УДК 101.1:510.2

Н.В. Михайлова

ТРИНИТАРНАЯ МЕТОДОЛОГИЯ В ФИЛОСОФСКОМ АНАЛИЗЕ ПРОГРАММЫ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

В работе обосновывается значимость и актуальность тринитарной методологии в теоретической разработке проблемы обоснования современной математики. Проблема обоснования современной математики состоит из двух взаимосвязанных уровней – математического и философского. Если сущность первого состоит в применении программы обоснования к конкретной теории, что составляет чисто математическую работу, то сущность второго состоит в том, что каждая программа обоснования нуждается в философском анализе ее соответствия своей исходной общей философской и методологической задаче. Поэтому круг философских и математических вопросов обоснования, нуждающихся в дальнейшем изучении, связан также с синтезом различных философско-методологических традиций в современной математике с целью создания единой теоретико-мировоззренческой программы обоснования.

Введение

Необходимость философского и методологического анализа программ обоснования обусловлена тем, что философия акцентирует свои когнитивные задачи на выявлении всеобщего, универсального в обосновании, а методология – на развитии практической деятельности в конструктивном аспекте, создании условий для дальнейшего развития математики. Философия в отличие от методологии не говорит, как нужно познавать и как именно должен работать исследователь. Смысл слов «философско-методологический анализ» отличается, например, от простого объединения принципов тем, что он представляет собой соединение исходных, даже противоположных, принципов в концептуальную идею. Ее сущность состоит в том, что она включает совокупность методов исследования как важнейшую составляющую часть своего методологического арсенала, поэтому попытка такого синтеза носит предварительный характер и не может заключать в себе окончательную истину.

К началу XX века философия математики осознала себя как область, имеющая значение не только для решения чисто философских проблем. Проблема обоснования математики была впервые строго сформулирована Д. Гильбертом как проблема обоснования непротиворечивости математических теорий. Новое понимание обоснования математики, представляющей собой совокупность абстрактных структур, являющихся математическим языком и средством дедукции, сводится к основной задаче обоснования надежности ее доказательных утверждений и установлению непротиворечивости ее теорий. Математический анализ проблемы связан с рассмотрением математической теории в соответствии с принципами принятой программы обоснования. Философский анализ проблемы опирается на общие характеристики научного познания, поэтому процедуры конкретизирующего обоснования в философии выполняются, вообще говоря, не с той последовательностью, методичностью и эксплицитностью, как это делается в точных науках.

Но так ли существенна для математики проблема ее обоснования? В общеметодологическом плане такое обоснование необходимо для того, чтобы найти средства, гарантирующие надежность сверхсложных и трудно обозримых современных математических рассуждений и доказательств. Для конкретизирующего обоснования своих познавательных теорий и схем философия математики обращается за помощью к самой математике. Обоснование математики – это попытка найти такую общую теорию, с помощью которой можно было бы вывести всю математику по определенным правилам вывода исходя из некоторых формальных систем аксиом. Если бы удалось обосновать такую математическую теорию, которую можно принять за основание математики, то на этом базисе можно было бы пытаться обосновать другие математические теории в соответствии с общей архитектурой математических теорий.

Как утверждает известный философ математики В.Я. Перминов, «общая методология программ обоснования математики, выдвинутая в начале XX века, с современной точки зрения должна быть признана совершенно неудовлетворительной» [1, с. 148]. Нельзя сказать, что такое состояние, подводящее к выводу о невозможности абсолютно надежного обоснования математики, свидетельствует о философско-методологическом кризисе современной математики, но тем не менее оно может стать предпосылкой к появлению некоторого скептицизма в отношении абсолютной строгости математического мышления. Все исторически оправданные программы обоснования математики содержат в себе некоторую систему допущений, имеющих гносеологический характер. Возможно, в связи с этим, несмотря на некоторое продвижение в прояснении и обосновании этих допущений, проблема обоснования современной математики в целом все еще далека от своего окончательного решения.

