БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Т. Усс

ОТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Учебно – методическое пособие

Брест 1998

БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Т. Усс

ОТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ К ИНТЕГРИРОВАНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ

Учебно-методическое пособие

Брест 1998

УДК 517. 38
ББК 22. 161. 12

Излагается введение в теорию интегрирования дифференциальных форм. Изложение построено на анализе исходных понятий теории интеграла Римана и сопровождается примерами и рисунками.

Предназначается студентам университетов, обучающихся по специальности «Математика». Может быть полезно студентам факультетов и вузов с расширенной программой по математике, а также преподавателям вузов.

Печатается по решению редакционно – издательского совета университета.

Рецензенты: доктор физико – математических наук, профессор кафедры теории функций Белгосуниверситета А.А. Килбас;
кандидат физико – математических наук, доцент В.В.Кашевский.

Редактор: Т.И. Шило

Усс А.Т. От интегрирования функций к интегрированию дифференциальных форм. Учебно – методическое пособие. Брест, 1998. – 52с.

Предисловие

Общеизвестна и давно никем не оспаривается роль исчисления дифференциальных форм в современной математике. Вместе с тем, далеко не однозначно воспринимается изложение соответствующей теории в рамках курса математического анализа. Несмотря на большое количество хороших учебников и учебных пособий по этому разделу современного анализа, изучение теории дифференциальных форм часто еще переносится в дифференциальную геометрию или в дополнительные и специальные математические курсы.

Цель настоящего пособия - выявить причины и мотивы появления дифференциальных форм в теории криволинейных и поверхностных интегралов.

Специальная форма изложения материала предполагает активное чтение. От читателя требуется знание теории неявных функций, кратного интеграла Римана и основ линейной алгебры и аналитической геометрии.

Введение

Тема "Криволинейные и поверхностные интегралы" выделяется в курсе математического анализа широким использованием различных понятий алгебры, геометрии и, особенно, линейной алгебры. Но главная трудность изучения этой темы заключается в том, что приходится пересматривать свои уже сложившиеся представления о самом интеграле. Ведь прежде приходилось интегрировать функции, а теперь "вдруг" оказывается, что объекты интегрирования иные - дифференциальные формы. Высокий уровень абстрактности понятия дифференциальной формы требует осознания

причин перехода к интегрированию новых объектов. При этом мало чем могут помочь ссылки на широкое использование форм в современной математике и физике.

Так настолько ли сложна теория дифференциальных форм, так ли уж революционен современный взгляд на интеграл, чтобы изучение его можно было отложить на " потом " ? Ответу на эти вопросы и посвящено настоящее учебное пособие.

§ 1. Что понимается под выражением $\int_a^b f(x)\,dx$

" Неужели " - удивится читатель, - " под выражением $\int_a^b f(x)\,dx$ может скрываться и что-то иное, отличное от интеграла от функции $f(x)$? " Оказывается..., но давайте не спеша разберемся с этим вопросом.

Присутствие в обозначении интеграла от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ символов a, b, $f(x)$ и $\int$ объяснить легко: a и b характеризуют " промежуток интегрирования ", $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - " интегрируемая " функция, а знак $\int$ обозначает действие, совершаемое над функцией. Однако зачем к функции $f(x)$ в обозначении интеграла мы приписываем dx ?

Вспомним: интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называется предел интегральных сумм

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) \quad ,$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - точки отрезка $[a, b]$, выбранные так, что $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, а ξ_i $(i=0,1,\ldots,n-1)$ - произвольно взятая точка отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ (конечно,понятие

предела интегральных сумм в теории интеграла имеет строго определенный смысл, но мы, допуская вольность речи, будем говорить, что имеется в виду предел " при стремлении к нулю диаметра разбиения"). Но ведь вычисление этого предела не предполагает использование дифференциала dx ! Стало быть, присутствие dx в обозначении вовсе не вызывается определением интеграла. С этой точки зрения, вполне естественными для интеграла были бы обозначения

$$\int_a^b f(x) \ , \ \int_a^b f \ . \qquad (\ I\ )$$

(Между прочим, сам Г. Лейбниц, чьим обозначением интеграла мы теперь пользуемся, первоначально обозначал его без символа dx , т.е. выражениями (I) ! См. по этому поводу " Исторический очерк " в книге Н.Бурбаки [3]).

Зачем же понадобилось внесение dx под знак интеграла ? Вот как объясняет Н.Бурбаки появление общепринятого теперь обозначения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ у Г. Лейбница.

" ... Однако он недолго медлит с введением последнего обозначения и уже систематически придерживается его после того, как замечает его инвариантность относительно выбора независимой переменной,что избавляет его от необходимости постоянно излагать принцип этого выбора; он выражает известное удовлетворение, когда приступает к изучению работ Барроу, которые до тех пор оставлял без внимания, констатируя, что общая теорема о замене переменной, которой Барроу придавал такое большое значение, сразу вытекает из одних его обозначений " ([3] , с. 187).

Поясним сказанное. Г. Лейбниц заметил, что формула замены переменной в интеграле,имеющая в обозначениях (I) довольно неестественный вид,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad ,$$

допускает простое трактование при использовании дифференциалов. Действительно, если, внеся под интеграл дифференциал " независимой переменной ", считать возможными действия с подынтегральными выражениями по правилам действий с дифференциалами, то выражение $f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ совпадает с выражением $f(\varphi(t))\,d(\varphi(t))$, которое получено из $f(x)\,dx$ формальной подстановкой вместо " независимой переменной " x функции $x = \varphi(t)$. Формализация этого наблюдения равенствами

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\varphi(t))\,d(\varphi(t)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

как раз и есть замеченное Г. Лейбницем свойство инвариантности интеграла относительно выбора независимой переменной. Выгода из этого свойства чисто практическая – нет нужды " постоянно излагать принцип " выбора независимой переменной. Например, вычислить интеграл по отрезку $[0,1]$ от функции $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ можно с помощью замены $x = \sqrt{t-1}$. (В результате замены искомый интеграл сведется к интегралу по отрезку $[1,2]$ от функции $1/(2t)$; последний легко вычисляется по формуле Ньютона – Лейбница и равен $\frac{1}{2}\ln 2$). Но как объяснить, вернее, как угадать вид сделанной замены ? Использование свойства инвариантности интеграла относительно выбора независимой переменной позволяет это легко сделать:

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,d(x^2+1) =$$

$$= \left[\text{положим } x^2+1 = t\right] = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln 2 \ .$$

И Г. Лейбниц делает открытие. Он не изменяет обозначение

интеграла от функции, он рассматривает иной интеграл ! В самом деле, так как Г. Лейбниц настойчиво связывает интеграл с выражениями типа $f(x)dx$ (" Предупреждаю, что отбрасывать dx нельзя ... часто встречающаяся ошибка ... " ([3] ,с. 187). Эти слова Г. Лейбница относятся, конечно же, не к обозначению интеграла от функции - " хоть горшком назови, да только в печь не сажай !"), то ведь это означает, что вместо интеграла от функции $f(x)$ Г. Лейбниц рассматривает интеграл от дифференциального выражения или, говоря современным языком, интеграл от дифференциальной формы $f(x)dx$. Увы, взгляд Г. Лейбница на интеграл оставался незаслуженно отвергнутым более двух столетий ! Нет, конечно же, техника его обращения с интегралами была принята без - оговорочно - кто из нас не пользовался " внесением под дифференциал " или заменой " переменной интегрирования "! - но теория интегрирования дифференциальных форм получила развитие и признание лишь сравнительно недавно ....

Закончим, однако, " путешествие по далекому прошлому " и сделаем первые выводы.

Конечно, констатируем мы, до сих пор нам был известен лишь интеграл от функции. В то же время, при практическом обращении с интегралами " весьма кстати " оказалась формальная техника интегрирования, выраженная правилами " внесения под дифференциал " и " замены переменной " в интеграле. Обоснование правильности такой техники нам пока неизвестно, но уже сейчас ясно, что это обоснование будет связано с новым взглядом на интеграл $\int_a^b f(x)dx$, как интеграл от " дифференциальной формы ".

" Экономно растрачивающий " свои силы читатель, прежде чем приступать к изучению форм, может спросить: " Помимо интегралов от функций по отрезкам нам известен кратный интеграл, да вот что-

то " хорошей ", т.е. формальной или близкой к ней техники интегрирования для такого интеграла не было (при замене переменной, например, приходилось помнить о якобиане).Имеет ли теория дифференциальных форм приложение к кратным интегралам ?"

Что же, обращение к кратным интегралам будет весьма полезно для нас. Попытаемся обнаружить естественность оперирования с формами и при интегрировании по многомерным областям.

§ 2. Как "удачней" обозначить кратный интеграл

Удобство использования техники дифференцирования при действиях с интегралами по отрезкам настолько " очаровало " математиков, что они по соображениям аналогии внесли дифференциалы независимых переменных и в обозначение кратного интеграла. Но, к сожалению, обозначение " не сработало ". Так, формула замены переменных в кратном интеграле имеет совершенно " не тот " вид по сравнению с формулой, которую можно было бы получить формальным " вычислением " подынтегрального выражения. Разберемся в причине " неудачности " обозначения кратного интеграла и попробуем угадать " нужное " обозначение.

Рассмотрим для определенности двойной интеграл

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_{(x,y)}} f(x,y)\,dx\,dy\,, \qquad (\mathrm{I})$$

где $\mathcal{D}_{(x,y)} \subset \mathbb{R}^2$ – некоторое измеримое по Жордану множество (например, прямоугольник или круг), и сделаем в интеграле замену переменных

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,. \qquad (2)$$

Как известно, интеграл (2) равен интегралу

$$\iint\limits_{\mathcal{D}_{(r,\varphi)}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi\,, \qquad (3)$$

где $\mathcal{D}_{(r,\varphi)} \subset \mathbb{R}^2$ - прообраз множества $\mathcal{D}_{(x,y)}$, при отображении (2).

