сформулирована по-разному: получить определение смежных углов с помощью учащихся, научить учащихся его формулировать, узнавать смежные углы в различных ситуациях, подводить под определение понятия смежных углов, исправлять ошибочные определения.

Рассмотрим фрагмент урока по введению понятия смежные углы. Классу представлены следующие рисунки:



Далее процесс восприятия и осознания направляется вопросами учителя к предложенным рисункам:

- назовите рисунки, на которых изображены два угла, имеющие одну общую сторону;

- назовите рисунки, на которых сторона одного угла является дополнительной полупрямой для стороны другого угла;

- на каких рисунках изображены углы, которые одновременно удовлетворяют двум предъявленным требованиям?

В беседе роль учащихся может быть усилена, а вопросы можно поставить так, что уровень самостоятельности учащихся повысится:

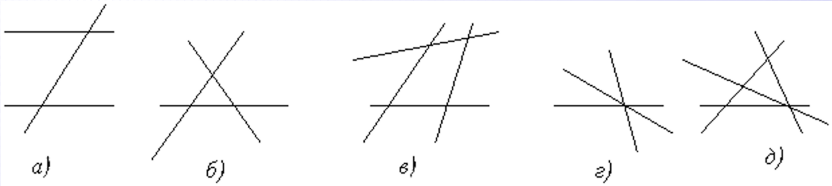
- что общего на рисунках а), б) и г)?

- что общего на рисунках б), в) и г)?

- назовите рисунки, изображения на которых удовлетворяют двум выделенным требованиям.

Далее учитель сообщает термин «*смежные углы*» и просит учеников сформулировать соответствующее определение. Для закрепления выделенных существенных свойств учитель дает задание обосновать, почему углы на рисунках а), в) и д) не являются смежными. Далее рассматривается, чем различаются смежные углы на рисунках б) и г) и чем вообще могут отличаться друг от друга пары смежных углов.

На этапе ***усвоения определения*** преследуются две цели: запомнить определение и научиться проверять, подходит объект под данное определение или нет. Этот этап осуществляется на специально составленных упражнениях – упражнениях на «да» и «нет», формулировка которых начинается со слов: «Является ли...».



Например, такими упражнениями на узнавание смежных углов с дальнейшим подведением под определение могут быть задания выделить смежные углы на рисунке и обосновать свои утверждения.

На этапе ***закрепления понятия*** решаются более сложные задачи, где используются как определение понятия, так и его свойства.

В практике решения задач при оперировании понятиями и их определениями актуальными являются умения: 1) подведение под определение; 2) подведение под понятие; 3) выделение «зоны поиска»; 4) выведение следствий из определения.

Названные умения можно формировать в рамках *приемов умственной деятельности* - совокупности мыслительных операций, направленных на решение задач определенного типа.

Структура *приема подведения под определение* зависит от логического строения определения, то есть от того, каким образом, конъюнктивно или дизъюнктивно, связаны существенные свойства в определении.

Рассмотрим несколько определений.

1. Целым выражением называется выражение, составленное из чисел и переменных с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля.

2. Целые и дробные выражения называются рациональными.

3. Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки.

4. Трапецией называется четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие - нет.

5. Арифметическим квадратным корнем из числа а, называется неотрицательное число, квадрат которого равен а.

6. Два вектора называются коллинеарными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

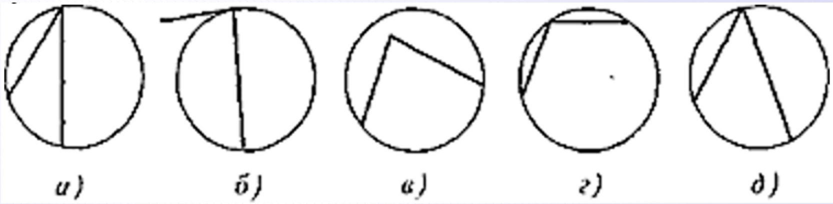
Чем различаются действия подведения под определение в случаях 1, 2 и 6 от аналогичных действий в случаях 3, 4, 5?

При подведении под определение, в котором существенные свойства связаны конъюнктивно (примеры 3, 4, 5), для отнесения некоторого объекта к множеству объектов, названных определенным термином, необходимо проверить наличие всех существенных свойств. Например, чтобы некоторое число b было арифметическим квадратным корнем из числа a, требуется выполнение двух условий: $b \geq 0, b^2 = a$.

Если существенные свойства связаны между собой дизъюнктивно, то для отнесения объекта к множеству объектов, подпадающих под это понятие, достаточно выполнения отдельных существенных свойств. Например, чтобы некоторое выражение можно было назвать рациональным, достаточно, чтобы оно было целым или дробным. Причем союз «или», который подразумевается в дизъюнктивно построенных определениях, обладает неразделительным смыслом. Например, чтобы выражение назвать целым, требуется, чтобы оно было построено с помощью любых действий, перечисленных в определении 1.

Рассмотрим, как могут выглядеть рассуждения при подведении под определение, например, вписанного угла.

Вначале необходимо вспомнить определение: вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность. Затем выделяются существенные свойства определения: 1) угол; 2) вершина лежит на окружности; 3) стороны пересекают окружность. Выясняется, что необходимо проверить наличие каждого свойства согласно структуре данного определения. Затем на каждом из рисунков



проверяется наличие перечисленных свойств и формулируются соответствующие выводы.

Иногда применение приема подведения объекта под определение затруднено в силу того, что определение дано в форме, которой трудно воспользоваться и которая требует предварительного анализа и переформулирования. Рассмотрим, например, определение квадратного уравнения с одной переменной. Квадратным называется уравнение вида: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Чтобы ответить на вопрос, являются ли, например, равенства (*) квадратными уравнениями с одной переменной, следует самостоятельно выделить существенные свойства понятия, а именно: что это уравнение, что оно содержит одну переменную, что оно содержит в качестве одного из слагаемых вторую степень переменной со своим коэффициентом и не содержит степени переменной выше второй.

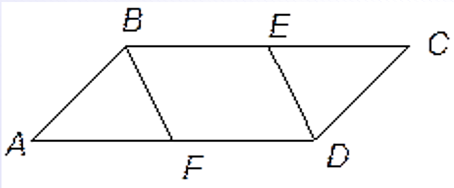
$y - 2x^2 = 0;\ 3x^2 + 5;\ 2x^3 + x^2 - 5 = 0;\ 7x^2 - 6 = 0$ (*)

Следовательно, чтобы подвести некоторый объект под понятие согласно его определению, учащиеся должны вспомнить определение, выявить его существенные свойства, установить связи между ними, например, с помощью вопроса, все ли существенные свойства должны выполняться, затем проделать операции, адекватные логическому строению определения, - проверить наличие требуемых свойств в рассматриваемом объекте и сделать вывод относительно принадлежности рассматриваемого объекта к понятию: если существенные свойства связаны конъюнктивно, то для отнесения объекта к понятию необходимо выполнение всех свойств, а если дизъюнктивно - то некоторых.

Опыт показывает, что выполнение нескольких упражнений на подведение под определение способствует не только осознанию определения, но и его непроизвольному запоминанию.

Несколько сложнее выглядит *прием подведения под понятие*. Как известно, чтобы отнести некоторый объект под какое-либо понятие, необязательно пользоваться определением. Можно подводить под признаки понятия. Чем воспользоваться: определением или признаком, которым признаком из имеющихся - все это диктуется условиями конкретной задачи.

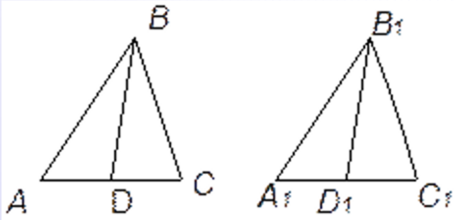
Рассмотрим, например, задачу «В параллелограмме $ABCD$ точка E - середина стороны BC, а F - середина стороны AD. Докажите, что четырехугольник BEDF - параллелограмм». Доказательство требуемого факта может быть основано на определении параллелограмма. Тогда предстоит доказывать параллельность BF и ED. Но доказательство можно построить на одном из признаков параллелограмма. И тогда предстоит доказывать, что, либо диагонали BD и FE точкой пересечения делятся пополам, либо стороны BE и FD равны и параллельны, либо противолежащие стороны этого четырехугольника попарно равны.



Все операции: ***актуализация определения и признаков, выбор из них необходимого средства, подведение под определение или выбранный признак и составляет из себя прием подведения под понятие.***

Тесно связан с названными еще один прием - ***выделение «зоны поиска» некоторого понятия***. «Зона поиска» это и есть совокупность определения и различных признаков. Этот прием можно эффективно использовать в начале систематического курса геометрии, доказывая равенство отрезков и углов. Например, учащиеся в ходе изучения курса начинают систематизировать достаточные условия равенства отрезков. По мере изучения геометрического материала этот список дополняется. Список полезно вести всем учащимся, например, на последней странице тетради. Приведем в качестве примера «зону поиска» равных отрезков. Итак, равные отрезки можно искать в следующих ситуациях: 1) два отрезка имеют равную длину; 2) два отрезка являются соответствующими сторонами равных треугольников; 3) два отрезка являются боковыми сторонами равнобедренного треугольника; 4) два отрезка являются противоположными сторонами параллелограмма, любыми сторонами ромба; 5) один отрезок получен из другого некоторым движением; 6) отрезки являются половинами или равными частями равных отрезков и т. д.

Последний из рассматриваемых приемов - ***прием получения следствий*** - заключается в том, что при решении задачи перечисляются следствия из наличия какого-либо понятия, то есть выделяются все свойства этого понятия, содержащиеся в определении и полученные с помощью доказательств. Этот прием облегчает организацию обучения решению задач в начальном курсе геометрии, когда для учащихся характерна жалоба: «Я не умею начинать решать задачу». Он составляет основной смысл решения задачи синтетическим методом, движения мысли от условия к заключению.



Рассмотрим пример. Доказать, что в равных треугольниках соответственные медианы равны. Прием получения следствий в применении к данной задаче заключается в том, что перебираются все данные условия и из каждого из них делаются возможные выводы.

При этом приходится отвечать на вопросы: 1) что значит, что треугольники равны; 2) что значит, что BD и B_1D_1 - медианы?

Рассмотрением перечисленных приемов мы переходим от понятий и их определений к процессу решения задач, в ходе которого формируется понятие.

На этапе ***систематизации*** материала выясняется место данного понятия в системе других понятий. Это достигается следующими путями:

установлением связи между отдельными понятиями, теоремами, методами;

разноплановой классификацией материала по различным основаниям;

обобщениям понятий;

конкретизацией понятия.

В большинстве случаев в школьном преподавании применяется ***конкретно-индуктивный способ*** введения нового понятия, когда начинают с рассматривания конкретных примеров и путем мыслительных операций (анализа, сравнения, абстрагирования, обобщения, синтеза) приводят учащихся к образованию новых понятий. При умелом, продуманном проведении этого процесса учащееся почти всегда способны сами сформулировать определение нового понятия.

Конкретно-индуктивным методом вводятся понятия в пропедевтических циклах начал алгебры и геометрии в 1-6 классах, причем многие определяемые понятия там были введены без определений, описательно.

Приступая к изучению систематических курсов в 7 классе, пользуются всеми этими понятиями как известными. Так уже на первых уроках геометрии в 7 классе употребляются понятия "точка", "прямая", "плоскость", "расстояние" и выясняется, что они будут первичными геометрическими понятиями, принимаемыми без определения, остальным понятиям даются определения.

Здесь же выясняется абстрактный характер геометрических понятий (точка не имеет размеров, прямая не ограничена, бесконечна и т. п.), мотивируется необходимость подобного абстрагирования, показывается логическое строение геометрии, роль аксиом и теорем.

Об определении не имеет смысла говорить, истинно оно или ложно. Определение может быть правильным (корректным) или неправильным (некорректным) в зависимости от того, удовлетворяет оно или нет определенным требованиям.

В определение через род и видовое отличие должен включаться ***ближайший род***, что обеспечивает краткость определения.

Важно обучать школьников отысканию лишних слов в определении. Имеет смысл давать задания: отыскать лишние слова, например, в определении «Диаметром окружности называется отрезок, проходящий через ее центр, соединяющий две ее точки и делящий окружность пополам».

Полезны упражнения по сокращению определения путем использования термина (см. предыдущее определение).

Полезно давать задания на сравнение двух одинаково правильных и одинаково кратких определений с точки зрения того, какое из них легче проверить (подвести конкретный случай под определение).

Например, 1) диаметром окружности называется хорда, проходящая через центр;

2) диаметром окружности называется ее наибольшая хорда.

Определяемое и определяющее понятия должны быть соразмерны,то есть равны по объему. Нарушение этого требования приводит к ошибкам:

а) ошибка «слишком широкого определения», при которой объем определяющего понятия становится шире объема определяемого. Например, параллелограмм – это многоугольник, противоположные стороны которого параллельны. Контрпример – шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Например, ромб-четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями (контпример - ромбоид).

б) ошибка «слишком узкого определения», при этом в качестве видового понятия берется отличительный признак не вида, а подвида. Объем определяющего понятия оказывается уже объема определяемого. Например, параллелограмм – это четырехугольник с равными сторонами. Исправление ошибки – пример параллелограмма, который не подпадает под это определение. Например, ромб-четырехугольник с прямыми углами и взаимно перпендикулярными диагоналями. Нарисовать ромб, но не квадрат.

Так как профилактика всегда лучше лечения, то соответствующую работу следует проводить непосредственно в процессе изучения данного понятия.

Следующее требование к определению - независимость существенных свойств друг от друга. Другими словами, одни свойства, включенные в определение, не должны быть логическим следствием других. Это требование краткости вводимого определения. В школьном курсе математики это требование, к сожалению, не выдерживается. Пример: определения прямоугольника и ромба в школьном курсе геометрии.

Еще одно требование - определение не должно содержать порочного круга. Нарушение этого требования приводит к ошибкам:

а) определение понятия через само себя (тавтология), то есть определяемое содержится (явно или неявно) в определяющем. Например, «решение уравнения – это то число, которое является его решением». «Подобными называются фигуры, которые между собой подобны». «Геометрия – это наука о геометрических фигурах». Учителю следует разъяснять смысл и назначение определения;

б) круг в определении, то есть при определении используется другое понятие, которое в свою очередь определяется с помощью первого. Например, «Угол называется прямым, если его стороны взаимно перпендикулярны» и «Две прямые взаимно перпендикулярны, если они образуют прямой угол». «Умножением чисел называется действие, при помощи которого находят произведение этих чисел» и «Произведением чисел называется результат умножения этих чисел». В подобных случаях надо сопоставить оба определения, разъяснить суть ошибок.

Отсутствие в определении избыточности. Это означает, что в определении не должно быть указано лишних свойств, вытекающих из других свойств, также включенных в определение понятий. Например, «Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны». Требование равенства противоположных сторон четырехугольника – избыточно. Это свойство параллелограмма, которое доказывается учащимися.

Необходимо, чтобы определяемый объект существовал. Например, «Тупоугольный треугольник – это треугольник, у которого все углы – тупые».

Серьезным недостатком преподавания является неправильная методика исправления ошибок в определениях, даваемых учащимися. Если ученик неправильно дает определение понятия, то нельзя вызывать второго, третьего и т.д. ученика, пока кто-то не даст правильное определение, не выясняя, в чем ошибка (ее причина, сущность) и, следовательно, не предупреждая повторения ее другими учениками.

Важно требовать полных ответов учащихся. Они часто теряют определяющее слово. Например,

- Какие многоугольники называются подобными?

- Это, если углы одного равны углам другого.

Можно сделать выводы.

1. При введении математических понятий учащиеся должны понимать, что существуют различные их определения. В учебнике выбирается одно из них из методических соображений.

2. Не обязательно сразу давать учащимся определение в законченной форме. Полезна деятельность школьников по отысканию правильной формулировки, ее уточнению, отбрасыванию лишних слов.

3. При повторении определения на последующих уроках следует на примерах показывать ошибочность определений учащихся, либо подтверждать приемлемость определений.

4. Необходимо вести систематическую работу по выработке навыков подведения под определение.

Что значит, что понятие и его определение усвоено учащимся, какие уровни усвоения понятий возможны?

Уровни усвоения учащимися понятий можно представить в виде следующей последовательности.

Учащийся:

- ***узнает понятия;***
- ***знает формулировку определения;***
- ***понимает значение каждого слова, каждой составной части определения, отделяет существенные свойства от несущественных;***
- ***может привести собственные примеры объектов, подходящих под определение;***
- ***может доказать, почему некоторый объект подходит под определение, а другой - нет;***
- ***может использовать понятия в явных ситуациях при решении задач;***
- ***может использовать понятия в неявных ситуациях, при решении нестандартных задач.***

Перечисленные уровни - конкретные дидактические цели изучения понятий.

Какие цели развития учащихся может ставить учитель при изучении определений? Это - учить ***правильно формулировать определения, отделять существенные свойства от несущественных, понимать зависимость между существенными свойствами в определении, осознавать приемы, которые используются при решении задач: подводить под определения, классифицировать, устанавливать связи между понятиями. Эти умения относятся к общим интеллектуальным умениям, так как используются в различных науках и школьных предметах.*** Эти умения являются умениями развитого понятийного логического мышления.

Лекция 11. Классификация понятий. Логическая структура определений

Понятие – форма научного познания, отражающая существенное в изучаемых объектах и закрепляемая специальными терминами.

Понятие абстрагируется от индивидуальных черт и признаков отдельных восприятий и представлений и является результатом обобщения восприятий и представлений очень большого количества однородных предметов и явлений, например: число, пирамида, окружность, прямая. Понятия образуются путем таких логических приемов, как анализ и синтез, абстрагирование и обобщение. **Понятием** будем называть мысль о предмете, выделяющую его существенные признаки.

Существенными признаками понятия называются такие признаки, каждый из которых необходим, а все вместе достаточны, чтобы отличить объекты данного рода от других объектов (например, параллелограмм).

В каждом понятии различают его содержание и объем.

Содержанием понятия называется совокупность существенных признаков объектов, охватываемых понятием. Основное содержание – достаточный набор свойств, т.е. все те свойства, каждое их которых, взятое отдельно, необходимо, а взятые в совокупности достаточны для отличения данного понятия от остальных.

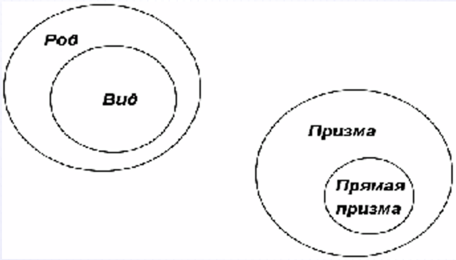
Объемом понятия называется совокупность объектов, на которое распространяется данное понятие.

Например, понятие «тетраэдр». Содержание: многогранник, ограниченный четырьмя гранями, имеющими форму треугольников. Объем: множество всех тетраэдров.

Между объемом и содержанием понятия существует соотношение: чем больше содержание понятия, тем меньше его объем. Сокращение содержания понятия влечет за собой расширение его объема. Эту операцию называют *обобщением* понятия. Например, если из содержания понятия «равносторонний треугольник» изъять свойство «равенство всех сторон», то множество треугольников, удовлетворяющих новому содержанию, станет «шире» – будет содержать множество равносторонних треугольников в качестве подмножества. Расширение содержания понятия ведет к сужению его объема и называется *ограничением* (специализацией) понятия. Пример такой операции – переход от понятия тождественных преобразований к понятию сокращение дробей.

Если объем одного понятия входит как часть в объем другого понятия, то первое понятие называется **видовым**, а второе – **родовым**.

Понятия род и вид имеют *относительный* характер. Например, понятие «призма» является родовым по отношению к понятию «прямая призма», но видовым понятием по отношению к понятию «многогранник».



Содержание понятия раскрывается с помощью определения.

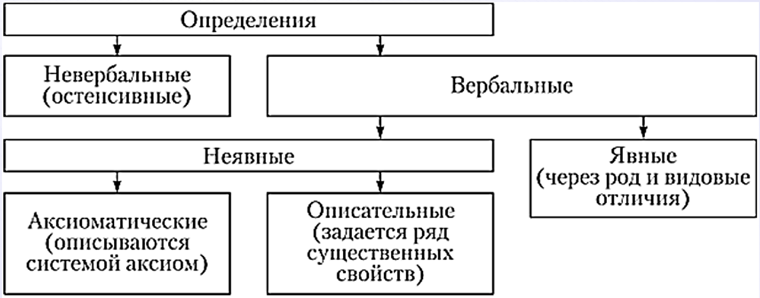
Определение (дефиниция) понятия – это такая логическая операция, при помощи которой раскрывается основное содержание понятия или значение термина.

Определить понятие – это значит перечислить существенные признаки предметов, отображенных в данном понятии.

Задача перечисления признаков бывает нелегкой, но она упрощается, если опираться на понятия, ранее уже установленные. Понятие фиксируется в речи с помощью слова или словосочетания, называемого именем или термином понятия. В математике понятие часто обозначается не только именем, но и символом. Например, $\sqrt{2}$ и другие.

Таким образом, **в определении сначала указывается род, в который определяемое понятие входит как вид, а затем указывают те признаки, которые отличают этот вид от других видов ближайшего рода. Такой прием определения понятия называется определением понятия через ближайший род и видовое отличие.**

Понятие $=$ род $+$ видовое отличие.



Явными называются определения, в которых смысл определяемого термина полностью передается через смысл определяющих терминов, т.е. явные определения содержат прямое указание на существенные признаки определяемого понятия. **Определение через ближайший род и видовое отличие относится к явным.**

В **неявных определениях** смысл определяемого термина не передается полностью определяющими терминами. Пример неявного определения – определение исходных понятий с помощью системы аксиом. Такие определения называются аксиоматическими. Примеры аксиоматических определений являются определения группы, кольца и поля и т.п. (аксиоматика Гильберта, Вейля, система аксиом Пеано для натуральных чисел).

Генетическим называется определение объекта путем указания способа его

Начало
Содержание
Страница 178 из 312
Назад
На весь экран
Закрыть

построения, образования, происхождения. Например, «усеченный конус есть тело, происходящее от вращения прямоугольной трапеции вокруг стороны, перпендикулярной к основаниям трапеции». Или определение понятия «линейный угол двугранного угла».

В **индуктивном (рекуррентном) определении** объект задается как функция $f(n)$ от натурального числа n. Это задание обеспечивается указанием значения $f(1)$ и некоторого равенства, связывающего значения $f(n+1)$ и $f(n)$. Например, по индукции в математике вводится определение натурального числа.

Остенсивные определения понятий и описательные описывают объекты с помощью моделей, рассмотрения частных случаев, выделения отдельных существенных свойств, вводятся с помощью непосредственного показа, демонстрации предметов. Часто применяются в начальных классах и частично в 5-6 классах. Учитель, изображая треугольники на доске, знакомит учащихся с понятием треугольник. В средней школе преобладают вербальные определения.

Чтобы дать логически правильное определение, нужно соблюдать правила определения:

1. Определение должно быть соразмерным, то есть определяемое и определяющие понятия должны быть равны по объему. Чтобы проверить соразмерность, нужно убедиться, что определяемое понятие удовлетворяет признакам определяющего понятия и наоборот.

Например, дано определение: «Параллелограмм есть многоугольник, у которого противоположные стороны параллельны». Проверим его: «Всякий многоугольник, у которого противоположные стороны параллельны, есть параллелограмм» – это неверно. Или: «параллельными прямыми называются прямые, которые не пересекаются» (неверно, это могут быть и скрещивающиеся прямые).

2. Определение не должно содержать в себе «порочного круга». Это означает, что нельзя строить определение таким образом, чтобы определяющим понятием было такое, которое само определяется при помощи определяемого понятия.

Например, «прямым углом называется угол, содержащий 90^0, а градусом называется 1/90 часть прямого угла». Иногда «порочный круг» принимает форму тавтологии (то же посредством того же) – употребление слова, имеющего то же самое значение.

3. Определение по возможности не должно быть отрицательным. В определение должны указываться существенные признаки предмета, а не то, чем не является предмет.

Например, «ромб – это не треугольник», «эллипс – это не окружность». В математике в некоторых случаях отрицательные определения допустимы, например, «трансцендентной функцией называется всякая неалгебраическая функция».

4. Определение должно быть четким и ясным, не допускающим двусмысленных или метаморфических выражений.

Например, «арифметика есть царица математики» – образное сравнение, а не определение, утверждение «лень – мать всех пороков», поучительно, но не определяет понятие лени.

В школьном курсе математики в 1—4-х классах и частично в 5—6-х чаще используются ***остенсивные*** определения понятий (вводятся на чувственной ступени познания) и описательные, которые описывают объекты с помощью моделей, рассмотрения частных случаев, выделения отдельных существенных свойств (вводятся на эмпирическом уровне рациональной ступени познания). Так, учитель, изображая треугольники на доске, вводит термин «треугольник». Иногда в начальной школе встречаются и явные определения, например, определение квадрата как прямоугольника с равными сторонами.

В средней школе преобладают **вербальные определения**, чаще встречаются **явные определения**. Реже встречаются неявные описательные определения, например, понятие непрерывной функции, или аксиоматические, которые задают понятия через выполнение определенных свойств, описанных в аксиомах. В курсе геометрии таковыми понятиями являются понятия точки, прямой, длины, площади, объема и т.д.

В **явном определении** (через род и видовые отличия) даны определяемое понятие и определяющее, объемы которых равны. Часто именно только этот вид определений относят к определениям.

Рассмотрим, как связаны род и вид.

Множество всех объектов, к которому применимо данное понятие, составляет класс. Один класс является высшим (родом) по отношению к другому (виду), если он включает в себя вместе со всеми элементами данного класса элементы другого класса. Отношение рода и вида - одно из основных отношений между понятиями и задает наиболее распространенный тип определений. Находясь в известных отношениях друг с другом, понятия составляют *систему*. Один и тот же раздел школьного курса математики можно описать с помощью различных систем понятий.