В современной философии математики осознается необходимость в объединяющих принципах. Учитывая исторически сложившиеся программы обоснования современной математики, в рамках которых происходит реальное формирование единого пространства математики, надо стремиться не просто к «синтезу как мыслительной операции» или к «синтезу как познавательной операции», а также к взаимодействию различных направлений философии математики. Понятие синтеза философских и методологических программ обоснования математики, которое в дальнейшем мы будем называть системным или, точнее, философско-методологическим синтезом, в философии науки не имеет жестко фиксированного семантического смысла. Отличие синтеза от интеграции состоит в том, что синтез лучше, чем интеграция, обеспечивает приращение научных знаний и поэтому может рассматриваться как фактор роста. Такой подход меняет всю структуру обоснования математики, позволяя говорить не о главенстве одной из конкурирующих программ, а об условиях их совместного существования и о третьем факторе, обеспечивающем целостность обоснования, который в рациональном аспекте может рассматриваться как признак устойчивости этой структуры.

Может ли анализ философских проблем обоснования содействовать решению собственно математических задач и открытию новых фактов? Ответ на этот вопрос состоит в том, что практическая значимость работ, относящихся к обоснованию математики, состоит в том, что такое обоснование является не только философско-методологическим анализом исходной математической теории, но и неизбежно наполняет ее смысловым содержанием, которое открывает новые методологические горизонты исследования в области математики. Философско-методологический синтез программ обоснования математики является новой концептуальной идеей философии математики. Ее философская суть состоит в том, что не надо бороться с противоречиями программ обоснования, а выявлять, упорядочивать, прогнозировать их пересечения, которые имеют онтологическое обоснование для некоторой части трансфинитной математики.

Философский замысел системного синтеза обоснования современной математики определяет цель исследования, состоящую также в том, чтобы связать непротиворечивость аксиоматики с ее фактологической истинностью в рамках системных понятий. Естественная ограниченность логического анализа способствовала в итоге формированию понимания недостаточности каждой в отдельности программы обоснования математики, которая заключается прежде всего в отсутствии рациональных аргументов, строго определяющих границы обосновательных программ. Для философско-методоло-гического синтеза программ обоснования математики нужна более емкая триадическая структура, рассмотренная в работе [2]. Заметим также, что трехмерность обладает определенным естественнонаучным и фундаментальным преимуществом, поскольку при меньшей размерности не могут возникать достаточно сложные структуры, а при большей размерности не могут существовать устойчивые атомарные и даже планетарные системы.

Знакомство с работами по истории и философии математики не проходит бесследно для понимания эволюции процессов развития математики. Во-первых, стало, наконец, ясно, что со стороны философской деятельности, опирающейся на традиционные подходы к нерешенной проблеме обоснования математики, нет пока оснований ожидать сколько-нибудь существенной помощи. Во-вторых, выяснилось, что философская и методологическая деятельность по обоснованию математики остро нуждается в притоке свежих идей. В-третьих, опираясь на внутреннюю эволюцию математической науки и исходя из систематизации внутренних связей между новыми развивающимися математическими теориями, можно говорить, например, о системном подходе к обоснованию современной математики. Философские представления об единстве математики формируются в ходе исторической эволюции понятий рационализма и реализма. Трудности в классификации концепций и направлений современной философии математики обусловлены неоднозначностью понимания такого термина, как реализм.

Следуя основному допущению реализма, надо признать, что существование первично по отношению к теоретизированию. Реализм имеет много смыслов, поэтому мы ограничиваемся реализмом в онтологии, согласно которому математические объекты существуют независимо от математиков. Математические понятия часто выглядят глубоко реальными, а эта математическая реальность выходит за пределы мыслительных процессов любого математика. Что в такой ситуации должен делать реалист, верящий в математическую истину? Воспринимая ее как некоторое соответствие действительности, он вынужден придерживаться «критического реализма», сочетающего различные критерии и допускающего существование как онтологических, то есть относящихся к характеристикам реальности, так и эпистемологических, то есть относящихся к характеристикам познания, философских уровней.