Таким образом, чтобы объяснить получение подынтегрального выражения в (3) формальной подстановкой равенств (2) в подынтегральное выражение интеграла (1), нужно как-то объяснить равенство

$$d(r\cos\varphi)\, d(r\sin\varphi) = r\, dr\, d\varphi \quad . \qquad (4)$$

Вычисление дифференциалов $d(r\cos\varphi)$, $d(r\sin\varphi)$ и последующее их формальное " умножение ",

$$d(r\cos\varphi)\, d(r\sin\varphi) = (\cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi)(\sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi) =$$

$$= \cos\varphi\sin\varphi\,(dr)^2 - r\sin^2\varphi\, d\varphi\, dr + r\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi - r^2\cos\varphi\sin\varphi\,(d\varphi)^2,$$

приводит нас к выражению, отличающемуся от правой части (4). Следовательно, приходим к выводу: естественного свойства дистрибутивности умножения недостаточно для наших целей, операция умножения дифференциалов должна обладать еще некоторыми дополнительными свойствами. Подберем же эти дополнительные свойства таким образом, чтобы в результате их использования выражение

$$\cos\varphi\sin\varphi\,(dr)^2 - r\sin^2\varphi\, d\varphi\, dr + r\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi - r^2\cos\varphi\sin\varphi\,(d\varphi)^2$$

совпало с выражением $r\, dr\, d\varphi$. (Тот факт, что с самой операцией умножения дифференциалов мы встречаемся впервые, не должен нас остановить. Наоборот, отсутствие в прошлом подобной операции вселяет в нас надежду на то, что свойства ее, которые мы примем, конечно же "аксиоматически ", не приведут к каким-нибудь противоречиям с уже известным материалом). Какие же свойства операции умножения дифференциалов нам нужны ?

Во-первых, следует считать, что квадрат любого дифференциала равен " нулю "; это избавит нас от слагаемых, содержащих $(dr)^2$

и $(d\varphi)^2$, да и в случае общих замен переменных произведение дифференциалов различных переменных будет переходить в произведение такого же типа.

Во-вторых, следует принять закон антикоммутативности произведения дифференциалов, т.е. нужно считать, что при перестановке местами двух дифференциалов " значение " произведения меняет знак на противоположный; меняя тогда порядок сомножителей $d\varphi$ и dr в произведении $-r\sin^2\varphi\, d\varphi dr$, мы получим $r\sin^2\varphi\, dr\, d\varphi$, что в сумме с $r\cos^2\varphi\, dr\, d\varphi$ и даст нам нужное выражение $r\,dr\,d\varphi$.

Сопоставляя эти свойства операции умножения дифференциалов, можно заметить, что первое из них (равенство нулю квадрата любого дифференциала) является следствием второго, закона антикоммутативности. (В самом деле, если $du\,dv = -dv\,du$ для любых дифференциалов du и dv, то при $du = dv$ будем иметь $(du)^2 = -(du)^2$, откуда заключаем, что $(du)^2 = 0$.) Таким образом, достаточно потребовать от операции умножения дифференциалов одного дополнительного свойства - закона антикоммутативности.

Отличие операции умножения дифференциалов от традиционных операций умножения чисел и функций понуждает использовать для обозначения этой операции символ, отличный от традиционных обозначений умножения. В качестве такого символа принято использовать знак $\wedge$, а операцию называть внешним произведением дифференциалов (почему " внешним " - чтобы отличить от " внутреннего " произведения дифференциалов как произведения функций, ведь дифференциал функции в точке - это линейная функция). С учетом нового обозначения операции умножения дифференциалов самый " неестественный " закон умножения - закон антикоммутатив -

ности можно выразить следующим образом:

> для любых двух дифференциалов du и dv имеет место соотношение $du \wedge dv = -dv \wedge du$.

Итак, если условиться, что операция $\wedge$ внешнего умножения дифференциалов наряду с естетственными законами ассоциативности и дистрибутивности удовлетворяет закону антикоммутативности, то двойной интеграл (I) можно отождествить с интегралом

$$\iint\limits_{\mathcal{D}(x,y)} f(x,y)\, dx \wedge dy . \qquad (5)$$

Правда, небольшое видоизменение замены (2),

$$x = r\sin\varphi, \quad y = r\cos\varphi \quad , \qquad (6)$$

может слегка огорчить: выражение $dx \wedge dy$ преобразуется не в выражение $r\, dr \wedge d\varphi$, как этого требует формула замены переменных в двойном интеграле, а в $-r\, dr \wedge d\varphi$. Однако можно либо договориться не обращать внимание на знак, рассматривая в обозначении (5) вместо $dx \wedge dy$ выражение $|dx \wedge dy|$, либо охарактеризовать различие замен (2) и (6) противоположностью " ориентаций " и условиться, что интегралы по противоположно ориентированным областям имеют противоположные по знаку значения. (Между прочим, в современной теории интегрирования используются оба соглашения. Первое из них приводит к понятию абсолютной дифференциальной формы, которое используется в теории интегрирования по неориентируемым поверхностям. Второе же соглашение приводит к теории интегрирования по ориентируемым поверхностям).

Мы примем второе - " классическое " - соглашение. А именно, будем считать, что

стандартные (" декартовы ") координаты " положительно ориентируют " область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, а всякая иная система координат также " положительно ориентирует " $\mathcal{D}$, если якобиан замены стандартных координат на новые имеет знак " плюс ", и " ориентирует" область $\mathcal{D}$ "отрицательно ", если якобиан замены переменных имеет знак " минус ". Кроме того, условимся, что интегралы по противоположно ориентированным областям имеют противоположные знаки.

В рассматриваемом нами примере замена переменных (2) имеет положительный якобиан, а потому, согласно принятому соглашению об ориентации $\iint\limits_{\mathcal{D}(x,y)} = \iint\limits_{\mathcal{D}(r,\varphi)}$; замена же (6) имеет отрицательный скобиян, т.е. при такой замене $\iint\limits_{\mathcal{D}(x,y)} = -\iint\limits_{\mathcal{D}(r,\varphi)}$. В случае первой замены переменных выражение $dx \wedge dy$ преобразуется в выражение $r\,dr \wedge d\varphi$ и, стало быть

$$\iint\limits_{\mathcal{D}(x,y)} f(x,y)\,dx \wedge dy = \iint\limits_{\mathcal{D}(r,\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,r\,dr \wedge d\varphi .$$

При замене (6) выражение $dx \wedge dy$ преобразуется в выражение $-r\,dr \wedge d\varphi$, однако с учетом знака " минус " перед интегралом по области $\mathcal{D}_{(r,\varphi)}$, получим

$$\iint\limits_{\mathcal{D}(x,y)} f(x,y)\,dx \wedge dy = -\iint\limits_{\mathcal{D}(r,\varphi)} f(r\sin\varphi,\ r\cos\varphi)\cdot(-r)\,dr \wedge d\varphi =$$

$$= \iint\limits_{\mathcal{D}(r,\varphi)} f(r\sin\varphi,\ r\cos\varphi)\,r\,dr \wedge d\varphi .$$

Обращение полученных равенств в классические обозначения дает равенства

$$\iint\limits_{\mathcal{D}(x,y)} f(x,y)\,dx\wedge dy = \iint\limits_{\mathcal{D}(r,\varphi)} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi \quad ,$$

$$\iint\limits_{\mathcal{D}(x,y)} f(x,y)\,dx\wedge dy = \iint\limits_{\mathcal{D}(r,\varphi)} f(r\sin\varphi,\, r\cos\varphi)\, r\, dr\, d\varphi \quad ,$$

которые полностью соответствуют общей формуле замены переменных в кратном интеграле

$$\int\limits_{\mathcal{D}_x} f(x)\,dx = \int\limits_{\mathcal{D}_t} (f\circ\varphi)(t)\,\big|\det \varphi'(t)\big|\,dt$$

(см. [5] , Гл. XI , § 5).

Рассуждения, которые мы проводили, основывались на рассмотрении конкретных замен (2) и (6) в двойном интеграле (I). Однако оказывается, выполнение законов ассоциативности, дистрибутивности и антикоммутативности операции $\wedge$ - умножения дифференциалов достаточно для того, чтобы сделать возможным формальное получение формулы замены переменных и в n - кратном интеграле от функции f , если использовать для этого интеграла обозначение

$$\int\limits_{\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n} f(x^1,\ldots,x^n)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$$

(проверьте это на примерах общих замен переменных в двойном и в тройном интеграле).

Почему же подобное " обозначение " кратного интеграла нам было неизвестно, тем более, что и угадать-то его не так уж сложно ?

Оказывается, главная трудность кроется в придании смысла выражению $f(x^1,\ldots,x^n)\,dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n$, а точнее - в придании смысла операции $\wedge$. В самом деле, мы уже имели возможность убедиться в простоте преобразований выражений указан-

ного типа, но вот что считать результатом $\wedge$ - перемножения двух или большего числа дифференциалов ? Понимание $\wedge$ - произведения как умножения функций нас не может устроить, ибо такое произведение коммутативно. По той же причине не подходит трактовка $\wedge$ - произведения как умножения чисел - значений дифференциалов в каких-то конкретных точках. Произведению $du \wedge dv$ нужно придать какой-то иной смысл. (Какой ? Ответ на этот вопрос будет дан позже, после того, как мы окончательно " убедимся" в целесообразности изучения дифференциальных форм).

Итак, подведем итог наших поисков удачного обозначения кратного интеграла: для получения возможности формальных преобразований кратных интегралов при заменах переменных удобно отождествить n - кратный интеграл от функции f с интегралом выражения $f(x^1, \ldots, x^n)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. (Таким образом, и в кратном интегрировании несомненна практическая целесообразность использования дифференциальных форм).

