МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Т. Усс, Т.И. Шило

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Учебно – методическое пособие

Брест 1998

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Т. Усс, Т.И. Шило

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Учебно – методическое пособие

Брест 1998

УДК 517.13 (076)
ББК 22.161 я

В пособии рассматривается один из начальных разделов курса математического анализа – теория числовых последовательностей и рядов.

Пособие состоит из шести параграфов: 1. Последовательности. Предел числовой последовательности. 2. Свойства сходящихся последовательностей. 3.Существование предела последовательности. 4. Подпоследовательность. Частичный предел последовательности. 5. Начальные сведения о рядах. 6. Примеры и задачи.

В первых пяти параграфах прямым объяснением, а также контрольными вопросами и упражнениями разъясняются узловые понятия и факты рассматриваемого раздела курса математического анализа. В последнем (шестом) параграфе приводятся примеры решений задач и предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено студентам университетов, обучающимся по специальности «Математика». Может быть полезно студентам факультетов и вузов с расширенной программой по математике, а также преподавателям вузов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты:
доктор физ – мат. наук профессор, зав. кафедрой высшей математики Белгосуниверситета В.Н. Русак;
кафедра математического анализа Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка.

Редактор: Усс А.Т.
Усс А. Т., Шило Т. И. Числовые последовательности и ряды. Учебно – методическое пособие. Брест, 1998. – 76 с.

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ СТУДЕНТА

В пособии рассматривается теория предела функций, области определения которых весьма специфичны – это множество натуральных чисел. Пройдет некоторое время и обсуждаемый в пособии материал будет представляться вам очень простым. Однако, чтобы это стало именно так, нужно немало потрудиться.

Как же работать с пособием?

В начале первых пяти его параграфов указываются страницы учебника В.А. Зорича (Математический анализ, ч.1. – М.: Наука, 1981), на которых излагается материал, обсуждаемый в пособии. Если этот материал вам неизвестен, то ознакомьтесь с ним по учебнику. Чтобы углубить свои представления об этом материале, ответьте на контрольные вопросы и решите упражнения из пособия. При этом, возможно, вам придется обратиться к учебнику. Если, читая учебник, вы обнаружите неясное место – перейдите к пособию, обдумайте вопросы и упражнения по неясной теме и снова обратитесь к учебнику. Проработав таким образом материал учебника, попробуйте применить свои знания для решения задач из § 6 пособия.

Желаем успеха!

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Мы учим студентов, но каждый из них учится самостоятельно. И разумеется нам, преподавателям, ясно, что работа, т.е. учеба студента заключается не только в конспектировании лекций, просмотре учебников и решении типовых задач. Главное – студент должен обдумать и осознанно принять, т.е. усвоить изучаемый материал. Размышления, сомнения и выбор своего личного мнения о предмете рассмотрения – будь то определение, задача, теорема, текст учебника, конспекта или высказывание преподавателя – вот где должно находиться основное приложение усилий студента, стимулируемых и контролируемых преподавателем.

Цель пособия – помощь начинающему студенту разобраться в одной из первых тем курса анализа. Полагаем, что рассматриваемого, весьма незначительного фрагмента курса математического анализа достаточно, чтобы дать возможность студенту получить первые уроки по серьезной самостоятельной работе, заставить его задуматься и научиться вчитываться и вслушиваться в математические тексты.

В работе над пособием мы воспользовались замечаниями и пожеланиями, высказанными доктором физико-математических наук, профессором кафедры теории функций Белгосуниверситета А.А. Килбасом и профессором Гомельского госуниверситета В.И. Мироненко. Выражаем им искреннюю признательность. Мы благодарны нашим рецензентам, доктору физико-математических наук, профессору, зав. кафедрой высшей математики Белгосуниверситета В.Н. Русаку и доценту, зав. кафедрой математического анализа Белорусского педагогического университета Н.Т. Стельмашуку; их замечания способствовали улучшению предлагаемого учебного пособия. За прекрасное оформление рукописного варианта пособия отдельная наша благодарность А.И. Басику.

Авторы

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Понятие последовательности – одно из основных в курсе математического анализа. Вместе с тем, если обратиться к различным учебникам, то можно найти определения этого понятия, весьма отличающиеся друг от друга. Разобраться, что же на самом деле представляет собой последовательность, довольно не просто.

Обратимся, например, к определению числовой последовательности (мы пока не будем говорить о других), приведенному на стр. 79 учебника В.А. Ильина, В.А. Садовничего и Бл.Х. Сендова «Математический анализ».— М.: Наука, Гл. ред. физ. – мат. лит., 1979.

«Если каждому значению n из натурального ряда чисел $1, 2, \dots n, \dots$ ставится в соответствие по определенному закону некоторое вещественное число x_n, то множество занумерованных вещественных чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \tag{1}$$

мы и будем называть числовой последовательностью или просто последовательностью»

Первое, что хочется сказать, прочитав это определение, последовательность – это множество чисел (правда не любое, а такое, которое получается в результате сопоставления каждому $n \in N$ некоторого числа x_n). Однако не будем спешить с выводами. Рассмотрим множество $\{1, 2\}$. Будет ли оно последовательностью? Очевидно, нет. Ведь в записи его ничего не говорится о законе, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие число $x_n \in \{1, 2\}$. Закон же этот может быть выбран далеко не единственным образом. Например, всем четным $n \in N$ можно сопоставлять 1, а нечетным – 2. А можно сопоставлять 1 каждому $n \in N$, меньшему 1997, и 2 остальным. Можно выбрать и такой закон: всем числам $n \in N$, кратным 5, сопоставить 2, а остальным – 1. И т.д., читатель легко приведет свой пример, отличный от указанных. Выходит, запись (1) – это не просто перечисление элементов некоторого множества. Она подразумевает указание и того, какое именно число x_1 сопоставляется единице, какое x_2 – двум, и т.д., какое число x_n сопоставляется n, и т.д. Другими словами, запись (1) подразумевает соответствие

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots, \end{array} \tag{2}$$

т.е. является лишь способом описания некоторой функции $f: N \to \boldsymbol{R}$. Так что же такое последовательность?

Мы будем считать, что последовательность – это именно то правило, по которому каждому натуральному числу $n \in N$ сопоставляется число x_n. Другими словами, последовательность – это некоторая функция $f: N \to \boldsymbol{R}$.

Но можно считать и, что последовательность – это множество занумерованных вещественных чисел, т.е. множество

$$\{(1, x_1), (2, x_2), \ldots, (n, x_n), \ldots\} \tag{3}$$

всех упорядоченных пар (n, x_n), в которых первым элементом является натуральное число («номер») n, а вторым – число x_n, приписываемое этому номеру. Правда, это, второе определение является лишь уточнением первого, поскольку оно формализует понятие функции, т.е. позволяет обойтись без использования таких терминов, как «закон», «правило» и др.

Итак, числовая последовательность – это некоторая функция $f: N \to \boldsymbol{R}$.

Традиционно число $f(1) =: x_1$ называется первым членом последовательности $f: N \to \boldsymbol{R}$, $f(2) =: x_2$ – вторым ее членом, и т.д. Но тут скрывается еще один подводный камень. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - это значения функции f, т.е. **значения последовательности**. Среди них могут быть равные. Например, последовательность

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2k-1 & 2k & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \ldots & 1 & 2 & \ldots \end{array} \tag{4}$$

имеет только два значения: 1 и 2. Вместе с тем, сам смысл введения понятия n-го члена состоит в том, что последовательность имеет столько же членов, сколько элементов имеет множество N. (Последовательность имеет и первый член, и второй, и миллионный. Конечно же миллионный член последовательности вовсе не есть первый ее член, хотя значения x_1 и $x_{1000000}$ могут совпадать.) Значит, понятия члена последовательности и значения последовательности должны различаться между собой, и правильно говорить, что n-ый член последовательности – это упорядоченная пара (n, x_n), т.е. **число x_n вместе с номером n**, которому число x_n сопоставляется.

Для того, чтобы задать последовательность, достаточно указать все ее члены. (Зная их, мы можем выписать множество (3) или таблицу (2), характеризующую рассматриваемую последовательность.) С другой стороны, член последовательности полностью определен, если указывается его номер n и его «**значение**» x_n. Следовательно, задать последовательность можно перечислением всех ее значений, но с указанием номеров, которым эти значения сопоставляются. Например, последовательность (4) можно задать записью

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 1 & 2 & \ldots & 1 & 2 & \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & (2k-1) & (2k) & \ldots \end{array}$$

которая подразумевает, что всем нечетным номерам $n \in N$ сопоставляется значение 1, а четным – 2. Использование круглых (а не фигурных) скобок принципиально: именно они говорят об упорядочивании номеров в записи чисел 1 и 2. В общем случае последовательность $f: N \to \boldsymbol{R}$ с $x_n = f(n)$ может быть записана как

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \tag{5}$$

или, сокращенно, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Впрочем, круглые скобки в (5) чаще всего опускаются, и обозначение последовательности принимает классический вид (1).

Ограничимся сказанным и отсылаем читателя к учебнику В.А. Зорича «Математический анализ», ч.1, на стр. 87-90 которого излагается остальной материал, относящийся к настоящему разделу пособия.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Может ли последовательность иметь только три члена?

2. Укажите второй, третий, шестой и седьмой члены последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = n^{(-1)^n}$; б) $x_n = \dfrac{(-1)^n+1}{n}$;

в) $x_{n+1} = x_n + 2,\ x_1 = 0$; г) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$;

д) $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$.

3. Что такое член последовательности, номер члена последовательности, значение члена последовательности?

4. Можно ли считать последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ заданной, если указан ее первый член, $x_1 = a$, и формула, связывающая значения других ее членов и имеющая вид:

а) $x_{n+1} = (n+1)x_n$;
б) $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$;
в) $x_n^2 - 2\,x_n\,x_{n-1} + x_{n-1}^2 = 0$;
г) $x_n^2 - 2\,x_n\,x_{n-1} + x_{n-1}^2 = 1$?

5. Сформулируйте определение последовательности. Опишите известные вам практические приемы задания последовательности.

6. А можно ли задать последовательность «по частям»: записать одну формулу для ее членов с четными номерами и другую для членов с нечетными, например,

$$x_n = \begin{cases} 2n+1, \text{если } n - \text{четно}, \\ \dfrac{1}{n}, \text{если } n - \text{нечетно?} \end{cases}$$

7. Могут ли значения членов последовательности повторяться?

8. Может ли последовательность иметь только три значения?

9. Что изображается на числовой прямой – члены последовательности или их значения?

10. Изобразите на числовой прямой значения последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если $x_n = \dfrac{(-1)^n+1}{2}$.

11. Числовая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задана соотношением $x_n = n^2 + 1$ $(n \in N)$. Укажите x_1, x_4, x_{n+1}, x_{2n}, x_{2n+3}, x_{n^2}, x_{n^2+2n} .

12. Среди последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ выделите финально постоянные, если:

а) $x_n = n$; б) $x_n = 3$; в) $x_n = 2x_3$, $x_3 = x_2 = x_1 = 1$;

г) x_n – n-ая значащая цифра после запятой в десятичной записи числа $\dfrac{1111}{9000}$;

д) x_n – n-ая значащая цифра после запятой в десятичной записи числа $\sqrt{2}$.

13. Сформулируйте определение ограниченной последовательности. Какие из последовательностей из упражнения 12 являются ограниченными?

14. Постройте отрицание для утверждения о том, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная.

15. Верно ли, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ будет ограниченной, если она обладает следующим свойством:

а) все значения ее – неположительны;

б) все значения ее принадлежат отрезку $[5; 10]$;

в) каждое значение последовательности принадлежит некоторому отрезку;

г) имеется отрезок $[a; b]$, которому принадлежит каждое значение последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

16. Сформулируйте определения:

а) возрастающей последовательности;

б) неубывающей последовательности;

в) убывающей последовательности;

г) невозрастающей последовательности;

д) монотонной последовательности;

е) финально монотонной последовательности.

17. Постройте отрицания свойств последовательностей из вопросов 16а – 16е.

18. а) Множество значений некоторой числовой последовательности состоит только из одного числа. Верно ли, что эта последовательность является постоянной?

б) Является ли финально постоянной последовательность, множество значений которой состоит в точности из двух чисел?

в) Докажите, что если множество значений монотонной последовательности конечно, то последовательность – финально постоянная.

[**Указание**. Пусть, для определенности, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность, и пусть А – наибольшее среди всех ее значений. Тогда $x_{n_0} = A$ для некоторого номера $n_0 \in N$. Покажите, что $x_n = A$ и при $n > n_0$.]

19. Что называется окрестностью точки $a \in \boldsymbol{R}$?

20. Являются ли окрестностями точки 2 следующие множества:

а) $]1;\ 3[$; б) $]0;\ 2[$; в) $]1;\ 2]$; г) $]0{,}9;\ 2{,}01[$?

21. При каком ε интервал $]1;\ 3[$ является ε - окрестностью точки 2?

22. Определите такие числа a и ε, чтобы интервал $]1;\ 2[$ являлся ε - окрестностью точки a.

23. Принадлежит ли точка x_0 ε - окрестности точки a, если:

а) $x_0 = 1$; $\varepsilon = 0{,}1$; $a = 2$; б) $x_0 = -0{,}2$; $\varepsilon = 0{,}3$; $a = 0{,}05$?

24. Найдите пересечения:

а) $0{,}6$ – окрестности точки 2 и $0{,}8$ – окрестности точки 3;

б) 2 – окрестности точки $0{,}6$ и 3 – окрестности точки $0{,}8$.

25. Укажите непересекающиеся ε - окрестности точек:

а) 1 и 3; б) 2 и $2{,}01$.

26. Пусть $U_\varepsilon(a)$ обозначает ε - окрестность точки a. Среди следующих равенств укажите верные и ложные:

а) $U_\alpha(a) \cap U_\beta(a) = U_{min\{\alpha,\beta\}}(a)$;

б) $U_\alpha(a) \cap U_\beta(a) = U_{max\{\alpha,\beta\}}(a)$;

в) $U_\alpha(a) \cup U_\beta(a) = U_{min\{\alpha,\beta\}}(a)$;

г) $U_\alpha(a) \cup U_\beta(a) = U_{max\{\alpha,\beta\}}(a)$;

27. Пусть $U_\varepsilon(a)$ обозначает то же, что и в вопросе 26.