Способность человека мыслить одновременно понятиями, образами и символами является источником устойчивой системной триады, в которой доминирует аналитическое начало (рацио), качественное начало (эмоцио) и субстанциальное начало (интуицио). Автор тернарной методологии Р.Г. Баранцев, развиваемой им в современных концепциях естествознания в течение последних десятилетий, «Именно такие аспекты проявляются в каждой устойчивой системной триаде. Источник этой закономерности можно видеть в способности человека мыслить одновременно и понятиями, и образами, и символами. Предлагаемая семантическая формула системной триады использует понятия, сложившиеся в диадной парадигме и потому довольно условные» [3, с. 27]. Ее можно графически нелинейно изобразить следующим образом:

эмоцио
/ \\
рацио — интуицио

Смысловое содержание этой триады по отношению к конкретной области исследования постепенно наполняется в результате исторической эволюции его проявления в такой триадической структуре. Триадой называется совокупность из трех элементов, которые каким-то образом связаны между собой. В связи с этим, следуя Р.Г. Баранцеву, можно различать такие типы триад: во-первых, «линейные», или одномерные, в которых все три элемента расположены на одной оси в семантическом пространстве; во-вторых, «переходные», или гегелевские, характеризуемые философской формулой «тезис – антитезис – синтез», которые, провозглашая снятие противоречия, не указывают на механизм раскрытия его движущей структуры; в-третьих, «системные», или целостные, в которых единство создается потенциально равноправными элементами, каждый из которых может подробно объяснить это на примере семантической формулы системной триады.

Философская интерпретация привязки диады к определенной стороне семантического треугольника, позволяет наглядно видеть, в каком проблемном поле следует искать «мерообразующий фактор компромисса» для выбранной оппозиции. В проблеме обоснования современной математики целесообразно говорить о теоретическом синтезе программ обоснования как единстве философско-методологических обосновательных подходов, характеризующем тенденцию к их соединению в рамках общей системы теоретических и прикладных математических знаний. Поскольку любая интерпретация развития математики может в итоге оказаться односторонней и неполной, то, если речь не идет о принципиальных методологических вопросах, следует признавать и альтернативные взгляды. Поскольку формализация целостности программы обоснования современной математики выражается через ее внешние связи, то при ее реализации можно также воспользоваться свойством мягкости триадической структуры.

Современная философия математики по-новому сменила философско-мировоззренческие акценты в программах обоснования математики, поскольку в них наиболее востребованным становится критический рационализм, который допускает существование неразрешимых математических проблем, что уже подтверждено математической практикой. Различие подходов в вопросе об обосновании математики ярко проявляется при рассмотрении философских проблем, связанных с идеей бесконечности. В связи с этим можно отметить, что математика с помощью своих инструментов интеллектуального порядка является формой выражения важнейших закономерностей хорошо развитых научных теорий. Поэтому наибольшая инструментальная ценность математики в развитии познания состоит в том, что на ее абстрактном языке выражается внутренняя организация естественнонаучных знаний, среди которых ведущими являются физические, и проводится теоретический анализ в наиболее развитых областях науки.

Современный этап развития философии математики можно назвать «постгёделевским». В самом названии постгёделевской философии математики еще звучит ориентация на предыдущую эпоху развития математического знания, но по существу уже можно говорить о начале принципиально новых взглядов и подходов в проблеме обоснования математики [4]. Это связано прежде всего со знаменитыми теоремами Гёделя о неполноте. После их философского анализа стало ясно, что полностью формализовать всю математику, оставаясь в рамках заданных систем аксиом, вообще говоря, в принципе невозможно. Уточняя само понятие постгёделевской философии математики, заметим, что математики смотрят на прошлое не как на предпосылку, а как на необходимую составную часть величественного здания современной математики.

Вопрос о формализации, математической строгости и гильбертовском идеале чистоты методов оказался намного тоньше, чем было принято считать до результатов Гёделя. Они представляют собой исключительно устойчивые результаты, так как любая попытка методологически обойти теорему Гёделя о неполноте, не ослабляя существенно достоинства формализованного языка математики, приводит к тому, что такая попытка дает новый материал для построения примера, где она опять не достигает своей цели. При использовании теоремы Гёделя в качестве философского аргумента в оценке состоятельности программы формализма неизменно привлекается понятие непротиворечивости арифметики. В таком контексте о непротиворечивости математических теорий можно говорить как о следствии правильных рассуждений, о которых мы иногда судим интуитивно, хотя и интуиция бывает бессильной.