С точки зрения логики определение через род и видовые отличия является эквиваленцией. **Структура явного определения** включает такие элементы, как термин, род, видовое (видовые) отличие(я) и логические связи. Способ выделения видовых отличий определяет вид явного определения: *через описание характеристических свойств, конструктивные* или *генетические* (задан способ построения или происхождения объекта), *рекурсивные* (указываются базисные объекты некоторого множества и правила, позволяющие получить новые объекты этого же множества), *отрицательные* (объект задается через отсутствие у него определенных свойств.[1]

Связи между родом и видовыми отличиями всегда конъюнктивные, связи между видовыми отличиями могут быть конъюнктивными или дизъюнктивными.

С учетом типа логической связи видовых отличий **выделяют конъюнктивные и дизъюнктивные определения.**

Выполнение логического анализа явного определения понятия предполагает:

- распознавание вида определения;
- запись его логической структуры.

Начало
Содержание
Страница 181 из 312
Назад
На весь экран
Закрыть

Раскрытие математического содержания каждого элемента называют математическим анализом определения. Обе эти операции носят название *логико-математического* анализа определения.

Например, рассмотрим определение квадрата. «Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны».

Его структура может быть представлена следующим образом:

$A(x)$	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in M$	$\wedge$	$B(x)$.	*логический анализ*
Термин	(лог. связка)	род	(лог. связка)	видовые отличия	
Квадрат	Множество прямо-угольников	Все стороны равны			*математический анализ*

Подробно эта запись может быть прочитана следующим образом. Объект x является квадратом (имеет свойство «быть квадратом») тогда и только тогда, когда x принадлежит множеству прямоугольников и обладает свойством «все стороны равны».

В школьном курсе математики часто встречаются определения, термин которых представлен сочетанием слов, например, корень квадратного уравнения, биссектриса угла треугольника, а также словами, выражающими связи или отношения между объектами (смежные углы, параллельные прямые и т.д.). В этом случае определение рассматривается на множестве пар, троек.

Медиана треугольника - это отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой стороны, противоположной этой вершине, и эта точка является серединой стороны. Выделенные свойства позволяют записать это определение в виде «алгоритма»: медиана треугольника - это

1) отрезок в треугольнике;

2) соединяет вершину треугольника с точкой стороны, противоположной вершине;

3) эта точка - середина стороны.

Такая запись позволяет четко выделить учебный материал, который необходимо актуализировать перед введением понятия. Также она облегчает учащимся усвоение определения, в ней выделены существенные свойства понятия (подчеркиванием выделено родовое понятие), которые необходимо проверить у объекта, чтобы отнести его к понятию, т.е. фактически она представляет алгоритм проверки, относится ли объект к понятию (используется в заданиях на распознавание).

Поэтому такую запись можно назвать как запись определения в алгоритмизированном виде

Для других видов определений логико-математический анализ явно не выполняется. Устанавливается вид определения, для аксиоматического определения выделяются аксиомы, описывающие неопределяемые понятия, связи с уже изученными темами, что позволяет определить знания, которые необходимо актуализировать.

Для явных определений существуют формально-логические требования их корректности.

1. Определение должно быть соразмерным, что предполагает равенство объемов определяемого и определяющего понятий. Иначе может быть допущена логическая ошибка.

Классификацией понятия называется деление (разбиение) объема этого понятия на подмножества (классы), удовлетворяющие следующим требованиям:

1) деление производится по одному и тому же существенному признаку – основанию деления;

2) все подмножества не пересекаются;

3) объединение всех подмножеств должно давать объем понятия;

4) для подмножеств (видов) множество должно быть ближайшим родовым понятием, а виды соподчиненными.

Отметим, что данное **определение классификации относится к разновидности аксиоматических определений**: четыре включенных в него требования выступают в роли аксиом – априорно присвоенных определяемому понятию свойств.

Наиболее простой классификацией является разбиение объема понятия на два класса – **дихотомия**. Приведем примеры такой классификации.

1. Классификация понятия «треугольник» по соотношению между сторонами (разносторонний, равнобедренный (равносторонний, неравносторонний)).

2. Классификация понятия «число» (комплексные (действительные и мнимые); действительные (рациональные и иррациональные); рациональные (целые и дроби); целые (отрицательные и неотрицательные) и т.д.).

Классификация помогает правильно понять сущность понятий через выяснение их соотношений, разграничение объемов. Так первый пример классификации позволяет выявить часто встречающуюся у учащихся ошибку, когда они считают, что равносторонний треугольник не является равнобедренным.

Родословная понятия – это построение логического «дерева» возникновения понятия. Например, родословная понятия «треугольник» отражает этапы формирования этого понятия, начиная от первичных понятий. Напомним определение. «Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки».

Чтобы построить родословную некоторого понятия, необходимо знать основные неопределяемые понятия, которые приведены в учебнике, а также основные отношения между ними и определения тех понятий, на которых базируется понятие, родословную которого мы строим.

Например, в учебнике В.В. Шлыкова «Геометрия 8» основными неопределяемыми понятиями являются: точка, прямая, плоскость, множество. Затем вводятся понятия фигуры, отрезка, ломаной, простой ломаной, замкнутой ломаной. Наконец дается следующее определение треугольника. «Треугольником называется фигура, образованная трехзвенной замкнутой ломаной и ограниченной частью плоскости, для которой эта ломаная служит границей.»

Итак, **классификация** – это систематическое распределение некоторого множества по классам, возникающее в результате последовательного деления, основанного на сходстве объектов одного вида и отличии их от объектов других видов.

Операция деления – логическая операция, раскрывающая объем понятия путем выделения в нем возможных видов объекта. Например, всех студентов университета можно разделить на собирающихся идти работать в школу и не собирающихся. Основанием деления является свойство, в соответствии с которым выделяются виды. В нашем примере основанием является свойство: «иметь намерение работать в школе».

При осуществлении классификации **важен выбор основания**: разные основания дают разные классификации.

Классификация может производиться **по существенным свойствам (естественная) и по несущественным (вспомогательная)**. При естественной классификации, зная к какой группе принадлежит элемент, можем судить о его свойствах.

Два вида деления:

1) деление по видоизменению признака – это деление, при котором свойство – основание деления присуще объектам выделенных видов в разной степени

2) дихотомическое деление – это деление, при котором данное понятие делится на два вида по наличию или отсутствию некоторого свойства.

Операция деления подчиняется следующим правилам:

1) деление должно быть соразмерным, т.е. объединение выделенных классов должно образовывать исходное множество (сумма объемов видовых понятий равна объему родового понятия).

2) деление должно проводится только по одному основанию.

3) пересечение классов должно быть пусто.

4) деление должно быть непрерывным.

Итак, основные **логические характеристики понятия** – содержание и объем. **Содержание понятия** – это множество всех существенных признаков данного понятия. Например, содержанием понятия «куб» является следующие признаки: 6 граней, являющихся равными квадратами, противоположные грани параллельны, 8 вершин, все плоские углы при которых – прямые, 12 рёбер. **Объем понятия** – множество объектов, к которым применимо данное понятие. Например, объем понятия «куб» – это все кубы, о которых шла речь или не шла, вне зависимости, мы видели или не видели. Отсутствие некоторого признака у всех объектов, составляющих объем понятия, является существенным признаком. Например, каждое рациональное число может быть представлено в виде отношения m/n, где m – целое, а n – натуральное число. Отсутствие возможности такого представления – это существенный признак иррациональных чисел.

Содержание понятия раскрывается с помощью определения, объем – с помощью классификации. Объем и содержание понятия находятся в **обратном** отношении: с увеличением объема уменьшается его содержание, и обратно, чем шире содержание, тем уже его объем. Например, рассмотрим понятие «параллелограмм». В объем понятия входят все виды параллелограмма, в том числе ромб, прямоугольник, квадрат. Содержанием являются признаки параллелограмма: выпуклый четырéхугольник, параллельность противоположных сторон, и др. Добавим новый признак – равенство всех углов – т.е. расширим содержание данного понятия. Тогда объем уменьшится, теперь мы имеем дело с прямоугольниками, т.е. с частью параллелограммов. Если объем некоторого понятия целиком входит в объем другого понятия, то первое понятие называется **видовым** по отношению ко второму, а второе – **родовым**. Например, понятие «параллелограмм» является родовым по отношению к понятию «ромб». Но, в то же время, оно является видовым по отношению понятия «четырéхугольник». Заключительным этапом в формировании понятия является его определение. **Сформировать понятие** – значит раскрыть его содержание в той мере, чтобы про любой объект можно было сказать, входит он, или не входит, в объём рассматриваемого понятия. Раскрытие содержания понятия в указанном смысле называется его определением. Это можно осуществить разными способами. Один из способов определения понятия - «определение через ближайший род и видовые отличия». При определении понятия используют не все существенные признаки. Обычно используется минимальная система независимых признаков: **каждый из признаков, входящих в определение, должен быть необходимым, а все вместе – достаточным для установления этого понятия**. Например, прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник. «Прямоугольный параллелепипед» – определяемое понятие. «Прямой параллелепипед» – родовое понятие. «Видовое отличие» – «основание – прямоугольник». Определение состоит из двух частей: определяемого понятия и определяющего понятия. В приведенном примере «Прямоугольный параллелепипед» – определяемое понятие, «Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник» – определяющее понятие. **Можно записать символически: A=B+C, где A – определяемое понятие, B+C – определяющее понятие, B – род, C – видовое отличие.** В психолого-педагогической и методической науке и практике выделяют **три основных способа формирования понятий:** конкретно-индуктивный, абстрактно-дедуктивный и комбинированный.

Сущность **конкретно-индуктивного метода** заключается в том, что на основе рассмотрения частных примеров учащиеся подготавливаются к самостоятельному формулированию определения.

Для конкретно-индуктивного способа введения понятий можно предложить следующую **схему**:

1) Мотивация введения понятия. Различные практические примеры или задачи, которые показывают целесообразность изучения данного понятия.

2) Выявление различных существенных и несущественных свойств на основе деятельности учащихся.

3) Определение понятия. Формулировка определения, усвоение логической структуры определения.

4) Примеры моделей на подведение под понятие, контрпримеры.

5) Выявление равносильных определений.

Конкретно-индуктивный метод находит большое применение в младших классах.

При введении понятий, связанных с уже известными учащимся понятиями, можно применить **абстрактно-дедуктивный метод**. Особенность метода состоит в том, что каждое определение вводится сразу, без предварительного разъяснения на конкретных примерах. Далее на конкретных примерах и моделях учащиеся обучаются опознавать принадлежность объектов данному понятию.

Для введения понятия абстрактно-дедуктивным способом можно предложить следующую **схему**:

1) Определение нового понятия.

2) Рассмотрение частных случаев выражения вводимого понятия. Классификация объектов, подпадающих под данное понятие. Контрпримеры.

3) Модели и примеры, иллюстрирующие понятие.

4) Применение нового понятия.

В старших классах чаще применяют абстрактно-дедуктивный метод.

Комбинированный способ введения понятия используется для формирования сложных математических понятий. Например, функция, предел последовательности, предел функции, непрерывность функции, производная, касательная и т.д. На основе анализа небольшого числа конкретных объектов, необходимых в основном для мотивирования введения нового понятия, даётся определение этого понятия. Затем путем решения учебных задач, продолжается формирование данного понятия. В этом способе отражаются обе основные формы мыслительной деятельности: переходы от частного (конкретного) к общему (абстрактному) и затем от общего к частному. Этот способ более всего сходен с процессом формирования понятий в науке. Работа над определением делится условно на три этапа: **введение, усвоение, закрепление**. Введение определения зависит от выбранного способа введения понятия. Обеспечение усвоения сводится к тому, чтобы учащиеся **научились применять определение, знали формулировку определения, могли привести собственные примеры объектов, подходящих под определение**. Закрепление осуществляются при выполнении различного рода упражнений.

Лекция 12. Математические суждения и умозаключения. Основные виды математических суждений. Условная форма математических предложений. Четыре вида предложений, записанных в условной форме. Связь между их истинностью. Необходимые и достаточные условия

Суждение – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о существовании предметов, о связи между ними и их свойствами или отношениях между ними. Примеры суждений:

1. $log_a x$ есть функция.

2. Число 125 делится на 5.

3. «В равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой»

Суждения разделяют на общие и частные в зависимости от того, всем объектам данного класса или только некоторым их них приписывается (или отрицается) какой-нибудь признак. Суждения разделяются еще на утвердительные и отрицательные в зависимости от того, приписывается или отрицается какой-то признак всем (или некоторым) объектам данного класса, т.е. данный класс целиком или частично включается в другой класс или исключается из него. Комбинируя эти два деления, получаем следующие четыре вида суждений, которые можно записать с помощью квантора общности $\forall$ и квантора существования $\exists$, а также знаков логических операций – конъюнкции и импликации.

1. **Общеутвердительной суждение**. Обозначается буквой A и выражается формулой «Все S суть P», что можно записать символически : $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$, т.е. «для всех объектов x, если x присуще свойство S, то x присуще свойство P».

2. **Частноутвердительное суждение**. Обозначается буквой I, выражается формулой «Некоторые S суть P» и записывается символически $\exists x(S(x) \wedge P(x))$, т.е. «существует такой объект x, которому присуще свойство S и присуще свойство P».

3. **Общеотрицательное суждение**. Обозначается буквой E, выражается формулой «Никакое S не есть P» и записывается символически $\forall x(S(x)\wedge\rceil P(x))$, т.е. «ни одному x, которому присуще свойство S не присуще свойство P».

4. **Частноотрицательное суждение**. Обозначается буквой O, выражается формулой «Некоторые S не суть P» и записывается символически $\exists x(S(x)\wedge\rceil P(x))$, т.е. «существует такой объект x, которому присуще свойство S и не присуще свойство P»

Под **высказыванием** понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно. Над высказываниями проводятся следующие **основные операции:** 1) отрицание высказывания, 2) конъюнкция, 3) дизъюнкция, 4) импликация. Этими терминами называют как сами операции, так и их результаты. В последних трех операциях получаются сложные высказывания, состоящие из нескольких простых.

Под **логическим предложением** будем понимать такое грамматическое предложение, которое выражает определенное суждение. **Структура логического предложения совпадает со структурой суждения.** Так, в логическом предложении имеются субъект и предикат, в качестве которых выступают соответственно грамматическое подлежащее и сказуемое. Различие же между грамматическим и логическим предложениями выражается в их строении. Если грамматический строй предложений различен в разных языках, то логический одинаков. Логическое предложение, выражающее суждение о математических объектах, называют **математическим предложением**. Субъект и предикат предложения называют соответственно его условием (основанием, посылкой) и заключением (следствием, выводом).

Умозаключение – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких суждений получается новое суждение. Например, доказательство любой теоремы, представляет собой цепочку умозаключений.

С помощью суждения мысль получает своё дальнейшее развитие. В каждом суждении устанавливается некоторая связь или некоторое взаимоотношение между понятиями. Если суждения правильно отображают объективно существующие зависимости между вещами, то такие суждения называют **истинными**. В противном случае суждения будут **ложными**. Например, суждение «всякий ромб является параллелограммом» – истинно; а суждение «всякий параллелограмм является ромбом» – ложно.

Итак, характерным признаком суждения является обязательное наличие истинности или ложности в выражающем его предложении. **В речи суждение должно быть повествовательным предложением.** Например, «Треугольник ABC – равнобедренный» – суждение, а предложение «Будет ли треугольник ABC равнобедренным?» не является суждением.

Математика представляет собой определённую систему суждений, выраженных в математических предложениях посредством математических или логических терминов или соответствующих им символов.

Основные виды математических суждений:

1. **Аксиома** (от греч. «axioma»– «авторитетное предложение», «самоочевидная истина») – это предложение, принимаемое без доказательства. Определённое число аксиом образует систему отправных исходных положений некоторой научной теории. Эти же аксиомы лежат в основе доказательств других положений (теорем) этой теории. В границах построенной теории каждая из аксиом принимается без доказательства. Таково, например, известное положение евклидовой геометрии «Через две точки плоскости проходит единственная прямая». Аксиомы и первичные (неопределяемые) понятия составляют основной фундамент математической теории.

Нужно добавить, что к системе аксиом, характеризующих некоторую научную теорию, предъявляются следующие требования:

I. независимость (каждая аксиома не является следствием других аксиом);

II. непротиворечивость (следствием аксиомы A не может быть одновременно два высказывания типа B и $\bar{B}$);

III. полнота (аксиом должно быть достаточно для построения самой теории).

Например, аксиомы у Д.Гильберта разбиты на пять следующих групп:

I группа (из восьми аксиом) – аксиомы соединения (принадлежности) описывающие отношение «принадлежит» (или «лежит на», «проходит через») и устанавливающие соединение между точками, прямыми и плоскостями;

II группа (из четырех аксиом) – аксиомы порядка, описывающие отношение «между» и дающие возможность установить порядок точек на прямой;

III группа (из пяти аксиом) – аксиомы конгруэнтности, описывающие отношение «конгруэнтен» (а через него – понятие движения);

IV группа (из одной аксиомы) – аксиома о параллельных, описывающая отношение «параллельный»;

V группа (из двух аксиом) – аксиомы непрерывности, описывающие отношение «непрерывный».

Попытка доказать аксиому параллельности и исключить ее (как зависимую от остальных аксиом этой системы) привела к открытию новой, неевклидовой геометрии Лобачевского. Из аксиоматики евклидовой геометрии путем замены аксиомы IV соответствующей аксиомой Лобачевского получим аксиоматику геометрии Лобачевского. Метод научного построения теории, когда из конечного числа аксиом логически выводятся остальные положения этой теории, называют аксиоматическим методом, а такую теорию – аксиоматической теорией. В 48 математических дисциплинах стремятся к аксиоматическому построению, и это уже удалось осуществить в ряде ее разделов: геометрии, арифметике, теории вероятностей и др.

Рассмотрим, как в учебниках геометрии вводятся и используются первоначальные понятия и аксиомы. Сделаем это на примере учебников В.В. Шлыкова «Геометрия 8» и «Геометрия 10». Вначале без определения, а с помощью описания, вводятся понятия точки, прямой, плоскости. Фигура определяется как произвольное множество точек. Затем формулируется следующая аксиома: «Через любые две различные точки плоскости можно провести единственную прямую, и эта прямая лежит в плоскости». После этого дается определение отрезка, и приводятся аксиомы измерения длины: 1) Каждый отрезок имеет длину, которая выражается некоторым положительным числом. Равные отрезки имеют равные длины. 2) Отрезки, имеющие равные длины равны. 3) Длина отрезка равна сумме длин двух отрезков, на которые он делится любой своей точкой. В следующем параграфе дается определение угла, равных углов, и вводятся аксиомы измерения углов: 1) Каждый угол имеет градусную меру, большую нуля. 2) Равные углы имеют равные градусные меры. 3) Углы, имеющие равные градусные меры, равны. 4) Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он делится некоторым лучом. И, наконец, формулируется аксиома параллельных прямых: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.» В начале изучения стереометрии в 10-м классе, как и в планиметрии, основными неопределяемыми фигурами являются точка, прямая и плоскость и даются три аксиомы: 1) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна. 2) Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости. 3) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

2. **Постулат** (от лат. «postulatum» – требование) – это предложение, в котором выражается некоторое требование (условие), которому должно удовлетворять некоторое понятие или некоторое отношение между понятиями. Нередко постулаты являются частью определения некоторого понятия или некоторой системы понятий. Однако с точки зрения логики, термины «постулат» и «аксиома» понятия равнозначные.

Например, 5-ый постулат Евклида является также аксиомой: «Если две прямые пересекаются третьей так, что по какую-либо сторону от неё сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то по эту же сторону исходные прямые пересекаются».

3. **Теорема** (от греч. «theorema» – рассматриваю, обдумываю) – это математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства (рассуждения). В теореме должно быть ясно указано:

– при каких условиях рассматривается в ней тот или иной объект (условие теоремы);

– что об этом объекте утверждается (заключение теоремы).

Например, такая теорема: «В параллелограмме диагонали, пересекаясь, делятся пополам». Условие теоремы: данный четырехугольник – параллелограмм, диагонали его пересекаются. Заключение теоремы: точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. Данная теорема записана в категорической форме.

Чтобы легче выделить условие и заключение теоремы, полезно переформулировать её в условной форме, применяя логический союз «если..., то...». Так, например, теорему о диагоналях параллелограмма можно сформулировать по-другому, не меняя ее смысла: «Если данный четырехугольник – параллелограмм и диагонали его пересекаются, то в точке пересечения они делятся пополам».

Таким образом, доказательство теоремы состоит в том, чтобы показать, что если выполняется условие, то из него логически следует заключение.

Суждения образуются в мышлении двумя основными способами:

1. Непосредственно (с помощью суждения выражается результат восприятия). Например, суждение «эта фигура – окружность».

2. Опосредованно (суждение возникает в результате особой мыслительной деятельности, называемой умозаключением). Например, «множество данных точек плоскости таково, что их расстояние от одной точки одинаково; значит, эта фигура – окружность».

В процессе такой мыслительной деятельности обычно осуществляется переход от одного или нескольких связанных между собой суждений к новому суждению, в котором содержится новое знание об объекте изучения. Этот переход и является умозаключением, которое представляет собой высшую форму мышления.

Итак, **умозаключением** называется процесс получения нового суждения-вывода из одного или нескольких данных суждений. Например:

«Диагональ параллелограмма делит его на два конгруэнтных треугольника» (первое суждение).

«Сумма внутренних углов треугольника равна 180^0» (второе суждение).

«Сумма внутренних углов параллелограмма равна 360^0» (новое суждение-вывод).

Умозаключение отличается (как форма мышления) от понятия и суждения тем, что оно представляет собой логическую операцию над отдельными мыслями. Не всякое сочетание суждений между собой представляет собой умозаключение: между суждениями должна существовать определенная логическая связь. Например, из суждений «сумма внутренних углов треугольника равна 180^0» и «$2+4=6$» нельзя сделать вывод.

Умение правильно строить различные математические предложения имеет большое значение в системе математических знаний. Каждая математическая теория представляет собой множество предложений. Принадлежность предложения к некоторой математической теории определяется двумя признаками:

1. Предложение должно быть записано (или сформулировано) на языке данной теории, состоять из математических и логических терминов или символов и не содержать никаких других терминов или символов;

2. Предложение должно быть истинно, т.е. являться или исходным истинным предложением (аксиомой) данной теории, или его истинность устанавливается доказательством с помощью уже известных истинных предложений.

Например, предложение «Сумма углов всякого треугольника равна 180^0» является геометрическим предложением, принадлежит теории евклидовой геометрии, потому что:

1. Оно записано на языке геометрии (хотя одновременно на русском языке), т. е. состоит из геометрических терминов («сумма углов», «треугольник», «180^0») и логических терминов («всякого», «равна»).

2. Оно истинно, т.к. доказывается в рамках евклидовой геометрии, т. е. на основе ее аксиом или других уже доказанных предложений этой теории.

Понятия «необходимое условие» и «достаточное условие» тесно связаны с понятием «теорема», а понятие «необходимое и достаточное условие» – с прямой и обратной теоремами. Необходимым условием некоторого суждения называется такое условие, без выполнения которого это суждение не может быть истинным. При выполнении же необходимого условия суждение может быть истинным, а может и не быть истинным. Например, условие «число четно» является необходимым для суждения «число делится на 6». Другим необходимым условием для данного суждения будет условие «число кратно 3». Достаточным условием некоторого суждения называется такое условие, при выполнении которого суждения обязательно истинно. Например, условие «число кратно 9» будет достаточным для суждения «число делится на 3». Но это условие не будет необходимым, так как 12 делится на 3, но не делится на 9. Необходимым и достаточным условием некоторого суждения называется такое условие, без выполнения которого суждение не может быть истинным, а при его выполнении – обязательно истинно. Например, условие «число четно и кратно 3» является необходимым и достаточным для суждения «число кратно 6». Если рассмотреть теорему $B \Rightarrow C$, то B будет достаточным для C (т.к. C истинно при выполнении B), а C будет необходимым для B (т.к. обратная теорема не всегда верна). Так в теореме «Если функция дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке», условие дифференцируемости является достаточным для непрерывности, а непрерывность является необходимым условием для дифференцируемости (непрерывна в точке $x=0$, но не дифференцируема в этой точке). Если верна и обратная теорема $C \Rightarrow B$, то C является достаточным для B, а B – необходимым для C. Значит, **если верны прямая и обратная теоремы, то условие и заключение теоремы являются необходимым и достаточным условиями друг для друга.** В этом случае пишут $B \Leftrightarrow C$. Так пусть B есть суждение «Точка плоскости принадлежит биссектрисе угла » и C – «Точка P равноудалена от сторон угла». Верны обе теоремы $B \Rightarrow C$ и $C \Rightarrow B$, а потому $B \Leftrightarrow C$. Условие, которое является только необходимым для данного суждения, имеет слишком узкое содержание, т.е. заключает в себе слишком мало требований для выполнения суждения. Так условие для четырехугольника ABCD: $AB \| CD$, является лишь необходимым для того, чтобы этот четырехугольник был параллелограммом (этому условию удовлетворяет и трапеция). Если же к этому условию добавить еще одно, например, такое: AB=CD, то мы уже получим необходимое и достаточное условие, для четырехугольника ABCD быть параллелограммом Условие, которое является только достаточным для некоторого суждения, но не является для него необходимым, содержит слишком сильные требования для выполнения данного суждения, в результате чего объем отображаемых в суждении объектов сужается. Например, для того чтобы треугольники имели равные площади, достаточно, чтобы у них были равны основания и высоты, проведенные к основаниям. Но это чрезмерное требование для равновеликости треугольников, и его можно ослабить, потребовав лишь равенства произведений, которое является необходимым и достаточным условием равновеликости треугольников. В любом определении понятия должно содержаться необходимое и достаточное условие этого понятия, – в противном случае это определение будет построено неверно. Необходимое и достаточное условие параллелограмма ABCD можно получить разными способами, комбинируя необходимые условия. Например: 1) AO=OC, BO=OD ($O=AC\cap BD$); 2) $AB\|CD$, AB=CD; 3) $AD\|BC$, AD=BC; 4) AB=CD, BC=AD. Каждое из этих четырех условий является необходимым и достаточным условием параллелограмма, а потому каждое из них можно взять в качестве определения, а тогда остальные доказываются как теоремы. Из этого примера видно, что для одного и того же суждения возможны несколько вариантов необходимого и достаточного условия, причем все варианты эквивалентны друг другу (логически зависимы, каждый следует из другого). Важным примером использования необходимого и достаточного условия, является понятие геометрического места точек. Например, серединный перпендикуляр к отрезку, есть геометрическое место точек (ГМТ), равноудаленных от концов этого отрезка. Это ГМТ включает в себя точки и только те точки, которые обладают указанным свойством (равноудаленность), а потому содержит необходимое и достаточное условие. Значит, при определении этого ГМТ должны быть доказаны как прямая, так и обратная теоремы. Применение терминов «необходимо» и «достаточно» требует развитого логического мышления школьников и в свою очередь эффективно способствует развитию такого мышления. В курсе математики для общеобразовательной школы программой не предусмотрено изучение этой темы. Однако учителю по возможности следует ознакомить учащихся с основными понятиями на факультативных занятиях, а затем, при проведении других факультативных занятий, активно использовать этот материал. При этом полезными будут упражнения такого типа. Вставить вместо пробела одно из следующих трех условий: «необходимо и достаточно», «необходимо», «достаточно» так, чтобы высказывание стало истинным: 1) Чтобы закончить школу, . . . , усвоить школьный курс математики. 2) Чтобы сумма двух натуральных чисел была четной, ..., чтобы каждое слагаемое было четным. 3) Чтобы число делилось на 4, ..., чтобы это число делилось на 2. Современное среднее образование без знания вопросов необходимости и достаточности нельзя считать полноценным.