" Ну, хорошо",- скажет скептически настроенный читатель. " Я вижу, что одномерное и кратное интегрирование дифференциальных форм имеет преимущество в естественности преобразований интегралов. допускаю даже, что при интегрировании по кривым или по поверхностям использование форм также дает определенные выгоды. Но следует ли отсюда, что нужно отбросить старую (" классическую ") и строить новую теорию интегрирования, основанную на теории дифференциальных форм ? С одномерным и кратным интегралом мы так не поступали, а если с интегрированием по поверхностям ситуация повторяется, то зачем все-таки нужно изучение теории дифференциальных форм именно сейчас ? Почему мы не можем взять для практического использования некоторые факты из общей теории форм, оставив подробное их изучение до того момента, когда оно

станет необходимым ? "

Ответить можно так - классическую теорию необходимо уточнить, поскольку она не говорит о том, что все-таки интегрируется по кривой или поверхности. Наиболее перспективная теория, и с точки зрения приложений к одномерному и кратному интегрированию, и с точки зрения приложений к геометрии и физике, строится с помощью дифференциальных форм.

Однако такой ответ слишком краток, он предполагает знакомство читателя с классической теорией криволинейного и поверхностного интегрирования. Поэтому предлагаем набраться терпения и вникнуть в начала классической теории криволинейного и поверхностного интегрирования.

§ 3. Что " интегрируют " криволинейные и поверхностные интегралы

Классическое представление о криволинейном и поверхностном интеграле можно получить, если распространить определение от функции по многомерному промежутку $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ на случай, когда $\mathcal{D}$ - некоторая " поверхность " в $\mathbb{R}^n$.

Как мы знаем, в основе определения интеграла от функции f по промежутку $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ лежит множество интегральных сумм. Каждая интегральная сумма отвечает некоторому разбиению промежутка $\mathcal{D}$ на " правильные " куски и определенному выбору на каждом из кусков некоторой " средней " точки. Если считать, что $\mathcal{D}$ разбивается на куски $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots$, и на каждом куске $\mathcal{D}_i$ выбрана точка ξ_i $(\xi_i \in \mathcal{D}_i)$, то интегральная сумма определяется как

$$\sum_i f(\xi_i)\mu(\mathcal{D}_i) \quad ,$$

где $\mu(\mathcal{D}_i)$ — длина, площадь или объем (мы будем говорить - " мера ") куска $\mathcal{D}_i$ — в зависимости от размерности $\mathbb{R}^n$. Различные разбиения и произвол в выборе " средних " точек определяют множество интегральных сумм для функции f, предел этого множества (" при стремлении к нулю диаметра разбиения") и называется интегралом от функции f по промежутку $\mathcal{D}$

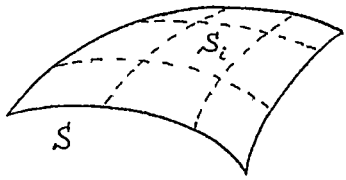


Рис. I

Вполне естественно допустить, что если строится интеграл от функции f по k - мерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$, то он должен стать пределом множества интегральных сумм. Интегральные же суммы должны определяться разбиениями S на " правильные " куски $S_1, S_2, \ldots$, выбором средних точек $\xi_i \in S_i$, и иметь вид

$$\sum_i f(\xi_i)\, \mu(S_i), \qquad (\mathrm{I})$$

где $\mu(S_i)$ — k - мерная мера или k - мерная " площадь " куска S_i. (Конечно же, при таком определении нужно знать, как вычисляется k - мерная " площадь " куска S_i. Для этого необходимо в принципе уметь считать " площадь " произвольной k - поверхности. Однако знание строгого определения " площади " поверхности вовсе не обязательно для понимания обсуждаемых вопросов, и потому мы будем полагаться на интуитивное представление о ней).

К сожалению, все многообразие интегралов от функции f по поверхности S не охватывается пределом сумм (I). Оказывается, для заданной функции f и фиксированной поверхности S можно

составить бесконечное множество разных интегралов от функции f по поверхности S.

Чтобы пояснить это, попытаемся определить интеграл от функции $f: S \to \mathbb{R}$ по кривой (т.е. 1 - мерной поверхности) S, лежащей в плоскости xOy.

Прежде всего, интегралом от функции f по кривой S естественно считать предел интегральных сумм (I), которые в конкретном нашем случае могут быть заменены на суммы вида

$$\sum_i f(\xi_i)\sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \qquad (2)$$

(1 - мерная мера куска S_i – это длина дуги S_i; приближенно ее можно считать - разумеется, если диаметр куска S_i достаточно мал - равной длине хорды, соединяющей концы дуги).

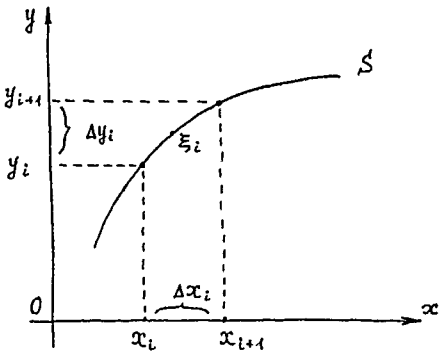


Рис. 2

Далее, естественно допустить и наличие такого интеграла по кривой S, который, в случае выпрямления S в отрезок $[a, b]$ оси Ox, давал бы обычный интеграл от функции $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Для определения такого интеграла нужно иметь интегральные суммы, которые бы при $\Delta y_i = 0$ давали сумму

$$\sum_i f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad .$$

Так как любая сумма вида

$$\sum_i f(\xi_i)\,(\Delta x_i + \alpha\,\Delta y_i) \qquad (3)$$

обладает подобным свойством (α - некоторое фиксированное число), то предел сумм (3) также следует считать интегралом от функции f по кривой S. (Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ получается "свой" интеграл !)

Соображения симметрии подсказывают рассмотреть суммы вида

$$\sum_i f(\xi_i)(\beta \Delta x_i + \Delta y_i) \qquad (4)$$

(β - фиксированное действительное число),которые приводят еще к одной серии интегралов от функции f по кривой S.

И это еще не все ! Можно в суммах (3) и (4) в качестве α и β брать некоторые (фиксированные для каждого нового интеграла) функции ....

Такая же ситуация имеет место и при определении интеграла от функции f по многомерной поверхности S. Так, при определении интеграла по двумерной поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, вместо площади $\mu(S_i)$ куска S_i поверхности S в сумме (I) можно взять умноженную на некоторый " коэффициент " площадь проекции S_i на какую-либо координатную плоскость или " комбинацию " площадей проекций S_i на различные координатные плоскости.

Все это говорит о том, что для определения криволинейного или поверхностного интеграла недостаточно указать функцию $f: S \to \mathbb{R}$ и область интегрирования S. Нужно, кроме того, знать еще дополнительную информацию о "способе" интегрирования, т.е. информацию о типе интегральных сумм, приводящих к нужному интегралу.

Классическая теория интегрирования не отрицает многообразие криволинейных и поверхностных интегралов. В ней изучаются два класса интегралов. К интегралам первого класса (" первого рода ") приводят интегральные суммы (I), определяемые заданием на поверхности S одной функции f. Для задания же интегра-

ла второго класса (" второго рода ") необходимо задание C_n^k — число сочетаний из n элементов по k — функций на k - поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$. Каждая функция приписывается определенной k - мерной " координатной плоскости " в $\mathbb{R}^n$ и входит в интегральную сумму как значение в средней точке $\xi_i \in S_i$, умноженное на"площадь" (со знаком) проекции S_i на соответствующую этой функции " координатную плоскость ". Например, в случае, когда S - кривая или двумерная поверхность в $\mathbb{R}^3$,для задания интеграла по S второго рода нужно знать три функции. Если эти функции — P, Q и R , то интегральные суммы, отвечающие криволинейному и поверхностному интегралам второго рода, имеют соответственно вид

$$\sum_i P(\xi_i)\cdot(\pm\Delta x_i) + Q(\xi_i)\cdot(\pm\Delta y_i) + R(\xi_i)(\pm\Delta z_i) \ ,$$

$$\sum_i P(\xi_i)\cdot(\pm\Delta y_i\,\Delta z_i) + Q(\xi_i)\cdot(\pm\Delta x_i\,\Delta z_i) + R(\xi_i)\cdot(\pm\Delta x_i\,\Delta y_i)\,.$$

Классическая теория, однако, не идет дальше введения и изучения двух типов интеграла. И хотя в теории устанавливается " связь " между интегралами обоих типов, это не более, чем математический рецепт - как из одной функции f интеграла первого рода построить C_n^k функций для интеграла второго рода (и наоборот). На вопрос - что же общего в понятиях интегралов двух типов (кроме поверхности S)? - теория не отвечает, как, впрочем, ничего не говорит она и о существовании интегралов третьего рода (а вдруг и такие есть ?!).

Вопросы эти не такие уж пустяковые. Во-первых, единый взгляд на " разные " интегралы позволяет глубже проникнуть в суть операции интегрирования. Во-вторых, для приложений теории интеграла чрезвычайно важно знать, " что " может, а " что " не

может " интегрировать " криволинейный или поверхностный интегралы.

Чтобы разобраться в этих вопросах, рассмотрим две физические задачи, приводящие к криволинейному и поверхностному интегралам, и попытаемся понять - что же " интегрируется " в этих задачах ?

<u>Работа силового поля.</u> Пусть каждой точке (x, y) некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$ поставлен в соответствие определенный вектор $\vec{F}(x, y) = (F^1(x, y), F^2(x, y)) \in \mathbb{R}^2$. (В этом случае говорят, что в области G задано векторное поле $\vec{F}$). Считая вектор $\vec{F}(x, y)$ силой, попытаемся найти работу силового поля $\vec{F}$ при перемещении точки вдоль некоторой гладкой кривой $\mathcal{AB}$ лежащей в области G .