Философская нагрузка концептуальных ограничений человеческого понимания связана с тем, что полное объяснение сложного процесса может потребовать различных точек зрения, которые трудно поддаются единому описанию. Всесторонний анализ обоснования математики может потребовать различных точек зрения по поводу фундаментальных понятий математики. Например, глубокий философско-методологический анализ любого понятия и его непосредственное применение взаимно исключают друг друга. Для теории познания важно осознание того, что по отношению к современной математике дополнительность интуитивного и дедуктивного познания может работать в обе стороны: как для понимания какого-то математического явления, так и для понимания самого познания. С точки зрения философии и методологии современной науки, противоположности – это не противоречия, а дополнения. Общеметодологическая значимость идеи дополнительности для обоснования математики состоит в том, что системный синтез программ обоснования методологически возможен только в форме дополнительности, включающей снятие противоположных подходов в более высоких по уровню обосновательных программах.

Фундаментальная и актуальная тема соотношения дополнительных понятий интуитивного и формального, рационального и иррационального в понятии «бесконечное» берет свое начало в философии древних греков. Неожиданное продолжение их наблюдения получили в новой области математического знания – теории фракталов, которая смещает познавательные установки от строгой рациональности до интуитивно-образного мышления. Фракталами называются объекты дробной размерности, которые обладают свойством масштабной инвариантности, или самоподобия, когда изменение масштаба не меняет их структуры. Фрактальную геометрию можно отнести к постнеклассической математике, возникшей в конце XX века. В истории современной математики, берущей начало в XVII веке, неоднократно менялись представления о фундаментальных теориях математического знания. Например, во фрактальной геометрии в духе платонистской интерпретации есть неизменные идеальные объекты – алгоритм, фрактал, мыслимый как завершенное целое, но основная особенность их в том, что невозможно выделить части, совпадающие с целым.

Поэтому можно предположить, что фрактальная геометрия – это новый взгляд на сущность природы математики с точки зрения неоплатонистской математики. С помощью фрактальных объектов природа на языке математики демонстрирует не просто значительно более высокую степень сложности, соответствующей современному уровню развития науки, а совсем другой уровень постнеклассической сложности. Считая, например, фрактальность, определяемую через новое математическое понятие дробной размерности, фундаментальным свойством материи, известную оппозицию «дискретность – непрерывность» можно переосмыслить в составе следующей триады:

фрактальность
/ \
дискретность — непрерывность.

С точки зрения принципа дополнительности, вопросы нельзя ставить в плане логических исключений. И дискретное, и непрерывное в составе триады – это математические модели, не исключающие, а дополняющие друг друга, так как обе они являются идеализациями, относящимися к гносеологии. Поэтому развитие проблемы бесконечности в постгёделевской философии математики естественно приводит к синтезирующим триадическим структурам, в которых дополнительность сторон оппозиции способствует формированию условий для обнаружения третьей компоненты, обеспечивающей их целостность. В качестве содержательного примера, подтверждающего эту философскую мысль, можно привести фрактальное множество. Оно не было изобретено американским математиком польского происхождения Бенуа Мандельбротом, а было им открыто. Подобно планете Нептун, это множество существовало задолго до того, как его открыли математики и поняли его сущность.

В определенном смысле множество Мандельброта и подобные ему фрактальные множества являются представителями объектов третьего мира Поппера. Строго говоря, их нельзя считать созданием компьютера, так как вычислительный процесс должен продолжаться бесконечно долго, и поэтому эти множества невозможно точно вычислить. Существование, приписанное множеству Мандельброта, можно трактовать как свойство его абсолютной природы. Когда Мандельброт увидел самые первые компьютерные изображения, он счел эти размытые структуры результатом сбоя и только потом убедился в том, что они действительно являются частью строящегося множества. «Более того, – утверждает математик и физик Р. Пенроуз, – сложную структуру множества Мандельброта во всех ее деталях не под силу охватить никому из нас, и ее невозможно полностью отобразить на компьютере» [5, с. 87]. Результатом исследования любого математика, работающего на компьютере, будет приближение к единой фундаментальной математической структуре, которая уже существует где-то вне нас. В этом случае математическая интуиция, возможно, представляет собой всего лишь некоторое знание поведения математических объектов.