Доказательством называют конечную последовательность предложений данной теории, каждое из которых либо является аксиомой, либо выводится из одного или нескольких предыдущих предложений этой последовательности по правилам логического вывода (Рогановский Н.М.). **Правило вывода** – это правило, по которому из истинных суждений образуются новые истинные суждения.

С помощью доказательства устанавливаются логические связи между теоремами. Каждое доказательство можно представить в виде конечной последовательности предложений. Различают два основных вида доказательств:

I. Прямые доказательства – каждое такое доказательство представляет собой цепочку умозаключений линейного типа: $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, ..., A_n \Rightarrow B$ (разбиение на шаги условно, каждый шаг – истинная импликация), т.е. по свойству транзитивности $A \Rightarrow B$.

II. Косвенные доказательства – это все остальные. Наиболее распространены в школе следующие:

а) Метод «от противного».

Предполагают, что заключение теоремы неверно. Затем выводят следствия из этого предположения до тех пор, пока не получится противоречие с известным предложением. На этом основании заключают, что предположение было неверным, а значит, верно утверждение теоремы. Итак, схема рассуждений такова: Пусть дана некоторая теорема $A \Rightarrow B$.

1. Пусть истина не B («предположим обратное к B»).

2. $\bar{B} \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, B_n \Rightarrow \bar{A}$ (каждый шаг аргументирован).

3. Получили противоречие:

– с условием теоремы;

– с ранее доказанным утверждением;

– с аксиомой;

– со здравым смыслом (с логикой).

4. Вывод («взгляд назад»): предположение неверно, а верно то, что требуется доказать.

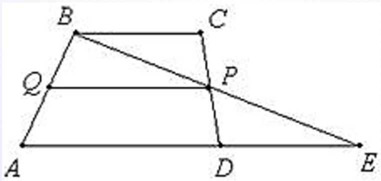
Методом «от противного» следует доказывать в случае: – единственности;

– если заключение теоремы содержит отрицание (нет, не может, не пересекает и др.);

– случай перебора (из нескольких условий исключаем неверные);

– когда имеем задачи типа «Можно ли…?» (метод проб, ошибок).

Рассмотрим теорему: «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме».



Дано: $ABCD$ – трапеция.

Доказать: $QP \parallel BC$, $QP \parallel AD$, $QP = (BC + AD)/2$.

Доказательство:

1. Проведём $BP \cap AD = E$, где P – середина CD.

2. Треугольники PBC и PED равны по 2-ому признаку ($CP = DP$ по построению, углы при вершине P равны как вертикальные, углы C и D равны как накрест лежащие).

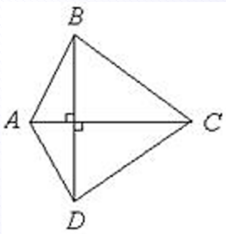
3. $PB=PE$, $BC=ED$.

4. PQ – средняя линия треугольника ABE.

5. $PQ \| AE$, причём $PQ=AE/2=(AD+BC)/2$, ч.т.д.

в) Доказательство с посредником (например, доказательство признаков равенства треугольников).

г) Доказательство с помощью контрпримеров – используется для доказательства ложности какой-либо теоремы (часто обратной данной). Чтобы убедиться в ложности суждения, достаточно привести пример, где бы это суждение было ложным.



Например, теорема (свойство ромба): «У ромба диагонали взаимно перпендикулярны». Обратная теорема: «Если в четырёхугольнике диагонали взаимно перпендикулярны, то он является ромбом». Обратная теорема ложна, т.к. легко привести контрпример (построим четырёхугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, а ромбом он не является – см. рис.).

Поиск доказательства идёт стандартно двумя методами:

1. Анализ Паппа (восходящий анализ) – ведущим вопросом является вопрос: «Что достаточно знать, чтобы ответить на поставленный вопрос?».

2. Анализ Евклида (нисходящий анализ) – рассуждения начинаются так: «Временно предположим, что то, что нам нужно доказать, уже доказано. Что отсюда следует?». Например, дана теорема (признак параллелограмма): «Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник – параллелограмм».

Восходящий анализ.

1. Для доказательства того, что $ABCD$ – параллелограмм, достаточно доказать, что $BC \| AD$ и $AB \| DC$.

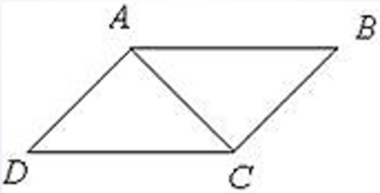
2. Для доказательства параллельности сторон четырёхугольника достаточно доказать равенство накрест лежащих углов при параллельных прямых и секущей.

3. Такие накрест лежащие углы можно получить, если провести диагональ AC: $\angle ACB$ и $\angle CAD$, $\angle BAC$ и $\angle ACD$.

4. Для доказательства равенства накрест лежащих углов достаточно доказать равенство треугольников ABC и CDA.

5. Для доказательства равенства данных треугольников достаточно установить справедливость равенств: $BC{=}DA,\ AB{=}CD,\ AC{=}AC$, а эти равенства выполняются (условие теоремы).

Нисходящий анализ.



1. Пусть $ABCD$ – параллелограмм.

2. Тогда $BC \| AD$ и $AB \| DC$.

3. Проведём диагональ AC, тогда получим:AC: $\angle ACB$ и $\angle CAD$, $\angle BAC$ и $\angle ACD$(как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей).

4. Из равенства накрест углов с учётом того, что AC – общая сторона следует равенство этих треугольников.

5. Тогда $BC{=}DA,\ AB{=}CD,\ AC{=}AC$, а эти равенства выполняются (условие теоремы).

Нетрудно теперь все рассуждения из нисходящего анализа провести в обратном порядке. В итоге получим **синтетическое доказательство** (результат поиска).

Чаще всего в школе учащимся предлагается именно синтетическое доказательство теорем, которое имеет ряд достоинств: исчерпывающая полнота, сжатость, краткость. Однако синтетический метод в методическом отношении имеет и свои недостатки. Остаётся неясным, как можно обнаружить такое доказательство, дополнительные построения никак не аргументируются. Учащиеся пассивно слушают и воспринимают такое доказательство, соглашаются с истинностью каждого умозаключения и не представляют, в каком направлении должны протекать дальнейшие рассуждения. Этот способ мало способствует самостоятельному открытию доказательства, и план рассуждений остаются скрытыми от учащихся.

В целом можно выделить 3 этапа работы над доказательством:

1. Подготовительный этап:

– повторение теорем (и их доказательств), связанных каким-либо образом с данной теоремой;

– выполнение практической работы, в ходе которой «открывается» метод доказательства теоремы;

– изучение и осмысление чертежа по содержанию теоремы; – если возможно, разбиение теоремы на части или частные случаи и поиск доказательства отдельных частей;

– составление плана (схемы) доказательства (по необходимости).

2. Доказательство теоремы и её запись в соответствующей символике:

– доказательство ведётся поэтапно, все умозаключения логически обоснованы;

– доказательство теоремы кратко, сжато и записано в определённой символике.

3. Закрепление доказательства:

– обобщение метода доказательства и его основной идеи; – выведение следствий из теоремы;

– на следующем уроке – доказательство при другом расположении чертежа;

– в домашней работе – превращение сокращённого книжного доказательства в развёрнутые цепочки умозаключений;

– доказательство теоремы другими методами (если это возможно);

– решение задач на доказательство с использованием данной теоремы и метода её доказательства;

– самостоятельное доказательство теорем, связанных с данной (обратной, противоположной, аналогичной).

Лекция 13. Сущность понятия доказательства. Методы доказательства теорем

В современной средней школе понятия доказательства, аксиоматического метода, аксиоматической теории, свойственные, прежде всего, школьному курсу геометрии, практически полностью исчезли. Система ЦТ и отмена устного экзамена по геометрии привели к тому, что теоретический материал на уроках геометрии излагается без доказательств, директивно, учащиеся перестали воспроизводить доказательства, демонстрирующие им логические способы рассуждений, в устной форме и тем самым перестали обучаться искусству рассуждений, необходимому в любой области деятельности. Основное внимание в курсе геометрии уделяется утилитарному применению теоретических фактов и формул к решению типовых задач, аналогичных тем, которые предлагаются в ЦТ. В результате такого реформирования геометрия, наиболее логичная из школьных учебных дисциплин, оказалась отделена от логики и перестала учить логике доказательств и рассуждений. С другой стороны, и сами современные молодые учителя, выпускаемые по четырехлетней программе бакалавриата из современных классических университетов, в которых бесследно растворились бывшие педагогические институты, не владеют логическими понятиями доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории. Курсы геометрии и математической логики сокращены в этих университетах до катастрофических объемов, а в некоторых университетах курс математической логики для будущих учителей математики исключен вовсе.

«Доказательство (в общепринятом употреблении этого слова) – это всего лишь рассуждение, которое должно убедить нас настолько, что мы сами готовы убеждать с его помощью других. Несомненно, что уточнение этого понятия (во всей полноте его объёма) – одна из важнейших задач математики». [6, с. 14]. Математика выделилась из системы всех прочих наук именно тем, что утверждаемые в ней факты подтверждались доказательствами. Считается, что первые математические доказательства в современном их понимании появились в Древней Греции в VII – VI вв. до Р.Х. и связаны они с именами Фалеса и Пифагора. Эту мысль подчеркивает Н. Бурбаки, начиная свой знаменитый трактат «Начала математики» словами: «Со времён греков говорить “математика” – значит говорить “доказательство”». [7, с. 23]. Сократ, Платон и Аристотель заложили основы логики как науки о рассуждениях и доказательствах и сформулировали принципы построения всякой науки как аксиоматической теории. Следуя их заветам, Евклид впервые построил геометрию как доказательную логическую теорию. Понимание доказательства, утвердившееся в математике со времен древних греков, можно рассматривать как интуитивно-убедительное. Оно тесно связано с языковыми средствами и с социальной психологией человеческого общества. Оба эти фактора меняются с течением времени, а вместе с ними меняются языковое оформление доказательств и представления об интуитивной ясности, очевидности и убедительности. С течением времени вместе с развитием математики и логики развивались также критерии и принципы логической строгости математических доказательств. Такой характер интуитивно-убедительного рассуждения понятие доказательства имело вплоть до конца XIX века. К этому времени развитие новых направлений в математике (в частности, открытие неевклидовых геометрий, обнаружение парадоксов канторовской теории множеств, проистекших из применения к бесконечным множествам методов рассуждений, свойственных рассуждениям о конечных множествах) привели к необходимости подвергнуть понятие доказательства более глубокому анализу с целью полного исключения из него интуитивного элемента. Такой анализ был осуществлен (математическими) логиками, начиная с Г. Фреге, что привело к введению нового понятия – понятия формального доказательства, которое стало существенным усовершенствованием интуитивно-психологического понятия доказательства. Можно сказать, что понятие формального доказательства, оттолкнувшись от интуитивных представлений о содержательном доказательстве, явилось логико-математической моделью интуитивного понятия доказательства. Таким образом, понятие доказательства, появившись в древнегреческой математике вместе со становлением логики как науки, современного уровня строгости достигло в XX веке вместе со становлением логики как математической науки и превращением ее в математическую логику. Поэтому логические понятия строгого математического доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории призван сформировать в будущем учителе математики курс математической логики.

Понятия формального доказательства, аксиоматического метода и аксиоматической теории возникают в формальной части курса математической логики, когда изучаются формализованные исчисления высказываний и предикатов, а также формальные аксиоматические математические теории. При этом, курс математической логики, конечно же, не учит находить доказательства тех или иных математических теорем, а тем более открывать сами эти теоремы. Его задача состоит в том, чтобы вскрыть методологическую сущность этих важнейших математических категорий с тем, чтобы будущий учитель математики мог руководствоваться ими в своей педагогической практике. Важнейшее логическое правило, на котором основано построение рассуждений и доказательств, сформулировано еще Аристотелем. Это – правило Modus Ponens (MP): из утверждений F и F $\to$ G («если F, то G») непосредственно следует утверждение G. Понятие доказательства определяется в рамках некоей аксиоматической теории, построенной на базе некоторой системы аксиом $\sum = A_1, A_2, \ldots, A_n$. При этом, в процессе доказательства могут использоваться какие-то ранее доказанные утверждения (которые называют гипотезами), совокупность которых обозначается Г. Итак, в математической логике дается следующее определение строгого доказательства. Под доказательством (выводом (из аксиом)) утверждения G из системы аксиом $\sum = A_1, A_2, \ldots, A_n$ понимают такую конечную последовательность утверждений $B_1, B_2, \ldots, B_s \equiv G$ утверждений теории, оканчивающуюся доказываемым утверждением G, в которой каждое утверждение есть либо аксиома из $\sum$, либо получено из предшествующих утверждений этой последовательности по правилу вывода MP. Утверждение G доказуемо (выводимо из аксиом, или является теоремой), если существует доказательство этого утверждения, т.е. доказательство, оканчивающееся этим утверждением G.

В качестве примера рассмотрим теорему: «У параллелограмма противолежащие стороны равны». (Мы опустили вторую часть этой теоремы, утверждающую, что у параллелограмма противолежащие углы равны). Воспроизведём сначала доказательство этой теоремы, приводимое в учебнике: «Пусть ABCD – данный параллелограмм. Проведём диагонали параллелограмма. Пусть O – точка их пересечения. Равенство противолежащих сторон AB и CD следует из равенства треугольников AOB и COD. У них углы при вершине O равны как вертикальные, а OA = OC и OB = OD по свойству диагоналей параллелограмма. Точно так же из равенства треугольников AOD и COB следует равенство другой пары противолежащих сторон – AD и BC».

Более строгая логическая формулировка требуемой теоремы имеет вид: «Если ABCD – параллелограмм, то AB = CD». Представим ее доказательство в виде последовательности (цепочки) узловых утверждений, составляющих его:

а) ABCD – параллелограмм (по условию);

б) O – точка пересечения его диагоналей (по построению);

в) $\angle AOB = \angle COD$ (как вертикальные);

г) OA = OC (по свойству диагоналей параллелограмма);

д) OB = OD (по свойству диагоналей параллелограмма);

е) $\triangle\, AOB = \triangle\, COD$ (из в, г, д по первому признаку равенства треугольников);

ж) AB = CD (из е) по определению равных треугольников). Итак, из гипотезы «ABCD – параллелограмм» выведено утверждение «AB = CD». В результате заключаем, что доказана теорема «Если ABCD – параллелограмм, то AB = CD».

В современном понимании о строгом доказательстве можно говорить в рамках формализованной системы, которая ограничивается не только перечнем неопределяемых понятий и описывающих их аксиом, но и используемыми правилами вывода. Тогда понятие «доказать логическим путем» в рамках такой теории приобретает конкретный смысл. В школьном курсе математики таких жестких правил нет, и используется так называемая «логика здравого смысла». В некоторых случаях учителя считают возможным специально знакомить учащихся с отдельными правилами вывода на соответствующих примерах.

Под **доказательством теоремы T** будем понимать конечную последовательность предложений $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, принадлежащую данной теории, которая удовлетворяет двум условиям:

а) каждое предложение этой последовательности представляет собой аксиому, определение или ранее уже доказанную теорему, или допущение (условие доказываемой теоремы) или же получается из предшествующих предложений по одному из допустимых правил вывода;

б) последнее предложение этой последовательности (A_n) есть предложение T.

Под правилами вывода понимаются правила логики без каких-либо ссылок на наглядность и опыт.

Предложение *T* является теоремой, если для него может быть построено хотя бы одно доказательство, то есть найдется хотя бы одна последовательность предложений, удовлетворяющая условиям а и б.

Доказательство в математике проводится по правилам логики; в основе его лежит дедуктивный вывод. **Умозаключение, между посылками и заключением которого имеют место отношения логического следования, называется дедуктивным**. Например, число *a делится на* 2 и *a делится на* 3, следовательно, *a делится на* 6. Мысль в процессе дедуктивного умозаключения движется от общего к частному, от более общего к менее общему.

Индуктивные же выводы характерны тем, что для них нельзя установить таких общих правил. При одной и той же структуре посылок и вывода в зависимости от содержания посылок вывод может быть как истинным так и ложным.

Методы доказательства, используемые в школьном курсе математики, можно выделить по двум основаниям:

- по способу построения цепочки рассуждений (прямое и косвенное);
- по математическому аппарату, используемому в доказательстве.

Прямое доказательство теоремы основывается на каком-нибудь несомненном начале, из которого непосредственно устанавливается истинность теоремы. **К прямым доказательствам относятся доказательства методами: синтетическим, аналитическим и методом математической индукции.**

Синтетический метод доказательства теорем характеризуется тем, что при построении цепочки рассуждений на его основе мысль движется «от условия теоремы к ее заключению», то есть от уже установленных предложений данной области к новому доказываемому. **К достоинствам синтетического метода доказательства относятся:** исчерпывающая полнота, сжатость, краткость. Обычно он применяется при изложении уже разработанных математических теорий, известных доказательств или доказательств, отыскание которых не вызывает у учащихся затруднений. Синтетический метод в методическом отношении имеет и свои недостатки. Остается неясным, как можно обнаружить такое доказательство, почему в рассуждениях поступают так, а не иначе; дополнительные построения никак не аргументируются; учащиеся не привлекаются к доказательству, так как они не представляют, в каком направлении должны протекать дальнейшие рассуждения.

Для аналитического метода доказательства характерно обратное движение мысли «от заключения теоремы к ее условию», то есть от доказываемого предложения к тем предложениям (аксиомам, определениям, ранее доказанным теоремам), из которых оно выводится. Преобразование заключения суждения могут быть в форме: а) отыскание достаточных оснований справедливости заключения (восходящий анализ); б) отыскание необходимых признаков справедливости суждения с последующей проверкой обратимости рассуждений (нисходящий анализ).

Важнейшим преимуществом аналитического метода является то, что учащиеся могут сами сознательно осуществлять поиск доказательства, однако на это требуется достаточно много времени. Обычно при доказательстве теоремы осуществляется последовательное преобразование то условия, то заключения суждения, то есть аналитико-синтетический метод.

В основу **метода математической индукции** положена аксиома арифметики натуральных чисел. Дадим, наконец, полный список аксиом, дающий строгое определение натурального ряда, называемый ***аксиоматикой Пеано***.

Натуральным рядом называется структура с основным множеством N, элементы которого называются натуральными числами, выделенной единицей и операцией $^|$(штрих), если они удовлетворяют следующим пяти аксиомам:

(A1) В N существует натуральное число 1, называемое единицей.

(A2) За каждым натуральным числом n непосредственно следует однозначно определенное натуральное число $n^|$, называемое следующее за n. Другими словами, для любого $n \in N$ существует $m \in N$ такое, что $m = n^|$, причем если $n = k$, то $n^| = k^|$.

(A3) Единица, т.е. натуральное число 1, непосредственно не следует ни за каким натуральным числом. Другими словами, $1 \neq n^|$ ни для какого $n \in N$, т.е. для всех $n \in N$ обязательно $1 \neq n^|$.

(A4) Каждое натуральное число непосредственно следует не более чем за одним натуральным числом. Другими словами, если $n^| = k^|$, то $n = k$, или, что эквивалентно, если $n \neq k$, то $n^| \neq k^|$.

(A5) **(Аксиома индукции) Любое подмножество M из множества N, содержащее единицу, т.е. $1 \in M$, и вместе с каждым n из M, содержащее следующий за n, т.е. $n^| \in M$, совпадает с множеством N. Эти аксиомы оказались проще, чем аксиомы геометрии.**

Доказательство, которое основывается на установлении истинности посредством опровержения некоторых суждений, не содержащихся в данной теореме, называется

косвенным доказательством теоремы. К косвенным приемам поиска доказательств относят:

- **метод «от противного»** (истинность доказываемого тезиса устанавливается посредством опровержения противоречащего ему суждения);
- **разделительный метод, или метод разделения условий** (тезис рассматривается как один из возможных вариантов предположений, когда все предположения отвергаются, кроме одного), иначе этот метод называют методом исключения.

Для метода доказательства от противного характерно следующее. Пусть надо доказать теорему $\forall(x)(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Допускается, что $Q(x)$ ложно. Тогда должно быть истинно $\overline{Q(x)}$. На основе $\overline{Q(x)}$ строится цепочка рассуждений, пока не получится $R(x)$ такое, которое противоречит истинному $\overline{R(x)}$. Поэтому $R(x)$ ложно, и принятое за истинное $\overline{Q(x)}$ тоже ложно, а следовательно, $Q(x)$ истинно, и тем самым признается истинность теоремы.

По-другому это можно сказать так: в качестве допущения принимают отрицание доказываемого предложения и ведут доказательство до получения противоречия. Затем говорят, что «полученное противоречие доказывает теорему». Выражение «противоречие доказывает теорему» можно разъяснить следующим образом: так как противоречие (ложное заключение) получено в результате применения допустимых правил вывода (правильных рассуждений), хотя бы одна из посылок должна быть ложной. Но ни аксиомы, ни определения, ни ранее доказанные теоремы не могут быть ложными, следовательно, ложным должно быть допущение, то есть отрицание доказываемого предложения. Если же отрицание доказываемого предложения ложно, то само это предложение истинно, то есть теорема доказана.

В качестве примера применения разделительного метода можно рассмотреть доказательство теоремы: «**Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180 градусов, то около четырехугольника можно описать окружность**». Рассуждения строятся следующим образом:

три точки, не лежащие на одной прямой, задают окружность, значит, любые три вершины четырехугольника принадлежат окружности; рассматриваются и отвергаются варианты, когда четвертая вершина лежит внутри или вне круга, ограниченного этой окружностью; делается вывод, что четвертая вершина лежит на данной окружности.

К методам доказательства, выделенным по второму основанию, когда способ связи аргументов согласуется с определенной математической теорией в школьном курсе математики, относят:

1. Метод геометрических преобразований. Используется как средство обоснования некоторых отношений между элементами евклидовой геометрии. Он состоит из выполнения последовательности шагов: выбирается геометрическое преобразование, обладающее свойством, которое позволяет обосновать наличие указанного отношения между объектами евклидовой геометрии; выполняется преобразование, при котором один объект переходит в другой; обосновывается наличие указанного отношения между объектами с помощью свойств выбранного геометрического преобразования.

2. Алгебраические методы (уравнений, неравенств, тождественных преобразований).

3. Векторный метод, использующий аппарат векторной алгебры.

4. Координатный метод - способ определения положения точки на прямой, на плоскости или в пространстве с помощью чисел (например, в декартовой системе координат или какой-либо другой). Используя координатный метод, алгебраические уравнения можно истолковать в виде геометрических образов (графиков или фигур) и, наоборот, искать решение геометрических задач с помощью аналитических выражений (уравнений, неравенств или их систем).

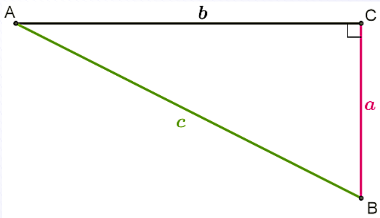
При доказательстве математических утверждений используются разные математические методы.

Для того чтобы учащиеся овладели прямым и косвенным доказательствами, необходимо сформировать у них определенную последовательность умений: искать доказательство, проводить доказательство, оформлять доказательство теоремы.

Выбор и использование того или иного метода доказательства теоремы во многом определяется его сущностью и взаимными связями, используемыми методами обучения, содержанием и местом теоремы в общей системе обучения математике в школе, возможностями активизации познавательной деятельности учащихся.

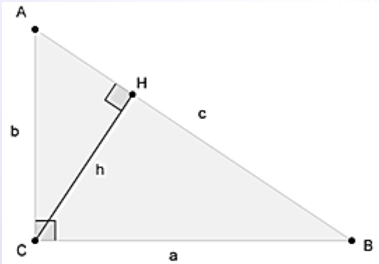
Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов:

$c^2 = a^2 + b^2$.



Доказательство теоремы Пифагора

Пусть треугольник ABC - прямоугольный треугольник с прямым углом C.



Проведём высоту из вершины C на гипотенузу AB, основание высоты обозначим как H.

Прямоугольный треугольник ACH подобен треугольнику ABC по двум углам ($\angle ACB = \angle CHA = 90$, $\angle A$ - общий). Аналогично, треугольник CBH подобен ABC.

Введя обозначения

BC=a, AC=b, AB=c

из подобия треугольников получаем, что

a:c=HB:a,b:c=AH:b.

Отсюда имеем, что

a^2=c·HB, b^2=c·AH.

Сложив полученные равенства, имеем

$a^2 + b^2 = c \cdot HB + c \cdot AH$,

$a^2 + b^2 = c \cdot (HB + AH)$,

$a^2 + b^2 = c \cdot AB$,

$a^2 + b^2 = c \cdot c$,

$a^2 + b^2 = c^2$.