Если поле $\vec{F}$ - постоянное (т.е., каждой точке $(x, y) \in G$ составляется один и тот же вектор $\vec{F}$), а кривая $\mathcal{AB}$ - это отрезок некоторой прямой, то соответствующая работа равна произведению величины силы $\vec{F}$ на длину пути и на косинус угла между силой и перемещением, т.е. работа равна скалярному произведению

$$\langle \vec{F}, \overrightarrow{\mathcal{AB}} \rangle .$$

В общем случае поле $\vec{F}$ - переменное, а путь из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ - криволинеен. Разобьем кривую $\mathcal{AB}$ на части точками

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n .$$

Считая поле $\vec{F}$ непрерывным (т.е. координатные функции F^1, $F^2 : G \to \mathbb{R}$ — непрерывные), можно заметить, что если точки $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ достаточно густо расположены на кривой $\mathcal{AB}$, то на каждом участке кривой $\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_{i+1}$ силы $\vec{F}(x, y)$

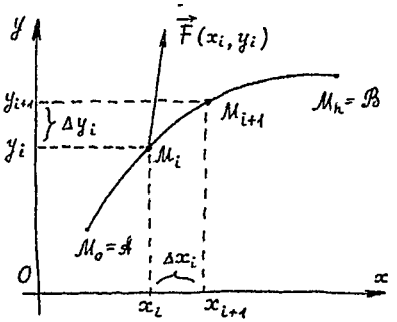


Рис. 3

мало отличаются от силы $\vec{F}(x_i, y_i)$, приложенной в точке $M_i = (x_i, y_i)$. Работа, отвечающая перемещению из точки M_i в точку M_{i+1} по прямолинейному отрезку $M_i M_{i+1}$ под действием постоянной силы $\vec{F}(x_i, y_i)$, равна

$$\langle \vec{F}(x_i, y_i), \overrightarrow{M_i M_{i+1}} \rangle = F^1(x_i, y_i)\Delta x_i + F^2(x_i, y_i)\Delta y_i , \qquad (5)$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. А сумма всех этих работ, т.е.

$$\sum_{i=0}^{n-1} F^1(x_i, y_i)\Delta x_i + F^2(x_i, y_i)\Delta y_i , \qquad (6)$$

дает некоторое приближенное значение работы поля $\vec{F}$ вдоль кривой AB, которое тем ближе к истинному значению работы, чем гуще мы выбираем точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$. Таким образом, можно сказать, что искомая работа есть предел интегральных сумм (6) при стремлении к нулю диаметра разбиения кривой.

<u>Поток через поверхность.</u> Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ имеется установившееся течение жидкости с известным полем скоростей $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^3$, и пусть S – некоторая гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$. Требуется определить объемный расход или поток жидкости через поверхность S, точнее, требуется определить, какой объем жидкости W протекает в единицу времени через поверхность S в сторону, указанную заданным на S непрерывным полем единичных нормалей ν.

Предположим сначала, что поле скоростей $\vec{v}$ постоянно и

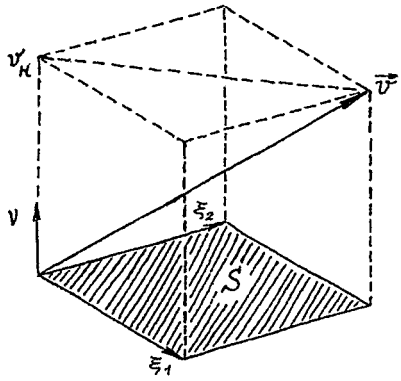


Рис. 4

ищется поток жидкости через параллелограмм S, натянутый на пару векторов ξ_1, ξ_2, в сторону, указываемую нормалью ν.

Тогда за единицу времени через площадку S в направлении ν пройдет объем жидкости W, равный произведению нормальной составляющей $v_н$ скорости $\vec{v}$ на площадь параллелограмма S, т.е.

$$W = v_н \cdot пл. S = \langle \vec{v}, \nu \rangle \cdot пл. S = \langle \vec{v}, \nu \rangle \cdot |\xi_1 \times \xi_2| . \qquad (7)$$

Выражение (7) подразумевает явное использование нормали ν, а чтобы получить формулу, не содержащую вектор ν явно, воспользуемся тем, что вектор $\xi_1 \times \xi_2$ ортогонален площадке S.

Так как вектор $\mu = \dfrac{\xi_1 \times \xi_2}{|\xi_1 \times \xi_2|}$ – единичный и ортогонален S, то либо $\mu = \nu$, либо $\mu = -\nu$. Вектор μ будет совпадать с ν, если тройка векторов (ν, ξ_1, ξ_2) – правая (т.е. если репер (ν, ξ_1, ξ_2) пространства $\mathbb{R}^3$ имеет ту же ориентацию, что и стандартный репер ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) пространства $\mathbb{R}^3$), и противоположен ν в противном случае. В соответствии с этим равенства (7) можно продолжить:

$$W = \left\langle \vec{v}, \pm \frac{\xi_1 \times \xi_2}{|\xi_1 \times \xi_2|} \right\rangle \cdot |\xi_1 \times \xi_2| = \pm \langle \vec{v}, \xi_1 \times \xi_2 \rangle = \pm (\vec{v}, \xi_1, \xi_2).$$

Таким образом, поток жидкости W через параллелограмм S, натянутый на векторы ξ_1 и ξ_2 в направлении норма –

ли ν , равен либо " плюс ", либо " минус " смешанному произведению векторов $\vec{v}$, ξ_1 и ξ_2 :

$$W = \pm (\vec{v}, \xi_1, \xi_2) \qquad (8)$$

(если тройка векторов (ν , ξ_1 , ξ_2) - правая, то в (8) берется знак " плюс "; в противном случае - берется знак " минус ").

Рассмотрим теперь общий случай, т.е. пусть $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^3$ - непрерывное поле скоростей жидкости, а S - гладкая поверхность в G с фиксированным на ней непрерывным полем нормалей $\nu : S \to \mathbb{R}^3$.

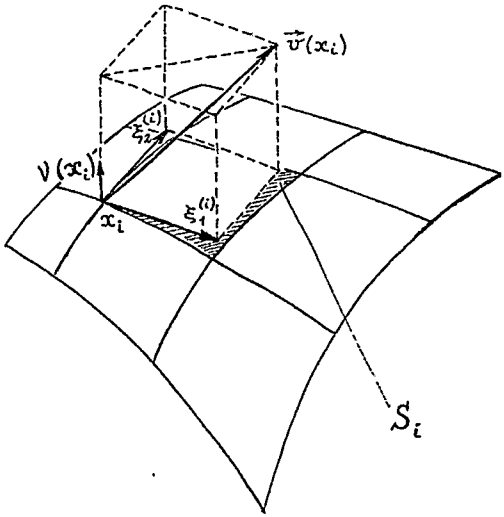


Рис. 5

Разобьем поверхность S на " четырех - угольные"куски достаточно малого диаметра. (Чтобы вообразить себе хотя бы одно подобное разбиение, можно считать, что S -график некоторой функции $z = f(x, y)$. Тогда нужное разбиение S получится, если рассечь S достаточно густым набором плоскостей,параллельных координатным плоскостям xOz и yOz . Пусть x_i - некоторая точка части S_i. В силу малости площадки S_i площадь ее приближенно равна площади проекции S_i на касательную плоскость к S в точке x_i ; эту проекцию можно считать параллелограммом, натянутым на некоторые векторы $\xi_1^{(i)}$ и $\xi_2^{(i)}$. Поскольку же поле $\vec{v} : G \to \mathbb{R}^3$ - непрерывно, скорости точек

куска S_i мало отличаются от скорости точки x_i, т.е. от $\vec{v}(x_i)$. Таким образом, объем жидкости, протекающей через малую площадку S_i, приближенно равен

$$W_i = \pm \left(\vec{v}(x_i),\ \xi_1^{(i)},\ \xi_2^{(i)} \right), \qquad (9)$$

где знак " + " или " − " выбирается в зависимости от того, является ли тройка векторов $\left(v(x_i),\ \xi_1^{(i)},\ \xi_2^{(i)} \right)$ правой или нет; значение (9) тем ближе к истинному значению потока жидкости через площадку S_i, чем меньше диаметр S_i.

Сумма всех W_i,

$$\sum_i W_i = \sum_i \pm \left(\vec{v}(x_i),\ \xi_1^{(i)},\ \xi_2^{(i)} \right), \qquad (10)$$

даст приближенное значение потока жидкости через поверхность S, которое будет тем ближе к истинному значению потока, чем на меньшие куски S_i поверхность S разбивается. То есть истинное значение потока жидкости через поверхность S есть предел сумм (10) при стремлении к нулю диаметра разбиения.

Мы рассмотрели две физические задачи, решения которых дают криволинейный и поверхностный интегралы, обозначаемые в классической теории интегрирования соответственно как

$$\int_S F^1(x,y)\,dx + F^2(x,y)\,dy \qquad (11)$$

и

$$\iint_S v^1(x,y,z)\,dy\,dz + v^2(x,y,z)\,dz\,dx + v^3(x,y,z)\,dx\,dy.$$

Попробуем теперь ответить на вопрос: что же " интегрируется " в рассмотренных задачах ?

Обе задачи связаны с рассмотрением векторных полей: в

первой задаче было задано силовое поле, а во второй - поле скоростей. Может быть мы " интегрируем " эти поля ? Нет, указание только лишь поля и области интегрирования не определяет интеграл.

Например, считая течение жидкости плоскопараллельным, можно свести " трехмерную " задачу о потоке жидкости " на плоскость ", т.е. искать площадь, протекаемую жидкостью в единицу времени через заданную кривую S в направлении плоского поля нормалей ν . Тогда нетрудно подсчитать: искомый поток будет равен пределу интегральных сумм

$$\sum_i \langle \vec{F}(x_i, y_i)\, \nu(x_i, y_i) \rangle \cdot \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

или, согласно классическим представлениям об интеграле, интегралу

$$\int_S \left(F^1(x,y)\, \nu^1(x,y) + F^2(x,y)\, \nu^2(x,y) \right) ds \quad ,$$

равному

$$\int_S F^1(x,y)\, dy + F^2(x,y)\, dx \quad . \qquad (12)$$

(Мы обозначили плоское поле скоростей через $\vec{F}$, так же, как обозначалось плоское силовое поле, с тем, чтобы подчеркнуть различную физическую интерпретацию одного и того же поля). Интегралы (11) и (12) различны, хотя поле $\vec{F}$ и кривая S — одни и те же.

Если не поле, то что же в таком случае " интегрируется " ? По видимому, без анализа структуры интегральных сумм, приводящих к криволинейному и поверхностному интегралам, нам не обойтись.