а) Верно ли, что

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - a| < \varepsilon\}?$$

б) Используя равенство (а), скажите, проверка какого неравенства позволит получить ответ на вопрос 23?

в) Верно ли, что 15-й член последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

$$x_n = \frac{2n-1}{n}$$

принадлежит $U_{0,1}(2)$, т.е. $0,1$ - окрестности точки 2?

28. Укажите номера всех тех членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, которые принадлежат $0,1$ - окрестности точки 2, если:

а) $x_n = n$; б) $x_n = 0{,}01n - 1$; в) $x_n = \dfrac{2n-1}{n}$; г) $x_n = (-1)^n$;

д) $x_n = 3 + (-1)^n$; е) $x_n = \dfrac{41n-1}{20n}$;

29. Пусть $x_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$. Верно ли, что в $0,1$ - окрестность точки 2 попадают все члены последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, номера которых больше, чем N, если:

а) $N = 10$; б) $N = 100$?

30. Сформулируйте определение предела числовой последовательности.

31. Пользуясь определением предела последовательности, объясните, почему $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

32. Пусть $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

а) Приведите пример окрестности точки 1, в которую попадают все члены последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

б) Приведите пример окрестности точки 1, в которой содержатся все члены последовательности, номера которых больше, чем $N = 9$.

в) Из существования окрестностей, описанных в пунктах (а) и (б), следует ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$?

г) Верно ли, что в $0,1$ - окрестности точки 1 содержится бесконечно много членов последовательности? Верно ли, что в эту окрестность попадают все члены последовательности, начиная с некоторого номера?

д) Постройте отрицание утверждения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, и объясните, почему $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 1$ для рассматриваемой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

33. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, если в любой окрестности точки A содержится бесконечное множество членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

34. Верно ли, что число A является пределом числовой последовательности, если вне произвольной окрестности числа A находится разве лишь конечное число ее членов?

35. Приведите примеры последовательностей с множествами значений $\{-1;1\}$, которые:

а) сходятся к 1; б) сходятся к -1; в) расходятся.

36. Приведите пример последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к 1, но такой, чтобы:

а) $\forall n\in N\ (x_n < 1)$;
б) $\forall n\in N\ (x_n > 1)$;
в) $\forall n\in N\ (x_n = 1)$;
г) $\forall p\in N\ \exists n\in N\ (n>p \wedge x_n = 1)$;
д) $\forall p\in N\ \exists n\in N\ \exists m\in N\ (n>p \wedge m>p \wedge x_n < 1 < x_m)$.

37. В формулировке определения предела последовательности студент вместо неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$ написал $x_n - a < \varepsilon$. Докажите, что при таком «определении» число 5 является пределом постоянной последовательности $1, 1, 1 \dots$.

38. В формулировке определения предела студент вместо «... найдется такое $N\in N$, что ...» сказал «... при всех $N\in N$ ...». Какие последовательности будут иметь предел при таком «определении»?

39. В формулировке определения предела студент вместо «для любого $\varepsilon>0$ ...» сказал «хотя бы для одного $\varepsilon>0$ ...». Докажите, что при таком «определении» постоянная последовательность $2, 2, 2, \dots, 2, \dots$ имеет пределом число 7.

40. В формулировке определения предела студент вместо «для любого положительного числа ε» сказал «для любого числа ε». Покажите, что при таком «определении» ни у одной последовательности нет предела.

41. Студент дал такое определение предела: «Число A называется пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если существует такой номер N, что при любом $n>N$ и любом $\varepsilon>0$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$». Какой должна быть последовательность, чтобы она имела предел по этому «определению»?

42. Показать, что изменение любого конечного числа членов последовательности не меняет характер сходимости и предела последовательности, если он существует.

[**Обсуждение**. Номер N, используемый в определении предела, в случае существования находится не однозначно. Ведь если неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ выполняется при $n>N$, то оно тем более выполняется при $n>N+1$, $n>N+2$, ...,

$n > N + k$, где k – произвольное натуральное число. В этом и состоит идея ответа на поставленный вопрос. Она же используется в упражнении 43 ниже, но мы отметим и следующее ее применение.

При практическом нахождении N бывает полезно оценить выражение $|x_n - A|$ сверху (т.е. промажорировать) таким выражением b_n, чтобы решение неравенства $b_n < \varepsilon$ относительно n было более простым, нежели решение исходного неравенства $|x_n - A| < \varepsilon$. Если при этом N выбрано так, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $b_n < \varepsilon$, то при $n > N$ в силу мажорантной оценки $|x_n - A| \le b_n$ неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ также будет выполняться.

Пусть, например, требуется найти (хотя бы одно) значение такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n - \sin(n)}{n^2 + 5n - 2}\right| < \varepsilon$. Промажорируем левую часть требуемого неравенства:

$$\left|\frac{n - \sin(n)}{n^2 + 5n - 2}\right| \le \frac{n + |\sin(n)|}{n^2 + 5n - 2} \le \frac{n + 1}{n^2 + 3n + 2(n - 1)} \le \frac{n + 1}{n^2 + 3n} < \frac{n + 3}{n^2 + 3n} = \frac{1}{n}.$$

Неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ неравенство очевидно выполняется при $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. В силу мажорантной оценки для таких же n будет выполняться и неравенство $\left|\dfrac{n - \sin(n)}{n^2 + 5n - 2}\right| < \varepsilon$. Следовательно, в качестве искомого номера можно взять $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.]

43. Показать, что характер сходимости и предел последовательности (в случае его существования) не меняются при отбрасывании или при приписывании к ней конечного числа членов.

[**Обсуждение.** Формально процедуры приписывания новых членов последовательности и отбрасывания старых состоят в переходе от последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ к новым последовательностям $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Члены y_n и z_n этих последовательностей, начиная с некоторого номера, совпадают с членами исходной последовательности, но только номера совпадающих членов смещены относительно друг друга на фиксированное число (число отброшенных или приписанных членов). Так, если к последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ приписано k новых членов $y_1, y_2, \dots,$ y_k, то мы имеем последовательность

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ y_1 & y_2 & \dots & y_k & y_{k+1} = x_1 & y_{k+1} = x_2 & \dots & y_n = x_{n-k} & \dots, \end{array}$$

т.е. последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой $y_n = x_{n-k}$ при $n > k$.

Аналогично, отбрасыванию k членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ отвечает переход к последовательности $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой $z_n = x_{n+k}$.

Обычно новая последовательность, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ или $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, записывается с использованием обозначений исходной последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Так, вместо $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ пишут $(x_{n-k})_{n=1}^{\infty}$, подразумевая, что x_{1-k}, x_{2-k}, ..., x_0 – это те новые члены, которые приписываются к членам последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Вместо последовательности $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ пишут $(x_{n+k})_{n=1}^{\infty}$.]

2. СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Основной материал по этой теме прочитайте в учебнике В.А. Зорича «Математический анализ», ч.1, с. 90 – 93.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Может ли сходится неограниченная последовательность?

2. Докажите расходимость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = (-1)^n n$; б) $x_n = \sqrt{n}\cos \pi n$; в) $x_n = n^2 \sin \frac{\pi n}{2}$.

3. Всякая ли ограниченная последовательность сходится?

4. Верно ли утверждение, что ограниченность последовательности является необходимым, но не достаточным признаком сходимости последовательности? Приведите примеры, подтверждающие или опровергающие это утверждение.

5. Может ли последовательность иметь два различных предела?

6. а) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Что можно сказать о $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n|$.

б) Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

7. а) Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$.

[**Указание.** Воспользуйтесь неравенством $||x_n| - |A|| \le |x_n - A|$.]

б) Верно ли. что если $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$?

[**Указание.** Рассмотрите пример $x_n = (-1)^n$.]

8. а) Какая последовательность называется бесконечно малой?

б) Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – две последовательности, причем последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая и при каждом $n \in N$ выполняется неравенство $|x_n| \le |y_n|$. Верно ли, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ также является бесконечно малой? Докажите.

9. Докажите бесконечную малость последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; б) $x_n = \frac{\sin n}{n}$; в) $x_n = \frac{n-2}{(n+2)n}$; г) $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

[**Указание.** В силу неравенства Бернулли

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^n} \le \frac{1}{1+\frac{n}{2}} < \frac{2}{n}.]$$

10. Верно ли утверждение, что если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел и a – некоторое действительное число, то последовательность $\left(\frac{a}{x_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая? Докажите.

11. Сформулируйте определения суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

12. а) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Пользуясь определением предела, докажите, что последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, где $y_n = x_n - A$, - бесконечно малая.

б) Пользуясь определением предела, докажите, что если $x_n = A + y_n$, где $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

[**Обсуждение.** Таким образом, можно сказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу A в том и только в том случае, если $x_n = A + y_n$, где $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность.]

13. Используя утверждение вопроса 12, найдите пределы следующих последовательностей: а) $x_n = 3 + \frac{1}{n}$; б) $x_n = 3 - \frac{1}{n}$; в) $x_n = \frac{3^{n+1}+5}{3^n}$;

г) $x_n = \frac{3^{n+1}+(-1)^n}{3^n}$; д) $x_n = \frac{3^n+(-1)^n}{3^{n+1}}$; е) $x_n = \frac{n+1}{n^2}$;

ж) $x_n = \frac{3^{n+1}+2^n}{3^n}$;

14. Пользуясь определением предела, докажите, что если две последовательности отличаются на бесконечно малую последовательность, то они сходятся или расходятся одновременно, причем, в случае сходимости, их пределы равны.

15. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

[**Доказательство.** Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малые последовательности и ε - произвольное положительное число. Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая, то найдется такой номер $N_1 \in N$, что при $n > N_1$ выполняется неравенство $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Точно также существует такой номер $N_2 \in N$, что при $n > N_2$ выполняется неравенство $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $n > N = max\{N_1; N_2\}$ будем иметь:

$$|x_n + y_n| \le |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n + y_n| < \varepsilon$. А это и означает, что последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая.]

16. Будет ли разность двух бесконечно малых последовательностей бесконечно малой?

17. Доказать, что если последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ имеют одинаковые пределы, то последовательность $(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой.

[**Обсуждение решения.** Утверждение легко доказывается применением утверждений вопросов 12 и 15, но полезно доказать требуемый факт и с помощью определения предела последовательности.]

18. Докажите, что произведение произвольной ограниченной последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на бесконечно малую $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность.

[**Доказательство.** Пусть ε - произвольное положительное число. Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то существует положительное число M такое, что $|x_n| < M$ при всех $n \in N$. Из бесконечной малости последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ следует, что существует такой номер $N_1 \in N$, что при $n > N_1$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. При $n > N_1$ имеем: $|x_n\alpha_n| = |\alpha_n||x_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$, и, следовательно, для любого положительного числа ε существует номер $N = N_1$ такой, что при $n > N_1$ выполняется неравенство $|x_n \alpha_n| < \varepsilon$. Согласно определению предела последовательности это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n x_n) = 0$, т.е. последовательность $(\alpha_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая.]

19. Пользуясь теоремой о произведении бесконечно малой последовательности на ограниченную (см. вопрос 18), докажите, что каждая из нижеприведенных последовательностей является бесконечно малой:

а) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$; б) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} sin(\sqrt{n}\frac{\pi}{2})$; в) $x_n = \frac{1}{n(2 + sin(n))}$;

г) $x_n = \dfrac{1}{n^3 (3 + (-1)^n)}$.

20. Верно ли утверждение, что произведение бесконечно малой последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ на сходящуюся последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью? Почему?

21. Будет ли произведение двух бесконечно малых бесконечно малой последовательностью? Почему?

22. Известно, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю, а $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что предел последовательности $(x_n\, y_n)_{n=1}^{\infty}$ равен нулю? Приведите контрольные примеры.

23. На примере последовательностей $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{n}$, $z_n = \dfrac{1}{n^2}$ убедитесь в том, что частное двух бесконечно малых может:

а) являться бесконечно малой последовательностью;

б) иметь конечный предел, отличный от нуля;

в) не иметь предела.

[**Терминология.** Отыскание предела отношения двух бесконечно малых называют раскрытием неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.]

24. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{4}{9}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -1$. Найдите: а) $\lim\limits_{n\to\infty} (2\,x_n + 3\,y_n)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3x_n}{0{,}1y_n}$;   в) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n^2\, y_n)$.

25. Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет пределом число A, то чему равен предел последовательности: а) $(x_n^2)_{n=1}^{\infty}$;   б) $(-x_n)_{n=1}^{\infty}$;   в) $(5x_n^3 + 18\,x_n - 1)_{n=1}^{\infty}$;

г) $\left(\dfrac{3x_n}{5\,x_n^2 + 1}\right)_{n=1}^{\infty}$?

26. Пусть a_0, b_0, a_1, b_1, ... , a_k, b_k, - некоторые действительные числа, причем $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$. Объясните, почему

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \ldots + a_{k-1}n + a_k}{b_0 n^k + b_1 n^{k-1} + \ldots + b_{k-1}n + b_k} = \frac{a_0}{b_0}\,?$$

[**Указание.** Вынести за скобки в числителе и знаменателе рассматриваемой дроби старшую степень n.]

27. Пользуясь теоремой о пределе суммы двух сходящихся последовательностей, найдите пределы следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{3}{n+2}$; б) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{(-1)^n}{n}$; в) $x_n = \frac{1}{2} + \frac{n-2}{n+1}$;

г) $x_n = \frac{n-2}{n+1} + \frac{n-3n^2+1}{n^2+1}$; д) $x_n = \frac{2n}{2n^2+1}\cos\frac{n+1}{2n-1} + \frac{3}{2n-1}$; е) $x_n = \frac{n-1}{n^2}$;

ж) $x_n = \frac{2^n + (-2)^n}{3^n}$; з) $x_n = \frac{n + \sin(n)}{2^n}$.

28. Верно ли, что сумма сходящейся и расходящейся последовательностей является расходящейся?

29. Пользуясь теоремой о пределе произведения двух сходящихся последовательностей, найдите пределы:

а) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(5 - \frac{1}{n^2}\right)$; б) $x_n = \left(2 + \frac{n}{2^n}\right)\left(3 - \frac{\sin(n)}{n^2}\right)$;

в) $x_n = \frac{1}{n^2}\frac{1-n^8}{5n^8+1}$; г) $x_n = \frac{(1+5n^3)(1-n+n^2)}{n^2(n^3+3)}$.