Что и требовалось доказать.

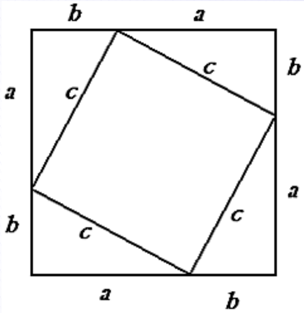
Теорема Пифагора - одна из основополагающих теорем евклидовой геометрии, устанавливающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника.

В древнекитайской книге “Чжоу би суань цзин” говорится о пифагоровом треугольнике со сторонами 3, 4 и 5. Крупнейший немецкий историк математики М. Кантор (1829 - 1920) считает, что равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$ было известно уже египтянам ещё около 2300 г. до н.э. По мнению ученого, строители строили тогда прямые углы при помощи прямоугольных треугольников со сторонами 3, 4 и 5. Несколько больше известно о теореме Пифагора у вавилонян. В одном тексте приводится приближённое вычисление гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника.

На данный момент в научной литературе зафиксировано 367 доказательств данной теоремы. Вероятно, теорема Пифагора является единственной теоремой со столь внушительным числом доказательств. Такое многообразие можно объяснить лишь фундаментальным значением теоремы для геометрии.

Древнекитайское доказательство [4]

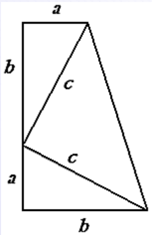
На древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами **a, b** и гипотенузой **c** уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной **a+b**, а внутренний – квадрат со стороной **c**, построенный на гипотенузе



$$(a+b)^2 = c^2 + \frac{ab}{2} \cdot 4,$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Доказательство Дж. Гардфилда (1882 г.) [4]

Расположим два равных прямоугольных треугольника так, чтобы катет одного из них был продолжением другого.



Площадь рассматриваемой трапеции находится как произведение полусуммы оснований на высоту

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot (a+b).$$

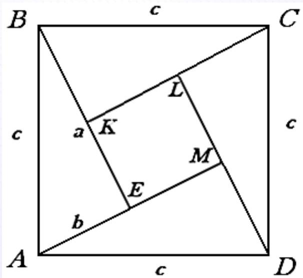
С другой стороны, площадь трапеции равна сумме площадей полученных треугольников:

$$S = \frac{ab}{2} \cdot 2 + \frac{c^2}{2}.$$

Приравнивая данные выражения, получаем:

$$\frac{2ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \frac{(a+b)^2}{2} \text{ или } c^2 = a^2 + b^2.$$

Старейшее доказательство (содержится в одном из произведений Бхаскары).[4]



Пусть ABCD квадрат, сторона которого равна гипотенузе прямоугольного треугольника ABE (AB = c, BE = a, AE = b);

Пусть $CK \perp BE = a$, $DL \perp CK$, $AM \perp DL \Rightarrow \triangle ABE = \triangle BCK = \triangle CDL = {}$ $= \triangle AMD$, значит $KL = LM = ME = EK = a - b$.

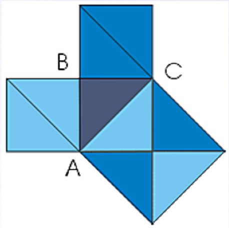
$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (a-b)^2,$$

$$c^2 = 2ab + b^2 - 2ab + a^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Начало
Содержание
Страница 217 из 312
Назад
На весь экран
Закрыть

Доказательство простейшее [21]



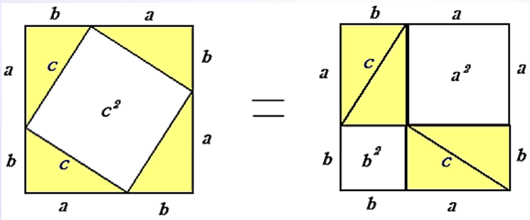
Это доказательство получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника.

Вероятно, с него и начиналась теорема.

В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников, чтобы убедиться в справедливости теоремы.

Например, для треугольника ABC: квадрат, построенный на гипотенузе AC, содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах, - по два. Теорема доказана.

Доказательство древних индусов [2] а) б)



Квадрат со стороной (a+b), можно разбить на части либо как на рисунке a), либо как на рисунке b). Ясно, что части **1, 2, 3, 4** на обоих рисунках одинаковы. А если от равных (площадей) отнять равные, то и останутся равные, т.е. $c^2 = a^2 + b^2$.

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 218 из 312
Назад
На весь экран
Закрыть

Впрочем, древние индусы, которым принадлежит это рассуждение, обычно не записывали его, а сопровождали лишь одним словом:

Смотри!

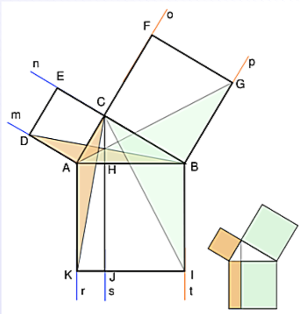
Доказательство Евклида [1, 20]

В течение двух тысячелетий наиболее распространенным было доказательство теоремы Пифагора, придуманное Евклидом. Оно помещено в его знаменитой книге «Начала».

Евклид опускал высоту BH из вершины прямого угла на гипотенузу и доказывал, что её продолжение делит достроенный на гипотенузе квадрат на два прямоугольника, площади которых равны площадям соответствующих квадратов, построенных на катетах.

Чертёж, применяемый при доказательстве этой теоремы, в шутку называют «пифагоровы штаны». В течение долгого времени он считался одним из символов математической науки.

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его Dons asinorum- ослиный мост, или elefuga- бегство “убогих”, так как некоторые “убогие” ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому “ослами”, были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также “ветряной мельницей”, составляли стихи вроде “Пифагоровы штаны на все стороны равны”, рисовали карикатуры.



Лекция 14. Методика изучения теорем. Методические задачи, решаемые при изучении теорем. Воспитание у учащихся потребности в доказательствах

Теорема – это математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства (рассуждения)

2 Виды формулирования теоремы

- Условная
- Категорическая
- Разделительная

Всегда можно из одного вида формулирования теоремы перейти к другому. Если теорема сформулирована в условной форме, то в ней должно быть ясно указан при каких условиях рассматривается в ней тот или иной объект (условие) и что в этом объекте утверждается (заключение теоремы).

Пример:

Теорема: В параллелограмме диагонали, пересекаясь, делятся пополам.

Если четырехугольник – параллелограмм, то...

Условие P четырехугольник – параллелограмм, диагонали его пересекаются

Заключение G точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам.

Доказательство теоремы состоит в том, чтобы показать, что если выполняется условие, то из него логически следует заключение, т.е., приняв, что P истинно, соответствии с правилами вывода показать, что G истинно, и тем самым получить возможность утвердить, что данное высказывание (теорема) истинно целом.

Доказательство включает в себя три основных элемента:

Тезис (Главная цель доказательства – установить истинность тезиса). Форма выражения тезиса - суждение.

Аргументы (основание) доказательства – положения на которые опирается доказательство и из которых при условии их истинности необходимо следует истинность доказываемого тезиса. Форма выражения аргументов - суждения.

Связывая аргументы, приходим к умозаключению, которые строятся по определенным правилам. Аргументы, на которые можно опереться при доказательстве: аксиомы, определения, ранее доказанные теоремы.

Демонстрация – логический процесс взаимосвязи суждений, в результате которого осуществляется переход от аргументов к тезису.

При изучении теорем школьного курса математики учитель придерживается следующей последовательности:

1. Постановка вопроса (создание проблемной ситуации)
2. Обращение к опыту учащихся
3. Высказывание предположения
4. Поиск возможных путей решения
5. Доказательство найденного факта
6. Проведение доказательства в максимальной форме
7. Установление зависимости доказанной теоремы от ранее известных.

Процесс изучения школьниками теоремы включает этапы:

1. Мотивация изучения теоремы
2. Ознакомление с фактом, отраженным в теореме
3. Формулировка теоремы и выяснение смысла каждого слова в формулировке теоремы
4. Усвоение содержания теоремы
5. Запоминание формулировки теоремы
6. Ознакомление со способом доказательства
7. Доказательство теоремы
8. Применение теоремы
9. Установление связей теоремы с ранее изученными теоремами

Этапы изучения теоремы

1. Раскрытие ее содержания (формулировка теоремы)
2. Работа над структурой

3. Построение чертежа, краткая запись содержания теоремы

4. Поиск доказательства, доказательство и ее запись

5. Закрепление теоремы

6. Применение теоремы

Методы введения теорем

Конкретно – индуктивный (в готовом виде не сообщается, проводится специальная работа по подведению учащихся к теореме. Итог: формулирование изучаемой теоремы).

Абстрактно – дедуктивный (Начинается с того, что учитель сам формулирует теорему, затем проводится работа по уточнению смысла данной теоремы, ее условия, заключения, построения чертежа). Этот метод требует больше затрат времени нежели предыдущий.

Доказательство – рассуждения с целью обоснования каких-либо утверждений

Метод доказательства – способ связи аргументов при переходе от условия к заключению суждений.

Перед учителем стоит задача: обеспечить сознательное усвоение математических знаний, воспитать навыки самостоятельной мыслительной деятельности, умение рационально применять полученные знания. Этого можно достичь лишь при успешном выборе учителем приемов и методов обучения доказательству математических утверждений. Если изучение теорем сводить лишь к применению самого содержания без доказательств, то теряется весь смысл математического образования, которое заключается в развитии аналитического и логического мышления.

Учителю, для того, чтобы подготовиться к подаче и доказательству утверждения, следует четко спланировать порядок изложения материала при изучении теоремы. **Этапы изучения таковы:**

- мотивация изучения теоремы (необходимость перевода на математический язык наблюдаемых в жизни явлений и процессов);

- знакомство с содержанием;
- обоснование необходимости доказать теорему;
- выполнение рисунка (для наглядности) и краткая запись содержания теоремы;
- поиск приемов доказательства, собственно доказательство и его математическая интерпретация;
- закрепление;
- примеры применения теоремы.

В зависимости от сложности материала, доказательство можно проводить:

- только учителю с последующим проговариванием по частям (задать такие вопросы: что было дано, что следовало доказать, как формулируется теорема, с чего начали доказательство, что делали, какие теоремы или аксиомы использовались при доказательстве и для чего);
- учителю совместно с учениками;
- ученикам по предложенному учителем алгоритму (докажите теорему самостоятельно, сравните свое доказательство с тем, что приведено в учебнике, проанализируйте расхождения).

Приучать школьников к самостоятельному доказательству утверждений можно только после соответствующей подготовки и знакомства с методами и приемами, которые используются с такой целью в математике.

Итак, **доказательство — это рассуждение, цель которого заключается в обосновании (или опровержении) истинности какого-либо утверждения.**

Элементы доказательства

тезис (математическое утверждение, которое надо доказывать)

аргументы(положения, на которых строится доказательство)

демонстрация (логическое обоснование взаимосвязи вышеуказанных элементов, результат — переход от аргументов к начальному тезису)

Методы доказательства теорем делят на прямые:

• синтетический,

• восходящий и нисходящий анализ;

и косвенные:

• метод от противного,

• разделительный метод;

выделенные по используемому математическому аппарату:

• алгебраический,

• векторный,

• координатный,

• метод геометрических преобразований.

ТЕОРЕМА 1: «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны».

Разъяснительной частью этой теоремы является множество произвольных треугольников. Теорема трактуется так: как только в треугольнике нашлись две равные стороны, так в нём сразу же обнаружатся и два равных угла.

ТЕОРЕМА 2: «Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух данных сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине».

Разъяснительной частью этой теоремы является множество отрезков. Однако такой ответ нарушает существующее общее правило, принятое в теории методики преподавания математики при переходе от рода объекта к его виду. Имеется в виду договорённость о том, что от рода объекта, например, при классификации какого-либо математического понятия, переходить к ближайшему его виду; и, наоборот, от вида, например, при формулировании родовидового определения понятия, переходить к ближайшему роду. В нашем же случае, множество произвольных отрезков как род не является ближайшим к множеству средних линий отрезка как вид. Правильный ответ подсказывает формулировка теоремы. Разъяснительной частью здесь является множество отрезков с концами на двух данных сторонах треугольника. Теорему можно трактовать так: как только отрезок, с концами на двух данных сторонах треугольника стал его средней линией, так он сразу же стал параллелен третьей стороне и равен её половине.

В этих теоремах разъяснительная часть состояла из элементов: множество треугольников, множество отрезков. При этом структура самого объекта во внимание не принималась. К тому же можно заметить, и даже особо подчеркнуть, что предикаты A(x) и B(x) являются заданными на одном и том же множестве M. Например, для теоремы об углах в равнобедренном треугольнике предикаты: A(x): « треугольник x – равнобедренный», B(x): «треугольник x – имеет два равных угла» заданы на одном и том же множестве M – множестве произвольных треугольников. С этой точки зрения, формулировка теоремы говорит о том, что, если предикат A(x) принял значение «истинно» для некоторого треугольника, то для этого же треугольника предикат B(x) так же примет значение «истинно». И этот факт будет иметь место для любого треугольника.

Доказательство – форма мышления, посредством которой на основе истинности одних знаний раскрывается истинность или ложность других.

Объективная возможность доказательства связана с: а) всеобщей обусловленностью предметов и явлений действительности; б) наличием недоказываемых истин.

Необходимость в доказательстве определяется: а) общественной природой человеческого познания (человек стремится передать открытую истину другим людям, для чего он должен убедиться сам в ее истинности и убедить в этом других); б) несамоочевидностью большинства истин.

Структура доказательства: тезис – то, что доказывается; основания – то, чем доказывают; способ доказательства – последовательная логическая связь тезиса и оснований.

Тезисом могут выступать разнообразные суждения (научного или практического характера, если они не очевидны и нуждаются в доказательстве).

Разновидностью тезиса выступает гипотеза (от греч. hypothesis – основание, предположение, догадка). Это – более или менее вероятное предположение, которое может стать предметом доказательства, а со временем обрести статус научного положения или теории.

В качестве оснований могут выступить: а) факты; б) определения; в) аксиомы и постулаты; г) ранее доказанные положения.

Основными формами доказательства являются: а) индукция; б) дедукция; в) традукция (аналогия).

В зависимости от цели выделяются два вида доказательства: а) собственно доказательство и б) опровержение.

Доказательство в собственном смысле слова иногда называется подтверждением. Под ним разумеется обоснование истинности тезиса.

Опровержение есть обоснование ложности тезиса, которое тоже достигается с помощью истинных доводов.

Опровержение может принимать форму: а) опровержения тезиса; б) критики оснований (аргументов); в) обоснования отсутствия связи между основаниями и тезисом. Нередко опровержение носит всесторонний характер: оно касается сразу всех компонентов доказательства.

В зависимости от способа обоснования выделяются: а) прямые и б) косвенные доказательства.

Прямое доказательство представляет собой рассуждение, в котором доводы непосредственно обосновывают истинность или ложность тезиса.

Косвенное доказательство. Оно отличается тем, что доводы в нем обосновывают истинность какого-либо тезиса опосредованно, через обоснование ложности другого, исключающего его суждения.

Косвенное доказательство может быть: а) апагогическим и б) разделительным.

Апагогическое доказательство (от греч. apagogos – уводящий в сторону), или доказательство от противного, состоит в том, что вначале предпринимается доказательство тезиса, противоречащего исходному; тезис доводится до абсурда или противоречия с теми или иными установленными истинами, затем из ложности такого тезиса делается вывод об истинности противоречащего ему.

Разделительное доказательство характеризуется тем, что из нескольких возможных тезисов методом исключения доказывается один.

Для достижения цели доказательства необходимо соблюдение следующих правил:

а) правил тезиса; б) правил аргументов; в) правил по отношению к способам доказательства.

Правила тезиса

1. Доказываемый тезис должен быть истинным.

2. Тезис должен быть строго определенным, точным, четким.

3. Тезис должен оставаться одним и тем же на протяжении всего доказательства. Это правило вытекает из предыдущего и выступает его логическим продолжением.

Правила аргументов

1. Аргументы должны быть истинными.

2. Истинность аргументов должна быть обоснована независимо от тезиса.

3. Аргументы не должны противоречить друг другу.

4. Каждый из аргументов должен быть необходим, а все вместе достаточны для обоснования данного тезиса.

Правила по отношению к способу (форме) доказательства

Главное правило здесь состоит в том, что тезис должен с логической необходимостью следовать из оснований, как вывод из посылок.

Ошибки в доказательстве

Ошибки по отношению к тезису. Наиболее распространенными и типичными ошибками являются: а) «подмена тезиса» и б) «переход в другой род».

Типичными ошибками по отношению к основаниям доказательства являются: а) «основное заблуждение»; б) «предвосхищение основания»; в) «круг в доказательстве».

Ошибки по отношению к способу (форме) доказательства. Основной из них является ошибка «не следует». Она означает, что между аргументами и тезисом нет необходимой логической связи, не соблюдено правило следования, важное для всякого умозаключения. Разновидностями этой основной ошибки можно считать такие: «от сказанного в относительном смысле к сказанному в абсолютном»; «от собирательного смысла к разделительному»; «от разделительного смысла к собирательному» и др. Всякий шаг доказательства состоит из трех частей:

1) предложение (аксиома, теорема, определение), на основе которого производится этот шаг доказательства; это основание шага доказательства называется посылкой или аргументом;

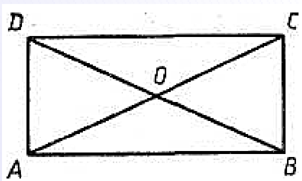
2) логическое рассуждение, в процессе которого посылка применяется к условиям теоремы или к ранее полученным следствиям;

3) логическое следствие применения посылки к условиям или ранее полученным следствиям.

В последнем шаге доказательства теоремы в качестве следствия получаем утверждение, которое необходимо было доказать. Покажем процесс доказательства на примере такой теоремы:

Диагонали прямоугольника равны.

В этой теореме нам дан произвольный (любой)прямоугольник



Для того чтобы легче было рассуждать в процессе доказательства, поступают следующим образом. Начертим вполне определенный прямоугольник ABCD, но при доказательстве не будем использовать какие-либо частные особенности этого прямоугольника (например, что его сторона AB примерно в 2 раза больше стороны AD и т. д.). Поэтому наши рассуждения относительно этого определенного прямоугольника будут верны и для любого другого прямоугольника, т. е. они будут иметь общий характер для всех прямоугольников.

Проведем диагонали AC и BD. Рассмотрим полученные треугольники ABC и ABD. У этих треугольников углы ABC и BAD равны как прямые, катет AB - общий, а катеты BC и AD равны как противоположные стороны прямоугольника. Следовательно, эти треугольники равны. Отсюда следует, что стороны AC и BD также равны, что и требовалось доказать.

Все доказательство этой теоремы можно изобразить в виде следующей схемы.

№ шага	**Посылки (аргументы)**	**Условия**	**Следствия**
1.	Определение: прямоугольник - это четырехугольник, у которого все углы прямые	ABCD - прямоугольник	$\angle A$ - прямой $\angle B$ - прямой.
2.	Теорема: Прямые углы равны.	$\angle A$ - прямой $\angle B$ - прямой.	$\angle A = \angle B$.
3.	Теорема: Противоположные стороны прямоугольника равны.	ABCD - прямоугольник	BC=AD
4.	Первый признак равенства двух треугольников.	BC=AD, AB=AB, $\angle B = \angle A$	$\triangle ABC = \triangle BAD$.
5.	Определение равенства треугольников.	$\triangle ABC = \triangle BAD$, AC и BD соответственные стороны	AC=BD.

Самое трудное в доказательстве - это найти последовательность посылок (аксиом, теорем, определений), применяя которые к условиям теоремы или промежуточным результатам (следствиям) в конечном итоге можно получить нужное следствие - доказываемое положение.

Какими правилами нужно руководствоваться при поиске этой последовательности? Очевидно, что эти правила не могут носить обязательный характер, они лишь указывают возможные пути поиска. Поэтому они называются эвристическими правилами или просто эвристиками (от греческого слова эврика - нахожу, нашел). Многие выдающиеся математики, такие, как Папп (древнегреческий математик, живший в III в.), Блез Паскаль (1623-1662), Рене Декарт (1596-1650), Жак Адамар (1865-1963), Дьердж Пойя (1887) и многие другие, занимались разработкой эвристик для поиска доказательства теорем и решения задач. **Вот некоторые эвристические правила, которые полезно помнить:**

1. Полезно заменять названия объектов, о которых идет речь в теореме (задаче), их определениями или признаками.

Например, в рассмотренной выше теореме шла речь о прямоугольнике, и мы для доказательства использовали определение прямоугольника.

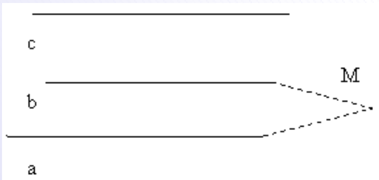
2. Если можно, то нужно доказываемое положение раздробить на части и доказывать каждую часть в отдельности.

Так, например, доказательство теоремы: «Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник - параллелограмм» - можно разделить на две части: сначала доказать, что одна пара противоположных сторон данного четырехугольника параллельна, а затем доказать, что и вторая пара противоположных сторон также параллельна.

Так следует поступать всегда, когда есть возможность доказываемое утверждение разбить на несколько частей более простых утверждений.

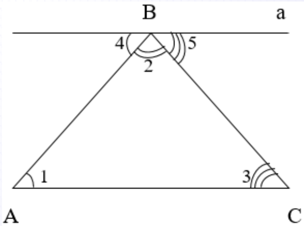
3. В поисках доказательства теоремы полезно идти с двух сторон: от условий теоремы к заключению и от заключения к условиям.

Теорема. Две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой.



Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$.
Доказать: $a \parallel b$.

Докажем эту теорему ***методом от противного***. Допустим, что заключение теоремы неверно, т. е. прямая a непараллельна прямой b. Тогда они пересекаются в некоторой точке M. А так как по условию каждая из этих прямых параллельна прямой c, то получается, что через точку M проведены две прямые a и b, параллельные одной и той же прямой c. А мы знаем по аксиоме параллельности, что через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной. Пришли к противоречию с аксиомой. Это показывает, что наше предположение о непараллельности прямых a и b неверно, следовательно, $a \parallel b$, что и требовалось доказать.



Дано: $\triangle ABC$

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180$

Доказательство:

1. Проведем прямую a параллельно AC, отметим получившиеся углы.

2. Заметим, что сумма углов $\angle 4, \angle 2, \angle 5$ дает 180 (развернутый угол).

3. $\angle 1 = \angle 4$ (как накрест лежащие), при параллельных прямых a, AC и секущей AB. $\angle 3 = \angle 5$ аналогично, при секущей BC.

4. Следовательно, заменяя углы в равенстве $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180$, углы заменим равными, получим $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180$, т.е. $\angle A + \angle B + \angle C = 180$.

Возьмем лист бумаги с параллельными краями, отложим не нем произвольный отрезок AB и проведем прямые, перпендикулярные AB. Согнем лист по этим перпендикулярам, повторим сгибы несколько раз и раскроем лист. Измерим отрезки

$A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$. Повторим такие же действия с листом бумаги, у которого края не параллельны. Измерим отрезки $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$. И в первом и во втором случае отрезки $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1$ равны. Их равенство доказывается теоремой, которую называют по имени греческого математика Фалеса Милетского.

Формулировка теоремы Фалеса: Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

В теореме нет ограничений на взаимное расположение секущих (она верна как для пересекающихся прямых, так и для параллельных).

Дано: $A_1A_2 = A_2A_3$

$c \parallel d \parallel e$

Доказать: $B_1B_2 = B_2B_3$

Доказательство:

А) пусть $a \parallel b$

$A_1A_2 = B_1B_2, A_2A_3 = B_2B_3$ Как противоположные стороны параллелограммов. По условию $A_1A_2 = A_2A_3$, следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$

Б) пусть $a \neq b$

Проведем прямую k, параллельную прямой a, она пересечет прямую c в точке F, прямую d в точке B_2, прямую e в точке E.

$A_1FB_2A_2$ – параллелограмм, значит $A_1A_2 = FB_2$

Аналогично доказывается, что $A_2A_3 = B_2E$, по условию $A_1A_2 = A_2A_3$, значит $FB_2 = B_2E$. Треугольники B_1FB_2 и B_2B_3E равны по стороне и двум углам.

Следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$.

В общем виде теорема Фалеса формулируется так: **если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой пропорциональные отрезки. Есть и более**

короткая формулировка: параллельные прямые отсекают на секущих пропорциональные отрезки.

Доказанная выше теорема является частным случаем общей теоремы Фалеса, так как равные отрезки пропорциональны с коэффициентом, равным единице.

Для теоремы Фалеса верно обратное утверждение: **Если прямые, пересекающие две другие прямые (параллельные или нет), отсекают на обеих из них равные (или пропорциональные) отрезки, начиная от вершины, то такие прямые параллельны.**

В этой теореме важно, что равные отрезки начинаются от вершины.

С помощью теоремы Фалеса можно разделить данный отрезок на n равных частей. Пусть дан отрезок AB длиной 8 см. Требуется разделить его на 7 равных частей.

Решение: Проведем луч с началом в точке A, отличный от отрезка AB, и отложим на нем с помощью циркуля последовательно семь равных отрезков, начиная от точки A.

Конец последнего отрезка соединим с точкой B и проведем параллельные прямые через каждую из точек до пересечения с отрезком AB.

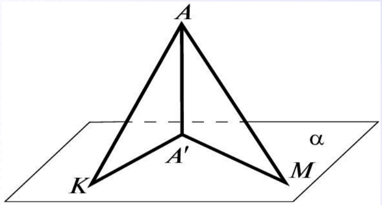
Отрезок AB разделится на 7 частей, они равны между собой по теореме Фалеса.

Фалес Милетский – родился приблизительно в 625 г. умер в середине VI в. до н.э. – родоначальник европейской науки и философии математик, астроном и политический деятель. Фалес происходил из знатного финикийского рода, был современником Солона и Креза, среди сограждан пользовался большим уважением.