Работа (5) и поток (9), являющиеся слагаемыми интегральных сумм (6) и (10), это приближенные значения работы и потока на " малом " участке S_i. Более точные значения их мож-

но получить, если в свою очередь, участок S_i разбить на более мелкие куски $S_j^{(i)}$. Чем мельче куски $S_j^{(i)}$, тем ближе сумма работ или потоков на $S_j^{(i)}$ к истинному значению работы или потока на S_i. С физической точки зрения, имеется ненулевой, т.е. неточечный предел малости кусков $S_j^{(i)}$, другими словами, имеются самые элементарные куски ненулевых размеров, для которых еще можно говорить о работе или потоке, но дальнейшее уменьшение которых требует уточнения или вовсе пересмотра физической задачи (в действительности перемещаемая материальная точка имеет размеры ... ; мы только наблюдаем жидкость и поверхность без пустот, а на самом деле ...). Поэтому с точки зрения физики, можно считать, что имеются элементарные работы и элементарные потоки, сумма которых дает общую работу или поток на S_i. Поскольку в процессе прямого суммирования пришлось бы складывать " бесконечно " много чисел, что, естественно, неудобно, то, привлекая соображения непрерывности, мы считаем, что все элементарные работы и элементарные потоки на участке S_i примерно одинаковы и их сумма есть работа (5) или поток (9). В процессе же перехода к пределу " при стремлении к нулю диаметра разбиения ", слагаемые интегральных сумм (6) и (10) все более приближаются к элементарным потокам, и в итоге этого перехода происходит суммирование всех элементарных работ и элементарных потоков.

Так давайте же считать, что в первой задаче интегрируются суммируются все элементарные работы вдоль кривой S, а во второй - все элементарные потоки через поверхность S. Конечно, этому соглашению нужно придать " математическую форму " (что значит - " все " ?), но это уже - " дело техники ".

Каждая элементарная работа и каждый элементарный поток за-

висят от элементарного куска $S_j^{(i)}$ (хотя бы потому, что в разных частях множества S силовое поле и поле скоростей имеют, вообще говоря, разные значения). С математической точки зрения, элементарный кусок множества S - это множество " нулевого диаметра", т.е. точка. Поэтому естественно " перенумеровать " все элементарные работы и элементарные потоки точками множества S. Таким образом, знание всех элементарных работ и знание всех элементарных потоков равносильно заданию на S функции, сопоставляющей каждой точке множества S элементарной работы или элементарного потока " в этой точке ". Вот и будем считать, что

> в первой задаче интегрируется функция, определенная на кривой S и сопоставляющая каждой точке кривой элементарную работу силового поля " в этой точке ", а во второй - функция, сопоставляющая каждой точке поверхности S элементарный поток жидкости в этой точке.

Можно подобрать и подходящие названия для этих функций.

Функцию, интегрируемую в первой задаче, назовем функцией элементарных работ на кривой S, а во второй - функцией элементарных потоков через поверхность S.

В математике, однако, для этих функций предпочитают иные названия. Первую функцию называют дифференциальной формой работы на кривой S, а вторую - дифференциальной формой потока через поверхность S. Почему такие названия возможны - станет ясно, если мы формализуем наши представления об элементарной работе и элементарном потоке в " точке " и познакомимся с определением дифференциальной формы.

<u>Элементарная работа силового поля.</u> Как мы знаем из физики, элементарной работой силы $\vec{F}$ на элементарном перемещении $\Delta\vec{r}$ материальной точки называется число, равное скалярному

произведению векторов $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$. С точки же зрения математики, можно сказать, что элементарная работа силы $\vec{F}$ – это функция, определенная на всех возможных перемещениях материальной точки и сопоставляющая каждому такому перемещению $\Delta\vec{r}$ вполне определенное число $\langle \vec{F}, \Delta\vec{r} \rangle$.

Пусть материальная точка $\mathcal{M}(x,y)$ смещается вдоль гладкой кривой $\mathcal{S}$. Тогда перемещения $\Delta\vec{r}$ не могут быть совершенно произвольными. Например, для кривой $\mathcal{S}$, изображенной на рис. 6, все векторы перемещения $\Delta\vec{r}$ точки $\mathcal{M}$ заполняют заштрихованную часть плоскости. Если же рассматривать только элементарные (т.е. " бесконечно малые ") перемещения $\Delta\vec{r}$, то все они по своим направлениям близки к направлению касательной к $\mathcal{S}$ в точке $\mathcal{M}$ (напомним, кривая $\mathcal{S}$ предполагается гладкой). Касательное к $\mathcal{S}$ направление лучше других характеризует " геометрию " малых смещений точки $\mathcal{M}$ вдоль кривой $\mathcal{S}$, и мы можем дать следующее определение.

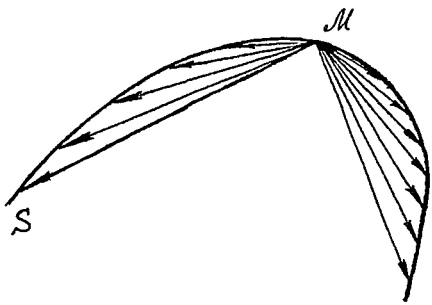


Рис. 6

> Элементарной работой поля $\vec{F}$ по перемещению точки $\mathcal{M}(x,y)$ вдоль кривой $\mathcal{S}$ называется функция $\xi \longmapsto \langle \vec{F}(x,y), \xi \rangle$, определенная на всех перемещениях ξ материальной точки вдоль касательной к кривой $\mathcal{S}$ в точке $\mathcal{M}$.

Очевидно, что функция $\xi \longmapsto \langle \vec{F}(x,y), \xi \rangle$ – линейная, т.е. для любых касательных к $\mathcal{S}$ в точке $\mathcal{M}(x,y)$ векторов

ξ , ξ_1 , ξ_2 и любого действительного числа c имеют место соотношения:

$$\langle \vec{F}(x,y), \xi_1+\xi_2 \rangle = \langle \vec{F}(x,y), \xi_1 \rangle + \langle \vec{F}(x,y), \xi_2 \rangle ,$$

$$\langle \vec{F}(x,y), c\cdot\xi \rangle = c\cdot\langle \vec{F}(x,y), \xi \rangle .$$

Таким образом, можно сказать, что элементарная работа поля $\vec{F}$ по перемещению точки $\mathcal{M}(x,y)$ вдоль кривой S — это линейная функция, определенная на касательном к S в точке $\mathcal{M}$ пространстве $T_{(x,y)} S$.

<u>Элементарный поток жидкости.</u> С физической точки зрения, элементарный поток - это объем жидкости, протекающей через элементарную площадку ΔS поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$ за единицу времени. Разумеется, поток функционально зависит от выбора площадки ΔS , но аналитическое описание этой зависимости затруднено из-за чрезмерного многообразия конфигураций различных площадок. Тем не менее можно дать и математическое определение потока жидкости, вполне согласующееся с физическим представлением о потоке.

Пусть $\mathcal{M}(x,y,z)$ - некоторая фиксированная точка поверхности S . Поскольку части ΔS поверхности S " бесконечно малы " (т.е. имеют достаточно малые диаметры), можно считать, что в пределах этих частей поле скростей $\vec{v}$ постоянно и имеет значение $\vec{v}(x,y,z)$. Далее, геометрию и, в частности, площади малых частей поверхности S , лежащих в окрестности точки $\mathcal{M}$, хорошо описывают проекции этих частей на касательную плоскость к S в точке $\mathcal{M}$. Следовательно, элементарный поток жидкости через поверхность S в окрестности точки $\mathcal{M}$ естественно отождествить с потоком жидкости через элементарную площадку

касательной плоскости к S в точке M и считать при этом, что жидкость имеет постоянное поле скоростей $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$. Наконец, с математической точки зрения, для характеристики любого потока достаточно знать поток жидкости через произвольный параллелограмм, лежащий в касательной плоскости, ибо поток жидкости через плоскую площадку ΔS иной конфигурации можно определить, например, как предел потоков через многоугольные плоские области, аппроксимирующие площадку ΔS. Таким образом, мы приходим к следующему математическому определению элементарного потока.

> Элементарным потоком жидкости в точке $M(x, y, z)$ через поверхность S в направлении нормали $\nu(x, y, z)$ называется функция
>
> $$W: (\xi_1, \xi_2) \longmapsto \pm(\vec{v}(x, y, z), \xi_1, \xi_2),$$
>
> определенная на множестве всех упорядоченных пар векторов, касательных к S в точке M, и принимающая значение " плюс " смешанное произведение векторов $\vec{v}(x, y, z)$, ξ_1 и ξ_2, если тройка $(\nu(x, y, z), \xi_1, \xi_2)$ – правая, и значение " минус " смешанное произведение векторов $\vec{v}(x, y, z)$, ξ_1 и ξ_2, если тройка $(\nu(x, y, z), \xi_1, \xi_2)$ – левая.

Из свойств смешанного произведения следует, что элементарный поток W в точке (x, y, z) через поверхность S в направлении нормали $\nu(x, y, z)$ – это билинейная и антисимметрическая функция из прямого произведения $T_{(x,y,z)}S \times T_{(x,y,z)}S$ касательных к S в точке (x, y, z) пространств $T_{(x,y,z)}S$ в $\mathbb{R}$. В самом деле, для произвольных векторов ξ_1, ξ_1', ξ_1'', ξ_2, ξ_2', ξ_2'' из $T_{(x,y,z)}S$ и любого действительного чис-

ла c имеют место соотношения:

$$W(\xi_1' + \xi_1'', \xi_2) = W(\xi_1', \xi_2) + W(\xi_1'', \xi_2),$$

$$W(c \cdot \xi_1, \xi_2) = c \cdot W(\xi_1, \xi_2),$$

$$W(\xi_1, \xi_2' + \xi_2'') = W(\xi_1, \xi_2') + W(\xi_1, \xi_2''),$$

$$W(\xi_1, c \cdot \xi_2) = c \cdot W(\xi_1, \xi_2),$$

$$W(\xi_1, \xi_2) = -W(\xi_2, \xi_1).$$

Итак, понятия " элементарная работа " и " элементарный поток " имеют конкретное математическое содержание, и мы можем уточнить определения функции элементарных работ и функции элементарных потоков.