30. Известно, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, а последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится. Можно ли утверждать, что последовательность $(y_n x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) расходится; б) сходится?

31. Найдите ошибку в вычислении предела:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ \lim_{n\to\infty}(2n+1) = 0\ \lim_{n\to\infty}(2n+1) = 0.$$

32. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ и $x_n \neq 0$ при $n \in N$.

а) Чему равен предел последовательности $(x_{n+1})_{n=1}^{\infty}$?

б) Докажите, что $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, если $A \neq 0$.

в) Что можно сказать о пределе отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, если $A = 0$?

[**Указание.** Рассмотрите примеры последовательностей из вопроса 23.]

33. Приведите примеры расходящихся последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, сумма которых может: а) сходится; б) расходится.

34. Верно ли, что произведение двух расходящихся последовательностей может оказаться: а) расходящейся последовательностью? б) сходящейся последовательностью?

35. На примере последовательностей $x_n = (-1)^n + 1$, $y_n = (-1)^n - 1$ убедитесь в том, что если $\lim_{n\to\infty} x_n\ y_n = 0$, то отсюда еще не следует, что либо $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, либо $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

36. Будем говорить, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **финально меньше** (соответственно **финально не больше**) последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, если существует такой номер $N \in N$, что при всех $n \geq N$ имеет место неравенство $x_n < y_n$ (соответственно, $x_n \leq y_n$). Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ финально меньше последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, то будем говорить также, что последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ **финально больше** последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

а) Пусть последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходятся, и последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ финально меньше последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. Каким неравенством связаны пределы этих последовательностей?

б) Приведите примеры двух последовательностей, сходящихся к одному и тому же числу и таких, что одна из последовательностей финально меньше второй.

37. Может ли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, если $x_n > 0$ при $n \in N$?

38. Почему последовательность с неотрицательными членами не может иметь своим пределом отрицательное число?

39. Если последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ финально больше последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, но финально меньше последовательности $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, то какими неравенствами связаны пределы этих трех последовательностей при условии, что все они существуют?

40. Если какое-либо из неравенств $x_n \leq A$, $x_n \leq y_n$, $x_n < A$, $x_n < y_n$, $x_n \geq A$, $x_n \geq y_n$ и т.п. выполнено при всех $n \geq N$, то говорят, что оно **выполняется финально**. Докажите, что финально выполняются следующие неравенства: а) $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n}$; б) $2^n \geq 10$; в) $n + 2 < 2^n$.

40. Как оценивается предел сходящейся последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если ее члены финально удовлетворяют следующим неравенствам: $A \leq x_n \leq B$?

41. Сформулируйте теорему о предельном переходе в двойном неравенстве (теорему о пределе «зажатой» последовательности).

42. Используя теорему о предельном переходе в двойном неравенстве и предполагая известным существование предела заданных последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, оцените $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

а) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;

[**Указание.** Оценка снизу очевидна, а сверху можно x_n оценить, например, с помощью неравенств $n! > 2^{n-1}$, справедливых при $n>1$.]

б) $x_n = \frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$;

[**Указание.** Очевидную оценку x_n сверху, а именно $x_n < \frac{1}{2}$, можно уточнить, если из простого неравенства $\sqrt{(2n-1)(2n+1)} < 2n$ вывести, что $\frac{2n-1}{2n} < \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}$ при любом натуральном n.]

в) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

[**Указание.** Воспользуйтесь неравенством: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.]

г) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}$;

[**Указание.** Строгое убывание последовательности позволяет доказать, что $\frac{1}{2} \le \lim\limits_{n\to\infty} x_n < x_k$. Докажите, что $x_k < 1$ при $k > 3$.]

43. Используя теорему о предельном переходе в двойном неравенстве, найдите пределы следующих последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) $x_n = \frac{n + \sin(n)}{n}$.

б) $x_n = \frac{\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]}{n}$, где $\left[\frac{n}{2}\right]$ - целая часть действительного числа $\frac{n}{2}$.

в) $x_n = \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}$.

[**Указание.** $3 \le \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}} \le 3 + \frac{1}{n}$.]

г) $x_n = \left(\frac{5}{n}\right)^n$.

[**Указание.** Воспользуйтесь финально выполненным неравенством $\frac{5}{n} < \frac{2}{3}$ и вопросом 9.]

д) $x_n = \left(\frac{n+3}{2n-1}\right)^n$.

е) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + 4n + 1}}$.

[**Указание.** Получите неравенства: $\dfrac{1}{1 + \dfrac{2}{n}} < x_n < 1$.]

ж) $x_n = \sqrt{n^2 + n} - n$.

[**Указание.** $\dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{n}} \le x_n = \dfrac{1}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}} \le \dfrac{1}{2}$.]

з) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + n + 1}}$.

[**Указание.** Воспользуйтесь неравенствами: $\dfrac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1}} < x_n < \dfrac{n + 1}{\sqrt{n^2 + 1}}$.]

и) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

[**Указание.** $0 < x_n < \dfrac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2} \cdot \dfrac{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n} \le 2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-2} = \dfrac{9}{2} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.]

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Предположение о существовании предела последовательности, позволяющее иногда предложить эффективный способ его отыскания, нуждается в проверке, поскольку может оказаться неверным.

Рассмотрим, например две числовые последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, заданные рекуррентными соотношениями:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3), \;\; y_{n+1} = 2y_n - 3, \;\; x_1 = y_1 = 0.$$

Пусть A и B, соответственно, пределы этих последовательностей. Тогда, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенствах

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3), \;\; y_{n+1} = 2y_n - 3,$$

получим следующие уравнения относительно A и B (мы пользуемся тем, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = A$; см. вопрос 43 из §1):

$$A = \frac{1}{2}(A + 3), \;\; B = 2B - 3.$$

Решая эти уравнения, найдем, что $A = B = 3$.

Нетрудно видеть, однако, что число 3 не может быть пределом последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. В самом деле, второй и все последующие члены этой последовательности отрицательны (как сумма неположительного и отрицательного чисел), а значит предел, если он существует, не может быть положительным числом.

Для нахождения пределов рассматриваемых последовательностей применялся один и тот же метод, поэтому вполне может оказаться, что и для первой последовательности вычисления предела были напрасны. Во всяком случае, мы видим, что сами по себе вычисления еще не дают возможности гарантировать истинность получаемого ответа, необходимо дополнительно решить вопрос о сходимости последовательности. (Если последовательность сходится, то единственный предел ее можно определить любым способом, в том числе и примененным выше. Если же она расходится, то надобность в отыскании предела отпадает.)

Оказывается, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, так что действительно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

Наиболее простое доказательство этого факта можно провести, опираясь на критерий Вейерштрасса сходимости монотонной последовательности (см. ниже упражнение 10 е). Сходимость $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ можно установить и с помощью критерия Коши (см. вопрос 4 е), и хотя доказательство не столь тривиально, как с помощью критерия Вейерштрасса, все же прямое доказательство сходимости $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ вряд ли является более простым. Приведем для сравнения два прямых доказательства сходимости последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Приемы, используемые в них, могут оказаться полезными при исследовании других последовательностей.

1 способ.

Перейдем от рекуррентного соотношения, определяющего каждый последующий член последовательности через предыдущие, к явной формуле для общего члена, т.е. такой формуле, в которой сразу указываются значения x_n в зависимости от значений n. Для этого равенство $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3)$ запишем в виде: $x_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(x_n - 3)$. Обозначим $x_n - 3$ через z_n, т.е. положим $z_n = x_n - 3$. Тогда числа z_n, образуют последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n, \quad z_1 = -3.$$

Но из последних соотношений следует, что

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} z_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} z_n\right) = \frac{1}{2^2} z_{n-1} = \frac{1}{2^3} z_{n-2} = \dots = \frac{1}{2^n} z_1 = \frac{-3}{2^n} = -\frac{6}{2^{n+1}}.$$

Таким образом $z_n = -\frac{6}{2^n}$ $(n \in N)$, и, следовательно,

$$x_n = 3 - \frac{6}{2^n} \quad (n \in N).$$

Так как последовательность $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая (например, в силу бесконечной малости последовательности $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)_{n=1}^{\infty}$, см. упражнение 9 г из §2, и оценок $0 < \left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$), то по теореме о пределе и арифметических операциях $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует и равен 3.

2 способ.

Докажем, пользуясь определением предела, что подсказанное вычислением, проведенным в начале параграфа, число 3 является пределом последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Оценим $|x_n - 3|$. Имеем:

$$| x_n - 3 | = | \frac{1}{2}(x_n + 3) - 3 | = \frac{1}{2} | x_{n-1} - 3 |,$$

т.е.

$$| x_n - 3 | = \frac{1}{2} | x_{n-1} - 3 |$$

Применяя повторно полученное соотношение, будем иметь:

$$| x_n - 3 | = \frac{1}{2} | x_{n-1} - 3 | = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} | x_{n-2} - 3 |\right) = \frac{1}{2^2} | x_{n-2} - 3 | =$$
$$= \frac{1}{2^3} | x_{n-3} - 3 | = \ldots = \frac{1}{2^{n-1}} | x_1 - 3 | = \frac{3}{2^{n-1}} = \frac{6}{2^n},$$

т.е.

$$| x_n - 3 | = \frac{6}{2^n} \quad (n \in N).$$

Последовательность $\left(\frac{6}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой (почему?). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $| x_n - 3 | < \varepsilon$. Последнее, согласно определению предела последовательности, означает, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$.

Критерии Коши и Вейерштрасса сходимости числовых последовательностей прочитайте в учебнике В.А. Зорича ч.1 на стр. 93 – 99.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте критерии существования предела числовой последовательности. Как они применяются в теории и на практике.

2. Какие еще теоремы, отличные от критериев Вейерштрасса и Коши, можно использовать для доказательства сходимости числовой последовательности? Чем отличаются условия существования предела в этих теоремах от условий существования предела последовательности, указываемых в критериях Вейерштрасса и Коши?

[**Ответ.** В критериях Вейерштрасса и Коши вопрос о сходимости последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ решается исследованием свойств самой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. В других же теоремах сходимость последовательности обеспечивается сходимостью вспомогательных последовательностей. Например, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, если ее можно представить в виде суммы двух сходящихся последовательностей; и прочее.]

3. Сформулируйте определение фундаментальной числовой последовательности.

4. Пользуясь определением, установите фундаментальность следующих последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) $x_n = \frac{1}{n}$.

б) $x_n = \frac{n+1}{3n+2}$.

[Указание. $|x_n - x_{n+p}| = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3p+2}\right) < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+2} < \frac{1}{n}$.]

в) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

[Указание. $|x_n - x_{n+p}| = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}} < \frac{2}{2^n} < \frac{2}{n}$.]

г) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

[Указание. $|x_n - x_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} <$

$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) +$

$+ \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$.]

д) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

[Указание. $|x_n - x_{n+p}| = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots +\right.$

$\left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots(n+p)}\right) < \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) < \frac{2}{n}$.]

е) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3),\ x_1 = 0$.

[Указание. Покажите, что $|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^{k-1}}|x_1 - x_2| = \frac{3}{2^k}$, а затем воспользуйтесь неравенством:

$|x_n - x_{n+p}| \le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p-1} - x_{n+p}|$.]

ж) $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n},\ x_1 = 0$.

[Указание. Получите оценку

$$|x_k - x_{k+1}| = \frac{|x_{k-1} - x_k|}{\sqrt{3 + x_{k-1}} + \sqrt{3 + x_k}} < \frac{1}{2}|x_{k-1} - x_k| < \frac{2}{2^k}|x_1 - x_2| = \frac{2\sqrt{3}}{2^k}$$

и с ее помощью оцените $|x_n - x_{n+p}|$.]

з) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$.

[**Указание.** $|x_k - x_{k+1}| = x_k - x_{k+1} < 2\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.]

5. Может ли фундаментальная последовательность быть неограниченной? Приведите пример или докажите, что не может.

[**Обсуждение.** Верное заключение тривиально выводится из критерия Коши и одного из свойств сходящихся последовательностей. Однако полезно дать и прямое доказательство получаемого факта, опираясь на определение фундаментальной последовательности.]

6. Объясните, почему следующие последовательности не являются фундаментальными?

а) $x_n = 2n - 1$.

б) $x_n = n^{(-1)^n}$.

в) $x_{n+1} = 2x_n - 3,\ x_1 = 0$.

[**Обсуждение.** Таким образом мы еще раз убеждаемся, теперь с помощью критерия Коши, что предположение о существовании предела последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, рассмотренной в начале параграфа, было неверным.]

г) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

[**Обсуждение.** Это не случайная последовательность в анализе, и расходимость ее будет использована в дальнейшем. Отсутствие свойства фундаментальности (а значит и сходимости) для нее доказано в учебнике В.А. Зорича ч.1 (см. пример 10, с. 95). Вместе с тем это полезно установить и доказательством неограниченности последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Последнее нетрудно провести, доказав неравенство $x_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$ например с помощью следующих оценок:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \ldots + \frac{1}{2^n} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.]$$

7. Постройте отрицание свойства фундаментальности последовательности, и приведите пример ограниченной, но нефундаментальной последовательности.

8. а) Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная, и k – некоторое натуральное число. Пользуясь определением фундаментальности, докажите, что

последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, где $y_n = x_n - x_{n+k}$, является бесконечно малой. Этот же факт установите как следствие критерия Коши и упражнения 43 из §1.

б) Докажите, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = sin(n)$, не является фундаментальной.

[**Указание.** Предположив противное, выведите с помощью утверждения а), что $cos(n+1) \to 0$ и $cos(n+2) \to 0$, т.е. что

$$\alpha_n = cos(n) \cdot cos(1) - sin(n) \cdot sin(1) \to 0$$
$$\beta_n = cos(n) \cdot cos(2) - sin(n) \cdot sin(2) \to 0$$

при $n \to \infty$. Затем, рассматривая последние два равенства как систему уравнений относительно $cos(n)$ и $sin(n)$, получите, что $cos(n) \to 0$ и $sin(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Разумеется, последнее невозможно (почему?).]

9. Сформулируйте критерий Вейерштрасса существования предела монотонной последовательности.

10. С помощью критерия Вейерштрасса установите сходимость следующих последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) $x_n = \frac{1}{n}$.

б) $x_n = \frac{n+1}{3n+2}$.

в) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

г) $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

[**Указание.** Для доказательства ограниченности последовательности сверху воспользуйтесь неравенством $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.]

д) $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$.

е) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + 3)$, $x_1 = 0$.

[**Указание.** Сначала методом математической индукции докажите, что $x_n \le 3$ при $n \in N$, а затем воспользуйтесь равенством $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(3 - x_n)$.]

ж) $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$, $x_1 = 0$.

[**Указание.** Из неотрицательности членов последовательности и равенства $x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n - x_{n-1}$ следует, что разности $x_k - x_{k-1}$ имеют тот же знак, что и $x_2 - x_1$. Ограниченность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сверху числом 3 можно доказать методом математической индукции.]

з) $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n}$.

11.Может ли числовая последовательность: а) быть ограниченной, но расходится; б) быть неограниченной, но сходящейся; в) убывать, но расходится; г) возрастать, быть ограниченной, но расходится? В случае утвердительного ответа приведите подтверждающие примеры, отрицательные ответы обоснуйте.

12. Распространяется ли утверждение критерия Вейерштрасса на финально монотонные последовательности?

13. Для следующих последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ докажите существование предела и найдите его.

а) $x_n = q^n$, где q – некоторое фиксированное число, $0 < q < 1$.

[**Указание.** Если A – предел этой последовательности, то $A = q\,A$.]

б) $x_n = q^n$, где q – фиксированное число, $|\,q\,| < 1$.

[**Указание.** Воспользуйтесь (а) и теоремой о «зажатой» переменной.]

в) $x_n = \frac{n^3}{10^n}$.

[**Указание.** Отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{10}$ стремится к $\frac{1}{10}$ при $n \to \infty$, а поэтому финально выполняется неравенство: $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$.

Для нахождения предела последовательности, перейдите к пределу в равенстве

$$x_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{x_n}{10}.]$$

14.Изучающиеся в упражнении 43 §2 последовательности предполагались сходящимися. Можете ли вы теперь установить, что предположения были верными?

15. Чему равен предел последовательности из вопроса 10 ж?

16. Пусть a – положительное число, и последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задается равенствами:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),\quad x_1 = a \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Докажите, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

[**Указание.** Покажите, что $x_n \geq \sqrt{a}$ при $n \geq 2$; а тогда

$$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0 .]$$

4. ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ. ЧАСТИЧНЫЙ ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определения и основные факты по этому разделу прочитайте в учебнике В.А. Зорича «Математический анализ» ч.1 на с. 99 – 104.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте определение подпоследовательности последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

[**Обсуждение.** Выделение строго возрастающей последовательности номеров $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ по существу есть фиксирование строго возрастающей функции $n : N \to N$, такой, что $n(k) = n_k$. Поэтому можно сказать, что подпоследовательность некоторой последовательности – это композиция двух функций: строго возрастающей последовательности номеров $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ и исходной последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Полезно иметь в виду очевидные неравенства, справедливые для последовательности номеров $(n_k)_{k=1}^{\infty}$: $k \le n_k$ при $k \in N$.]

2. Укажите первый, четвертый и пятый члены подпоследовательности $(x_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n_k = k^2$;

б) $x_n = (-1)^n$, $n_k = k(k+1)$;

в) $x_n = \sin\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$, $n_k = 8k + 1$;

г) $x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1} + 3)$, $x_1 = 0$, $n_k = k + 1$.

3. Будут ли следующие последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, составленные из членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, подпоследовательностями последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?

а) $y_k = x_k$;

б) $y_k = x_{k+1}$;

в) $y_k = x_{k-1}$ при $k \geq 2$ и $y_1 = x_1$;

г) $y_k = x_{k(k+1)}$;

д) $y_k = x_{2k}$;

е) $y_k = \begin{cases} x_{k-1}, \text{если } k \text{ - четное} \\ x_{k+1}, \text{если } k \text{ - нечетное,} \end{cases}$

ж) $y_k = x_{k^2-5k+6}$;

з) $y_k = x_{\left[\frac{k+1}{2}\right]}$.

[**Ответ.** Да, для последовательностей из вопросов а, б, г, и д; нет – для остальных.]

4. Будет ли последовательность, полученная вычеркиванием из данной последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конечного числа членов, подпоследовательностью последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?

5. Верно ли, что подпоследовательность – это то, что остается от последовательности после отбрасывания некоторой совокупности (возможно, пустой) ее членов?

[**Указание.** Подпоследовательность – это последовательность и, значит, должна иметь бесконечное множество членов.]

6. Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу A, то что можно сказать о сходимости ее подпоследовательности?

7. Найдите пределы последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$;

б) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n(n+1)}\right)^{n(n+1)}$;

в) $x_n = \left(1 + \dfrac{2}{n(n+1)}\right)^{n(n+1)}$.

8. Может ли сходящаяся последовательность иметь подпоследовательности, сходящиеся к разным числам?

9. Доказать, что последовательность, среди членов которой бесконечно много нулей и бесконечно много единиц, расходится.

10. Докажите расходимость следующих последовательностей:

а) $x_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, n = 2k \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n}, n = 2k-1, k \in N \end{cases}$;

б) $x_n = \sin(n^0)$;

в) $x_n = (-1)^n$;

г) $x_n = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$.

11. Какой тип монотонности имеет подпоследовательность монотонной последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$? Докажите.

12. Докажите, что если монотонная последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность, то она сходится.

[**Указание.** Пусть для определенности последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – неубывающая, а подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ сходится к A. Тогда для любого $k \in N$ справедливо неравенство $x_{n_k} \le A$ и , следовательно, $x_k \le A$. Последнее означает, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена.]

13. Известно, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Что можно сказать сходимости последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$? Приведите подтверждающие примеры.

14. Докажите, что если множество значений последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ конечно, то из нее можно выделить стационарную (т.е. финально постоянную) подпоследовательность.

15. а) Сформулируйте определение предельной точки для множества $E \subset \boldsymbol{R}$.

б) Может ли иметь предельные точки конечное множество $E \subset \boldsymbol{R}$?

в) Докажите, что точка $a \in \boldsymbol{R}$ является предельной для множества $E \subset \boldsymbol{R}$ в том и только в том случае, если существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точек множества E (т.е. $x_n \in E$ при $n \in N$), такая, что $x_n \ne a$ при каждом $n \in N$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

[**Указание.** Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in E$, $x_n \ne a$ сходится к a, и в некоторой ε – окрестности точки a имеется лишь конечное число значений $a_1, a_2, \dots, a_k$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогда для каждого $n \in N$ либо $|x_n - a| \ge \varepsilon$, либо найдется $a_j \in \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, такое, что $x_n = a_j$.

Так как $x_n \ne a$ при каждом $n \in N$, то числа $\delta_j = |a_j - a|$ – положительные и , следовательно, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) > 0$. При каждом $n \in N$ имеем $|x_n - a| \ge \delta$, а это противоречит тому, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Обратное. Если a – предельная точка для E, то в $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ – окрестности ($n = 1, 2, 3, \dots$) этой точки имеется точка $x_n \in E$, отличная от a. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – нужная.]

г) Может ли бесконечное множество $E \subset \boldsymbol{R}$ не иметь предельных точек?

16.а) Из всякой ли последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность?

б) Приведите пример неограниченной последовательности, содержащей сходящуюся подпоследовательность.

17. Все сходящиеся подпоследовательности, которые можно выделить из последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, имеют пределом число A. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$?

18. Выделите хотя бы одну сходящуюся подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

а) $x_n = (-1)^n$;

б) $x_n = n^{(-1)^n}$;

в) $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$;

г) $x_n = n - 5\left[\frac{n-1}{5}\right]$.

19.Что значит, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ стремится: а) к плюс бесконечности?; б) к минус бесконечности?; в) просто к бесконечности?

[**Терминология.** Если последовательность стремится к какой – либо из бесконечностей, то она называется бесконечно большой.]

20. Верно ли, что если $x_n \to \infty$, то последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится?

21. Следует ли из неограниченности последовательности, что она – бесконечно большая? Рассмотрите примеры: а) $x_n = n^{(-1)^n}$;

б) $x_n = n^2 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$; в) $x_n = \dfrac{n}{1 + n\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$.

22. Сформулируйте в позитивной форме утверждения: последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не стремится к: а) $+\infty$; б) $-\infty$; в) ∞.

23. Докажите, что если $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то $n_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$.

24. Пользуясь определением, докажите, что:

а) $x_n \to +\infty$, если $x_n = n^2 - 7n$;

б) $x_n \to -\infty$, если $x_n = \dfrac{10 - n^2}{n}$;

в) $x_n \to \infty$, если $x_n = (-1)^n n$.

25. Докажите, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой в том и только в том случае, когда $|x_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$.

26. а) Пусть $x_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажите, что $\dfrac{1}{x_n} \to \infty$.

б) Пусть $x_n \neq 0$, $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$.

27. а) Пусть $x_n \to +\infty$ и $y_n \geq C$ для всех $n \in N$. Докажите, что $x_n + y_n \to +\infty$.

б) Пусть $x_n \to -\infty$ и $y_n \leq C$ для всех $n \in N$. Докажите, что $x_n + y_n \to -\infty$.

28. С помощью упражнения 27) установите, к чему стремятся следующие последовательности при $n \to \infty$:

а) $x_n = \dfrac{5}{n} - n$; б) $x_n = \cos(\pi n) + n^3$; в) $x_n = an + b$, $a > 0$;

г) $x_n = an + b$, $a < 0$; д) $x_n = (-1)^n - n^2$; е) $x_n = \dfrac{n^3 + 1}{n^2}$.

29. На примере последовательностей: $x_n = (-1)^n + n^2$, $y_n = n^2$, $z_n = 1 + n^2$, $\alpha_n = n$ убедитесь в том, что разность двух бесконечно больших последовательностей может:

а) стремится к $+\infty$;

б) иметь конечный предел;

в) не иметь предела.

[**Терминология.** Отыскание предела разности двух бесконечно больших последовательностей называют раскрытием неопределенности вида $\infty - \infty$.]

30. Указать такие бесконечно большие последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = 1$;

в) $\dfrac{x_n}{y_n} \to \infty$ при $n \to \infty$;

г) $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ последовательность не имеет предела.

[**Терминология.** Отыскание предела частного двух бесконечно больших последовательностей называют раскрытием неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.]

31. Указать такие последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и:

а) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$;

б) $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 1$;

в) $x_n \cdot y_n \to \infty$ при $n \to \infty$;

г) $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$ последовательность не имеет предела.

[**Терминология.** Отыскание предела произведение бесконечно малой последовательности на бесконечно большую называют раскрытием неопределенности вида $0 \cdot \infty$.]

32. Сформулируйте определение частичного предела последовательности.

33. Приведите пример последовательности, имеющей два частичных предела – числа 0 и 2.

34. Верно ли, что расходящаяся последовательность имеет по крайней мере два частичных предела?

35. Привести пример последовательности, не имеющей конечных частичных пределов.

36. Найдите все частичные пределы последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) $x_n = (-1)^n$; б) $x_n = 3^{(-1)^n n}$; в) $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$;

г) $x_n = n\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$; д) $x_n = \frac{n^2}{n+5}$; е) $x_n = \frac{1-n^3}{1+n^2}$;

ж) $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

37. Докажите, что каждая монотонная последовательность имеет только один частичный предел.

38. Сформулируйте определения нижнего предела и верхнего предела ограниченной последовательности.

39. Верно ли, что если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху, то $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = +\infty$?

40. Верно ли, что если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не ограничена снизу, то $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$?

41. Можно ли утверждать, что $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$, если:

а) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$; б) $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -\infty$;

в) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$;   г) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$.

42. Пользуясь определениями верхнего и нижнего пределов последовательности, найти $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k$, $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_k$ если:

а) $x_k = (-1)^k,\ k \in N$;   б) $x_k = (-1)^k k,\ k \in N$;

в) $x_k = k,\ k \in N$;   г) $x_k = -k^2,\ k \in N$;

д) $x_k = \dfrac{(-1)^k}{k},\ k \in N$.

43. Верно ли, что верхний и нижний пределы последовательности являются ее частичными пределами?

44. Сформулируйте критерий существования предела последовательности в терминах верхнего и нижнего пределов.

45. Пусть $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ – подпоследовательность последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Докажите, что

$$\inf_{n\ge 1} x_n \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \underline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_{n_k} \le \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} x_{n_k} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le \sup_{n\ge 1} x_n .$$

5. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РЯДАХ

Понятия последовательности и ее предела позволяет ввести важное понятие суммы бесконечного числа слагаемых, называемое в математике суммой ряда.

В большинстве учебников по математическому анализу числовой ряд определяется как выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots , \qquad (1)$$

где a_1, a_2, ..., a_n, ... - некоторые числа, называемые членами ряда. Однако такое «определение» требует обязательной расшифровки. Дело в том, что термины «выражение» и «вид выражения» не являются определяющими в математике, они используются лишь для обозначения каких – либо объектов. Под выражением может подразумеваться число, функция, вектор, множество и вообще произвольный по каким – либо причинам интересующий нас объект. При этом один и тот же объект может скрываться под различными по виду выражениями. Например, число 4 может быть представлено такими выражениями, как $0 + 4$, $1 + 3$, $2 \cdot 2$, $4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n + \sqrt{4n^2 + 1}}{n}$ и др. Так какой же объект скрывается под выражением (1)?

Предназначение выражений (1) состоит в рассмотрении сумм бесконечного числа слагаемых. Разумеется, чтобы говорить о сумме, нужно знать слагаемые. Поэтому придание смысла выражению (1) надо начинать с задания некоторой числовой последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ (мы будем иметь дело пока лишь с числовыми рядами). Далее, выражение (1) подразумевает, что члены последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – их называют **членами ряда** – должны складываться. Однако сложить все члены последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ практически невозможно, можно лишь, в принципе, вычислять «частичные» суммы $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$; чем больше число n, тем большее число членов ряда охватывает сумма S_n). С другой стороны, знания всех сумм вида

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1, \\ &S_2 = a_1 + a_2, \\ &\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ &S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \\ &\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{aligned} \qquad (2)$$

вполне достаточно для характеристики вклада в сумму (1) **каждого** слагаемого a_i. Таким образом можно сказать, что последовательность (2) - ее называют **последовательностью частичных сумм ряда** – характеризует выражение (1), и мы приходим к следующему определению.