В геометрии Фалесу приписывают открытие и доказательство ряда теорем: **о делении круга диаметром пополам, о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о равенстве вертикальных углов, один из признаков равенства прямоугольных треугольников и другие.** Фалес впервые ввел в науку, и в частности в математику, доказательство. Теорема Фалеса используется не только в геометрии, но и в морской навигации. Она выступает в качестве правила о том, что столкновение судов, двигающихся с постоянной скоростью, неизбежно, если сохраняется курс судов друг на друга.

Теорема: Если AM $=$ AK, то проекции AM и AK на любую плоскость, содержащую M и K, равны.

Обратное утверждение. **Если проекции отрезков AM и AK на некоторую плоскость, содержащую M и K, равны, то AM = AK.**



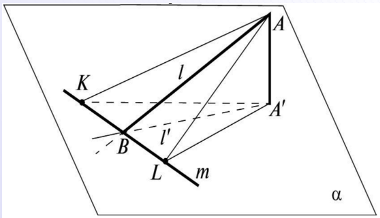
Доказательство. Пусть A' — проекция A на некоторую плоскость a (рис); $AA'K$ и $AA'M$ — равные прямоугольные треугольники ($\angle AA'K = \angle AA'M = 90^0$). Равенство этих треугольников для первого утверждения теоремы следует из равенства AK = AM (AA' — общая сторона), а для второго, обратного первому, из равенства $A'K = A'M$. ▼

Теорема *(о трёх перпендикулярах)*

Если прямая *l* не перпендикулярна плоскости a и перпендикулярна прямой *m* этой плоскости, то и проекция *l* на a (прямая l') **также перпендикулярна** m.

Обратное утверждение. **Если** $l' \perp m$, **то и** $l \perp m$.

Доказательство. Обозначим через B точку пересечения l с плоскостью a; A — некоторая точка l, отличная от B, A' — проекция A на a. Можно считать, что прямая m проходит через B (рис). Возьмём на прямой m точки K и L так, что B — середина KL.



Начало
Содержание
Назад
На весь экран
Закрыть

1. Если $AB \perp KL(l \perp m)$, то $AK = AL$. По предыдущей теореме получим $A'K = A'L$. Значит, $A'B \perp KL(l' \perp m)$.

2. Обратно, если $A'B \perp KL(l' \perp m)$, то $A'K = A'L$. Отсюда имеем $AK = AL$, и значит, $AB \perp KL(l \perp m)$. ▼

Это не единственный способ доказательства теоремы о трёх перпендикулярах.

Лекция 15. Понятие «задача». Роль задач в обучении математике. Функции задач в обучении математике. Основные этапы в решении задачи. Общие умения по решению задач

Задача – понятие неопределяемое и в самом широком смысле означает то, что требует исполнения, решения. Иногда под задачей понимают упражнение, которое нужно выполнить или решить посредством умозаключения, вычисления, построения и т.п.

В учебно-педагогической литературе встречаются самые разнообразные подходы к понятию задачи. Пожалуй, наиболее простое определение задачи было дано известным педагогом-математиком С. О. Шатуновским. Оно гласит: «Задача есть изложение требования «найти» по «данным» вещам другие «искомые» вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях». При этом предполагается, что понятия «вещь», «найти», «данные», «искомые» в каждом отдельном случае особо определяются. Специальное внимание в педагогической литературе уделяется рассмотрению вопроса о задачах-проблемах. Этот вопрос подробно проанализирован в работе В. Оконя. Автор утверждает, что «проблема не есть то же самое, что и задача». И далее поясняет: «Проблемный характер для данного индивида имеют лишь такие задачи, в которых содержится определенная практическая или теоретическая трудность, требующая исследовательской активности, приводящей к решению. При преодолении индивидом трудности задача утрачивает свой проблемный характер. Проблемой для него является трудность, для преодоления которой он еще не готов, хотя для кого-нибудь другого она может и не быть проблемой». Процесс возникновения и решения задач-проблем в обучении В. Оконь характеризует так: а) рассматривается определенная жизненная ситуация (проблемная ситуация); б) в каждой такой ситуации выступает по крайней мере одна проблема (задача), решение которой связано с трудностями; в) проблема формулируется, возникает гипотеза ее решения; г) весь процесс заканчивается решением проблемы. Уже из приведенных примеров различных трактовок понятия задачи очевидно, что вряд ли возможно построение такого общего определения задачи, которое охватило бы существенные особенности всех имеющихся в настоящее время определений. Одной из причин этого является принципиально различный подход разных авторов к вопросу об отношении между субъектом и задачей. Большинство авторов включают субъекта в само понятие задачи (Г. А. Балл, А. Н. Леонтьев, Я. А. Пономарев, К. А. Славская и др.). Они рассматривают задачу как ситуацию (проблемную), в которой должен действовать субъект. Поэтому без субъекта задачи нет. И то, что составляет задачу для одного субъекта, может не быть задачей для другого. Следовательно, при таком подходе невозможно объективное изучение задач, независимое от рассмотрения деятельности субъекта. По сути дела, эти авторы определяют и изучают не сами задачи, а процессы их решения. И лишь некоторые авторы пытаются развести понятия задачи и проблемной ситуации в целях более глубокого анализа этих понятий (А. В. Брушлинский, А. М. Матюшкин). При этом подходе задача рассматривается как некая реальная система, не требующая для своей характеристики субъекта действия. Тем самым создается возможность объективного изучения самих задач, независимо от деятельности субъекта.

Л.М. Фридман, определяет задачу **как модель проблемной ситуации, выраженную с помощью знаков некоторого естественного или искусственного языка.** Проблемная ситуация, отмечает Л. М. Фридман, возникает тогда, когда субъект в своей деятельности, направленной на некий объект, встречает какое-то затруднение, преграду. Однако проблемная ситуация - это не просто затруднение, преграда в деятельности субъекта, а осознанное субъектом затруднение, способ устранения которого он желает найти. Таким образом, в понятие проблемной ситуации Л. М. Фридман включает субъект.

Более правильным представляется следующий ответ: **«задачей» следует называть любой математический вопрос, для ответа на который**

недостаточно простого воспроизведения одного какого-либо результата, теоремы или определения из пройденного курса. Если принять это определение, т. е. считать, что термины «задача» и «упражнение» равнозначны, то вопрос, например, о том, как с помощью линейки и циркуля разделить данный отрезок пополам, не является «задачей» для школьника, изучившего по учебнику раздел «Основные задачи на построение». Вопрос же о том, например, как доказать, что биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны, является задачей, а именно задачей на доказательство.

Наиболее простые задачи, состоящие в одном лишь применении того или другого установленного в теоретической части курса предложения (правила, формулы» теоремы) к данному частному случаю, будем называть «примерами», причём существенно, чтобы выбор применяемого предложения подсказывался условием задачи и не вызывал затруднений. Все задачи, не сводящиеся к примерам, можно назвать «задачами в собственном смысле слова». Бывают задачи, решение которых требует расширения существующей теории, но школьные задачи обычно решаются на основе известных из теоретической части курса предложений. Вся трудность здесь в надлежащем выборе этих предложений, в комбинировании их, во введении разного рода дополнительных преобразований, дополнительных элементов фигуры, делающих возможным применение тех или иных предложений. Иногда вся трудность сводится к математическому оформлению её условий, к переводу их, так сказать, на общепринятый математический язык (решение задач на составление уравнений). В то время как решение задач-примеров имеет целью либо содействие лучшему усвоению теории, либо тренировку в технике применения того или иного приёма, решение задач в собственном смысле слова имеет целью развитие математического мышления и является первичной формой творческой исследовательский работы. В этом и заключается значение задач в школьном курсе математики.

Задачу можно считать решённой тогда и только тогда, когда найденное решение: 1) безошибочно, 2) обосновано, 3) имеет исчерпывающий характер. Эти три требования являются совершенно категорическими: если не выполнено хотя бы одно из них, то решение или вовсе непригодно (если оно неверно), или неполноценно (если оно верно, но не обосновано, или верно и обосновано, но не полно). Кроме этих трёх обязательных требований, можно указать ещё следующие четыре необязательных, но весьма желательных: **4) решение должно быть по возможности простым, 5) оно должно быть надлежащим образом оформлено (запись решения), 6) желательно, чтобы был ясен путь, приводящий к решению, 7) иногда желательно обобщение решённой задачи**. Если математическая теория изучается без практики в решении задач, получаемое знание не действенно и не прочно. Но чтобы эта практика приносила всю ту пользу, какую она может и должна приносить, к решению задач надо предъявлять рассмотренные требования. Ученик, умело и привычно их соблюдающий, будет обладать не только некоторой суммой математических сведений, но и будет находиться на довольно высокой ступени математической культуры. Исходя из выше перечисленных требований в плане методики решения задач выделяют **четыре основных этапа: Осмысление условия задачи; Поиск пути решения задачи; Осуществление найденного плана решения, оформление решения задачи; «Взгляд назад», проверка решения**.

Рассмотрим эти этапы:

1. Целью этого этапа является обучение учащихся действию выделения условия и заключения, отношения между объектами, о которых речь идет в задаче. Этот этап наиболее важен в организации обучения задач. От того как ученики поймут условие задачи зависит поиск пути ее решения. Этот этап должен осуществляться со всем классом и заканчивается он краткой записью условия: в виде таблицы, схемы, чертежа и т.д.

2. Основной задачей учителя на этом этапе, не давая готовых решений, организовать целенаправленный поиск или используя, применяя синтетический или аналитический путь, а чаще всего используется аналитико-синтетический поиск. На этом этапе активизация мыслительной деятельности учащихся идет через систему подсказок, включающих вспомогательные задачи-вопросы, т. е. учитель придает нужное направление к поиску пути решения задачи. На этом этапе, особенно при поиске пути решения нестандартных задач, широко используется эвристические приемы, при этом учитель должен дать учащимся некоторые рекомендации для осуществления поиска решения задачи: а) прочитав условие попытаться отнести задачу к уже известному виду задач; б) попытаться из условия задачи получить все следствия и отобрать те из них, которые приблизят нас к требованиям задачи, т. е. ученик должен уметь организовывать различные пробные действия; в) попытаться переформулировать условие или требования задачи на доступный язык и отобрать те понятия которые с ними связаны. Исходя из этих рекомендаций на этапе поиска решения задач, учитель должен обязательно учитывать уровень обученности и уровень обучаемости учащихся для того, чтобы осуществлять дифференцированный подход к решению задач.

3. Происходит практическая реализация найденного плана решения.

4. На этом этапе фиксируется конечный результат, проводится критический анализ и, если нужно, осуществляется проверка решения задачи.

При обучении математические задачи имеют образовательные, практические, воспитательные значения.

Задачи:

- развивают: логическое, алгоритмическое мышления;
- вырабатывают практические навыки;
- формируют диалектико-материалистическое мировоззрение.

Задачи являются основным средством развития пространственного воображения, а также эвристического и творческого начал.

Решение задач является наиболее эффективной формой развития математической деятельности.

Функции задач:

1) обучающая (на формирование у учащихся системы математических ЗУН, на различных этапах их усвоения.);

2) воспитывающая (направленная на формирование диалектико-материалистического мировоззрения, познавательного интереса и самостоятельности);

3) развивающая(на развитие мышления учащихся, на овладение ими эффективными приемами умственной деятельности);

4) контролирующая (на установление уровней обученности и обучаемости, способности к самостоятельному изучению математики, уровня математического развития учащихся к сформированности познавательных интересов).

Под обучающими функциями задач будем понимать такие функции, которые направлены на формирование системы математических знаний, умений, навыков у обучающихся (как предусмотренных программой, так и расширяющих и углубляющих ее содержание) на различных этапах ее усвоения. Обучающие функции задач можно подразделить на функции общего характера, специального и конкретного характера. Под общими обучающими функциями понимаются такие функции задач, которые имеют место не только в ходе обучения математике, но и всем предметам естественно-математического цикла. Под специальными функциями математических задач понимаются функции общего характера, соотнесенные только к обучению математике. Под конкретными функциями задач будем понимать частные виды специальных функций. Ограничимся одним примером. Формирование у учащихся некоторого понятия (на уровне представлений о нем) - общеобучающая функция; формирование представления о натуральном числе - специальная обучающая функция; формирование представления о числе нуль-конкретная обучающая функция. К числу общих обучающих функций задач относятся:

1) Формирование у учащихся некоторого понятия (на уровне представлений о нем, на уровне его усвоения и на уровне закрепления). 2) Установление различных связей между понятиями (от рода к виду, внутри предметные и межпредметные связи и т. д.). 3) Формирование описания, определения понятия; подведение объекта под понятие. 4) Формирование ведущих идей, законов, суждений. 5) Установление различных связей между ведущими идеями, законами, суждениями; структурных соотношений между ними, иерархии. 6) Формирование основных видов умозаключений, способов и приемов их проведения. 7) Формирование ведущих умений и навыков, характерных для данного учебного предмета. 8) Формирование умений и навыков выражения мысли в речи и записи. 9) Формирование умений и навыков моделирования учебного материала (чертежи, графики и т. п.). 10) Формирование умений и навыков в обращении с приборами, инструментами, таблицами, с учебной и справочной литературой

В процессе обучения математике, наряду с образовательными целями, должны реализовываться и определенные воспитательные цели. Известно, что обучение воспитывает прежде всего своим содержанием - фактами и их истолкованием. Главное состоит в том, чтобы планомерно использовать изучаемый материал, сам процесс учения, и в частности процесс решения задач для воспитания у учащихся устойчивых взглядов и убеждений. Эта общая цель воспитания реализуется на уроках математики различными путями. Итак, под воспитывающими функциями задач будем понимать функции, которые направлены на формирование нравственных качеств учащихся. В отличие от обучающих функций задач их воспитывающие функции, на наш взгляд, можно подразделить лишь на функции общего и специального характера. К числу общих воспитывающих функций задач относятся: 1) Формирование у школьников высокой степени сознательности, чувства ответственности перед обществом, социальной активности, оптимизма и гуманистической направленности. 2) Воспитание у школьников чувства товарищества, взаимопомощи, творческой инициативы, дисциплинированности и организованности. 3) Эстетическое воспитание учащихся (формирование чувства прекрасного, вкуса к прекрасному, потребности, желания и способности преобразовать окружающий мир и строить человеческие отношения по законам красоты, стремление пополнить свой запас художественных и эстетических знаний и т. д.). 4) Воспитание положительного отношения школьника к учебной деятельности, развитие интереса к учебе, любознательности. 5) Формирование умений рационализировать свою учебную работу и приемы ее оформления; воспитание способности доводить любое учебное задание до конца; формирование критичности в оценке результатов своей работы, наряду с чувством уверенности в правильности ее выполнения.

Наконец, под развивающими функциями задач будем понимать такие их функции, которые направлены на развитие мышления учащихся, на формирование качеств, присущих научному мышлению, на овладение приемами эффективной умственной деятельности. Такие функции делятся на общие и конкретные. К специальным развивающим функциям математических задач могут быть отнесены, например, следующие: 1) Умение математизировать простейшие ситуации жизненного характера, усматривать математические закономерности в окружающем мире. 2) Умение предсказать (предположить существование того или иного факта или свойства, относящегося к математическим объектам с достаточной степенью правдоподобия). 3) Умение доказать или опровергнуть то или иное математическое положение дедуктивным путем. 4) Умение планировать поиск решения задачи, исключить из условия ненужные данные, дополнять недостающие, отбирать методы, средства и операции, необходимые для ее решения, умение осуществить проверку правильности решения. 5) Иметь четкое представление о логической структуре курса математики, о том, что абстрактный характер математики является основной причиной ее многочисленных приложений в других науках, в технике, в народном хозяйстве. 6) Умение формулировать определения математических понятий и умение соотнести то или иное понятие с данным определением. 7) Умение быстро и правильно проводить вычисления с привлечением простейших вычислительных средств для облегчения исчисления на соответствующем его этапе; умение создать на основе теоретических знаний удобную вычислительную ситуацию, осуществлять проверку и прикидку правильности вычислений. 8) Умение распознавать то или иное математическое понятие в различных ситуациях. 9) Умение проводить исследование в простейших учебных ситуациях. В качестве примера общих специальных и конкретных развивающих функций задач рассмотрим следующую функцию. Развить способности учащихся к обобщению изученного - общая развивающая функция; развитие способности обобщить то или иное геометрическое понятие - специальная развивающая функция; формирование способности усмотреть обобщение понятий симметрии, вращения и параллельного переноса в понятии перемещения конкретная развивающая функция задач.

Задачи делятся:

- по характеру требования (задачи на доказательство, на построение, на вычисление);

- по функциональному назначению (задачи с дидактическими, познавательными, развивающими функциями);

- по величине проблемности (стандартные, обучающие, поисковые, проблемные);

- по методам решения (задачи геометрические преобразования, задачи на векторы и др);

- по числу обьектов в условии задачи и связей между ними (простые и сложные);

- по компонентам учебной деятельности (организационно действенные, стимулирующие, контрольно-оценочные).

Кроме того различают задачи стандартные и нестандартные, теоретические и практические, устные и письменные, одношаговые, двушаговые, и др, устные, полуустные, письменные и т.д.)

При всем разнообразии подходов к определению задачи можно отметить те

компоненты, которые выделяются в структуре задачи как объекте мыслительной деятельности: условие У), обоснование О), решение Р), заключение З). Условие – предметная область задачи объекты и отношения между объектами); обоснование – теоретические или практические основы перехода от условия к заключению посредством операций, которые составляют решение задачи; решение – совокупность действий, операций, которую надо произвести над известными компонентами, чтобы выполнить требование, выраженное в заключении; заключение – требование отыскать неизвестные компоненты, проверить правильность, сконструировать, построить, доказать и т.п. Символическую структуру задачи можно записать так: УОРЗ.

Основные компоненты задачи:

1. Условие – начальное состояние.

2. Базис решения – теоретическое обоснование решения.

3. Решение – преобразование условия задачи для нахождения требуемого заключением, искомого.

4. Заключение – конечное состояние.

Математическими считаются все задачи, в которых переход от начального состояния (1) к конечному (4) осуществляется математическими средствами, т.е. математическим характером компонентов: обоснование (2) и решение (3).

Если все компоненты задачи (условие, обоснование (2), решение (3), заключение) математические объекты, то задача называется *чисто математической*; если математическими являются только компоненты решения в базис решения то задача называется *прикладной математической задачей*.

Стандартной называется задача, в которой чисто определено условие, известны способ решения и ее обоснование, а также даны упражнения на воспроизведение известного.

Методика решения задач впервые в достаточно общем виде была разработана Дьёрдь Пойа и представлена в известных книгах «Как решать задачу?», «Математическое открытие», «Математика и правдоподобные рассуждения».

Д. Пойа, рассматривая роль задач в математике, писал: «Что значит владение математикой? Это есть умение решать задачи, причем, не только стандартные, но и требующие известной независимости мышления, здравого смысла, оригинальности, изобретательности». Считается, что единственный метод формирования у учащихся умения решать задачи – это практика в решении большого числа задач. «**Если хотите научиться решать задачи, то решайте их!**» – советует Д. Пойа.

Основные этапы решения задачи (по Д. Пойа):

1. Понимание постановки задачи.
2. Составление плана.
3. Осуществление плана.
4. Анализ решения.

1. Понимание постановки задачи. Ученик должен понять задачу. Но не только понять он должен хотеть решить ее. Если ученику не хватает понимания задачи или интереса к ней, это не всегда его вина. Задача должна быть умело выбрана она должна быть не слишком трудной и не слишком легкой, быть естественной и интересной, причем некоторое время нужно уделять для ее естественной и интересной интерпретации.

Прежде всего должна быть понята словесная формулировка задачи. Ученик также должен быть в состоянии указать главные элементы задачи – неизвестное, данное условие. Таким образом учитель редко может позволить себе обойтись без вопросов: что неизвестного? Что дано? В чем состоит условие?

Ученик должен внимательно многократно и с разных сторон рассмотреть главные элементы задачи.

Если с задачей связана какая-либо геометрическая фигура он должен сделать чертеж и указать на нем неизвестное и данные. Если необходимо как-нибудь назвать эти объекты, он должен ввести подходящие обозначения, уделяя определенное внимание подходящему выбору символов, он принужден сосредоточивать свои мысли на объектах, для которых нужно подыскать символы.

2. Составление плана. Главный шаг на пути к решению задачи состоит в том, чтобы выработать идею плана. Эта идея может появляться постепенно. Лучшее, что может сделать учитель для учащегося состоит в том, чтобы путем неназойливой помощи подсказать ему блестящую идею. Таким образом, часто оказывается уместным начать работу с вопроса: *известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли сформулировать задачу иначе?* В конце задачи вернемся к вопросам: *Все ли данные вы использовали? Все ли условия?*

3. Осуществление плана. План указывает лишь общие контуры решения. теперь нам нужно убедиться, что все детали вписываются в эти детали, одну за другой, пока все станет совершенно ясным и не останется ни одного темного угла, в котором может скрываться ошибка.

Если учащийся выработал план решения главная опасность теперь в том, что учащийся может забыть свой план. Учитель должен все же настаивать, что учащийся проверял каждый свой шаг.

4. Анализ решения.

В методической литературе можно встретить такие ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Ознакомление с содержанием задачи.

- Осознание условия и требования задачи, усвоение и разработка элементов условия (или элементов цели).

- Поиск необходимой информации в сложной системе памяти.

- Соотнесение условия и заключения задачи с имеющимися знаниями и опытом и т.д.

2. Поиск решения - выдвижение плана решения задачи.

- Целенаправленные пробы различных сочетаний из данных и искомых.

- Попытки подвести задачу под известный тип.

- Выбор наиболее приемлемого в данных условиях метода решения (из известных).

- Выбор стратегии решения, поиск плана решения и его корректировка на основе предварительной апробации, соотнесения с условием задачи и интуитивными соображениями, фиксирование определенного плана решения задачи и т.д.

3. Процесс решения - реализация плана решения.

- Проводится практическая реализация плана решения во всех его деталях с одновременной корректировкой через соотнесение с условием и выбранным базисом, выбор способа оформления решения, запись результата и т.д.

4. Проверка решения задачи.

- Фиксация конечного результата решения.
- Критический анализ результата, поиск путей рационализации решения, исследование особых и частных случаев, выявление существенного (потенциально полезного), систематизация новых знаний и опыта и т.д.

Некоторые педагоги весь процесс решения задачи делят на восемь этапов:

1 этап – анализ задачи;

2 этап – построение модели задачи;

3 этап – поиск способа решения задачи;

4 этап – осуществление решения задачи;

5 этап – проверка решения задачи;

6 этап – исследование задачи и её решения;

7 этап – формулирование ответа задачи;

8 этап – учебно-познавательный анализ задачи и её решения.

Из указанных восьми этапов четыре являются обязательными, и они имеются (в том или ином виде, явно или неявно) в процессе решения любой задачи. Это этапы анализа задачи, поиска решения, осуществления решения и формулирования ответа. Остальные этапы являются необязательными, и имеются лишь при решении сложных или особых задач. Наибольшую трудность для ученика представляет этап поиска решения задачи.

В процессе решения сюжетных задач нет необходимости придерживаться какой-то определенной схемы, разбивать и озаглавливать процесс решения на отдельные этапы. Тем более нет необходимости оформлять решение по одной и той же схеме: все зависит от характера и особенностей задачи, от того, с какой целью решается задача, на каком этапе обучения.

Однако само решение должно проводиться так, чтобы оно принесло наибольшую пользу для осуществления тех целей, ради которых решается та или иная задача. Поэтому рассмотрим более подробно и обобщенно отдельные этапы процесса решения сюжетных задач.

В теории и практике наиболее распространены следующие способы предъявления задачи учащимся: чтение задачи в слух; чтение задачи «про себя» с последующими ответами на вопросы учителя, выполнение заданий под диктовку учителя (математический диктант), «чтение» по готовому рисунку (таблице). Анализ задачи может проводиться по двум направлениям:

а) предметно-содержательный анализ – это воссоздание той реальной задачной ситуации, моделью которой является данная задача. Такой анализ обычно проводится устно, и та задачная ситуация, которая создается на основе этого анализа, образует у решающего мысленный образ сюжета задачи. Чем более отчетлив этот образ, тем больше он помогает решающему в проведении последующего анализа, в поиске способа решения задачи;

б) логико-семантический анализ – это анализ текста задачи для установления величин, их значений и соотношений между ними, заданных в тексте задачи.

В результате логико-семантического анализа текста задачи устанавливается:

какие величины характеризуют количественную сторону тех явлений, процессов или событий, которые составляют сюжет задачи; сколько и какие значения каждой величины заданы явно или неявно в тексте задачи;

характер каждого значения величины: известное или неизвестное это значение, а если неизвестное, то какое - искомое, промежуточное (вспомогательное) или неопределенное; какими соотношениями связаны между собой эти значения величин; какое значение является главным в каждом соотношении, какие слова-признаки, входящие в задание значения величины, указывают на характер этого значения; каков характер каждого из этих соотношений (разрешимое или неразрешимое); как связаны между собой эти соотношения.

Такой подробный и детальный анализ задачи, конечно, проводится не всегда, не при решении каждой задачи. Зачастую этот анализ проводится как бы неявно, не фиксируя результаты такого анализа. Объем и характер анализа зависит от многих обстоятельств: на какой ступени обучения находятся ученики; с какой целью проводится анализ задачи; одно дело, когда этот анализ проводится для того, чтобы найти способ решения задачи, и другое дело, когда анализ задачи проводится как самостоятельное упражнение для формирования у учащихся умений и навыков в проведении тщательного анализа задач до тех пор, пока не будет найден способ решения задачи, а в этом случае анализ текста задачи может проводиться не однажды. Во втором же случае анализ проводится развернуто по всем направлениям, а сама задача затем не решается, с тем чтобы осознаваемой целью деятельности учащихся был именно анализ задачи, а не решение задачи, в процессе которого проводится анализ.

Поэтому возможны случаи, когда анализ проводится целиком устно и внешне сводится к внимательному чтению текста задачи. Возможны и необходимы случаи, когда анализ проводится во всем объеме, со всеми деталями и с письменной фиксацией его результатов или построения на основе анализа модели задачи.