Несмотря на философски и методологически оправданное стремление искать «конструктивное» решение проблемы существования математических объектов, интуиционизм в некоторых своих проявлениях излишне радикален. Стремление философов математики онтологизировать математические понятия, чтобы получить содержательные представления о них, обусловлено самой спецификой становления математического метода. Адекватное обоснование эффективности математики может быть системным. Оно исходит из понимания математики как некоторого рода самоорганизующейся системы, исторически приспособляющейся к содержательному знанию как к системе более фундаментальной. Такую аргументацию можно принять в качестве общего методологического подхода к обоснованию абстрактных математических теорий независимо от конкретных философско-математических программ их формирования.

Современные системные идеи позволяют размышлять над проблемами, неподдающимися редукционистскому декартовскому методу в обосновании. Согласно принципу системности, на новые идеи и концепции, появляющиеся в науке, налагается ограничение соответствия некоторой общей парадигме. Хотя становление тринитарной парадигмы связано с психологическими трудностями преодоления «бинаризма», системное обоснование математических теорий, безусловно, более абстрактно и более общезначимо, чем чисто логическое, поскольку все программы строго логического обоснования математики базируются на редукции. Например, в интуиционизме это редукция содержания математики к содержанию арифметики, а в формализме – это редукция проблемы непротиворечивости развитой математической теории к проблеме непротиворечивости содержательной метатеории.

Методологический сдвиг в решении проблемы обоснования зависит не только от достижений в математической логике и соответствующего анализа генезиса аксиоматических систем, а прежде всего от углубленного понимания современных проблем самой философии математики и от расширения допустимых подходов к обоснованию математических теорий. В современной философии и методологии науки осознается недостаточность бинарных структур. Почему мы считаем, что целостному подходу соответствует триада программ обоснования математики? Во-первых, число три обладает высоким интеллектуальным приоритетом, поскольку само триединство удивительным образом сохраняет значение в культуре наших дней. Во-вторых, основное значение триады состоит в том, что она фиксирует начало синтеза, соединяя противоположные начала.

Для обоснования математики триадический подход означает, что никакая часть математики не обладает особыми привилегиями, так как каждая известная программа обоснования математики базируется на поисках той части математики, которая в рамках этой программы имеет особую надежность своих доказательств, свободных от противоречий. В таком контексте все три элемента системной триады гносеологически потенциально равноправны, поскольку суждение о математической истине не опирается непосредственно на некоторую определенную программу обоснования математики. В современной философии математики можно выделить три хорошо работающих программы обоснования математики: формализм, платонизм и интуиционизм, поэтому в качестве одной из формул системной триады можно рассмотреть следующую совокупность программ обоснования математики:

платонизм
/ \
формализм — интуиционизм.

Стремление к целостности неразрывно связано с идеей триадичности, которая позволяет в проблеме обоснования замкнуть бинарную оппозицию «формализм – интуиционизм» в системную триаду, объединяющую три равноправных элемента обоснования современной математики, каждый из которых позволяет участвовать в разрешении гносеологических противоречий как некая «мера компромисса». Платонистская компонента в обосновании математики позволяет снять субъективные сомнения в существовании некоторых «концептуально шатких» определений. Поэтому правильнее говорить не о методологической несовместимости таких подходов в рамках единого описания, а об их дополнительности, когда один из подходов позволяет лучше понять один из фрагментов математического текста, а другой, дополнительный к первому, лучше разъясняет другой фрагмент.