Числовым рядом (1) называется (упорядоченная) пара $((a_n)_{n=1}^{\infty}, (S_n)_{n=1}^{\infty})$ последовательностей $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, связанных между собой соотношениями (2).

Однако, выражение (1) может подразумевать и еще один математический объект – число. Если последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ряда (1) сходится, то предел ее называется суммой ряда и так же обозначается через (1).

Еще сравнительно недавно, лет, примерно, пятьдесят тому назад, в математике использовались и различались понятия «выражение» и «значение выражения». Тогда ряд являлся выражением (1), а сумма его – значением этого выражения. Это давало возможность использовать одно и тоже обозначение (1) для ряда и его суммы.

Различие понятий ряда и его суммы стало ясным после открытия в XIX веке расходящихся рядов, т.е. таких рядов, которые не имеют суммы (в шуточной форме говорят: некоторые выражения не имеют никакого значения; ирония заключается в том, что расходящиеся ряды имеют и теоретическое, и практическое значение, им посвящена даже книга «Расходящиеся ряды» (переведена на русский язык в 1949 году) известного английского математика Годфри Гарольда Харди (1877 - 1947)). В XVIII же веке считалось, что все ряды имеют суммы, и с ними можно обращаться как с обычными суммами чисел. Приведем известный парадокс, показывающий, что это не так.

Пусть S – сумма ряда $1-1+1-1+\dots$, т.е. ряда , члены которого есть числа 1 и -1. Имеем:

$S=1-1+1-1+\dots=1+(-1+1)+(-1+1)+\dots= 1+0+0+\dots=1$, т.е. $S=1$.

С другой стороны,

$S=1-1+1-1+\dots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots= 0+0+0+\dots=0$, т.е. $S=0$.

Следовательно, $0=1$. Далее, если записать

$S=1-1+1-1+\dots=1-(1-1+1-1+\dots)=1-S$,

то, решая уравнение $S=1-S$, получим $S=\frac{1}{2}$, т.е. сумма целых чисел может оказаться дробным (!!) числом.

С другим материалом по рассматриваемой теме ознакомьтесь по учебнику В.А. Зорича «Математический анализ», ч.1, стр. 104 – 114.

Контрольные вопросы и упражнения

1. Сформулируйте определение числового ряда.

2. Что такое члены ряда, n - я частичная сумма ряда?

3. Выпишите пять первых членов ряда по известной формуле для общего члена: а) $a_n = \dfrac{3n+2}{n^2+4}$; б) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2+4}$; в) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$.

4. Какой ряд называется: а) сходящимся?; б) расходящимся?

5. Верно ли утверждение, что числовой ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность его частичных сумм?

6. Рассматривая последовательности частичных сумм, исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $2-2+2-2+\ldots+2-2+\ldots$; б) $\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\ldots+\ln\frac{n+1}{n}+\ldots$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$, где q – знаменатель геометрической прогрессии.

7. а) Можно ли восстановить последовательность членов ряда, если известна последовательность частичных сумм этого ряда?

б) Зная частичные суммы $S_n = \dfrac{-1+2^n}{2^n}$ $(n \in N)$ ряда, выпишите весь ряд и определите его сумму.

8. Может ли числовой ряд иметь две различные суммы?

9. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$ сходится, то его сумма S вычисляется по формуле

$$S = \lim_{n\to\infty} b_n - b_1.$$

10. Используя утверждение 9, вычислите суммы следующих рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}$ $(a>0)$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{1}{2^{n+1}}\cos\dfrac{3}{2^{n+1}}$.

[**Указание.** Воспользоваться формулой

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).]$$

11. Существуют ли различные ряды, имеющие одну и ту же сумму? Приведите примеры.

12. а) Составьте n – ую частичную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$.

б) Докажите, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и имеют соответственно суммы $S(a)$ и $S(b)$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ сходится, и его сумма равна $S(a) + S(b)$.

13.Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму S, то для произвольного $\lambda \in \boldsymbol{R}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ также сходится и имеет сумму λS.

[**Указание.** Сравните n – ые частичные суммы рядов.]

14. Докажите, что если из трех рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ два сходятся, то сходится и третий, причем суммы рядов связаны равенствами:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

15. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то сходится и любой ряд, полученный из него отбрасыванием конечного числа членов.

16. Верно ли утверждение, что прибавление или отбрасывание конечного числа членов не влияет на сходимость ряда, но разумеется, может изменить его сумму?

17. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.

18. Обязан ли ряд быть сходящимся, если его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$? Рассмотрите пример 6 г §3.

19. С помощью необходимого признака сходимости ряда доказать расходимость следующих рядов.

а) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$;

б) $0{,}001 + \sqrt{0{,}001} + \ldots + \sqrt{0{,}001} + \ldots$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$;

г) $1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{n}{3n-2} + \ldots$;

д) $\frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \ldots + \frac{n}{1000n+1} + \ldots$.

20. Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда.

21. Найдите ошибку в следующем доказательстве сходимости гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

◀ При любом $p \in N$ имеем: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+p} < \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{p}{n+1}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p}{n+1} = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N \in N$, что для всех $n > N$ имеет место неравенство $\dfrac{p}{n+1} < \varepsilon$. Таким образом, при любом $p \in N$ и $n > N$ любом выполняется неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$, и, следовательно, согласно критерию Коши, гармонический ряд сходится. ▶

22. Пользуясь критерием Коши, доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ сходится.

[**Указание.** Обозначим $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}|$ через $\Delta(n, p)$. Для данного ряда имеем:

$$\Delta(n, p) = \left| \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+3}}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+p+1}}{n+p} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{(-1)^{p+1}}{n+p} \right|.$$

Если p – четное, то

$$\Delta(n, p) = \left| \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \right| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1}\right) - \frac{1}{n+p} \le \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

Если же p – нечетное, то

$$\Delta(n, p) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{n+p-3} - \frac{1}{n+p-2}\right) - \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p} \le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p} \le \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

Таким образом,

$$\Delta(n, p) < \frac{2}{n}$$

при любом $p \in N$.]

23. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?

24. Докажите, что если ряд сходится абсолютно, то он сходится. Верно ли обратное утверждение?

25. В чем заключается идея доказательства того факта, что ряд с нестрицательными членами сходится в том и только в том случае, когда последовательность его частичных сумм ограничена сверху?

26. Сформулируйте признак сравнения рядов.

27. Пуст даны два расходящихся ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ с неотрицательными членами, и $c_n = max\{a_n, b_n\}, n \in N$. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$?

[**Указание.** Воспользуйтесь неравенствами: $c_n \geq b_n \geq 0$ и $c_n \geq a_n \geq 0$.]

28. Является ли расходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, для которого выполняется условие $a_n \geq \frac{1}{n}$? Почему?

29. Исследовать сходимость рядов с помощью признака сравнения.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{ln(n)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \leq 1)$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

30.Верно ли утверждение признака сравнения, если члены сравниваемых рядов не обязательно знакопостоянны? Приведите подтверждающие примеры.

31. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ также сходится. Верно ли обратное утверждение? Приведите примеры.

[**Указание.** Воспользуйтесь неравенством $S_n(a^2) \leq S_n(a)$, где $S_n(a^2)$ и $S_n(a)$, соответственно, n - ые частичные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.]

32. Докажите, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ сходятся, то сходятся также ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$.

[**Указание.** Воспользуйтесь неравенством $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.]

33. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной сходимости ряда.

34. Пользуясь признаком Вейерштрасса, докажите сходимость следующих рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2\left(\frac{n+1}{3}\right)}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctg(n)}{n^2}$.

35. Сформулируйте признаки сходимости рядов Коши и Даламбера.

36. Какой вид имеют выражения для a_{n+1}, $\sqrt{|a_n|}$ и $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, если:

а) $a_n = \frac{1}{3^n}$;

б) $a_n = \frac{x^n}{3^n n!}$;

в) $a_n = \frac{\cos(\pi n)}{n^2}$;

г) $a_n = \frac{x^n n!}{n^n}$.

37. С помощью признаков Даламбера или Коши исследовать на сходимость следующие ряды.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

38. Решают ли признаки Коши и Даламбера вопрос о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$?

39. Сформулируйте специальный признак сходимости Коши числового ряда, устанавливающего сходимость или расходимость ряда в зависимости от сходимости или расходимости ряда, образованного из довольно «редкой» подпоследовательности последовательности членов исходного ряда.

40. Используя специальный признак Коши, исследуйте вопрос о сходимости следующих рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p(n)}$.

41. Пусть n_1, n_2, ..., n_k – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Из членов $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ составим новый ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, где

$$b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1},$$
$$b_2 = a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k},$$

т.е. ряд $(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + (a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}) + \ldots$.

а) Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ также сходится, причем к той же сумме, что и исходный ряд.

[**Указание.** Последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ является подпоследовательностью последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.]

б) Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует ли сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

[**Указание.** Рассмотрите ряд $(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$.]

42. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – абсолютно сходящиеся числовые ряды, а λ и μ – некоторые действительные числа. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ абсолютно сходится.

43. Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одновременно либо абсолютно сходятся, либо условно сходятся, либо расходятся.

44. Для каких рядов можно утверждать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

[**Ответ:** для знакопостоянных. Обратите внимание на ряд из указания к вопросу 41 б.]

45. Из данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ образуем два, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, полагая

$$p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}, \quad q_n = \frac{-a_n + |a_n|}{2} \quad (n \in N).$$

Нетрудно видеть, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ получается из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ заменой всех отрицательных его членов на нули, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ – заменой положительных членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на нули, а отрицательных – на противоположные. Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ называют **положительной**, а $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ – **отрицательной частями** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

а) Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно в том и только в том случае, когда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ сходятся. Как выражается сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ через суммы вспомогательных рядов случае его абсолютной сходимости?

[**Указание.** Воспользуйтесь соотношениями:

$$0 \le p_n \le |a_n|, \qquad 0 \le q_n \le |a_n|, \qquad |a_n| = p_n + q_n .]$$

б) Можно ли утверждать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то оба ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$, расходятся?

46.Пусть $\varphi : N \to N$ – биекция множества натуральных чисел на себя. Для данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где $b_n = a_{\varphi(n)}$, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$. Об этом ряде говорят, что он получен из ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **перестановкой** его членов.

а) Доказать, что если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакопостоянны, а сам ряд сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится, причем к той же сумме, что и исходный ряд.

[**Указание.** Пусть для определенности $a_n \ge 0$ $(n \in N)$, $S_n(b)$ и $S_n(a)$ - n - ые частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, соответственно, а $S(a)$ – сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Для $n \in N$ положим

$$m = max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}.$$

Тогда

$$S_n(b) = b_1 + \dots + b_n = a_{\varphi(1)} + \dots + a_{\varphi(n)} \le a_1 + \dots + a_m = S_m(a) \le S(a),$$

т.е. последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничена сверху числом $S(a)$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и сумма $S(b)$ его не превосходит $S(a)$. Так как, в свою очередь, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ получается перестановкой членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то $S(a) \le S(b)$.]

б) Докажите, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то полученный из него перестановкой членов ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также сходится абсолютно, причем к той же сумме.

[**Указание.** Воспользуйтесь утверждением (а) и упражнением 45 (а).]

в) Пользуясь равенством

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = C + ln(n) + \varepsilon_n ,$$

где C – постоянная Эйлера, а $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, покажите, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = ln\, 2,$$

а сумма ряда

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$$

равна $\frac{3}{2} ln\, 2$.

[**Обсуждение.** Упражнение показывает, что перестановка членов условно сходящегося ряда изменяет, вообще говоря, его сумму. Можно показать (например, с помощью упражнения 45 б) что перестановкой членов такого ряда можно образовать вовсе расходящийся ряд.)]

47.Верно ли, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ сходится, то сходятся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$? Когда такое утверждение справедливо?

6. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задается формулой

$$x_n = f(n),\ n \in N, \tag{1}$$

выражающей значение n – го члена последовательности через номер n, то говорят, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ **задана явно**, а формулу (1) называют **формулой общего члена последовательности**. Последовательность может задаваться и неявным образом. В частности, говорят, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задана **рекуррентной формулой** или **рекуррентно**, если указаны несколько ее первых членов, $x_1, x_2, \dots, x_p\ (p \ge 1)$, и формула, выражающая n – ый член последовательности через ее предыдущие члены.

Пример 1. Пусть a, b, c, k и l – некоторые действительные числа. Доказать, что существует, притом единственная числовая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, такая, что $x_1 = a, x_2 = b$ и

$$x_{n+2} = k \cdot x_{n+1} + l \cdot x_n + c \tag{2}$$

при всех $n \in N$.

Доказательство. Существование последовательности докажем прямым построением требуемой последовательности. А именно, сопоставим каждому $n \in N$ число x_n по следующему правилу:

$$x_1 = a, \qquad x_2 = b,$$

$$x_3 = k \cdot x_2 + l \cdot x_1 + c \quad (\text{т.е. } x_3 = k \cdot b + l \cdot a + c),$$

и далее, по индукции, если $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\ (n \ge 3)$ уже определены, то полагаем

$$x_n = k \cdot x_{n-1} + l \cdot x_{n-2} + c.$$

Тогда последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет своими первыми двумя членами числа a и b, соответственно, и кроме того, члены ее по построению удовлетворяют соотношениям (2).

Единственность. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – такие последовательности, что $x_1 = y_1 = a, x_2 = y_2 = b$ и

$$x_{n+2} = k \cdot x_{n+1} + l \cdot x_n + c, \qquad y_{n+2} = k \cdot y_{n+1} + l \cdot y_n + c$$

при всех $n \in N$.

Рассмотрим разность последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, т.е. положим, $z_n = x_n - y_n$, $n \in N$. Тогда $z_1 = z_2 = 0$ и

$$z_{n+2} = k \cdot z_{n+1} + l \cdot z_n \qquad (3)$$

при всех $n \in N$.

Из соотношений (3) при $n = 1$ получим

$$z_3 = k \cdot z_2 + l \cdot z_1 = k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0,$$

т.е. $z_3 = 0$. Предположим, по индукции, что $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_m = 0$ для некоторого $m \geq 3$. Тогда, полагая $n = m - 1$ в (3), получим:

$z_{m+1} = k \cdot z_m + l \cdot z_{m-1}$ = [в силу предположения индукции] $= k \cdot 0 + l \cdot 0 = 0$,

т.е. $z_{m+1} = 0$. Таким образом, согласно принципу математической индукции, последовательность $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ – нулевая. Последнее означает, что $x_n = y_n$ при всех $n \in N$, т.е. последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ совпадают. ■

Пример 2. Вывести формулу общего члена для **последовательности Фибоначчи**, задаваемой следующими рекуррентными соотношениями:

$x_1 = 0, x_2 = 1$ и

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad (4)$$

при всех $n \in N$.