> Функцией элементарных работ на кривой S называется функция, определенная на S и сопоставляющая каждой точке $(x, y) \in S$ линейное отображение из $T_{(x,y)}S$ в $\mathbb{R}$ – элементарную работу " в точке " (x, y). Функцией же элементарных потоков через поверхность S называется функция, сопоставляющая каждой точке $(x, y, z) \in S$ билинейное антисимметрическое отображение из $T_{(x,y,z)}S \times T_{(x,y,z)}S$ в $\mathbb{R}$ – элементарный поток " в точке " (x, y, z).

Поскольку

> дифференциальной формой ω степени p на k-поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ называется функция, сопоставляющая каждой точке $x \in S$ полилинейное антисимметрическое отображение

$$\omega(x): (T_x S)^p := \underbrace{T_x S \times \ldots \times T_x S}_{p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

(уточним, функция $\omega(x): (T_x S)^p \to \mathbb{R}$ называется полилинейной, если для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ и $\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_p$ функция от $\xi \in T_x S$,равная $\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_p)$, линейна, и называется антисимметрической, если для каждого набора векторов $\xi_1, \ldots, \xi_p \in T_x S$

$$\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_p) = -\omega(x)(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_p)),$$

то мы видим, что с математической точки зрения, функция элементарных работ - это дифференциальная форма первой степени (на 1 - поверхности, т.е. кривой S), а функция элементарных потоков - это дифференциальная форма второй степени (на 2 - поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$).

При рассмотрении физических задач мы считали, что решение их связано с операцией интегрирования. Но так ли это на самом деле ? Не противоречит ли выполняемое в этих задачах " интегрирование " дифференциальных форм прежнему пониманию операции интегрирования ?

Вспомним, для определения обычного (по отрезку) и кратного интеграла нужно было знать " область интегрирования " и функцию, заданную на этой " области ". Функция, каждое разбиение " области " и выбор " средних " точек определяли некоторый набор чисел, сумму которых мы называли " интегральной ". Предел всех интегральных сумм " при стремлении к нулю диаметра разбиения " и считался интегралом от заданной функции по заданной " области".

В рассмотренных физических задачах на " области интегрирования " S была задана некоторая функция - дифференциальная

форма (в первой задаче - функция элементарных работ на кривой S , а во второй - функция элементарных потоков через поверхность S). Эта функция (т.е. дифференциальная форма), а также каждое разбиение S на куски S_i и выбор " средних " точек позволяли вычислить числа W_i (вида (5) в первой задаче и вида (9) - во второй). Сумма чисел W_i , $\sum_i W_i$, являлась приближенным значением искомой физической величины. Истинное же значение этой величины давал предел сумм $\sum_i W_i$ " при стремлении к нулю диаметра разбиения ".

Специфичность предельного перехода, характерного для интеграла, не оставляет никаких сомнений - конечно же, рассмотренные физические задачи связаны с интегрированием (дифференциальных форм).

Итак, мы можем подвести итог.

> Для решения даже простейших физических задач приходится интегрировать довольно абстрактные функции - дифференциальные формы. Таким образом, с точки зрения физики необходимо иметь теорию интегрирования дифференциальных форм.

Исчисление дифференциальных форм необходимо не только для физики (" Гамильтонову механику нельзя понять без дифференциальных форм ". [I] , с. I38), это исчисление является одним из полезнейших аналитических методов в дифференциальной геометрии и во многих других разделах современного анализа. Но пока для нас главное, решающее значение дифференциальных форм состоит в том, что они позволяют углубить наши представления об обычном и кратном интеграле и построить теорию криволинейного и поверхностного интеграла.

" Любопытно",- снова не упустит возможности задать вопрос

настойчивый читатель,-" как еще можно " углубить наши представления " об интеграле ? Неужели окажется, что интеграл - это вовсе не предел интегральных сумм ? "

Нет, - спешим успокоить читателя, - интеграл по-прежнему останется пределом интегральных сумм, и интегральные суммы будут иметь в точности тот же вид, что и прежде. Вот только, оказывается, для обычного и кратного интеграла можно, а для криволинейного и поверхностного интеграла только и следует считать, что интегральные суммы определяются не " интегрируемой " функцией f , а некоторой дифференциальной формой. А поэтому и предел интегральных сумм для обычного и кратного интегрирования можно, а для криволинейного и поверхностного интегрирования только и следует считать интегралом от дифференциальной формы.

Сказанное относительно криволинейного и поверхностного интеграла понятно. В самом деле, мы уже видели выше, что при определении таких интегралов недостаточно указать область интегрирования и обычную функцию; нужно задавать, помимо области интегрирования, довольно абстрактную функцию (типа функции элементарных работ или функции элементарных потоков) - дифференциальную форму, позволяющую судить о виде интегральных сумм, участвующих в определении интеграла. В связи с этим и сам интеграл, конечно же, следует считать интегралом от дифференциальной формы. А вот сказанное относительно обычного и кратного интеграла нуждается в объяснении. К этому объяснению мы и приступим, но предварительно уточним наши представления о дифференциале функции (это необходимо сделать, поскольку в подавляющем числе учебников дифференциал определяется как некоторая величина, хотя величина считается понятием неопределяемым), и, вместе с тем, " оживим " математическими примерами понятие диффе-

ренциальной формы.

§ 4. Дифференциал функции и дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$

Начнем наши рассмотрения с уточнения определения дифференциала от обычной числовой функции. В основе этого определения лежит понятие дифференцируемой функции.

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ - функция, определенная на множестве X, и $x_0 \in X$ - предельная точка этого множества. Функция f называется дифференцируемой в точке x_0, если найдется такое число $A \in \mathbb{R}$, что для всех $h \in E_{x_0} := \{ h \in \mathbb{R} \mid x_0 + h \in X \}$ выполняется равенство

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = A \cdot h + \alpha(x_0; h), \qquad (1)$$

где $\alpha(x_0; h)$ - функция, определенная на множестве E_{x_0}, такая, что

$$\lim_{E_{x_0} \ni h \to 0} \frac{\alpha(x_0; h)}{h} = 0 \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует единственность числа A, $A = f'(x_0)$, и линейную функцию $y = A \cdot h$, т.е. функцию $h \mapsto A \cdot h$, называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают через $df(x_0)$. Таким образом, по определению,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0) \cdot h. \qquad (3)$$

Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ - дифференцируемая на множестве X функция (т.е. функция, дифференцируемая в каждой точке множества X). Тогда каждой точке $x \in X$ отвечает линейная функция

$$df(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad df(x)(h) = f'(x) \cdot h \quad ,$$

– дифференциал функции f в точке x .

Отображение $x \longmapsto df(x)$, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ дифференциал $df(x)$ функции f в точке x , называется дифференциалом функции f (на множестве X) и обозначается df .

Если теперь обратиться к определению дифференциальной формы, которое было приведено выше, то мы увидим, что дифференциал функции df очень похож на дифференциальную форму первой степени на 1 - поверхности $S = X \subset \mathbb{R}$. Он в точности ока - жется такой формой, если мы примем, что касательное пространство $T_x X$ к множеству $X \subset \mathbb{R}$ в точке $x \in X$ - это вся числовая прямая $\mathbb{R}$, т.е. $T_x X := \mathbb{R}$. Последнее соглашение вполне допустимо, и потому примем его. Тогда мы можем заключить, что

> дифференциал df дифференцируемой на множестве $X \subset \mathbb{R}$ функции f является дифференциальной формой первой степени на X .

Задержим еще немного свое внимание на определении дифференциальной формы. Поскольку значением дифференциальной формы в точке $x \in S$ является линейная функция, а свойство линейности сохраняется при суммировании линейных функций и при умножении линейной функции на число, на множестве всех дифференциальных k - форм можно ввести операцию суммы k- форм и операцию умножения k - формы на произвольную функцию $f : S \to \mathbb{R}$ Для этого достаточно положить

$$(\omega + \eta)(x) := \omega(x) + \eta(x)$$

и

$$(f \cdot \omega)(x) := f(x) \cdot \omega(x) .$$

Над дифференциальными формами можно выполнять и некоторые другие операции, но нам они пока не потребуются.

Вернемся к рассмотрению функций и дифференциальных форм на числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$.

Из всей совокупности дифференцируемых на множестве X функций особо выделим тождественную функцию, $f(x) = x$. Дифференциал df этой функции обладает тем замечательным свойством, что

> произвольная дифференциальная 1 – форма ω на $X \subset \mathbb{R}$ может быть представлена в виде
>
> $$\omega = f \cdot dx \quad , \qquad (4)$$
>
> где $f : X \to \mathbb{R}$ – некоторая, однозначно определяемая формой ω функция.

Покажем это, но предварительно заметим, что $dx(x_0)$, согласно (3), действует по формуле

$$dx(x_0)(h) = h \quad . \qquad (5)$$

(Последнее равенство показывает, что в каждой точке $x_0 \in X$: действие дифференциала $dx(x_0)$ – одно и то же, а потому позволим себе сокращать обозначение $dx(x_0)$ до dx.).

Итак, пусть ω – произвольная дифференциальная форма первой степени на множестве $X \subset \mathbb{R}$. Тогда в каждой точке $x \in X$ функция $\omega(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – линейная и, следовательно, найдется, притом единственное число $f(x)$ (зависящее, вообще говоря от $x \in X$), такое, что при любом $h \in \mathbb{R}$

$$\omega(x)(h) = f(x) \cdot h \quad . \qquad (6)$$

Согласно равенству (5), последнему соотношению можно придать следующий вид:

$$\omega(x)(h) = (f(x)\,dx)(h)$$

Так как h — произвольное число, то отсюда следует, что линейные функции $\omega(x)$ и $f(x)dx$ совпадают в каждой точке $x \in X$. Но отсюда, в свою очередь, заключаем, что дифференциальная форма ω совпадает с дифференциальной формой $f \cdot dx$ (здесь $f : X \to \mathbb{R}$ - функция, сопоставляющая каждой точке x число $f(x)$, определяемое соотношением (6)).