2. Построение модели сюжетной задачи имеет несколько целей:

а) для фиксации результатов анализа задачи и тем самым для организации самого этого анализа, поэтому построение модели задачи в этом случае проводится в процессе анализа и по мере его выполнения;

б) для взгляда на задачу с разных точек зрения;

в) построение модели задачи является подготовительным этапом для построения решающей математической модели задачи.

Конечно, построение модели задачи производится не всегда, не при решении любых сюжетных задач. Если задача простая и ее решение очевидно, то построение модели задачи излишне и не проводится. Если же задача сложная и ее решение не очевидно, то построение модели весьма желательно, ибо оно может помочь решающему в поисках способа решения задачи.

Модель задачи может быть самой различной: схематической, табличной, структурной, графической и т.д. Выбор вида модели задачи зависит как от характера задачи, так и от характера и особенностей решающего субъекта, от его умений и навыков, привычного для него способа анализа и построения модели задачи. Моделью текста может служить линейная или столбчатая диаграмма, отрезок с составляющими его частями, таблица.

При построении модели ученик опирается, с одной стороны, на данный ему текст задачи, а с другой — на приобретенные в результате жизненного опыта и школьного обучения знания о предметном содержании количественных соотношений, встречающихся в сюжетных задачах, и на способы описания этих соотношений.

При этом в действиях ученика можно заметить два диалектически противоположных процесса. С одной стороны, ученик как бы конкретизирует и дополняет условие задачи, с другой стороны, он отвлекается от ряда несущественных сторон рассматриваемого явления, отбрасывает те, которые не влияют ни на построение модели, ни на решение задачи.

Построение модели задачи может быть самостоятельным важным упражнением для формирования у учащихся умений и навыков в построении разного вида моделей задач.

3. Поиск способа решения задачи.

Любая сюжетная задача предполагает необходимость осознанного поиска соответствующего средства для достижения цели. Под поиском решения задачи, будем понимать отыскание принципа построения логики решения, в соответствие с чем выполняются те или иные действия, о которых нельзя заранее сказать, приведут ли они к требуемому результату или нет. Решение сюжетной задачи как способ нахождения ответа на вопрос задачи возможно многими методами, выбор которого зависит, в первую очередь, от решающего: какими знаниями и умениями он владеет, какие способы для него являются привычными. При этом надо учесть, что одна и та же задача, как правило, допускает решение не одним методом, а тем более способом, а многими. Конечно, выбор метода и способа решения зависит также от характера и особенностей решаемой задачи. Задача обучения состоит не только в том, чтобы учащиеся овладели всеми методами и способами решения сюжетных задач, но и в том, чтобы они научились правильно и рационально выбирать метод и способ решения для заданной задачи.

В случае сложной сюжетной задачи выбор метода зачастую представляет собой очень трудный процесс поиска среди известных ученику методов или же построение (изобретение) нового (для ученика) способа решения.

Как показывают результаты психологических исследований, главным, что определяет успех в этом поиске, является подход к заданной задаче как к объекту тщательного изучения (исследования), а не только как к объекту для решения. Это означает, что ученик должен, в первую очередь, видеть в задаче объект, который надо изучить, исследовать со всех сторон с целью изобретения своего, именно своего способа ее решения.

Что касается вопроса: какой метод решения сюжетных задач является наилучшим, наиболее целесообразным, то из проведенного нами анализа следует, что этот вопрос является бессмысленным, ибо для разных сюжетных задач следует использовать разные методы и способы. И все эти методы и способы должны изучаться в процессе обучения математике.

4. Построение решающей математической модели задачи. Выбрав тот или ной метод решения сюжетной задачи, следует построить для нее соответствующую решающую математическую модель. Это значит, что если выбран арифметический метод решения, то модель строится в виде вычислительной формулы или просто последовательности арифметических действий; если же выбран алгебраический метод решения, то решающая модель строится в виде уравнения или системы уравнений, неравенств или смешанной системы.

5. Решение математической модели сюжетной задачи. В случае арифметического способа решение задачи сводится к выполнению намеченных действий или вычислений по полученной формуле.

В случае алгебраического способа решение задачи сводится к решению полученного уравнения, системы уравнений или неравенств.

При этом, как правило, требуется уточнение модели, ибо в противном случае можно получить решение, не удовлетворяющее условиям задачи. Это уточнение, которое мы подробно рассмотрим ниже, обычно выделяется в особый этап процесса решения - исследование задачи и ее решения.

6. Проверка – завершающий этап решения задачи, который состоит в установлении факта, что полученное решение удовлетворяет всем условиям задачи. Она необходима для того, чтобы исключить появление неверных (неполных) ответов задачи.

Но проверка решения сюжетной задачи нужна лишь при решении сложных задач. При решении простых задач проверка обычно не производится, ибо правильность или ошибочность решения очевидна.

Формулирование ответа задачи. Ответ задачи обычно формулируется в форме словесного ответа на вопрос или требование задачи. Условия, при которых этот ответ имеет смысл, если они установлены, также указывается в ответе. Если же решений несколько, то все они перечисляются.

Учебно-познавательный этап. Решение сюжетных задач производится не для того, чтобы ученики нашли ответы этих задач, а для того, чтобы в процессе их решения ученики прибрели определенные знания, развили у себя определенные умения и способности, выработали общие полезные привычки и навыки.

Поэтому заключительное обсуждение проведенного решения, его анализ и исследование имеют не меньшее значение, чем собственно само решение, а может быть, и большее.

Выявление недостатков проведенного решения, поиски лучшего решения, установление и закрепление в памяти учащихся тех приемов и способов, которые были использованы в данном решении, выявление условий возможности применения этих приемов и способов - все это как раз и будет способствовать превращению решения задач в могучее обучающее и воспитывающее средство.

При решении текстовой задачи с помощью составления уравнения необходимо придерживаться следующей последовательности действий:

1. Вычленить условие и требование задачи.
2. Установить зависимость между данными и искомыми.
3. Выявить способ составления уравнения и т.д.

Учебными действиями, посредством которых решается учебная задача, являются:

- преобразование условий предметной задачи с целью выявления в ней основного отношения;
- моделирование выделенного отношения в предметной, графической или буквенной форме;
- преобразование модели отношения для изучения его свойств;
- построение системы частных задач, решаемых общим способом.

Решение задач в 5-6 классах осуществляется, в основном, тремя способами:

- арифметическим, при котором все логические операции при решении задачи проводятся над конкретными числами и основой рассуждения является знание смысла арифметических действий;
- алгебраическим, при котором составляется уравнение (система уравнений), его решение основано на свойствах уравнений;
- комбинированным, который включает как арифметический, так и алгебраический способы решения.

ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Задачи на уроках математики решаются, в основном, фронтальным образом. Фронтальное решение задач - решение одной и той же задачи всеми учениками класса в одно и то же время. Организация фронтального решения задач может быть различной.

Устное решение задач наиболее распространено в среднем звене общеобразовательной школы, несколько реже в старших классах. Это, прежде всего, выполняемые устно упражнения в вычислениях и тождественных преобразованиях и задачи-вопросы, истинность ответов на которые подтверждается устными доказательствами. Такое решение задач может проходить в форме «пятиминутки» устных упражнений. При организации устных фронтальных упражнений следует использовать таблички, компьютер, интерактивную доску и другие средства представления учащимся устной задачи, что значительно экономит время и оживляет урок математики.

Письменное решение задач с записью на классной доске самим учителем или учащимися на уроках применяют:

- при решении первых после показа учителем задач по ознакомлению с новыми понятиями и методами;

- при решении задач, самостоятельно с которыми могут справиться не все ученики класса;

- при рассмотрении различных вариантов решения одной и той же задачи - для сравнения и выбора лучшего решения;

- при разборе ошибок, допущенных несколькими учениками класса при самостоятельном решении задач и т.д.

Письменное самостоятельное решение задач - наиболее эффективная форма организации решения математических задач, при которой ученики обучаются творчески думать, самостоятельно разбираться в различных вопросах теории и приложений математики. Письменное самостоятельное решение задач значительно повышает учебную активность учащихся, возбуждает их интерес к решению задач, стимулирует творческую инициативу. Формы организации самостоятельного решения задач могут быть различными.

Комментирование решения математических задач: все ученики самостоятельно решают одну и ту же задачу, а один из них последовательно поясняет (комментирует) решение. Ученик-комментатор объясняет, на каком основании он выполняет то или иное преобразование, проводит то или иное рассуждение, построение. При этом каждый шаг должен быть оправдан ссылкой на известные математические предложения.

Учитель должен выяснить подготовку, возможности и способности к изучению математики каждого ученика и в соответствии с этим организовать решение математических задач.

Исключительное значение имеют самостоятельные работы учащихся по устранению пробелов в знаниях. Такие пробелы могут быть выявлены с помощью проверочных и контрольных работ, при решении задач на уроке или дома. Положительные результаты по устранению пробелов в знаниях дают работы над ошибками, коррекционные самостоятельные уроки.

Содержание задач и упражнений, предлагаемых для домашней работы учащихся, должно быть подготовлено предшествующей работой на уроке. Домашнее задание имеет целью не только повторение, но и дальнейшее совершенствование математических знаний, умений и навыков. Необходимо учитывать различие индивидуальных особенностей школьников и индивидуализировать домашние задания. Через индивидуальные домашние задания (параллельно с работой на уроке) можно выявить наклонности отдельных учащихся к математике и развить их. Часто в качестве индивидуального домашнего задания могут выступать реферативные доклады, сообщения, анализ статей и публикаций математического характера, практические задания и др.

Лекция 16. Общие методы решения математических задач. Классификация задач

С каждой задачей связан определенный **метод решения**.

В классификации методов решения выделяют **общие методы и специфические.**

1. Общие методы решения задач.

1. Метод анализа и синтеза
2. Метод индукции
3. Метод сведения к общей задаче (с последующей конкретизацией)
4. Метод сведения к частной задаче
5. Переформулировка задачи

Специфические методы решения задач

1. Алгебраический метод
2. Метод вспомогательных величин
3. Метод равенства фигур
4. Метод от противного
5. Метод координат
6. Метод геометрических преобразований
7. Векторно-координатный метод

Как общие, так и специфические методы имеют характерные признаки их использования. Обращение к признакам, их выделение позволит учащимся быстрее идентифицировать метод решения задачи.

Методика обучения учащихся решению задач основана на двух закономерностях:

- на общей схеме решения задачи (УОРЗ);
- на специфическом содержании задачи и связанным с содержанием методом решения.

Если вторая закономерность специфична в каждой из классификаций задач, то в методике решения задачи по общей схеме возможно выделение как детализирующих этапы действий, так и возможных ошибок.

Этапы решения	Назначение этапа	Составляющие этих действий	Возможные ошибки
У - анализ условия	Принятие задачи учащимися. Выявление структуры данных в условии	1. Выделение структуры данных 2. Уточнение цели задачи 3. Представление условия в схематической, графической, геометрической формах	1. Пропуск этапа 2. Выделение части связей данных 3. Неверное или несвоевременное выполнение чертежей, схем условий.
Р - план решения задачи	Актуализация метода решения формирование плана решения	1. Выяснение связи данных условия и требований задачи 2. Актуализация метода решения и его структуры 3. Уяснение плана решения 4. Сопоставление плана решения данной задачи и класса задач	1. Подгонка условия задачи под известный метод 2. Пропуск структурных элементов метода 3. Планирование в неполном составе действий 4. Упор не на закономерности класса задач, а на специфику данной задачи
О - обоснование решения задачи	Выделение теоретических оснований для решения задачи в соответствии с данным планом. Оформление решения	1. Уточнение структуры метода в соответствии с общими представлениями 2. Уточнение общих и специфических действий плана 3. Обобщение плана решения на определенный класс задач 4. Уточнение границ применения метода	1. Неверное основание для использования метода 2. Отсутствие этапов в записи решения в соответствии с планом 3. Не обращение к анализу метода решения 4. Пропуск обосновывающих моментов в записи решения
З – заключение, исследование решения	Анализ решения задачи с позиции ее целей, метода отбора того результата, который удовлетворяет требованиям задачи	1. Анализ плана с позиции общих представлений о классе и с учетом специфики задачи 2. Анализ собственных действий и их обоснованность в соответствии с планом (рефлексия) 3. Оценка всех действий плана решения в классе задач	1. Окончание работы на этапе решения 2. Необращение к требованиям задачи для анализа полученного результата 3. Необращение к плану решения для оценки собственных действий

Замечание: В различных теоретических концепциях обучения роль, место и цели задач существенно различаются.

• В теории развивающего обучения исследуются учебные задачи, направленные на формирование обобщенных способов деятельности на разных этапах их сформированности.

• В личностно-ориентированном обучении значительно увеличивается субъектный характер задач – учащийся через систему задач осуществляет обогащение своего учебного опыта.

Это означает, что при анализе методических аспектов задач и их результатов следует сразу оговорить в какой теории обучения реализуется задач.

Проблеме **классификации** задач в методической, психологической, кибернетической литературе посвящено немало работ. В методике обучения математике многие годы была распространена **классификация, основу которой составлял характер требования: а) задачи на доказательство; б) задачи на построение; в) задачи на вычисление.** Длительный успех этой классификации обеспечивало то, что она в какой-то степени предопределяла метод решения каждого типа задач. В связи с расширением целей обучения и роли задач в их обеспечении в школьный курс математики начали проникать задачи, не укладывающиеся в традиционную типологию.

Функции задач в обучении подчеркиваются в следующей **классификации: а) задачи с дидактическими функциями; б) задачи с познавательными функциями; в) задачи с развивающими функциями** (К.И. Нешков и А.Д. Семушин). Данная классификация позволяет обоснованно осуществлять отбор задач, хотя на практике довольно трудно отделить друг от друга указанные типы задач. **Задачи с дидактическими функциями** предназначены для усвоения теоретического материала, в процессе решения задач **второго типа** учащиеся углубляют теорию и методы решения задач, **задачи третьего типа** характеризует то, что их содержание может отходить от основного курса математики, посильно осложнять некоторые изученные ранее вопросы курса.

Был предложен ряд модификаций данной типологии задач (Ю. М. Колягин, Е. И. Лященко и др.). Так, Е. И. Лященко выделяет следующие типы задач: **дидактические, познавательные, развивающие.** Каждый тип задач она описывает посредством их назначения, причем критерии отнесения задач к той или иной группе настолько расплывчаты, что трудно отделить один тип от другого.

Известный французский педагог **А. Фуше** выделяет **четыре типа геометрических задач:**

1. Обнаружить все свойства данной фигуры. Средства даны, но цель остается неопределенной.

2. Доказать, что данная фигура, обладающая определенным свойством, имеет также и другое свойство. Средства даны и цель точно указана.

3. Построить фигуру, обладающую данным свойством. Цель определена, средства не указаны.

4. Какой должна быть фигура, обладающая данным свойством? Цель неизвестна.

Приведенная классификация использует характер требования и условия задачи (их определенность либо неопределенность). В зависимости от смысла, вкладываемого авторами в понятия определенности и неопределенности условия и требования задачи, приводятся разные классификации задач. Например, голландский психолог **Ван де Гер** выделяет два вида задач: **интерполяционные и экстраполяционные**. Первые характеризуются определенными данными и четко определенной целью, вторые — либо определенной целью, либо определенными условиями. Основной критерий классификации задач в кибернетике состоит в том, хорошо или плохо определена задача, так как от этого зависит возможность построения программы ее решения.

Имеются попытки **классификации задач по величине проблемности** (У. Рейтман, Ю. М. Колягин). Так, Ю. М. Колягин в зависимости от того, какие компоненты задачи **(условие — A, заключение — B, решение — R, базис решения задачи — C) неизвестны решающему, получает следующую типологию задач:**

I тип — известны все компоненты ($\boldsymbol{ACRB}$).

II тип — неизвестен один компонент: а) $\boldsymbol{XCRB}$; б) $\boldsymbol{AXRB}$; в) $\boldsymbol{ACXB}$; г) $\boldsymbol{ACRX}$.

III тип — неизвестны два компонента: а) $\boldsymbol{AXYB}$; б) $\boldsymbol{XCRY}$; в) $\boldsymbol{XYRB}$ и т. д.

IV тип — неизвестны три компонента: а) $\boldsymbol{XYZB}$; б) $\boldsymbol{AXYZ}$; в) $\boldsymbol{XCYZ}$; г) $\boldsymbol{XYRZ}$.

Задачи указанных типов Ю. М. Колягин называет соответственно стандартными, обучающими, поисковыми, проблемными.

Указанная классификация охватывает многие типы задач, выделенные в различной литературе. Однако, ей присущи и недостатки. Конкретная задача может быть отнесена к какому-либо типу лишь при соотнесении ее со знаниями решающего задачу. К тому же существование многих типов задач весьма сомнительно, например, задачи, в которых неизвестны условие, заключение, базис, но известно решение.

Предлагается группировать задачи **по методам их решения**: задачи на геометрические преобразования, задачи на векторы и т. д. В зависимости от числа объектов, имеющихся в условии, и связей между ними различают **сложные задачи и простые**. Кроме того, различают задачи **стандартные и нестандартные, теоретические и практические, устные и письменные** и т. д. Заметим, что многие классификации относительны, они не удовлетворяют логическим требованиям, предъявляемым к классификации объектов. Поэтому правильнее было бы говорить об объединении задач в группы (типологии задач).

В последнее время получила распространение типология задач, в которой каждый тип задач соотносится с компонентами учебной деятельности: **организационно-действенным, стимулирующим и контрольно-оценочным.** Указанное сопоставление выделяет следующие типы задач: **1) задачи, стимулирующие учебно-познавательную деятельность; 2) задачи,**

организующие и осуществляющие учебно-познавательную деятельность школьников; 3) задачи, в процессе решения которых осуществляется контроль и самоконтроль эффективности учебно-познавательной деятельности. В зависимости от конкретизации учебной деятельности классификация будет наполняться более конкретным содержанием: **1) задачи, стимулирующие усвоение знаний, умений и навыков; 2) задачи, в процессе решения которых осуществляется усвоение знаний, умений и навыков; 3) задачи, контролирующие усвоение знаний, умений и навыков.**

Наряду с термином «задача» используется и термин «упражнение». Возникает вопрос: как соотносятся эти понятия?

В литературе существуют различные толкования понятия «упражнения»: от понимания его как средства своеобразного тренажа в выработке навыков до отождествления понятий упражнения и задачи. Представление об упражнении как средстве тренажа, методике закрепления знаний явно не соответствует их уже сложившейся роли в обучении математике, а отождествление упражнения и задачи вызывает сомнение в целесообразности использования двух различных терминов для обозначения одного понятия. Вместе с тем очевидно, что объем понятия задачи шире объема понятия упражнения (в ситуациях их любых толкований). Выделим понятие упражнения из понятия задачи, для чего необходимо указать видовые отличия упражнения.

При взаимодействии человека и задачной ситуации изменяется как сама задачная ситуация, так и субъект. Изменения в задачной ситуации обусловлены требованием задачи и включают преобразования условия, изменение связей между объектами задачной ситуации и т. д. Изменения в субъекте характеризуются присвоением им знаний, умений и навыков. Существенно важным во взаимодействии обучаемого и задачной ситуации могут быть либо изменения в задачной ситуации, либо изменения в личности ученика, решающего задачу. Результат, соответствующий цели деятельности, в психологии называют прямым продуктом (результатом). Цель задачи - результат, который характеризует изменение в системе «человек - задачная ситуация». Используя эту терминологию, сказанное можно выразить и так: прямым продуктом задачи могут выступать изменения в задачной ситуации или изменения в личности решающего задачу. Упражнением является задача, если прямым ее продуктом является приобретение знаний, умений и навыков.

Раскрыть содержание понятия упражнения можно в ином контексте, отправляясь от анализа интерпретаций процесса обучения, учебного познания, структуры урока, методов обучения, практики. Использование методических концепций системности и целостности позволило объяснить современный процесс обучения. Общим в его интерпретациях, основанных на деятельностном подходе (М.И. Махмутов) и понимании содержания образования как социального опыта человечества, состоящего из четырех основных компонентов - знаний о мире, опыта осуществления способов деятельности, становящихся по мере усвоения навыками и умениями, опыта творческой деятельности, опыта эмоционально-чувственной воспитанности (И.Я. Лернер), является усвоение способов деятельности, которые представляют собой элемент содержания обучения. Эти способы деятельности реализуются через специальные объекты — их носители, которыми являются упражнения. Причем взаимодействие с этими объектами должно обеспечить усвоение способов деятельности. Так, успешное использование понятий во многом обусловлено владением рядом действий, в частности действием подведения объекта под понятие, действием выведения следствий из факта принадлежности объекта понятию. Эти действия включаются в содержание обучения математике посредством специальных упражнений, среди которых важное место занимают упражнения на распознавание объектов, принадлежащих объему изучаемого понятия. Указанные упражнения являются как носителем данных действий, так и средством целенаправленного формирования математического понятия.

Исследования процесса обучения показали, что в нем осуществляется взаимопроникновение созерцания, мышления и практики. Хотя для обучения характерно разнообразие уровней и видов практики, однако в целом в нем преобладает практика в единстве с применением научных знаний. Причем практика может не только заключать познание, но и предшествовать, и сопутствовать ему.

Сказанное приводит к выводу о том, что упражнения - многоаспектное явление обучения, обладающее следующими основными признаками:

1) быть носителем действий, адекватных содержанию обучения математике;

2) являться средством целенаправленного формирования знаний, умений и навыков;

3) быть способом организации и управления учебно-познавательной деятельностью учащихся;

4) являться одной из форм реализации методов обучения;

5) служить средством связи теории с практикой.

Построенная модель упражнений характеризует их со всех сторон процесса обучения. С точки зрения содержания обучения упражнения есть носитель действий, с точки зрения методов обучения — одна из форм их проявления, со стороны средств обучения упражнения выступают средством целенаправленного формирования знаний, умений и навыков, в деятельностном плане они являются одним из способов организации и управления учебно-познавательной деятельностью учащихся. Чтобы понять сущность упражнения, следует учитывать все его аспекты. Однако для каждой конкретной ситуации может быть использован лишь один из указанных признаков, например, рассмотрение упражнения как средства формирования умений.

Соотнося сказанное о задачах и упражнениях, видим, что в контексте учебников математики школьные задачи являются упражнениями, поэтому рассмотренные типологии задач можно считать типологиями упражнений. Учитывая традицию употреблять в школьных учебниках чаще термин «задача», мы также будем следовать ей.

Итак, **задачи делятся:**

- по характеру требования (задачи на доказательство, на построение, на вычисление);

- по функциональному назначению (задачи с дидактическими, познавательными, развивающими функциями);

- по величине проблемности (стандартные, обучающие, поисковые, проблемные);

- по методам решения (задачи геометрические преобразования, задачи на векторы и др);

- по числу обьектов в условии задачи и связей между ними (простые и сложные).

По компонентам учебной деятельности (организационно действенные, стимулирующие, контрольно-оценочные).

Кроме того, **различают задачи стандартные и нестандартные, теоретические и практические, устные и письменные, одношаговые, двушаговые, и др, устные, полуустные, письменные и т.д.)**

А.А. Столяр выделяет 3 вида задач.

1. Задача стандартная, способ решения которой знаком учащимся. Стратегия состоит в том, что мы обучаем распознаванию соответствующего вида задач и применению уже известного способа.

2. Задача стандартная, но способ решения еще не знаком учащимся. Стратегия ориентируется на открытие учащимися способа решения таких задач: используются общие вопросы на этапе поиска решения, помогаем обнаружить учащимся способ, а на итогах просим составить алгоритм или схему решения.

3. Задача нестандартная. Стратегия ориентируется на обучение учащимися поиска способа решения (Дж. Пойа, Л.М. Фридман).

Виды задач, основанные на понятии требования задач:

1. Задачи на нахождение искомого:

- задачи на вычисление,

- решение уравнений и неравенств,

- задачи, где требуется определить форму фигуры.

2. Задачи на доказательство или объяснение (задачи со словами «доказать», «проверить», «ответить на вопрос почему?»).

3. Задачи на преобразование или построение.

Виды задач, основанные на понятии участвующие величины.

Задачи на движение, работу, на объем, стоимость, нахождение площади, задачи на проценты и т. д.

Виды задач, основанные на понятии полнота данных.

- Задачи с полным набором данных,

- задачи с недостающими данными,

- задачи с избыточными данными.

Отдельно выделяются ***задачи с противоречивыми данными.***

Общие умения по решению задач

Умение решать задачи складывается из:

• умения проводить анализ условия задачи;

• умения применять изученную теорию (определение, теорему, правило) на практике; это умение предполагает узнавание возможности применения теории и собственно применение, поэтому теорема, определение, правило принимают в сознании вид алгоритма или предписания, по которому совершается действие;

• умения выделять основную идею в решении отдельной задачи, находить общее в решении нескольких задач и переносить эту идею, это общее на новую задачу;

• умения по самооценке своей деятельности, самоконтролю.

Чтобы научиться анализировать условие задачи, анализ задачи должен стать целью обучения, что требует выполнения специальных заданий не по решению задач, а только по анализу их условия. По меньшей мере, этап анализа условия задачи должен быть специально выделен в процессе решения, и учащиеся должны иметь ориентировочную основу проведения этапа анализа. Анализу условия задачи следует обучать во всех разделах школьного курса математики: в арифметике, алгебре, геометрии. Как уже было отмечено, анализ условия задачи состоит в выделении данных и искомых, в выяснении значения каждого слова, в выяснении структуры задачи: какая и сколько ситуаций, объектов рассматриваются, какие величины входят в рассмотрение, каково соотношение между величинами в данной задаче, какая информация имеется в условии задачи в скрытом виде.

Обучение краткой записи условия задачи - это и есть обучение анализу условия. *Краткая запись* - это модель текста задачи, материализованная форма проведения действия анализа условия. Этому следует обучать специально. Наиболее распространенной формой записи условия является запись отдельных ситуаций, например, следующим образом:

I день - 273 стр.

П день - в 7 раз меньше

III день - на 45 стр. больше,

а также в виде чертежей, диаграмм, рисунков

Краткая запись условия - это тоже материализованная форма анализа условия задачи, в которой понятия заменены их определениями.