Решение. Найдем сначала вспомогательные последовательности вида $(\lambda^n)_{n=1}^{\infty}$, где λ – отличное от нуля число, удовлетворяющие соотношениям (4).

После подстановки $x_n = \lambda^n$ в (4) получим следующее (**характеристическое**) уравнение относительно λ:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, соотношениям (4) удовлетворяют последовательности $(\lambda_1^n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\lambda_2^n)_{n=1}^{\infty}$.

Далее, нетрудно убедиться (непосредственной подстановкой в (4)), что соотношениям (4) удовлетворяет каждая последовательность вида

$$x_n = \alpha \cdot \lambda_1^n + \beta \cdot \lambda_2^n, \quad n \in N, \qquad (5)$$

где α и β – произвольные действительные числа. Выберем числа α и β так, чтобы $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$ у последовательности вида (5). Требуемые равенства приводят к системе

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0, \\ \alpha\lambda_1^2 + \beta\lambda_2^2 = 1, \end{cases}$$

решая которую, получим

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_1(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}, \qquad \beta = \frac{1}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)}.$$

Следовательно, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ с общим членом

$$x_n = \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n, \ n \in N,$$

т.е.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right), \ n \in N, \tag{6}$$

удовлетворяет всем соотношениям, указанным в условии задачи. Но согласно примеру 1 имеется только одна последовательность, удовлетворяющая таким соотношениям. Следовательно, равенство (6) определяет общий член последовательности Фибоначчи. ■

Пример 3. Найти формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями:

$$x_1 = a, \ x_2 = b, \ x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n, \ n \in N. \tag{7}$$

Решение. Поступая так же, как в примере 2, придем к характеристическому уравнению $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, корни которого - $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
Таким образом, одной из последовательностей, удовлетворяющих соотношениям (7) является последовательность $(\lambda_1^n)_{n=1}^{\infty} = (1)_{n=1}^{\infty}$.

Непосредственной подстановкой в (7) легко показать, что еще одной последовательностью. удовлетворяющей соотношениям (7), является последовательность $(n \cdot \lambda_1^n)_{n=1}^{\infty} = (n)_{n=1}^{\infty}$ (убедитесь в этом!). Следовательно, соотношениям (7) удовлетворяет каждая последовательность вида:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha \cdot n + \beta)_{n=1}^{\infty}$$

где α и β – произвольные действительные числа.

Выберем числа α и β так, чтобы $x_1 = a$, $x_2 = b$. Для этого положим $\alpha = b - a$ и $\beta = 2a - b$. Таким образом, последовательность с общим членом

$$x_n = (b - a) \cdot n + 2a - b, \ n \in N, \tag{8}$$

удовлетворяет всем соотношениям, указанным в условии задачи. Следовательно, равенство (8) определяет общий член заданной в задаче последовательности. ■

Пример 4. Найти формулу общего члена последовательности, заданной соотношениями:

$$x_1 = a, \ x_2 = b, \ x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n, \ n \in N. \tag{9}$$

Решение. Характеристическое уравнение соотношений (9)

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

не имеет действительных корней; его корни – комплексные числа:

$$\lambda_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Поэтому вспомогательные последовательности действительных чисел, удовлетворяющие соотношениям (9), построим следующим образом.

Соотношениям (9) удовлетворяет каждая (комплексная, вообще говоря) последовательность вида

$$x_n = \alpha \cdot \lambda_1^n + \beta \cdot \lambda_2^n, \quad n \in N,$$

т.е.

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\alpha e^{i\frac{\pi n}{4}} + \beta e^{-i\frac{\pi n}{4}}\right), \; n \in N, \tag{10}$$

где α и β – произвольные комплексные числа. В частности, при $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, соотношениям (9) удовлетворяет последовательность

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot cos\left(\frac{\pi n}{4}\right), \quad n \in N,$$

члены которой – вещественные числа. Вторую последовательность действительных чисел, удовлетворяющую (9), получим, положив в (10) $\alpha = -\beta = \frac{1}{2i}$:

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot sin\left(\frac{\pi n}{4}\right), \; n \in N.$$

Итак, мы построили две вспомогательные последовательности действительных чисел, удовлетворяющие соотношениям (9). Дальнейший ход решения задачи повторяет рассуждения предыдущих двух примеров.

Соотношениям (9) удовлетворяет каждая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ вида

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(\alpha\, cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \beta\, sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right), \; n \in N,$$

где α и β – произвольные действительные числа. Выбирая α и β так, чтобы $x_1 = a$, $x_2 = b$, получим, что общий член последовательности, указанной в условии задачи, определяется равенством

$$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cdot \left(\left(a - \frac{b}{2}\right) cos\left(\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{b}{2} sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)\right), \; n \in N. \blacksquare$$

Пример 5. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задана следующими рекуррентными соотношениями:

$$x_1 = 3, \; x_{n+1} = 0{,}5\, x_n^2 - 1, n \in N.$$

Доказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

а) ограничена снизу, но неограничена сверху;

б) возрастает.

Доказательство. Из рекуррентного соотношения

$$x_{n+1} = 0,5\,x_n^2 - 1,\ n \in N,$$

следует, что $x_{n+1} \geq -1$ при $n \in N$ и, следовательно, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу числом -1. Докажем, однако, более точную оценку снизу для членов данной последовательности. А именно, покажем, что $x_n \geq 3$ для всех $n \in N$.

Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ неравенство $x_n \geq 3$ выполняется, т.к. по условию $x_1 = 3$. Пусть доказываемое неравенство выполнено при $n \in N$. Тогда

$$x_{k+1} = 0,5 \cdot x_k^2 - 1 \geq 0,5 \cdot 3^2 - 1 = 3,5 \geq 3,$$

т.е. неравенство $x_n \geq 3$ выполнено и при $n = k + 1$. Следовательно, согласно принципу математической индукции, неравенство $x_n \geq 3$ выполнено при любом $n \in N$.

Оценим теперь разность $x_{n+1} - x_n$. Имеем (при $n \geq 2$):

$$x_{n+1} - x_n = 0,5 \cdot x_n^2 - 0,5 \cdot x_{n-1}^2 = 0,5(x_n + x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \geq 0,5(3 + 3)(x_n - x_{n-1}) = \\ = 3(x_n - x_{n-1}),$$

т.е.

$$x_{n+1} - x_n \geq 3(x_n - x_{n-1}).$$

Применяя эту оценку к разности $x_n - x_{n-1}$, затем к $x_{n-1} - x_{n-2}$ и т.д., к $x_3 - x_2$ получим

$$x_{n+1} - x_n \geq 3(x_n - x_{n-1}) \geq 3^2(x_{n-1} - x_{n-2}) \geq \ldots \geq 3^{n-1}(x_2 - x_1) = 0,5 \cdot 3^{n-1},$$

т.е.

$$x_{n+1} - x_n \geq 0,5 \cdot 3^{n-1},\ n \in N. \tag{11}$$

Так как $0,5 \cdot 3^{n-1} > 0$, то из неравенств (11) следует, что $x_{n+1} > x_n$ при $n \in N$. Следовательно, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая.

Далее, согласно неравенству Бернулли,

$$(1 + 2)^{n-1} \geq 1 + 2(n - 1)$$

Поэтому из (11) следует, что

$$x_{n+1} \geq x_n + 0,5 \cdot 3^{n-1} \geq 3 + 0,5(2n - 1) \geq n + 1,$$

т.е.

$$x_n \geq n$$

при всех $n \in N$. Из последних неравенств легко следует неограниченность сверху последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Действительно, пусть c – произвольное действительное число. Так как множество натуральных чисел N неограничено сверху, то найдется такое $n \in N$, что $n > c$.

Но тогда n – ый член последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ в силу неравенства $x_n \geq n$ будет больше c. Таким образом, для любого $c \in \boldsymbol{R}$ существует x_n, такое, что $x_n > c$. По определению это означает, что $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ неограничена сверху.

Отметим, что возрастание последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ легко также установить, заметив, что знак разности $x_{n+1} - x_n$ совпадает со знаком квадратного трехчлена $0,5\,x_n^2 - x_n - 1$, и так как $x_n \geq 3$, то $x_{n+1} - x_n > 0$. Неограниченность же сверху последовательности $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ можно доказать и с помощью сходящихся последовательностей.

В самом деле, предположим, что $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится (поскольку возрастает); пусть A – ее предел. Так как $x_n \geq 3$ при $n \in N$, то $A \geq 3$. С другой стороны, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $x_{n+1} = 0,5x_n^2 - 1$ получим, что $A = 0,5A^2 - 1$, т.е. $A = 1 - \sqrt{3}$ или $A = 1 + \sqrt{3}$. Но $1 \pm \sqrt{3} < 3 \leq A$. Следовательно, $A < A$ - противоречие. Таким образом, предположение неверно, и последовательность $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ неограничена сверху. ■

Пример 6. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентными соотношениями:

$$x_{n+1} = 0,5\,x_n^2 - 1,\quad n \in N,$$
$$x_1 = 2.$$

Доказать, что:

а) последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная;

б) подпоследовательности $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$ и $(x_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ – финально монотонны.

Доказательство. Ограниченность снизу последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ очевидна: $x_{n+1} = 0,5\,x_n^2 - 1 \geq -1$ при $n \in N$, по условию, $x_1 = 2 \geq -1$.

Покажем, что сверху последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена числом 2. Для этого воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ неравенство $x_n \leq 2$ очевидно выполняется. Предположим, что оно выполняется при некотором $n = k \in N$, т.е. пусть $x_k \leq 2$. Покажем, что неравенство $x_n \leq 2$ выполняется и при $n = k + 1$.

В силу рекуррентного соотношения и предположения индукции имеем:

$$x_{k+1} = 0,5\,x_k^2 - 1 \leq 0,5 \cdot 2^2 - 1 = 1 \leq 2,$$

т.е. $x_{k+1} \le 2$.

Итак, неравенство $x_n \le 2$ выполняется при любом $n \in N$.

Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу и сверху, то она – ограниченная.

Докажем утверждение (б).

Выведем, прежде всего, рекуррентное представление x_{n+2} через x_n. Имеем:

$$x_{n+2} = 0{,}5\, x_{n+1}^2 - 1 = 0{,}5(0{,}5\, x_n^2 - 1)^2 - 1 = 0{,}125\, x_n^4 - 0{,}5\, x_n^2 - 0{,}5,$$

т.е.

$$x_{n+2} = 0{,}125\, x_n^4 - 0{,}5\, x_n^2 - 0{,}5 \ (n \in N).$$

С этого соотношения преобразуем разность $x_{n+2} - x_n$ следующим образом:

$$x_{n+2} - x_n = 0{,}125\,(x_n^4 - 4x_n^2 - x_{n-2}^4 + 4x_{n-2}^2) =$$

$$= 0{,}125(x_n - x_{n-2})(x_n + x_{n-2})(x_n^2 + x_{n-2}^2 - 4).$$

Итак,

$$x_{n+2} - x_n = 0{,}125(x_n - x_{n-2})(x_n + x_{n-2})(x_n^2 + x_{n-2}^2 - 4), \tag{12}$$

(при $n \ge 3$).

Так как $-1 \le x_n \le -0{,}5 < 0$ при $n \ge 3$ (докажите это методом математической индукции!), то при всех $n \ge 5$

$$x_n + x_{n-2} < 0$$

и

$$x_n^2 + x_{n-2}^2 - 4 \le 1 + 1 - 4 < 0,$$

т.е.

$$(x_n + x_{n-2})(x_n^2 + x_{n-2}^2 - 4) > 0.$$

Таким образом, в равенстве (12) разности $x_{n+2} - x_n$ и $x_n - x_{n-2}$ имеют одинаковые знаки. Отсюда, в свою очередь, заключаем, что знак разности $x_{2k+2} - x_{2k}$ совпадает со знаком разности $x_8 - x_6$, а знак $x_{2k+1} - x_{2k-1}$ совпадает со знаком разности $x_7 - x_5$. Прямой подсчет показывает, что $x_8 - x_6 > 0$, а $x_7 - x_5 < 0$. Следовательно, $x_{2k+2} > x_{2k}$ и $x_{2k+1} < x_{2k-1}$ при $k \ge 3$, т.е. последовательность $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$ финально возрастает, а $(x_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ финально убывает. ■

Пример 7. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = A.$$

Доказательство. Пусть ε – произвольное положительное число. Положим $\alpha_n = x_n - A$ и $S_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Тогда

$$S_n - A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, то существует такой номер $N_1 \in \mathbf{N}$, что при $n > N_1$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть, далее, N_2 - такое число, что

$$\frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $N = max\{N_1, N_2\}$ и пусть $n > N$. Тогда

$$|S_n - A| = \left|\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n}\right| \le \frac{|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_{N_1}|}{n} + \frac{|\alpha_{N_1+1}| + \ \ldots + |\alpha_n|}{n} < <$$

$$\frac{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_{N_2}|}{N_2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n - N_1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon.$$

Итак, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N \in \mathbf{N}$, что при $n > N$ выполняется неравенство $|S_n - A| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A$. ■

Пример 8. Доказать, что если $x_n > 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = A.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{13}$$

Пусть сначала $A > 0$. Тогда, в силу (13),

$$\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}} \le \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}}} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

т.е.

$$\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}} \le \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{14}$$

Согласно примеру 7

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \lim_{n\to\infty} x_n = A$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}} = \frac{1}{\dfrac{1}{A}} = A.$$

Следовательно, согласно теореме о предельном переходе в двойном неравенстве, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ существует и равен A.