Обратимся теперь к функциям многих переменных. В этом случае в основе определения дифференциала также лежит понятие дифференцируемой функции.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, называется дифференцируемой в точке $x_0 \in X$, предельной для множества X, если найдется такая линейная функция $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что для всех $h \in E_{x_0} := \{ h \in \mathbb{R}^n \mid x_0 + h \in X \}$ имеет место равенство

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \ell(h) + \alpha(x_0; h), \qquad (7)$$

где $\alpha(x_0; h)$ - функция, определенная на множестве E_{x_0}, такая, что

$$\lim_{E_{x_0} \ni h \to 0} \frac{\alpha(x_0; h)}{|h|} = 0 . \qquad (8)$$

Поскольку всякая линейная функция $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ может быть представлена в виде $\ell(h) = A_1 h^1 + \ldots + A_n h^n$, причем числа $A_1, \ldots, A_n$ однозначно определяются функцией ℓ (покажите, что $A_1 = \ell(e_1), \ldots, A_n = \ell(e_n)$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ — стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$), и из соотношений (7) и (8) следует, что

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \ldots, A_n = \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0),$$

то заключаем, дифференцируемая в точке x_0 функция f имеет

только одну линейную функцию $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую соотношению (7). Именно эту функцию и называют дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначают $df(x_0)$. Таким образом, по определению

$$df(x_0)(h) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)h^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0)h^n$$

для всех $h = (h^1, \ldots, h^n) \in \mathbb{R}^n$.

Если X - область или замыкание некоторой области в $\mathbb{R}^n$, то естественно допустить, что касательным пространством $T_x X$ к множеству X в точке $x \in X$ является само пространство $\mathbb{R}^n$. Поэтому, определяя дифференциал df дифференцируемой на X функции $f : X \to \mathbb{R}$ как соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in X$ линейную функцию $df(x) : T_x X := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, мы видим, что

> дифференциал df дифференцируемой функции $f : X \to \mathbb{R}$, определенной на области или замыкании некоторой области в $\mathbb{R}^n$, является дифференциальной формой первой степени на X.

Из всей совокупности дифференцируемых на $X \subset \mathbb{R}^n$ функций, где X — область или замыкание некоторой области в $\mathbb{R}^n$, выделяют функции $\pi^1, \ldots, \pi^n$, задаваемые равенствами $\pi^i(x) = x^i$, $i = 1, \ldots, n$ (т.е. функция π^i сопоставляет точке $x = (x^1, \ldots, x^n)$ ее i-ую координату x^i). Дифференциалы $dx^1, \ldots, dx^n$ (именно так принято обозначать дифференциалы $d\pi^1, \ldots, d\pi^n$) этих функций обладают тем свойством, что

> для любой дифференциальной 1- формы на X существуют, притом единственные функции $f_1, f_2, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, такие, что

$$\omega = f_1\, dx^1 + \ldots + f_n\, dx^n \quad .$$

(Докажите это).

Приведем теперь примеры дифференциальных форм степени выше, чем 1 .

Рассмотрим сначала плоский случай. Пусть $X \subset \mathbb{R}^2$ – область или замыкание некоторой области на плоскости $\mathbb{R}^2$. В этом случае, как мы уже договорились выше, $T_x X = \mathbb{R}^n$, и поэтому значение дифференциальной 2 – формы в точке $x \in X$ должно быть билинейным кососимметрическим отображением из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$.

Пусть $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – функция, принимающая на каждой упорядоченной паре (a, b) значение, равное либо " плюс ", либо " минус " площади параллелограмма, натянутого на векторы a и b , при этом значение площади берется со знаком "плюс", если ориентация пары (a, b) совпадает с ориентацией стандартного базиса (e_1, e_2) плоскости $\mathbb{R}^2$, и со знаком "минус", если ориентации (a, b) и (e_1, e_2) – противоположны. (Функцию T называют ориентированной площадью на плоскости.)

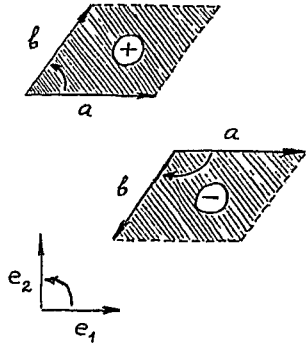
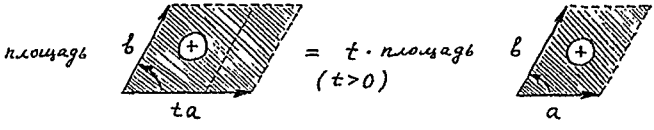


Рис. 7

Из определения T сразу видно, что функция T – антисимметрическая, т.е. $T(a, b) = -T(b, a)$. Легко проверить также, что $T(ta, b) = t \cdot T(a, b)$



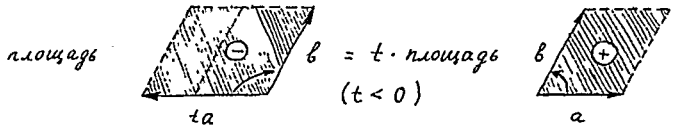


Рис. 8

(при любом $t \in \mathbb{R}$) и $T(a+b, c) = T(a, c) + T(b, c)$.
Геометрическое доказательство этих фактов приведено на рис.8 и 9, но их, разумеется,

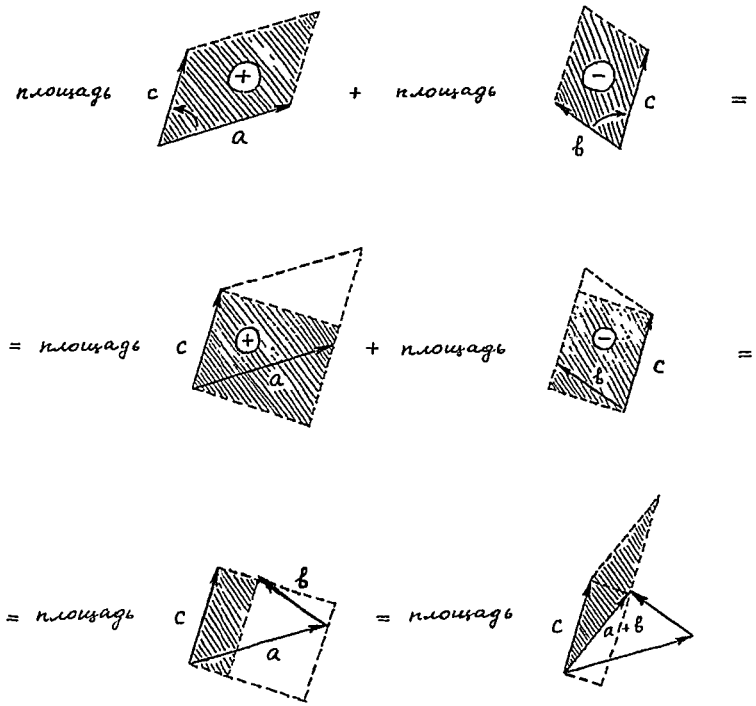


Рис. 9

легко установить и исходя из аналитической формулы для ориентированной площади параллелограмма

$$T(a,b) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} . \qquad (9)$$

Таким образом, ориентированная площадь T на плоскости $\mathbb{R}^2$ является билинейным кососимметрическим отображением из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$.

Сопоставим теперь каждой точке $x \in X$ ориентированную площадь T в касательном к x пространстве $T_x X = \mathbb{R}^2$. Определенная таким образом дифференциальная 2 - форма на X называется дифференциальной формой площади на X (отвечающей стандартной ориентации $\mathbb{R}^2$ и стандартному скалярному произведению в $\mathbb{R}^2$), обозначим эту форму через dT .

В теории дифференциальных форм показывается, что любая дифференциальная 2 - форма на $X \subset \mathbb{R}^2$ пропорциональна форме dT , т.е. для каждой дифференциальной 2 - формы ω на X имеется, притом единственная функция $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\omega = f \cdot dT . \qquad (10)$$

Ненулевых дифференциальных форм ω степени $\geqslant 3$ на множестве $X \subset \mathbb{R}^2$ - нет, и это легко можно вывести из требования антисимметричности функции $\omega(x) : \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ldots}_{p \geqslant 3} \to \mathbb{R}$.

Пусть X - область или замыкание области в пространстве $\mathbb{R}^3$. В полной аналогии с двумерным случаем, сопоставим каждой точке $x \in X$ ориентированный объем $V : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ в касательном пространстве $T_x X = \mathbb{R}^3$, определяемый соотношением

$$V(a,b,c) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} .$$

Построенная таким образом дифференциальная 3 - форма называется дифференциальной формой объема на $X \subset \mathbb{R}^3$ (отвечающей стандартной ориентации в $\mathbb{R}^3$ и стандартному скалярному произведению); мы будем обозначать эту форму через dV . Оказывается, всякая другая дифференциальная 3- форма ω на X пропорциональна форме dV ,точнее, для любой дифференциальной 3 - формы ω на $X \subset \mathbb{R}^3$ существует, притом единственная функция $f : X \to \mathbb{R}$, такая, что

$$\omega = f \cdot dV \quad . \qquad (11)$$

Также, как и в плоском случае, из условия антисимметричности значений дифференциальной формы в точке $x \in X$ следует, что все дифференциальные формы на $X \subset \mathbb{R}^3$ степени $p \geqslant 4$ — нулевые.

Возвратимся теперь к интегралам, и рассмотрим, сначала, обычный интеграл по отрезку $[a, b]$.

Согласно равенству (5), имеем

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = f(\xi_i) \cdot dx(x_{i+1} - x_i) = \big(f(\xi_i)\, dx\big)(x_{i+1} - x_i) \ .$$

Следовательно, слагаемое $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ интегральной суммы

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

является значением линейной функции $f(\xi_i)\, dx$,вычисленным на векторе $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \in T_{\xi_i}[a, b] = \mathbb{R}$. Иначе говоря, одна и та же сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(\xi_i)\, dx\big)(x_{i+1} - x_i) \qquad (12)$$

является интегральной не только для функции f , но и для дифференциальной формы $f\, dx$, заданной на отрезке $[a, b]$.