При решении каждой задачи, способ решения которой неизвестен, используются синтетический и аналитический методы - происходит встречный процесс от данных к требованию (синтез) и от требований к данным (анализ). На каком-то шаге устанавливается связь этих двух процессов - находится недостающий элемент, отношение - задача решена.

К какому бы разделу математики задача ни относилась, при ее решении происходит получение следствий из условия, какие-то условия заменяются эквивалентными, переформулируются, приобретают более удобный для операций вид, какие-то условия связываются. Установление связей между данными происходит не хаотично, а после выяснения отношений между данными под воздействием промежуточных и окончательных целей. Нахождение новых величин, отношений носит целенаправленный характер. Алгоритмов обучения творчеству нет, однако встречному движению от данных к требованию и от требования к условию можно обучать. Можно специально обучать получению следствий, переформулированию, решению задач с конца, другим эвристикам, демонстрируя их, акцентируя на них внимание, подбирая специальные задания.

Формированию умения анализировать условие задачи способствует выполнение обратных заданий: составить задачу по краткой схеме.

Начинать поиск решения задачи можно лишь тогда, когда ее условие полностью понято. Самоконтролем на этом этапе являются пересказ условия, подсчет данных и требования, проверка схем.

При осуществлении поиска основной идеи задачи продолжается выявление скрытых отношений, структуры задачи: рассматриваются под удобным углом зрения данные и требования, происходит сопоставление решаемой задачи с ранее решенными, конструируется модель задачи в соответствии с выдвигаемой гипотезой, осуществляется мысленный эксперимент, привлекаются различные эвристики.

При анализе условия, как известно, осуществляется следующая деятельность: выделение данных и требований, выяснение смысла терминов; выделение объектов, ситуаций и величин, их характеризующих; моделирование ситуаций с помощью таблиц, чертежа, краткой записи условия задачи.

При этом самоконтроль осуществляется при пересказе текста задачи своими словами для выяснения, не забыто ли какое-либо данное, каждое ли слово в тексте понято. Если условие задачи моделируется с помощью чертежа, таблицы, то необходимо проверить, каждому ли данному нашлось место в этой модели. Для того, чтобы проверить, правильно ли понято условие, можно рекомендовать восстановить текст задачи по краткой записи, модели, чертежу.

Вся эта деятельность направлена на то, чтобы выяснить, что задача понята целиком и правильно, структура задачи выделена и удерживается в памяти. Это обеспечивается обучением учащихся проводить анализ условий задачи.

При выдвижении гипотезы относительно возможного решения самоконтроль заключается в том, что решающему необходимо доказать себе, что выбор пути сделан правильно: что с помощью выбранной теоремы, правила, приема, определения можно довести решение задачи до логического конца; что задача подходит под определенный тип, предписание для которого имеется; что выбранная эвристика позволяет наметить ход решения задачи. Если ситуацию нельзя подвести под известный прием, если использованная эвристика заводит в тупик, если использованная теория не позволяет довести решение задачи до конца, необходимо отказаться от намеченного плана и продолжить анализ условия и привлечение новых идей.

Деятельности самоконтроля на этапе поиска плана решения задачи можно обучать, раскрывая эту деятельность, показывая, как учитель выходит из затруднительных ситуаций, которые возникают при поиске решения задачи. На этапе реализации полученного решения деятельность решающего состоит в применении выделенных эвристик, приемов, правил, определений, и при этом самоконтроль проявляет себя как пошаговый, пооперационный самоконтроль. Пошаговому контролю ученик обучается в рамках формирования различных приемов учебной работы и умственных действий, при обучении использованию определений, правил, теорем.

На ранее перечисленных этапах решения задачи самоконтроль проявляет себя как естественная неотрывная составляющая поисковой деятельности, которая может и не осознаваться решающим.

Последнему этапу решения задачи - проверке и исследованию полученного решения присвоен особый статус этапа, на котором осуществляется самоконтроль.

В методике преподавания математики выделены различные формы самоконтроля, проводимые после завершения этапа реализации намеченного плана. Приведем примеры таких форм.

1. Проверка с помощью частного случая. Например, если при решении неравенства получен некоторый числовой промежуток, то можно проверить некоторые конкретные значения переменной из этого промежутка.

2. Проверка совпадения размерности ответа с требованием задачи. Например, при нахождении пути значение скорости (км/ч) умножается на значение времени (ч). Умножение наименований должно дать наименование длины (км).

3. Проверка симметричности ответа, если в условии задачи какие-то данные симметричны. Например, если уравнения, входящие в систему, симметричны относительно переменных, то и найденные значения различных переменных должны быть равны.

4. Проверка ответа по здравому смыслу. Например, скорость пешехода не может быть равной 15 км/ч, количество рабочих не может быть дробным и т. д.

5. Проверка с помощью грубой прикидки. При этом данные грубо округляются и выясняется порядок возможного результата.

6. Проверка с помощью обратной задачи или с помощью другого способа решения.

7. Проверка текстовых задач, решенных с помощью составления уравнения, по смыслу. При этом необходимо, чтобы все промежуточные величины, зависящие от x, которые появляются в ходе решения задачи, имели бы смысл при полученном значении переменной.

Приведенные формы проверки, кроме 6, не дают полной гарантии правильно найденного и выполненного решения, но, тем не менее, с ними полезно ознакомить учащихся.

В работах, посвященных самоконтролю, предлагается следующая этапность в формировании самоконтроля: контроль за деятельностью учителя, взаимоконтроль - контроль учащихся за деятельностью товарища, контроль за собственной деятельностью. При этом речь, как правило, идет о контроле над исполнительской деятельностью. Такая последовательность имеет достаточное основание. Деятельность контроля состоит в сопоставлении, в сравнении двух действий: своего и контролируемого, а не просто в выполнении действия. Еще труднее посмотреть под новым углом зрения на свое исполнение действия.

Значительное количество задач предполагает при своем решений не творческую деятельность, а применение в основном определенного правила, формулы, определения, теоремы.

Например, для решения любого уравнения первой степени необходимо известные слагаемые перенести в правую часть, а слагаемые, содержащие неизвестные, перенести в левую часть, привести подобные члены и обе части уравнения разделить на коэффициент при неизвестном, если он отличен от нуля. Если он равен нулю, то поступают известным образом.

Приведенное правило - предписание алгоритмического типа, или алгоритм решения линейного уравнения. Правила сравнения чисел, действий над числами в различных числовых множествах, решения линейных, квадратных уравнений, неравенств - все это примеры алгоритмов. Под *алгоритмом* понимается точное общепонятное предписание о выполнении в определенной последовательности операций для решения любой из задач, принадлежащих некоторому классу.

Алгоритм может быть задан в виде таблицы, правила, формулы, определения, описания. Алгоритм может регламентировать действие с различной степенью подробности - свернутости, в зависимости от того, кому он предназначается. Если алгоритм предъявлен в форме последовательности команд, то это готовая программа действия. Приведем пример. Чтобы сложить десятичные дроби, нужно: 1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой; 2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой; 3) выполнить сложение, не обращая внимания на запятую; 4) поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях.

Если алгоритм задан в виде формулы, правила, таблицы, определения, то программы нет. Ее предстоит создать решающему задачу. Рассмотрим в качестве примера определение решения системы неравенств с переменной как значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство. Определение подразумевает следующие шаги решения системы неравенств: 1) решить каждое неравенство; 2) найти пересечение полученных множеств.

Алгоритмы можно разделить на алгоритмы распознавания и преобразования. Признаки делимости, рассмотренные ранее алгоритмы подведения под определение и под понятие являются примерами *алгоритмов распознавания*. Алгоритмы по применению формул являются алгоритмом» *преобразования*. Однако при применении конкретной формулы, например, квадрата суммы двух чисел, вначале происходит узнавание формулы, доказательство того, что выбор формулы сделан правильно, а затем производится собственно преобразование: актуализация формулы и использование ее по шагам. Описанная деятельность состоит из следующих шагов: 1) найти первый член двучлена; 2) найти второй член двучлена; 3) возвысить первый член двучлена в квадрат; 4) составить произведение первого и второго членов двучлена; 5) удвоить результат предыдущего шага; 6) возвысить второй член двучлена в квадрат; 7) результаты третьего, пятого и шестого шагов сложить.

Значительное число различных правил в школьных учебниках математики в последнее время сообщается учащимся в форме алгоритма с выделенной последовательностью шагов. Использование правила в этом случае представляет собой меньшую трудность для учащихся, чем использование правила при отсутствии выделенных шагов или если какие-то операции - шаги действия в предписании пропущены, только подразумеваются и должны быть восполнены учащимися самостоятельно.

Рассмотрим правило сложения чисел с разными знаками в следующей форме: чтобы сложить два числа с разными знаками, надо: 1) из большего модуля вычесть меньший; 2) поставить перед полученным числом знак того слагаемого, модуль которого больше. Этот алгоритм требует от школьника доработки, т. к. в нем не обозначены шаги: найти модуль каждого числа; сравнить модули и выделить число с большим модулем; определить знак числа, имеющего больший модуль. Эти шаги отдельными учащимися легко выполняются, а для других их выделение представляет существенные трудности. В отдельных случаях операции, входящие в состав действий, приведены в учебниках в описательной форме или показаны на примерах, и для осуществления действий учащимся требуется выделить операции - отдельные шаги действия самостоятельно, как, например, при составлении пропорций при использовании подобия треугольников.

Проблема составления алгоритмов по изученному материалу связана с рядом важнейших проблем обучения математике: применение теоретических знаний на практике и развитие алгоритмического мышления. Под алгоритмическим мышлением понимается особый аспект культуры мышления, характеризующийся умением составлять и использовать различные алгоритмы.

Составлению, выделению алгоритмов необходимо специально обучать. Это может происходить с помощью проведения обобщений при решении нескольких аналогичных задач. Необходимо обучать чтению формул словами, необходимо обучать переходу от речевой, формы в аналитическую и обратно, необходимо обучать строить программы действий в тех случаях, когда материал в книге или в рассказе предъявлен в описательной форме. Это и будет означать обучение применению теоретических знаний на практике и развитие алгоритмического мышления. Необходимо также обучать разворачивать, дополнять алгоритмы, предъявленные в готовой форме. При использовании готовых алгоритмов целесообразно пользоваться компактным методом. Метод состоит в том, что (алгоритм) правило произносится по частям, на которые оно разбито по смыслу, и каждая операция выполняется вслед за произнесением соответствующего текста (пример приведите самостоятельно). Тем самым обеспечивается сознательное усвоение соответствующего правила. Компактный метод противопоставляется раздельному, когда произнесение правила целиком и его применение следуют друг за другом.

Вторая рекомендация по использованию алгоритмов вытекает из положений теории деятельности. Она заключается в требовании проведения всех операций, содержащихся в алгоритме (правиле) во внешнем плане и в развернутой форме, т. е. в написании и проговаривании всех операций без пропусков.

Задания к практическим и лабораторным занятиям

Практическое занятие 1

1. Охарактеризуйте объект и предмет методики обучения математике.

2. Методы методики обучения математике. Охарактеризуйте методы исследования в методике обучения математике.

3. История развития методики преподавания математики. Охарактеризуйте первые научные исследования в области методики преподавания математики.

4. Раскройте связь методики обучения математике с философией, педагогикой, математикой и историей математики, физиологией, информатикой.

5. Охарактеризуйте содержание понятий «обучение», «процесс обучения», «учебный процесс», «образование», «воспитание».

6. Основные противоречия процесса обучения математике.

7. Актуальные проблемы методики преподавания математики.

8. Приведите примеры, характеризующие применение математического аппарата к решению задач других учебных дисциплин.

9. Объясните, как вы понимаете термин «гуманитарная ориентация обучения математике».

10. Прокомментируйте общие цели математического образования с точки зрения гуманитарной ориентации обучения. В каких из перечисленных позиций, на ваш взгляд, прослеживается идея новаторства в образовании?

Литература

1. Гершунский, Б. С. Философия образования / Б. С. Гершунский. – М., 1998.

2. Ананчанка, К. А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К. А. Ананчанка. – Минск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

3. Гельфман, Э. Г. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся / Э. Г. Гельфман, М. А. Холодная. – СПб. : Питер, 2006. – 380 с.

4. Гусев, В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В. А. Гусев. – М. : Вербум-М, 2003. – 432 с.

5. Груденов, Я. И. Совершенствование работы учителя математики / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.

6. Ксензова, Г. Ю. Перспективные школьные технологии : учеб.-метод. пособие / Г. Ю. Ксензова. – М. : Педагогическое общество России, 2000. – 224 с.

7. Метельский, Н. В. Дидактика математики / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

8. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности : кн. для учителя / О. Б. Епишева, В. И. Крупич.– М. : Просвещение, 1990.

9. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр.– М.: Просвещение, 1985.

10. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб.. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

11. Саранцев, Г. И. Методика преподавания: предмет, проблематика, связь с педагогикой / Г. И. Саранцев // Педагогика. – 1997. – № 3. – С. 27.

12. Столяр, А. А. Педагогика математики : Курс лекций / А. А. Столяр. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Высшая школа, 1974.

Практическое занятие 2

1. Современное школьное математическое образование. Социальный и личностный аспекты образования. Современная перестройка системы математического образования.

2. Цели обучения математике в школе. Уровни обучения математике. Требования к образовательным, воспитательным и личностно ориентированным целям.

3. Охарактеризуйте способы постановки целей обучения. Каково ваше отношение к ним?

4. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования.

5. Основные содержательно-методические линии школьного курса математики. Охарактеризуйте расположение математического материала в учебных программах.

6. Составные части содержания образования: знания, умения, навыки. Дайте определение каждому из названных понятий.

7. Проанализируйте линию уравнений и неравенств. Приведите примеры использования этой линии в каждом классе.

8. Охарактеризуйте функциональную линию школьного курса математики. Сформулируйте основные знания, умения и навыки, приобретаемые учащимися при изучении этого материала.

9. Характеристика функций обучения математике.

10. Используя различную литературу, раскройте содержание понятий «гуманизация образования» и «гуманитаризация образования». Приведите конкретные примеры реализации в школьных учебниках математики идей гуманизации и гуманитаризации образования.

Литература

1. Концепция учебного предмета «Математика», утв. приказом Министерства образования 29.05.2009 № 675.

2. Особенности организации образовательного процесса при изучении учебного предмета «Математика» в 2017–2018 учебном году. Методические рекомендации по организации образовательного процесса в соответствии с обновленными учебными программами : http://www.adu.by / Образовательный процесс. 2017–2018 учебный год / Учебные предметы. V–XI классы / Математика.

3. Учебные программы для учреждений общего среднего образования с белорусским и русским языками обучения и воспитания. Математика. V–IX классы. – Минск : Национальный институт образования, 2017.

4. Учебные программы для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. Математика. X–XI классы (базовый уровень). – Минск : Национальный институт образования, 2017.

5. Учебные программы для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. Математика. X–XI классы (повышенный уровень), 2017 (национальный образовательный портал).

6. Гершунский, Б. С. Философия образования / Б. С. Гершунский. – М., 1998 г.

7. Ананчанка, К. А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К. А. Ананчанка. – Минск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

8. Метельский, Н. В. Дидактика математики / Н. В. Метельский. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

9. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.

10. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

11. Саранцев, Г. И. Методика преподавания : предмет, проблематика, связь с педагогикой // Педагогика. – 1997. – № 3. – С. 27.

12. Столяр, А. А. Педагогика математики : Курс лекций. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : Высшая школа, 1974.

Практическое занятие 3

1. Проведите анализ учебных программ по математике для базового уровня изучения курса.

2. Дайте сравнительную характеристику действующих школьных учебников и учебных пособий по математике (по классам: 5-11).

3. Проведите анализ учебных программ для классов и школ с углубленным изучением математики, содержания действующих учебников и методических пособий.

4. Какими программами Министерства образования РБ и учебными комплексами определяется и обеспечивается содержание учебного курса по алгебре?

5. Какими программами Министерства образования РБ и учебными комплексами определяется и обеспечивается содержание учебного курса по геометрии?

6. На формирование каких умений направлена программа по математике?

Литература

1. Концепция учебного предмета «Математика», утв. приказом Министерства образования 29.05.2009 № 675.

2. Особенности организации образовательного процесса при изучении учебного предмета «Математика» в 2017–2018 учебном году. Методические рекомендации по организации образовательного процесса в соответствии с обновленными учебными программами : http://www.adu.by / Образовательный процесс. 2017–2018 учебный год / Учебные предметы. V–XI классы / Математика.

3. Современные учебные пособия и комплексы по математике для учреждений общего среднего образования.

4. Учебные программы для учреждений общего среднего образования с белорусским и русским языками обучения и воспитания. Математика. V–IX классы. – Минск : Национальный институт образования, 2017.

5. Учебные программы для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. Математика. X–XI классы (базовый уровень). – Минск : Национальный институт образования, 2017.

6. Учебные программы для учреждений общего среднего образования с русским языком обучения и воспитания. Математика. X–XI классы (повышенный уровень), 2017 (национальный образовательный портал).

7. Рогановский, Н. М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие / Н. М. Рогановский. – Минск : Выш. шк., 1990. – 267 с.

8. Рогановский, Н. М. Научно-методические основы построения учебника геометрии для средней школы / Н. М. Рогановский. – Минск : Выш. шк., 1992. – 108 с.

9. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

10. Ананченко, К. О. Преподавание углубленного курса алгебры в VIII–IX классах : учеб.-метод. пособие для учителей / К. О. Ананченко. – Минск : Народная асвета, 1991. – 271 с.

11. Новик, И. А. Практикум по методике преподавания математики / И. А. Новик. – Минск : Выш. шк., 1984. – 175 с.

Практическое занятие 4

1. Что такое «дидактика», «дидактические принципы»?

2. Охарактеризуйте дидактические принципы обучения математике (научности; сознательности, активности и самостоятельности; доступности; наглядности; всеобщности и непрерывности математического образования; преемственности и перспективности содержания обучения; принцип систематичности и последовательности; системности математических знаний; дифференциации и индивидуализации математического образования; практической направленности обучения; компьютеризации обучения).

3. Приведите примеры как может быть реализован каждый из принципов на практике.

4. Методы обучения математике. Классификация методов обучения математике (по источникам знаний; по дидактическим задачам; по характеру познавательной деятельности; по широте дидактических действий).

5. Современные методы обучения математике.

Литература

1. Концепция учебного предмета «Математика», утв. приказом Министерства образования 29.05.2009 № 675.

2. Особенности организации образовательного процесса при изучении учебного предмета «Математика» в 2017–2018 учебном году. Методические рекомендации по организации образовательного процесса в соответствии с обновленными учебными программами : http://www.adu.by / Образовательный процесс. 2017–2018 учебный год / Учебные предметы. V–XI классы / Математика.

3. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

4. Бабанский, Ю. К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1985.

Практическое занятие 5

1. Сформулируйте определения понятий “метод”, “метод обучения”, “прием”, “прием обучения”; опишите различных подходы к классификации методов обучения; проанализируйте эффективность различных методов обучения в реализации функций обучения, воспитания, развития, мотивации и контроля.

2. Что такое «информационные методы обучения»?

3. Охарактеризуйте следующие информационные методы обучения: беседа, лекция, рассказ, консультация, демонстрация, экспертиза, доклад, обзор, отчет, объяснение, речь, иллюстрация, сообщение, кинопоказ, инструктаж, анализ различных носителей информации, экскурсии, интервью, встречи с именитым гостем.

4. Приведите примеры как может быть реализован каждый из методов на практике.

5. Смоделируйте учебную ситуацию формирования мотивации, используя: исторический ракурс, яркие инженерные факты, биографии ученых, возбуждение внимания, практическая необходимость материала для учащегося и его ценность для интеллектуального развития, удивление, возбуждение, любопытство, задействование ассоциативной памяти, эмоции, дискуссия, умение общения (на примере использования информационных методов обучения).

6. Каков характер деятельности учителя и учащихся при использовании информационных методов обучения?

Литература

1. Концепция учебного предмета «Математика», утв. приказом Министерства образования 29.05.2009 № 675.

2. Особенности организации образовательного процесса при изучении учебного предмета «Математика» в 2017–2018 учебном году. Методические рекомендации по организации образовательного процесса в соответствии с обновленными учебными программами : http://www.adu.by / Образовательный процесс. 2017–2018 учебный год / Учебные предметы. V–XI классы / Математика.

3. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

4. Бабанский, Ю. К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1985.

5. Бим-Бад, Б. М. Педагогический энциклопедический словарь. – М., 2002. – С. 110.

6. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М., 1981.

7. Сластенин, В. А. Методы обучения [Электронный ресурс] / В. А. Сластенин. – Минск : Белорусская цифровая библиотека LIBRARY.BY, 25 ноября 2009. – Режим доступа: http://library.by/portalus/modules/pedagogics/ – Дата доступа: 13.10.2017.

Практическое занятие 6

1. Охарактеризуйте методы проблемного обучения.

2. Охарактеризуйте программированное обучение.

3. Охарактеризуйте исследовательский метод в обучении математике.

4. Проиллюстрируйте каждый из методов обучения математике конкретными примерами. Попробуйте выделить критерии использования методов обучения математике в зависимости от содержания учебного материала и целей обучения.

5. Раскройте содержание путей создания проблемных ситуаций и проиллюстрируйте их примерами.

6. Выделите вопросы темы «Производная и ее применение», при изучении которых создаются проблемные ситуации при: а) решении практических задач, требующих теоретического обоснования; б) поиске метода решения; в) постановке эксперимента; г) использовании средств наглядности; д) использовании методов научного познания; е) проведении исторических экскурсов; ж) проведении лабораторных и измерительных работ; з) использовании занимательных сюжетов; и) составлении задач по теме.

7. Раскройте содержание понятия технологии обучения. Как связаны между собой теория, методика и технология обучения?

Литература

1. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

2. Бабанский, Ю. К. Методы обучения в современной общеобразовательной школе / Ю. К. Бабанский. – М. : Просвещение, 1985.

3. Бим-Бад, Б. М. Педагогический энциклопедический словарь. – М., 2002. – С. 110.

4. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. – М., 1981.

5. Сластенин, В. А. Методы обучения [Электронный ресурс] / В. А. Сластенин. – Минск : Белорусская цифровая библиотека LIBRARY.BY, 25 ноября 2009. – Режим доступа: http://library.by/portalus/modules/pedagogics/ – Дата доступа: 13.10.2017.

6. Выбор методов обучения в средней школе / под ред. Ю. К. Бабанского. – М. : Педагогика, 1981.

7. Махмутов, М. И. Современный урок: Вопросы теории / М. И. Махмутов. – М. : Педагогика, 1981.

8. Хуторской, А. В. Эвристическое обучение: Теория, методология, практика / А. В. Хуторской. – М. : МПА, 1988.

9. Эрдниев, П. М. Укрупнение дидактических единиц как технология бучения : в 2 ч. / П. М. Эрдниев. – М. : Просвещение, 1992.

10. Учебные пособия для средней школы.

Практическое занятие 7

1. Дайте определение терминов "метод" и "методология".
2. Основные функции и признаки научного метода.
3. Методы педагогического исследования.
4. Классификация методов научного познания.
5. Какие методы относятся к эмпирическому уровню познания?
6. Охарактеризуйте эмпирические методы: наблюдение, беседа, интервьюирование, анкетирование, методы изучения продуктов деятельности учащихся, школьной документации, методы оценивания (рейтинг, педагогический консилиум, самооценка и т. д.), методы измерения и контроля (шкалирование, срезы, тестирование и т. п.).
7. Эксперимент, виды эксперимента, требования к эксперименту.
8. Математические методы познания.
9. Охарактеризуйте математические методы: регистрация; ранжирование; шкалирование.
10. Статистические методы в педагогических исследованиях.

Литература

1. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.
2. Лебедев, С. А. Философия науки : учеб. пособие для магистров [Электронный ресурс] / С. А. Лебедев. – М. : Юрайт, 2012. – Электрон. опт. диск (CD-ROM).
3. Степин, В. С. Философия науки. Общие проблемы / В. С. Степин. – М., 2004.
4. Швырев, В. С. Теоретическое и эмпирическое в научном познании / В. С. Швырев. – М., 1979.
5. Тихонов, В. А. Основы научных исследований : теория и практика : учеб. пособие для вузов / В. А. Тихонов [и др.]. – М. : Гелиос АРВ, 2006. – 352 с.
6. Стеченко, Д. И. Методология научных исследований / Д. И. Стеченко, О. С. Чмир. – К. : ВД «Профессионал», 2005.

Практическое занятие 8

1. Охарактеризуйте логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез.

2. Проиллюстрируйте действие анализа и синтеза на конкретных примерах.

3. Выберите любую задачу и, используя анализ, постройте соответствующую ей систему вспомогательных задач.

4. Охарактеризуйте работу по формированию метода аналогии в процессе изучения курса математики V–VI классов.

5. Приведите примеры применения аналогии при решении задач и доказательстве теорем. Выберите из учебников геометрии те задачи, решения которых аналогичны.

6. Объясните приемы методов обобщения, абстрагирования и конкретизации и приведите конкретные примеры, иллюстрирующие эти приемы.

7. Отберите из журнала «Математика» несколько задач, объединенных между собой обобщением или конкретизацией их.

8. В учебниках математики найдите утверждения, выведенные по индукции.

9. Объясните смысл термина «дедукция». Проиллюстрируйте примерами каждый конкретный вариант смысла.

10. Можно ли утверждать, что школьные учебники геометрии удовлетворяют требованиям дедуктивного изложения материала? Если нет, то какие из требований не выполняются? Выделите из действующих ранее и сейчас тот учебник геометрии, изложение которого в большей мере отвечает требованиям дедуктивной формы.

Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

2. Пойа, Д. Математическое открытие / Д. Пойа. – М.: Наука, 1970.

3. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения : пер. с англ. / Д. Пойа. – 2-е изд., перераб. – М. : Наука, 1975.

4. Практикум по педагогике математики : учеб. пособие для пед. ин- тов / под ред. А. А. Столяра. – Минск : Высшая школа, 1978.

5. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

6. Лебедев, С. А. Философия науки : учеб. пособие для магистров [Электронный ресурс] / С. А. Лебедев. – М. : Юрайт, 2012. – Электрон. опт. диск (CD-ROM).

7. Степин, В. С. Философия науки. Общие проблемы / В. С. Степин. – М., 2004.