Если $A=0$, то вместо (14) воспользуемся неравенствами

$$0\le\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}\le\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

Из них, опять же по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве и согласно примеру 7, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$ существует и равен 0, т.е. A. ■

Пример 9. Доказать, что если $y_n>0$ при всех $n\in N$ и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=A,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=A.$$

Доказательство. Положим

$$x_1=y_1,\ x_2=\frac{y_2}{y_1},\ x_3=\frac{y_3}{y_2},\ldots,x_n=\frac{y_n}{y_{n-1}},\ldots$$

Тогда, в силу условия задачи, $x_n>0$ при всех $n\in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. Следовательно, согласно примеру 8, будем иметь:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=A,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=A.$$

Пример 10. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Решение. Положим $y_n=\dfrac{n^n}{n!}$ $(n\in N)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Следовательно, согласно примеру 9,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=e$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e. \blacksquare$$

Пример 11. (Теорема Штольца.) Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ финально возрастает и неограничена сверху. Пусть, далее, последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ такова, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=A.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=A.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что уже сама последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая (это возможно, поскольку отбрасывание конечной совокупности членов последовательности не меняет характер сходимости этой последовательности и оставляет неизменным ее предел в случае, если последний существует).

Пусть ε - произвольное положительное число.

Так как последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ неограничена сверху, то найдется такой ее член x_{N_1}, что $x_{N_1}>0$. В силу же возрастания этой последовательности все ее члены с номерами $n\ge N_1$ будут положительны.

Положим

$$\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}-A=\alpha_n \quad (n\in N).$$

Тогда, так как $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, существует такой номер $N_2\in N$, что при всех $n>N_2$ выполняется неравенство

$$|\alpha_n|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Пусть $\tilde{N}=max\{N_1, N_2\}$ и $n>\tilde{N}$. Тогда, складывая равенства

$$y_{\tilde{N}+1}-y_{\tilde{N}}=A\cdot x_{\tilde{N}+1}-A\cdot x_{\tilde{N}}+\alpha_{\tilde{N}+1}(x_{\tilde{N}+1}-x_{\tilde{N}}),$$

$$y_{\tilde{N}+2}-y_{\tilde{N}+1}=A\cdot x_{\tilde{N}+2}-A\cdot x_{\tilde{N}+1}+\alpha_{\tilde{N}+2}(x_{\tilde{N}+2}-x_{\tilde{N}+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n-y_{n-1}=A\cdot x_n-A\cdot x_{n-1}+\alpha_n(x_n-x_{n-1}),$$

получим

$$y_n - y_{\tilde N} = A\cdot x_n - A\cdot x_{\tilde N} + \alpha_{\tilde N+1}(x_{\tilde N+1} - x_{\tilde N}) + \ldots + \alpha_n(x_n - x_{n-1}),$$

откуда

$$\frac{y_n}{x_n} - A = \frac{y_{\tilde N} - A\cdot x_{\tilde N}}{x_n} + \frac{\alpha_{\tilde N+1}(x_{\tilde N+1} - x_{\tilde N}) + \ldots + \alpha_n(x_n - x_{n-1})}{x_n}.$$

В силу неограниченности сверху последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ найдется такой ее член x_N с номером $N > \tilde N$, что

$$x_N > \frac{2}{\varepsilon}\,|\,y_{\tilde N} - A\cdot x_{\tilde N}|,$$

т.е.

$$\frac{y_{\tilde N} - A\cdot x_{\tilde N}}{x_N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку же последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая, неравенство

$$\left|\frac{y_{\tilde N} - A\cdot x_{\tilde N}}{x_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (16)$$

будет выполняться и при всех $n > N$. Пусть теперь $n > N$. Тогда, пользуясь неравенствами (15) и (16), получим

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - A\right| \le \frac{|\,y_{\tilde N} - A\cdot x_{\tilde N}|}{x_N} + \frac{|\,y_{\tilde N} - A\cdot x_{\tilde N}|}{x_n} + \frac{|\alpha_{\tilde N+1}|(x_{\tilde N+1} - x_{\tilde N}) + \ldots + |\,\alpha_n|(x_n - x_{n-1})}{x_n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{(x_{\tilde N+1} - x_{\tilde N}) + \ldots + (x_n - x_{n-1})}{x_n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{x_n - x_{\tilde N}}{x_n} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{x_{\tilde N}}{x_n}\right) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N \in N$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{y_n}{x_n} - A\right| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = A. \ \blacksquare$$

Пример 12. Найти предел последовательности

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} \quad (n \in N),$$

где k – некоторое натуральное число.

Решение. Обозначим $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ через y_n, n^{k+1} через x_n. Тогда $z_n = \frac{y_n}{x_n}$.

Нетрудно видеть, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая и неограниченная сверху. Исследуем на сходимость последовательность $\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)_{n=1}^{\infty}$. Имеем:

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \frac{1}{n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k+1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k}$$

(мы воспользовались тождеством

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b)(a^k + a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 + \ldots + a\,b^{k-1} + b^k)\ ).$$

Так как при любом натуральном p

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = 1,$$

то заключаем, что последовательность $\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы Штольца (пример 11), а поэтому, согласно ей,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{k+1},$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}. \ ■$$

Пример 13. Пусть $|\,q\,| < 1$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,q^n = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots$$

сходится, и найти его сумму.

Решение. Пусть S_n - n – ая частичная сумма данного ряда, т.е.

$$S_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n.$$

Тогда

$$S_n - q\cdot S_n = q + q^2 + \ldots + q^n - nq^{n+1}.$$

Отсюда получаем, что

$$S_n(1-q) = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1},$$

$$S_n = \frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{n\,q^{n+1}}{1-q}.$$

Так как $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot q^n = 0$ (докажите это!). Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и равен $\frac{q}{(1-q)^2}$. Последнее означает, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, q^n$ сходится и имеет суммой число $\frac{q}{(1-q)^2}$. ■

Пример 14. Пусть члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ представлены в виде

$$a_n = b_{n+1} - b_n,$$

причем последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, который обозначим через b. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна $b - b_1$, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n) = b - b_1.$$

Доказательство. Пусть S_n - n – ая частичная сумма данного ряда. Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1,$$

т.е.

$$S_n = b_{n+1} - b_1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = b$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b - b_1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет суммой число $b - b_1$. ■

Пример 15. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Решение. Так как

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n+2-n}{2n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = b_{n+1} - b_n,$$

где $b_n = -\frac{1}{2n(n+1)}$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ то, пользуясь примером 14, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = 0 - b_1 = \frac{1}{4}. \blacksquare$$

Пример 16. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится.

Доказательство. Так как $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

т.е. $S_n \geq \sqrt{n}$. Из последнего неравенства следует, что последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ данного ряда – неограниченная и, следовательно, расходится. Значит данный ряд расходится. ■

Пример 17. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \dfrac{5 + 3 \cdot (-1)^n}{2^{n+3}}$; 2) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$.

Решение. 1) Так как $2 \leq 5 + 3 \cdot (-1)^n \leq 8$ при всех $n \in N$ то $0 < a_n \leq \dfrac{1}{2^n}$ $(n \in N)$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится. Следовательно, согласно теореме сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5 + 3 \cdot (-1)^n}{2^{n+3}}$ также сходится.

2) Так как $a_n = \dfrac{n+1}{n^2} > \dfrac{1}{n}$ $(n \in N)$, а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ расходится, то, согласно теореме сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{n^2}$ расходится. ■

Пример 18. С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если:

1) $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$; 2) $a_n = \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

Решение. 1) Так как

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1,$$

то, согласно признаку Даламбера, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ абсолютно сходится (x - произвольное действительное число!).

Замечание. Из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ следует, в силу необходимого условия сходимости числового ряда, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$.

2) Так как

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$ расходится. ■

Пример 19. С помощью признака Коши исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}.$$

Решение. Имеем:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \frac{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n}.$$

Согласно примеру 10

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Далее, так как при $n \geq 4$

$$1 \leq n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \leq n^{\frac{1}{2}}$$

то финально, при $n \to \infty$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{n} \leq \frac{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Следовательно, по теореме о предельном переходе в двойном неравенстве,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n} = 0.$$

Таким образом,

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{n} = 0 < 1,$$

и, согласно признаку Коши, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}$ сходится. ■

Замечание. В силу необходимого условия сходимости числового ряда заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!} = 0.$$

Пример 20. Доказать, что если последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ монотонно стремится к нулю и $\alpha \neq 2\pi m$ $(m \in \mathbf{Z})$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\alpha)$ сходится.

Доказательство. Пусть S_n - n -ая частичная сумма данного ряда, т.е.

$$S_n = b_1 \cos(\alpha) + b_2 \cos(2\alpha) + \ldots + b_n \cos(n\alpha).$$

Тогда

$$2\sin\frac{\alpha}{2} S_n = b_1\, 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(\alpha) + b_2\, 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(2\alpha) + \ldots + b_n\, 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(n\alpha) =$$

$$= b_1\left(\sin\frac{3\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + b_2\left(\sin\frac{5\alpha}{2} - \sin\frac{3\alpha}{2}\right) + \ldots + b_n\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - \sin\frac{(2n-1)\alpha}{2}\right) =$$

$$= b_n \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - b_1 \sin\frac{\alpha}{2} + (b_1 - b_2)\sin\frac{3\alpha}{2} + (b_2 - b_3)\sin\frac{5\alpha}{2} + \ldots +$$

$$+ (b_{n-1} - b_n)\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2} = b_n \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2} - b_1 \sin\frac{\alpha}{2} + \sigma_{n-1},$$

где σ_{n-1} – $(n-1)$ -ая частичная сумма ряда

$$\sum_{k=2}^{\infty}(b_{k-1} - b_k)\sin\frac{(2k-1)\alpha}{2}. \tag{17}$$

Итак,

$$S_n = \frac{b_n \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{b_1}{2} + \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sigma_{n-1}. \tag{18}$$

Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\left|(b_{k-1} - b_k)\sin\frac{(2k-1)\alpha}{2}\right|$ очевидно, мажорируется рядом

$$\sum_{k=2}^{\infty}(b_{k-1} - b_k) = -\sum_{k=2}^{\infty}(b_k - b_{k-1}),$$

если последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ – убывающая, и рядом

$$\sum_{k=2}^{\infty}(b_k - b_{k-1})$$

если последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ – возрастающая. Так как, согласно примеру 14, ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}(b_k - b_{k-1})$ сходится, то, в силу мажорантного признака Вейерштрасса абсолютной сходимости числового ряда, ряд (17) сходится абсолютно и, следовательно, сходится. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_{n-1}$ существует. Далее, существует и равен нулю

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\lim_{n\to\infty} b_n \sin\frac{(2n+1)\alpha}{2},$$

так как последовательность $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая, а $\left(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная. Следовательно, из равенства (18) заключаем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\cos(n\alpha)$ сходится. ■

Пример 21. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$$

не является абсолютно сходящимся.

Доказательство. Пусть S_n - n – ая частичная сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n} \right|$. Так как $|\cos n| \ge \cos^2 n = \frac{1 + \cos 2n}{2}$, то

$$S_n = \frac{|\cos 1|}{1} + \frac{|\cos 2|}{2} + \ldots + \frac{|\cos n|}{n} \ge \frac{1 + \cos 2}{2 \cdot 1} + \frac{1 + \cos 4}{2 \cdot 2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1 + \cos 2n}{2 \cdot n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2}{1} + \frac{\cos 4}{2} + \ldots + \frac{\cos 2n}{n}\right),$$

т.е.

$$S_n \ge \frac{1}{2} S'_n + \frac{1}{2} S''_n \,, \tag{19}$$

где S'_n и S''_n - n – ые частичные суммы, соответственно, гармонического ряда и ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}. \tag{20}$$

Так как гармонический ряд расходится и члены его – положительные числа, то последовательность частичных сумм $(S'_n)_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху. Ряд же (20) сходится, согласно примеру 20 $(b_n = \frac{1}{n}, \ \alpha = 2)$, а потому последовательность $(S''_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная. Следовательно, из неравенств (19) заключаем, что последовательность $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ не ограничена сверху и, значит, не может быть сходящейся. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n} \right|$ расходится. ■

1\. 1) Найти формулу общего члена последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, заданной соотношениями:

$$x_1 = a, \quad x_{m+n} = x_m + x_n + m \cdot n \ (m, n \in N).$$

2) Существует ли последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что для любых $m, n \in N$ выполняется равенство

$$x_{m+n} = x_m + x_n + m + n?$$

2. Найти формулу общего члена последовательности, заданной рекуррентным способом (a, b, α и β – заданные числа):

1) $x_1 = 0,\ \ x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{n+1}\ \ (n \in N)$;

2) $x_1 = a,\ \ x_{n+1} = (n+1)(x_n + 1)\ \ (n \in N)$;

3) $x_1 = 1,\ \ x_n = x_{n-1} + a^n\ \ (n \in N)$;

4) $x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_{n+1} = \dfrac{1}{2 - x_n}\ \ (n \in N)$;

5) $x_1 = a,\ \ x_{n+1} = \alpha \cdot x_n + \beta \cdot 2^n\ (\alpha \neq 2,\ n \in N)$;

6) $x_1 = \dfrac{1}{2},\ \ x_{n+1} = \dfrac{2}{3 - x_n}\ \ (n \in N)$;

7) $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n\ \ (n \in N)$;

8) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+2} = \dfrac{3}{2}x_{n+1} - \dfrac{1}{2}x_n\ \ (n \in N)$;

9) $x_1 = 2,\ \ x_n = 3x_{n-1} + 1,\ n = 2, 3, \ldots$;

10) $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1},\ n = 2, 3, \ldots$.

1. Последовательность натуральных чисел a_1 , a_2 , a_3 , ... удовлетворяет условиям $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$ при $n \in N$. Доказать, что для любого значения $n \in N$ существует такое число $m \in N$, что $a_n \cdot a_{n+1} = a_m$.

4. Исследовать на монотонность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n = \dfrac{3n+2}{2n}$;

2) $x_n = n^3 + 2n$;

3) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 10}$;

4) $x_n = \dfrac{n^2 + 16}{n^2 + 3}$;

5) $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$;

6) $x_n = (-1)^{n+1}$;

7) $x_n = 2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

5. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задана соотношениями:

$$x_1 = a,\ \ x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}\ \ (n \in N).$$

Доказать, что:

1) последовательность возрастает, если $a = 0$;

2) последовательность убывает, если $a = 4$.

[**Указание.** С помощью равенства $x_{n+1}^2 - x_n^2 = x_n - x_{n-1}$ сравнить знаки разностей $x_{n+1} - x_n$ и $x_n - x_{n-1}$.]

6. Последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ заданы рекуррентным способом:

$$x_1 = a > 0,\ y_1 = b > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n),\ y_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + y_n^2}{2}},\ n \in N.$$

Доказать, что

1) $y_n \geq x_n$ при $n \geq 2$;

2) последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ финально возрастает;

3) последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ финально убывает;

4) $|y_{n+1} - x_{n+1}| \leq \dfrac{b-a}{4^n}$.

7. Найти все значения $a_0 \in \mathbf{R}$, для которых последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$, определенная равенствами $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ $(n \in \mathbf{N})$, возрастает.

8. Для последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ определим последовательности $(\Delta x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(\Delta^2 x_n)_{n=1}^{\infty}$ равенствами:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n,\ \Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Для тех $n \in \mathbf{N}$, при которых $\Delta^2 x_n \neq 0$, положим

$$x_n' = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}.$$

1) Для каких последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ последовательность $(\Delta^2 x_n)_{n=1}^{\infty}$ постоянна?

2) Найти все последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, для которых числа x_n' определены при всех значениях $n \in \mathbf{N}$ и последовательность $(x_n')_{n=1}^{\infty}$ постоянна (отдельно рассмотреть случай, когда $x_n' = 0$ при всех $n \in \mathbf{N}$).

9. Выясните, существует ли такой числовой промежуток $[a, b]$, $a, b \in \mathbf{R}$, которому принадлежат все члены каждой из последовательностей с общим членом x_n:

1) $x_n = \dfrac{2n-1}{n+2}$;

2) $x_n = -3 + \dfrac{2}{9^n}$;

3) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$;

4) $x_n = n^2$.

10. Доказать, что при произвольно выбранном фиксированном x последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{[nx]}{n}$ ограничена.

11. Доказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, где $x_n = \dfrac{2^n+1}{2^n}$, ограничена и монотонно убывает.

12. Найти наибольший член последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$;

3) $x_n = \dfrac{90n}{n^2+9}$;

2) $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100 + n}$; 4) $x_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

13. Найти наименьший член последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n = n + \dfrac{100}{n}$;

2) $x_n = n^2 - 9n - 100$.

14. Доказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, где x_n есть n – я цифра иррационального числа $\sqrt{2}$, не может быть монотонной.

15. Показать, что последовательность с общим членом $x_n = 2^n$ – неограничена и монотонно возрастает.

16. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+2} = 2$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+1}{3^n} = 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} = \dfrac{3}{5}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(|q| < 1)$.

17. Дана последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{3n-5}{9n+4}$. Сколько значений последовательности находится вне интервала

$$\left]\frac{1}{3} - \frac{1}{1000}; \frac{1}{3} + \frac{1}{1000}\right[?$$

18. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2}{5\sqrt[3]{n}+1}$ бесконечно малая. Найти номер $N \in \mathbf{N}$, начиная с которого члены x_n принадлежат интервалу $\left]-\dfrac{1}{10}; \dfrac{1}{10}\right[$.

19. Доказать, что число $A = 0$ не является пределом последовательности с общим членом $x_n = \dfrac{n^2-4}{2n^2-10}$.

20. Доказать, что предел последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не существует, если:

1) $x_n = (-1)^n + \dfrac{n+2}{n}$;

2) $x_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2n}{n-3}$ $(n > 3)$;

3) $x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{если } n = 2k-1 \\ \dfrac{n}{n+2}, \text{если } n = 2k \ (k \in \mathbf{N}). \end{cases}$

21. Пусть α_n есть внутренний угол правильного n – угольника $(n = 3, 4, \dots)$. Написать несколько первых членов последовательности $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \pi$.

22. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно: $x_1 = \beta$ и при $n \geq 1$ $x_{n+1} = a x_n$. При каких значениях a эта последовательность сходится?

23. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задана рекуррентно: $x_1 = \beta$ и при $n \geq 1$ $x_{n+1} = -x_n$. При каких значениях β эта последовательность сходится? Расходится?

24. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

25. Пусть дана последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

1) Если $x_n \in N$ для любых $n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то может ли число $A \notin N$?

2) Доказать, что если $x_n \in N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ финально постоянная.

26. Найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n!}{n+1}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n^2 + 1997} - n\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n})$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{3}\left(\sqrt[3]{1 + \dfrac{3}{n^3}} - 1\right)$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$ $(|a| < 1, |b| < 1)$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ $(a > 0)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1}{n^3}$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{3^2}{n^3} + \dots + \dfrac{(2n-1)^2}{n^3}\right)$;

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \dots + \dfrac{2n-1}{2^n}\right)$;

12) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)}{n^3}$;

13) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\left(a+\dfrac{1}{n}\right)^2 + \left(a+\dfrac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(a+\dfrac{n-1}{n}\right)^2\right)$;

14) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$.

27. При каких a последовательность с общим членом $x_n = \sqrt{an^2 + bn + 2} - n$, $n \in N$ имеет предел? Чему он равен?

28. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{[nx]}{n}$, где $[nx]$ – целая часть nx, x - некоторое действительное число.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} [kx]}{n^2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}} - 1\right)$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k^2}{n^3}} - 1\right)$.

29. Определить λ и μ из условия

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3} - \lambda n - \mu\right) = 0.$$

30. Построить эскизы графиков функций:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ $(x \geq 0)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x \geq 0)$.

31. Найти x, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1997}}{n^x - (n-1)^x} = \frac{1}{1998}.$$

32. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(a > 1)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$ $(|q| < 1)$.

33. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность достигает либо своей точной верхней грани, либо своей нижней грани, либо и той, и другой. Построить примеры последовательностей всех трех типов.

34. Доказать сходимость следующих последовательностей

1) $x_n = 1 + \frac{1^2}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \ldots + \frac{n^2}{4^n}$;

2) $x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}$;

3) $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$;

4) $x_n = \left(1+\frac{1}{1^2+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^2+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)$;

5) $x_1 = \sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ldots,\ x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}},\ \ldots$;

6) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

1. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность чисел, определяемая равенствами: $x_1 = a\ (a > 0)$ и $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$ при $n \geq 1$. Доказать, что.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

36. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ задается рекуррентным соотношением

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{3 - x_{n-1}},\quad x_1 = a,$$

где a – некоторое число, удовлетворяющее неравенству $1 < a < 2$. Доказать существование предела $\lim_{n\to\infty} x_n$ и вычислить его.

37. Последовательность чисел x_n $(n \in N)$ определяется следующими формулами:

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}\quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.

38. Пусть $x_0 > 0$ – произвольно,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$.

39. Доказать, что последовательность чисел, определяемая рекуррентным соотношением $a_1 = 0,\ a_n = \frac{a_{n-1} + 3}{4}$ имеет предел и найти этот предел.

40. Пусть $x_n \le x_{n+1}$, $y_{n+1} \le y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Доказать, что последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

41. Пусть $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ последовательность площадей правильных 2^{n+1} – угольников, вписанных в окружность радиуса R, а $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ последовательность площадей правильных 2^{n+1} – угольников, описанных около той же окружности. Доказать, что последовательности $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ - имеют общий предел. Чему равен этот предел?

42. Доказать, что последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ определяемые равенствами $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$, $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ имеют одинаковые пределы, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

43. Исследовать на сходимость следующие последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$:

1) $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$,

где $|a_k| \le M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $|q| < 1$;

2) $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{2^n}$ $(n \in N)$;

3) $x_n = \dfrac{\cos(1!)}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos(2!)}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos(n!)}{n(n+1)}$ $(n \in N)$;

4) $x_n = \dfrac{\mathrm{arctg}(1!)}{2} + \dfrac{\mathrm{arctg}(2!)}{2^2} + \ldots + \dfrac{\mathrm{arctg}(n!)}{2^n}$ $(n \in N)$;

5) $x_n = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \ldots + \dfrac{1}{\ln n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$;

6) $x_n = \dfrac{1}{2\ln^2 2} + \dfrac{1}{3\ln^2 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$;

7) $x_n = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{1!} + \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{n!}$ $(n \in N)$.

1. Показать, что каждое действительное число является пределом последовательностей своих десятичных приближений по недостатку и по избытку.

45. Последовательность $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ получена перестановкой членов последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, т.е. для любого n существует k_n такое, что $x_n = y_{k_n}$; при этом если $n_1 \ne n_2$, то $k_{n_1} \ne k_{n_2}$ и обратно, для любого k существует такое n_k, что $y_k = x_{n_k}$, причем, если $k_1 \ne k_2$, то $n_{k_1} \ne n_{k_2}$. Доказать, что:

1) Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то и $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = a$.

2) Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится, то и $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ расходится.

46. Доказать, что если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, то последовательность

$$y_n = max\{x_1, x_2, \dots, x_n\},\ n \in N$$

также сходится. Справедливо ли обратное утверждение?

47. Подпоследовательности $(x_{2k})_{k=1}^{\infty}$ и $(x_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеют один и тот же предел. Доказать, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится.

48. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена,

$$y_n = max\{x_1, x_2, \dots, x_n\},\ z_n = min\{x_1, x_2, \dots, x_n\},\ n \in N.$$

Доказать, что последовательности $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ сходятся. Обязательно ли их пределы являются частичными пределами последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$?

49. Для последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ найти $inf\, x_n$, $sup\, x_n$, $\underline{lim}_{n\to\infty} x_n$, $\overline{lim}_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 + \frac{3}{n}\right)$;

2) $x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

3) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot cos\frac{n\pi}{2}$;

4) $x_n = \frac{1}{n - 10{,}2}$.

50. Найти $\underline{lim}_{n\to\infty} x_n$ и $\overline{lim}_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + sin\frac{n\pi}{4}$;

2) $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{(-1)^n \cdot n}}$;

3) $x_n = \frac{n}{n+1} \cdot sin^2\frac{n\pi}{4}$;

4) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot cos\frac{2\pi n}{3}$.

51. Построить пример последовательности:

1) не имеющей конечных частичных пределов;

2) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;

3) имеющей бесконечное множество частичных пределов.

52. Докажите расходимость последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если:

1) $x_n = \log_a (2 + (-1)^n),\ a > 0,\ a \neq 1$;

2) $x_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^n}{(-2)^n + 3^{n+1}}$;

3) $x_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot k,\ \ k \in N$;

4) $x_n = \arcsin \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n+1}$.

53. Доказать, что числовая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей точной нижней грани.

54. Доказать, что:

1) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \to \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$;

2) $\underline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \to \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \to \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \to \infty} y_n$.

55. Доказать, что $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \dfrac{1}{n}$, если $n > 1$.

56. Доказать, что $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}$, если $n > 1$.

57. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

где n – любое натуральное число.

58. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n \in N)$$

сходится. [Таким образом, имеет место формула $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$; значение C известно: $C = 0{,}577216\ldots$ - это, так называемая, постоянная Эйлера; $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.]

59. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

60. Найти пределы

1) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)^n$;

2) $x_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$;

4) $x_n = \left(\dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}\right)^n$;

5) $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$;

3) $x_n = \left(\dfrac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$; 6) $x_n = \left(\dfrac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{n^2}$.

61. Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – арифметическая прогрессия с разностью $d \neq 0$. Найти:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_1 \cdot a_2} + \dfrac{1}{a_2 \cdot a_3} + \ldots + \dfrac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}\right)$, если $a_n \neq 0$, $n \in N$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}\right)$.

62. Вычислить:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}}$ $(m \in N, n \in N)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^m} - \dfrac{n}{m+1}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^m+3^m+5^m+\ldots+(2n-1)^m}{n^{m+1}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^m+3^m+5^m+\ldots+(2n-1)^m}{n^m} - \dfrac{2^m \cdot n}{m+1}\right)$.

1. Доказать следующие равенства:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \dfrac{1}{3}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\dfrac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n^3-1}{n^3+1} = \dfrac{2}{3}$;

[**Указание.** Использовать тождество $(k+1)^2-(k+1)+1 = k^2+k+1$.]

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{17}{16}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2^{2^n}+1}{2^{2^n}} = 2$.

64. Даны числа a и b, где $a > b > 0$. Из них составляются числа a_n и b_n по формулам: $a_1 = a$, $b_1 = b$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ и $b_{n+1} = \dfrac{2a_n \cdot b_n}{a_n+b_n}$ $(n \in N)$. Доказать, что $a_n \cdot b_n = a \cdot b$, $\dfrac{a_n-\sqrt{a_n \cdot b_n}}{a_n+\sqrt{a_n \cdot b_n}} = \left(\dfrac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}\right)^{2n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n = \sqrt{ab}$.

65. Исследовать на сходимость следующие ряды; для сходящихся рядов найти их суммы.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)(2n+1)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$.

66. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-1}\right)^n$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n\cdot 3^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^n$.

7) $1+\frac{2}{1+2^2}+\frac{2^2}{1+2^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+2^{2n}}+\ldots$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{5^n}$;

12) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$.

67. Пользуясь специальным признаком сравнения Коши, исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\log_2^2 n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ \ln n\ \ln\ln n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$.

68. Доказать с помощью рядов:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^n}{n^{n^2}}=0$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{n^2}}{((3n)!)^n} = 0$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{(n!)^2} = 0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{a^n} = 0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 9 – е изд. – М.: Наука, 1977.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1. - М.: Наука, 1981.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. – 4 – е изд., переработ. и доп. – М.: Наука, 1982.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.
5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость./ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984.
6. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М.: Наука, 1967.
7. Лабораторный практикум по математическому анализу./ Бруй И.Н., Гаврилюк А.В., Ермаков В.Г. и др. – Мн.: Выш. шк., 1991.
8. Тер – Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1969.
10. Хавин В.П. Основы математического анализа. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной вещественной переменной. – Л.: Изд – во Ленингр. ун – та, 1989.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

УСС Анатолий Терентьевич
ШИЛО Таисия Ильинична

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Учебно – методическое пособие

Рецензенты: В.Н. Русак, доктор физ – мат. наук профессор, зав. кафедрой высшей математики Белгосуниверситета;
кафедра математического анализа Белорусского государственного педагогического университета имени М. Танка.

Редактор: Усс А.Т.

Ответственный за выпуск: В.М. Крюков.

Полиграф. лицензия ЛП № 260 от 30. 04. 98. Подписано в печать 15. 09. 98. Формат 60 × 84 / 16. Бумага Ксерокс. Усл. печ. л. 4,6. Уч. – изд. л. 4,2. Тираж 200 экз. Заказ № 18.

Отпечатано на ризографе Брестского госуниверситета.
224665, Брест, Советская 8.