Используя понятие системной триады в обосновании математики, мы опираемся не только на естественный процесс внутреннего вызревания новых математических теорий, но и на качественно новое понимание содержательного математического рассуждения. Если математику нельзя обосновать в самой математике, то это не означает, что ее нельзя обосновать вообще, поскольку при построении абстрактных теорий математики используют не только математические, но также и нематематические аргументы. Мир математики слишком сложен, чтобы можно было примирить между собой все его рациональные и иррациональные убеждения. Поскольку формализация включает и не вполне формализуемые теории, то целостный подход к программам обоснования математики лучше характеризует суть проблемы, хотя в методологическом смысле полнота теории тоже может быть достижима, если ее аксиоматика признана вполне достаточной.

Философско-методологический синтез программ обоснования пытается найти новые пути к единству знания, не устраняющие его разнообразия. Поэтому тринитарная методология не заменяет, а развивает диалектику, раскрывая ее новые возможности, когда от современной математики при сохранении достаточной точности требуется лишь сохранять целостность исследуемых объектов. Источник развития триады обоснования в целом трактуется как самообоснование математической теории в результате единства и борьбы противоположных сторон триады. Понимаемый таким образом философско-методологический синтез является существенной стороной, или аспектом, диалектики. Чтобы не потерять философской перспективы целостного обоснования современной математики, она должна иметь альтернативные подходы к обоснованию в духе разумного методологического компромисса.

Заключение

Тринитарный подход к программе обоснования математики видоизменяет наши взгляды на проблему целостности обоснования. Если раньше целостные представления о программе обоснования складывались на основе внешних взаимодействий конкурирующих программ обоснования, то современный этап на основе системного подхода дополняет изучение целостности анализом, связанным с проникновением во внутреннее результирующее пересечение действующих программ обоснования математики. В частности, будущее математики, с точки зрения анализа ее исторической эволюции, теперь видится не только в дальнейшем развитии ее классических направлений, составляющих ядро теоретической математики, но и в создании новых математических структур, моделей и конструкций.

Основная трудность всех программ строгого обоснования математики состоит в том, что на методологическом уровне математика отличается от любого естественнонаучного знания более надежным способом обоснования своих теоретических построений, которые стабильны, и в некотором смысле ее доказательства «внеисторичны». Методологическая трудность обоснования современной математики, в основе которой лежит важнейшая проблема непротиворечивости аксиоматической системы, не позволяет выделить какую-либо одну из известных философско-математических программ.

Естественный синтез программ обоснования является результатом тех процессов, которые сами по себе происходят в результате сознательного конструирования абстрактных систем философии и математики. Поэтому сравнение программ обоснования должно исходить как из идеи единства философии, так и из возможности синтеза знаний. Базовой структурой такой методологической целостности может стать системная триада, воплощающая синергетическую методологию, которая позволяет взглянуть на современную математику как на самоорганизующуюся систему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перминов, В.Я. Философия и основания математики / В.Я. Перминов. – М. : Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.
2. Михайлова, Н.В. Системный синтез программ обоснования современной математики : монография / Н.В. Михайлова. – Минск : МГВРК, 2008. – 332 с.
3. Баранцев, Р.Г. Синергетика в современном естествознании / Р.Г. Баранцев. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 144 с.
4. Михайлова, Н.В. Философско-методологические основания постгёделевской математики : монография / Н.В. Михайлова. – Минск : МГВРК, 2009. – 198 с.
5. Пенроуз, Р. Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики / Р. Пенроуз. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 384 с.

Michailova N.V. **Trinital Methodology in Philosophical Analysis of the Program of Basing of Mathematics**

The importance of the trinital methodology in the theoretical workout of the problem of basing of modern mathematics and its actuality is grounded in this paper. The problem of basing of modern mathematics consists of two interconnected levels – mathematical and philosophical. If the point of the first one is in the usage of the program of basing for a definite theory, which makes up a pure mathematical work, then the point of the second one is that each program of basing needs a philosophical analysis of its correspondence to its initial general philosophical and methodological task. That's why the range of philosophical and methodological questions of basing, which need further study, is also connected with the synthesis of different philosophical-methodological traditions of modern mathematics with the goal of the creation of the same theoretical-methodological program of basing.

Рукапіс паступіў у рэдкалегію 19.05.2010