С другой стороны, как мы уже видели выше (см. соотношение (4)), любая дифференциальная форма первой степени на $[a, b]$ может быть представлена в виде $f\,dx$. Поэтому, определяя интеграл от формы $f\,dx$ как предел (" при стремлении к нулю диаметра разбиения отрезка ") интегральных сумм (12), мы фактически определяем интеграл от произвольной дифференциальной формы на отрезке $[a, b]$ (отметим, что любая дифференциальная форма на $[a, b]$ степени $p \geqslant 2$ – нулевая). Это приводит нас к выводу о том, что

> изучение теории интегрирования дифференциальных форм по отрезкам не требует введения каких-то новых интегральных сумм или вычисления какого-то нового предела – понятия интегральной суммы и предела интегральных сумм сохраняют прежний смысл.

Точно такой же вывод можно сделать и относительно теории интегрирования дифференциальных форм по многомерным областям. Рассмотрим, к примеру, двойной интеграл по двумерному промежутку $X = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$.

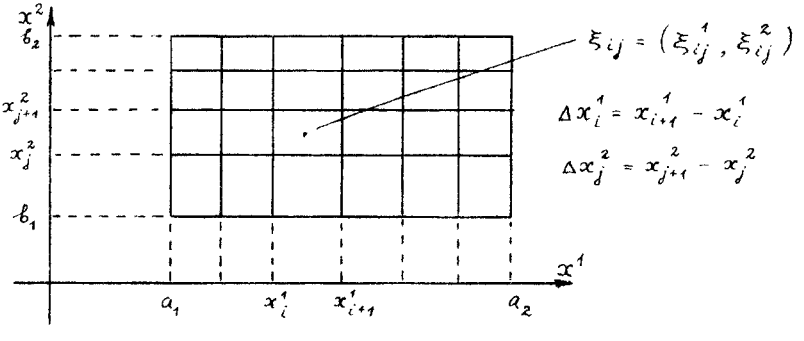


Рис. 10

слагаемое $f(\xi_{ij})\,\Delta x^1_i\,\Delta x^2_j$ интегральной суммы

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij})\,\Delta x_i^1\,\Delta x_j^2$$

можно считать значением билинейной кососимметрической функции $(f\,dT)(\xi_{ij}) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ на упорядоченной паре $(\Delta x_i^1 e_1,\ \Delta x_j^2 e_2)$ векторов из $T_{\xi_{ij}}X = \mathbb{R}^2$ (e_1 и e_2 – векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^2$). В самом деле, согласно равенству (9) и определению дифференциальной формы площади

$$f(\xi_{ij})\Delta x_i^1\,\Delta x_j^2 = f(\xi_{ij})\begin{vmatrix} \Delta x_i^1 & 0 \\ 0 & \Delta x_j^2 \end{vmatrix} = f(\xi_{ij})\,T(\Delta x_i^1 e_1,\ \Delta x_j^2 e_2) =$$

$$= f(\xi_{ij})\Big(dT(\xi_{ij})(\Delta x_i^1 e_1,\ \Delta x_j^2 e_2)\Big) = \Big(f(\xi_{ij})\,dT(\xi_{ij})\Big)(\Delta x_i^1 e_1,\ \Delta x_j^2 e_2) =$$

$$= \Big(f\,dT\Big)(\xi_{ij})(\Delta x_i^1 e_1,\ \Delta x_j^2 e_2)\,.$$

Таким образом, сумма

$$\sum_{i,j} f(\xi_{ij})\Delta x_i^1\,\Delta x_j^2 = \sum_{i,j}\big(f\,dT\big)(\xi_{ij})\big(\Delta x_i^1 e_1,\ \Delta x_j^2 e_2\big) \qquad (13)$$

является интегральной не только для функции $f : X \to \mathbb{R}$, но и для дифференциальной формы $f\,dT$ второй степени, заданной на двумерном промежутке X .

С другой стороны, согласно соотношению (10), любая дифференциальная 2 - форма на X может быть представлена в виде $f\,dT$. Поэтому теория интегрирования дифференциальных форм по двумерным промежуткам исчерпывается изучением свойств интегралов от форм вида $f\,dT$: дифференциальные формы на X степени $p \geqslant 3$ – нулевые, а интеграл по X от формы первой степени, по определению, считается равным нулю. Так что вывод, сделанный выше относительно интегрирования дифференциальных форм по отрезкам, остается в силе и для дифференциальных форм на двумерной области.

Между прочим, отождествление двойного интеграла от функции с интегралом от дифференциальной формы $f\,dT$ подсказывает смысл операции внешнего произведения $\wedge$ дифференциалов, присутствующей в обозначении (5) § 2 двойного интеграла. А именно, внешнее произведение $dx \wedge dy$ дифференциальных форм длины $dx = dx^1$ и $dy = dx^2$ дает дифференциальную форму площади dT, т.е.

$$(dx \wedge dy)(x_0, y_0)(a, b) = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dx\,(x_0, y_0)(a) & dy\,(x_0, y_0)(a) \\ dx\,(x_0, y_0)(b) & dy\,(x_0, y_0)(b) \end{vmatrix} .$$

здесь $(x_0, y_0) \in X$ - фиксированная точка двумерного промежутка, a и b - произвольные векторы пространства $T_{(x_0, y_0)}X = \mathbb{R}^2$. (Угадайте формулы для произведения $dx \wedge dy \wedge dz$ дифференциальных форм dx, dy и dz в $\mathbb{R}^3$ и произведения $dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ дифференциальных форм $dx^1, \ldots, dx^n$ в $\mathbb{R}^n$.)

И т а к , сделаем окончательные выводы.

I. Все интегралы, которые мы изучали прежде - обычный интеграл по отрезку и кратные интегралы по многомерным областям - являются интегралами от дифференциальных форм. Конечно, раньше, при изучении интегралов, понятием " дифференциальная форма " мы не пользовались, поскольку оно использует довольно много вспомогательных понятий и идей линейной алгебры и геометрии (векторное пространство, скалярное произведение, ориентация, линейное отображение и др.) - не все из них в то время нам были известны. Тем не менее, как мы видим теперь, мы строили и явно использовали на практике именно теорию интегрирования форм, " спрятав " ее в название " интегрирование функций ". Это было возможно, поскольку имеется естественное взаимно однозначное соответствие

между дифференциальными формами на области $X \subset \mathbb{R}^n$ и функциями $f: X \to \mathbb{R}$ ($f(x)\,dx \longleftrightarrow f(x)$, $f(x,y)\,dx \wedge dy \longleftrightarrow f(x,y)$, $f(x,y,z)\,dx \wedge dy \wedge dz \longleftrightarrow f(x,y,z)$ и т.д.). Однако теперь, когда мы переходим к криволинейному и поверхностному интегрированию, оставаться на позиции " интегрирования функций " нельзя, ибо даже небольшая деформация отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в криволинейный"отрезок" на плоскости $\mathbb{R}^2$ делает задачу интегрирования функции неопределенной.

2. В теории интегрирования дифференциальных форм нет никаких непредвиденных или неестественных конструкций. Вся сложность теории заключается в некоторой неожиданной абстрактности таких " реальных объектов " как дифференциал функции, функции элементарных работ и потоков, дифференциальная форма площади и дифференциальная форма объема, т.е. трудность кроется в определении дифференциальной формы. Интеграл же от дифференциальной формы определяется по обычной схеме, как предел интегральных сумм.

3. Классическая теория криволинейного и поверхностного интегрирования пытается не использовать понятие дифференциальной формы, однако " спрятать " интегрирование форм под другое, " более простое " название ей не удается, и потому она молчанием обходит вопрос - интегрирование каких объектов теория изучает ? Это, в свою очередь, вызывает вопросы о рамках применимости теории и о практической ее полезности.

4. Как бы мы не определяли криволинейный и поверхностный интеграл, он по сути своей будет интегралом от дифференциальной формы. Так стоит ли подыскивать синонимы ?

" Слова - до времени - дают собой играть, свою скрывая власть, но расщепленный атом содрогнется - от зависти, - когда терпение это оборвется. Хоть

можем долго мы еще бездумно жить, и мелочность свою в Слова рядить, и мелкостью своей Словам вредить, и говорить, и городить. Им - некуда спешить, у Слов - в отличие от нас - в запасе

Вечность".

(Журавлева З.Е. Роман с героем конгруэнтно роман с собой: Роман. - Л.: Советский писатель,1988. С.3.)

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики.- М.: Наука, 1979. - 432 с.
2. Булдырев В.С.,Павлов Б.С. Линейная алгебра и функции многих переменных. - Л.: Изд-во Ленингр.ун-та, 1985. - 496 с.
3. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. - М.: Наука, 1965. - 424 с.
4. Бурбаки Н. Алгебра : Алгебраические структуры. Линейная и полинейная алгебра. - М.: Физматгиз,1962. - 516 с.
5. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.II. - М.: Наука,1984.-640 с.
6. Картан А. Дифференциальное исчисление.Дифференциальные формы.- М.: Мир, 1971. - 392 с.
7. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. - М.: Мир, 1967. - 164 с.
8. Шутц Б. Геометрические методы математической физики.- М.: Мир, 1984. - 304 с.

Содержание

Учебное издание

Усс Анатолий Терентьевич

От интегрирования функций к интегрированию дифференциальных форм

Учебно – методическое пособие

Рецензенты: А.А. Килбас, доктор физико – математических наук, профессор кафедры теории функций Белгосуниверситета;
В.В. Кашевский, кандидат физико – математических наук, доцент.

Редактор: Т.И. Шило

Ответственный за выпуск: В.М. Крюков

Полиграф. лицензия ЛП № 260 от 30.04.98.
Подписано в печать 2.07.98.
Формат 60×84/16.
Бумага Ксерокс.
Усл. печ. л. 2,9. Уч. – изд. л. 1,7.
Тираж 100 экз.
Заказ №375.

Отпечатано на ротапринте Брестского госуниверситета.
224665, Брест, Советская 8.