8. Швырев, В. С. Теоретическое и эмпирическое в научном познании / В. С. Швырев. – М., 1979.

9. Тихонов, В. А. Основы научных исследований : теория и практика : учеб. пособие для вузов / В. А. Тихонов [и др.]. – М. : Гелиос АРВ, 2006. – 352 с.

10. Стеченко, Д. И. Методология научных исследований / Д. И. Стеченко, О. С. Чмир. – К. : ВД «Профессионал», 2005.

Практическое занятие 9

1. Что называют «понятием»? Охарактеризуйте логические варианты конструирования понятий.

2. Объясните методическую концепцию образования математических понятий.

3. Охарактеризуйте главные логические характеристики понятия. Каково соотношение между объемом и содержанием понятия?

4. Что значит «определить понятие»? Каковы способы определения понятий?

5. Каково назначение классификации понятий? Перечислите требования, предъявляемые к классификации понятий.

6. Из школьного курса математики выберите несколько определений: а) построенных способом «через ближайший род и видовое отличие»; б) генетических; в) описательных; г) индуктивных.

7. Опишите наиболее распространенные ошибки школьников в воспроизведении определений и работу по их устранению и предупреждению.

8. Раскройте содержание этапов формирования математических понятий и проиллюстрируйте их на конкретных примерах.

9. Что значит «усвоить определение»? Охарактеризуйте действия, адекватные этому феномену. Выберите из учебников алгебры и геометрии по одному понятию и проследите по упражнениям учебника направленность их на усвоение определений этих понятий.

10. Разработайте систему упражнений на формирование понятия: а) арифметической прогрессии; б) смежных углов.

Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

2. Болтянский, В. Г. Использование логической символики при работе с определениями / В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1973. – № 5. – С. 45.

3. Груденов, Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем : пособие для учителей / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1981.

4. Дразнин, И. Е. О работе над определениями / И. Е. Дразнин // Математика в школе. – 1995. – № 5. – С. 9.

5. Маликов, Т. С. Логический и интуитивный компоненты в определениях математических понятий / Т. С. Маликов // Математика в школе. – 1987 – № 1. – С. 44.

6. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

7. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

8. Лебедев, С. А. Философия науки : учеб. пособие для магистров [Электронный ресурс] / С. А. Лебедев. – М. : Юрайт, 2012. – Электрон. опт. диск (CD-ROM).

9. Степин, В. С. Философия науки. Общие проблемы / В. С. Степин. – М., 2004.

Практическое занятие 10

1. Приведите примеры понятия, суждения и умозаключения.

2. Способы введения математических понятий на различных этапах изучения математики.

3. Психологические закономерности формирования математических понятий.

4. Охарактеризуйте этапы и психологические ступени формирования понятия «Параллельные прямые».

5. Разработайте схему применения конкретно-индуктивного метода при изучении понятия «Вписанный угол».

6. Разработайте схему применения абстрактно-дедуктивного метода при изучении понятия «Десятичная дробь».

7. Приведите примеры определения понятий через род и видовое отличие (3 примера из учебников математики).

8. Назовите содержание и объем понятия «Параллелограмм».

9. Назовите уровни усвоения учащимися понятий.

10. Какие цели развития учащихся может ставить учитель при изучении определений?

11. Отыщите лишние слова в определении: «Диаметром окружности называется отрезок, проходящий через ее центр, соединяющий две ее точки и делящий окружность пополам».

12. Методика исправления ошибок в определениях, даваемых учащимися.

Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

2. Болтянский, В. Г. Использование логической символики при работе с определениями / В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1973. – № 5. – С. 45.

3. Груденов, Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем : пособие для учителей / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1981.

4. Дразнин, И. Е. О работе над определениями / И. Е. Дразнин // Математика в школе. – 1995. – № 5. – С. 9.

5. Маликов, Т. С. Логический и интуитивный компоненты в определениях математических понятий / Т. С. Маликов // Математика в школе. – 1987 – № 1. – С. 44.

6. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

7. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

8. Лебедев, С. А. Философия науки : учеб. пособие для магистров [Электронный ресурс] / С. А. Лебедев. – М. : Юрайт, 2012. – Электрон. опт. диск (CD-ROM).

9. Степин, В. С. Философия науки. Общие проблемы / В. С. Степин. – М., 2004.

Практическое занятие 11

1. Что называют теоремой? Каковы виды теорем? Какова взаимосвязь между прямой, обратной, противоположной и противоположной обратной теоремами?

2. Раскройте содержание этапов изучения теоремы.

3. Выберите из школьных учебников геометрии две теоремы и разработайте методику ознакомления с ними учащихся.

4. Проследите по учебникам геометрии их ориентацию на реализацию этапов работы с теоремой.

5. Выберите из школьного учебника геометрии теорему с громоздкой формулировкой и разработайте методику поэлементного усвоения содержания теоремы.

6. Используя схему, фиксирующую соотношение между этапами работы с теоремой и упражнениями, реализующими их, проследите по учебникам геометрии, насколько она реализуема в них.

7. Проиллюстрируйте различные способы введения теорем конкретными примерами из школьных учебников.

Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

2. Груденов, Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем : пособие для учителей / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1981.

3. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

4. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

5. Болтянский В. Г. Как устроена теорема? В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1973. – № 1. – С. 41.

6. Брадис, В. М. Ошибки в математических рассуждениях / В. М. Брадис, В. Л. Минковский, А. К. Харчева. – М. : Учпедгиз, 1959.

7. Дубнов, Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах / Я. С. Дубнов. – М. : Наука, 1969.

Практическое занятие 12

1. Используя схему, фиксирующую соотношение между этапами работы с теоремой и упражнениями, реализующими их, проследите по учебникам геометрии, насколько она реализуема в них.

2. Проиллюстрируйте различные способы введения теорем конкретными примерами из школьных учебников.

3. Проведите логический анализ теоремы «Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме».

4. Сформулируйте следующие теоремы в виде импликаций, выделите разъяснительную часть, условие, заключение; сформулируйте еще три предложения (обратное, противоположное, обратное противоположному). Какие из них являются теоремами?

1) В параллелограмме диагонали, пересекаясь, делятся пополам.

2) Диагонали ромба делят его углы пополам.

3) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

4) Если число делится на 9, то сумма цифр делится на 9.

5) Если число делится на 9, то сумма цифр делится на 3.

6) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

7) Если в треугольнике один угол прямой, то два других острые.

8) Четырехугольник, у которого один из углов прямой и диагонали равны, есть прямоугольник.

9) Диагонали прямоугольника равны.

5. Выберите какую-либо теорему и выделите в ее доказательстве логические шаги, его составляющие. Назовите эвристики, использование которых приводит к анализируемому вами доказательству. Выделите идею доказательства.

6. Запишите доказательство любой теоремы в виде таблицы с двумя колонками: а) утверждения; б) обоснования. На основе этой таблицы составьте несколько вариантов карточек для индивидуальной работы школьников.

7. Раскройте содержание современной концепции обучения доказательству.

8. Используя различные учебные пособия по методике преподавания математики, выделите рекомендации по формированию у школьников потребности в логических обоснованиях.

9. Выделите основные этапы подготовки учителя к доказательству теорем на уроке.

Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

2. Груденов, Я. И. Изучение определений, аксиом, теорем : пособие для учителей / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1981.

3. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

4. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

5. Болтянский В. Г. Как устроена теорема? В. Г. Болтянский // Математика в школе. – 1973. – № 1. – С. 41.

6. Брадис, В. М. Ошибки в математических рассуждениях / В. М. Брадис, В. Л. Минковский, А. К. Харчева. – М. : Учпедгиз, 1959.

7. Дубнов, Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах / Я. С. Дубнов. – М. : Наука, 1969.

Практическое занятие 13

1. Объясните смысл различных трактовок понятия задачи. В чем вы видите достоинства и недостатки каждой из них? Какая из трактовок понятия задачи преобладает в методике преподавания математики?

2. Объясните различные классификации задач. Какая из них соответствует трактовке задачи, принятой в методике преподавания математики?

3. Объясните смысл понятия упражнения. Как соотносятся понятия задачи и упражнения?

4. Раскройте содержание этапов использования задач в обучении математике и проиллюстрируйте их примерами из учебников, используемых в разное время.

5. Объясните смысл принципа «обучение через задачи».

6. Раскройте роль задач в процессе: а) формирования понятия, б) изучения теоремы и проиллюстрируйте примерами.

7. Раскройте содержание положений, определяющих отбор задач. Проследите по учебникам алгебры и геометрии учет этих положений при конструировании систем задач учебников.

8. Объясните сущность каждого этапа работы с математической задачей: анализа условия задачи; поиска способа решения задачи; реализации способа решения; оценки различных способов решения; использования задачи и ее решения для составления новых задач. Проиллюстрируйте на примере конкретной задачи указанные этапы.

9. Выберите из некоторого раздела любую задачу и разработайте методику ее решения, исходя из известных этапов ее решения.

Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

2. Балл, Г. А. О психологическом содержании понятия «задача» / Г. А. Балл // Вопросы психологии. – 1970. – № 6. – С. 81.

3. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике : Формирование приемов учебной деятельности : кн. для учителя / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М. : Просвещение, 1990.

4. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике : в 2 ч. / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977.

5. Лященко, Е. И. Методика обучения математике в IV–V классах / Е. И. Лященко, А. А. Мазаник. – Минск : Нар. асвета, 1976.

6. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

7. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

Практическое занятие 14

1. Что такое «нестандартная задача»?

2. Методика обучения школьников решению нестандартных задач.

3. Объясните сущность каждого этапа работы с математической задачей: анализа условия задачи; поиска способа решения задачи; реализации способа решения; оценки различных способов решения; использования задачи и ее решения для составления новых задач. Проиллюстрируйте на примере конкретной задачи указанные этапы.

4. Выберите из некоторого раздела школьной математики нестандартную задачу и разработайте методику ее решения, исходя из известных этапов ее решения.

5. Выберите любой раздел из учебника геометрии и на основе его задач постройте такую их совокупность, что каждая последующая задача либо обобщает предыдущую, либо конкретизирует ее, либо является ее аналогом, либо использует результат предыдущей задачи (результат предыдущей задачи входит в условие последующей, либо используется при ее решении).

6. Выберите несколько задач, решаемых с помощью признаков равенства треугольников. Выделите действия, составляющие данный метод, и разработайте систему задач, ориентированную на усвоение выделенных действий.

7. Подберите несколько задач, которые можно отнести к эстетически привлекательным задачам.

8. Отберите из различных источников несколько задач, решение которых представляет самостоятельное исследование, включающее наблюдение, формулировку гипотез и их проверку, прогнозирование результата, планирование решения задачи, исполнение, коррекцию, поиск других способов решения, применение, развитие темы.

Литература

1. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

2. Балл, Г. А. О психологическом содержании понятия «задача» / Г. А. Балл // Вопросы психологии. – 1970. – № 6. – С. 81.

3. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике : Формирование приемов учебной деятельности : кн. для учителя / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М. : Просвещение, 1990.

4. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике : в 2 ч. / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977.

5. Лященко, Е. И. Методика обучения математике в IV–V классах / Е. И. Лященко, А. А. Мазаник. – Минск : Нар. асвета, 1976.

6. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980.

7. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

Лабораторная работа «Правила определения понятий»

1. Что такое понятие? Охарактеризуйте главные логические характеристики понятия.

2. Приведите примеры определений: а) через ближайший род и видовое отличие; б) генетический; в) индуктивный; г) абстрактный (на конкретных примерах из школьного курса математики).

3. Разработайте методику введения понятий: а) абстрактно-дедуктивным методом; б) конкретно-дедуктивным методом (на конкретных примерах из школьного курса математики).

4. Назовите виды определений, охарактеризуйте их, приведите примеры из школьного курса математики.

5. Разработайте методику введения понятия «трапеция».

6. Опишите процесс формирования понятия «параллелограмм».

Литература

1. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

3. Учебные пособия для средней школы.

Лабораторная работа «Изучение теорем в школьном курсе математики»

Задание 1. Ответьте на вопросы:

1. Что такое теорема, утверждение?
2. Чем отличается утверждение от теоремы?
3. Что такое разъяснительная часть, условие, заключение утверждения?
4. В каких формах могут быть сформулированы утверждения?
5. Как выделить условие и заключение утверждения?

Задание 2. Выполните логико-математический анализ утверждения «Вертикальные углы равны», ответив на вопросы:

1. В какой форме сформулировано утверждение)?
2. Сформулируйте утверждение в импликативной форме.
3. Выделите разъяснительную часть.
4. Выделите условие и заключение утверждения.
5. Установите в зависимости от числа условий и заключений, является ли данное утверждение простым или сложным.
6. Выделите основные этапы работы с данной теоремой в классе.

Задание 3. Выполните логико-математический анализ теоремы: «Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны». Для этой теоремы сформулируйте утверждения: обратное, противоположное и противоположное обратному. Выделите основные этапы работы с данной теоремой в классе.

Задание 4. Может ли сложная теорема иметь одновременно несколько условий и несколько заключений?

Задание 5. Выберите из школьного учебника геометрии теорему с громоздкой формулировкой и разработайте методику поэлементного усвоения содержания теоремы.

Задание 6. Охарактеризуйте методы доказательства теорем из школьного курса геометрии (представьте 3 различных метода).

Задание 7. Запишите доказательство любой теоремы в виде таблицы с двумя колонками: а) утверждения; б) обоснования. На основе этой таблицы составьте несколько вариантов карточек для индивидуальной работы школьников.

Литература

1. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики : учеб. пособие / А. А. Темербекова. – М. : ВЛАДОС, 2003. – 176 с.

2. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин [и др.] ; сост. : Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.

3. Учебные пособия для средней школы.

Примерная контрольная работа по методике преподавания математики

Вариант 1

1. Предмет и задачи методики преподавания математики. Методы методики обучения математике.

2. Понятие. Содержание и объем понятия. Зависимость между объемами понятий. Определение понятия.

3. Разработайте методику решения задачи: Двое рабочих, выполняя некоторое задание вместе, могли бы справиться с ним за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а когда он выполнит половину всей работы, его сменит второй рабочий, то все задание будет выполнено за 25 дней. За какой срок работая в одиночку второй рабочий сможет выполнить все задание?

Вариант 2

1. Особенности современного этапа развития школьного математического образования. Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования.

2. Формирование математических понятий: психологические закономерности формирования математических понятий.

3. Разработайте методику решения задачи: Двое рабочих, работая независимо один от другого, оклеили обоями за 7 дней несколько комнат, причем второй рабочий приступил к работе на 1,5 дня позже первого. Дни, которые понадобились для оклейки 7 комнат, считаются с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа выполнялась каждым рабочим в отдельности, то первому рабочему для ее выполнения понадобилось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней второй рабочий выполнил бы всю необходимую работу в одиночку?

Вариант 3

1. Цели обучения математике в школе. Взаимосвязь целей и содержания образования. Требования к содержанию математического образования.

2. Классификация понятий. Логическая структура определений.

3. Разработайте методику решения задачи: Чан наполняется водой при помощи двух кранов A и B. Наполнение чана только с помощью крана A длится на 22 минуты дольше, чем наполнение через кран B. Если же оба крана открыть одновременно, то чан наполнится водой за 1 час. За какое время может наполнить водой чан только кран B?

Вариант 4

1. Общее понятие о методах, приемах обучения. Проблема методов обучения. Классификация методов обучения.

2. Математические суждения и умозаключения. Основные виды математических суждений. Условная форма математических предложений. Четыре вида предложений, записанных в условной форме. Связь между их истинностью. Необходимые и достаточные условия.

3. Разработайте методику решения задачи: Тракторная бригада может вспахать $5/6$ участка земли за 4 ч 15 мин. До обеденного перерыва бригада работала 4,5 ч, после чего остались невспаханными еще 8 га. Как велик был участок?

Вариант 5

1. Эмпирические методы познания: наблюдение, описание, измерение и эксперимент. Математические методы познания.

2. Сущность понятия доказательства. Методы доказательства теорем.

3. Разработайте методику решения задачи: Из пункта O в N вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта N в пункт O выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из N. Сколько времени понадобится пешеходу для того, чтобы пройти весь путь, если известно, что велосипедист проделал бы весь путь на 4 часа быстрее пешехода.

Вариант 6

1. Логические методы познания: сравнение и аналогия; обобщение, абстрагирование и конкретизация; индукция и дедукция; анализ и синтез.

2. Методика изучения теорем. Методические задачи, решаемые при изучении теорем. Воспитание у учащихся потребности в доказательствах.

3. Разработайте методику решения задачи: Двое рабочих, работая одновременно, могут выполнить некоторую работу за 50 мин. Сколько времени понадобится каждому рабочем для того, чтобы выполнить эту работу, если известно, что один из них может выполнить эту работу, работая отдельно на 4 часа быстрее другого?

Материалы для итогового контроля

ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ
2 курс, 3 семестр

1. Предмет и задачи методики преподавания математики.
2. Эмпирические методы научного познания.
3. Логические методы научного познания.
4. Математические методы обучения.
5. Информационные методы преподавания.
6. Методы проблемного обучения.
7. Математические понятия и методика их введения (определение, характеристика, классификация).
8. Методика формирования понятий.
9. Принципы дидактики в обучении математике.
10. Психолого-педагогические основы обучения математике.
11. Методика изучения математических предложений.
12. Методика обучения учащихся доказательству теорем.
13. Задачи в школьном курсе математики (определение, классификация, функции, схема решения).
14. Организация деятельности учащихся и учителя по методике решения задач.
15. Методика решения математических задач.

Тест по методике преподавания математики

Тест

Литература

1. Ананчанка, К.А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе / К.А. Ананчанка. – Минск : Універсітэцкае, 1997. – 94 с.

2. Арнольд, А.А. Урок-консультация // Математика в школе. – 1994 – №2. – С. 23-24.

3. Гельфман, Э.Г. Психодидактика школьного учебника. Интеллектуальное воспитание учащихся / Э.Г. Гельфман, М.А. Холодная. – СПб. : Питер, 2006. – 380 с.

4. Гринько, Е.П. Формирование готовности учителя математики к работе с одаренными детьми : монография / Е.П. Гринько ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : Изд-во БрГУ, 2014. – 222 с.

5. Гринько, Е.П. Подготовка в университете будущего учителя математики к работе с одаренными учащимися : монография / Е.П. Гринько ; М-во образования Респ. Беларусь ; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. –. – Брест : БрГУ, 2017. – 241 с.

6. Гринько, Е.П. Основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми : электронное учебно-методическое пособие / Е.П. Гринько. – Рег. № 9/2012 от 03.10.2012.

7. Гусев, В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике / В.А.Гусев. – М. : Вербум-М, 2003. – 432 с.

8. Груденов, Я.И. Совершенствование работы учителя математики / Я.И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.

9. Костицын, В. Н. Моделирование на уроках геометрии: теория и методические рекомендации / В. Н. Костицын, В. Н. Крстицын. – Москва: ВЛАДОС, 2000. – 158 с.

10. Ксензова, Г.Ю. Перспективные школьные технологии. Учебно-методическое пособие / Г.Ю. Ксензова. – М. : Педагогическое общество России, 2000. – 224 с.

11. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: книга для учителя / С. Г. Манвелов. – Москва: Просвещение, 2002. – 173 с.

12. Математика для каждого: технология, дидактика, мониторинг: сборник / Вып. 4 / Л. А. Аверкиева, И. Ю. Ананьева, М. В. Астанина [и др.] / Ассоц. "Школа 2000...". – Москва: Школа 2000. . . , 2002. – 271 с.

13. Метельский, Н.В. Дидактика математики / Н.В. Метельский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.

14. Методика обучения геометрии : Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев [и др.] ; под общ. ред. В.А. Гусева. – М. : Изд. центр «Академия», 2004. – 368 с.

15. Методика преподавания математики в средней школе: частные методики/ Учебное пособие для студентов физ.-мат. факультетов пед. институтов / Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, Е. Л. Мокрушин и др. – Москва: Просвещение, 1977. – 479 с.

16. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика: учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов / Ю. М. Колягин [и др.]. – Москва: Просвещение, 1975. – 461 с.

17. Методика преподавания математики в средней школе : Общая методика: учеб. пособие / Сост. : Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985. – 336 с.

18. Методика преподавания математики в средней школе : Частная методика: учеб. пособие / А.Я. Блох [и др.] ; сост. В.И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

19. Окунев, А.А. Спасибо за урок, дети! - М.: Просвещение, 1988.

20. Пивоварук, Т.В. Педагогическая практика по математике : электронное учебно-методическое пособие / Т.В. Пивоварук, С.В. Селивоник. – Рег. № 44/2016 от 06.12.2016.

21. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2010. – Ч. 1 : Общие основы методики преподавания математики (общая методика). – 312 с.

22. Рогановский, Н.М. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие : в 2 ч. / Н.М. Рогановский, Е.Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А.А. Кулешова», 2011. – Ч. 2: Специальные основы методики преподавания математики (частные методики). – 388 с.

23. Столяр, А.А. Педагогика математики : учеб. пособие / А.А. Столяр. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.

24. Учебники и учебные пособия по математике для средней школы.

25. Эрдниев П.М. Обучение математике в школе. Укрупнение дидак-тических единиц. Книга для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М. : Столетие, 1996. – 320 с.

26. Виленкин, Н. Я. За страницами учебника математики: Арифметика. Алгебра. Геометрия: Книга для учащихся 10-11 классов общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, Л. П. Шибасов, З. Ф. Шибасова. – Москва: Просвещение: АО "Учебная литература 1996. – 319 с.

27. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе / Л.В. Виноградова. – Ростов на/Д : Феникс, 2005. – 252 с.

28. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 5–9 классы : пособие для учителей учреждений общего среднего образования / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2019. – 165 с. - (Гриф МО)

29. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (методы решения олимпиадных задач) : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 1. – 184 с.

30. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (методы решения олимпиадных задач) : учеб.-метод. пособие : в 2 ч. / Е.П. Гринько; Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 2. – 196 с.

31. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы : пособие для учителей учреждений общего среднего образования : в 2 ч. / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2018. – Ч. 1. – 129 с. - (Гриф МО)

32. Гринько, Е.П. Готовимся к олимпиадам по математике. 10–11 классы : пособие для учителей учреждений общего средн. образования : в 2 ч. / Е.П. Гринько. – Мозырь : Выснова, 2018. – Ч. 2. – 115 с. - (Гриф МО)

33. Гринько, Е.П. Элементарная математика и практикум по решению задач (Элементарная алгебра) : электронный учебно-методический комплекс / Е.П. Гринько, В.Я. Логвинович. – Рег. № 22/2016 от 18.10.2016.

34. Гринько, Е.П. Элементарная математика : электронный учебно-методический комплекс / Е.П. Гринько. – Рег. № 5/2016 от 15.01.2016.

35. Гринько, Е.П. Основные направления работы с интеллектуально одаренными детьми : электронное учебно-методическое пособие / Е.П. Гринько. – Рег. № 9/2012 от 03.10.2012.

36. Далингер, В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике / В.А. Далингер. – М. : Просвещение, 1991. – 80 с.

37. Депман, И. Я. За страницами учебника математики: пособ. для уч-ся 5-6 кл. ср. шк. / И. Я. Депман, Н. Я. Виленкин. – Москва: Просвещение, 1989. – 287 с.

38. Калавур, М.А. Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач. Геаметрыя (Планіметрыя) : электронны вучэбна-метадычны комплекс / М.А. Калавур. – Рэг. пасв. № 2271816070 от 05.07.2018.

39. Калавур, М.А. Элементарная матэматыка і практыкум па рашэнні задач. Планіметрыя : вучэб.-метад. комплекс / М.А. Калавур ; Брэсц. дзярж. ун-т імя А.С. Пушкіна. – Брэст : БрДУ, 2014. – 48 с.

40. Методические журналы : «Матэматыка», «Математика в школе», «Математика для школьников», «Квант», «Репетитор» и т.д.

41. Организация контроля знаний учащихся в обучении математике : Пособие для учителей / Сост. З.Г. Борчунова, Ю.Ю. Батий. – М. : Просвещение, 1980. – 96 с.

42. Пивоварук, Т.В. Внеклассная работа по математике : электронный учебно-методический комплекс / Т.В. Пивоварук. – Рег. № 5/2015 от 22.06.2015.

43. Пивоварук, Т.В. Элементарная математика и ПРЗ. Тригонометрия : электронный учебно-методический комплекс / Т.В. Пивоварук. – Рег. № 12/2012 от 14.11.2012.

44. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии : учеб. пособие / Г.К. Селевко. – М. : Народное образование, 1998. – 256 с.

45. Селивоник, С.В. Решение задач с параметрами : электронный учебно-методический комплекс / С.В. Селивоник. – Рег. № 52/2016 от 08.12.2016.

46. Селивоник, С.В. Элементарная математика и практикум по решению задач (Эвристика как система общих приемов поиска решения нестандартных задач) : электронный учебно-методический комплекс / С.В. Селивоник. – Рег. № 14/2015 от 02.10.2015.

47. Темербекова, А.А. Методика преподавания математики / А.А. Темербекова. – М. : Владос, 2003. – 176 с.

48. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – Львов : Квантор, 1991. – 215 с.

49. Пойа, Д. Математическое открытие. Решение задач : основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа. – М. : Наука, 1970. – 452 с.

50. Фридман, Л.М. Теоретические основы методики обучения математике : учеб. пособие / Л.М. Фридман. – М. : Флинта, 1998. – 168 с.

51. Борисов, В.К. К выполнению и защите курсовой работы, дипломного проекта и отчета по практике : метод. рекомендации / В.К. Борисов ; Рос. междун. западно-подмосковный ин-т туризма : РМАТ – Москва, 2006. – 49 с.

52. Рогожин, М. Как написать курсовую и дипломную работы / М. Рогожин. – СПб : Питер, 2005. – 188 с.

53. Кульпанович, О. А. Подготовка, оформление и защита курсовых и дипломных работ, отчетов по практике : учеб.-метод. пособие / О.А. Кульпанович – Минск : МЦПЭР, 2006. - 46 с.

54. Бибило, В.Н. Рекомендации по оформлению курсовой работы. Минск, 2005. – 7 с.