Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
Институт математики и механики УрО РАН

АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Тезисы Международной конференции «Алгебра и линейная оптимизация», посвященная 100-летию С.Н.Черникова

Екатеринбург, 14–19 мая, 2012 г.

Екатеринбург
2012

УДК 512.5+512.6+519.1+519.8

АЛГЕБРА И ЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ: Тезисы Международной конференции «Алгебра и линейная оптимизация», посвященная 100-летию С.Н.Черникова Екатеринбург, 14–19 мая 2012 г. — Екатеринбург: издательство «УМЦ-УПИ», 2012, 198 стр.

Сборник содержит материалы Международной конференции по алгебре и линейной оптимизации, проходившей при поддержке РФФИ (проект 12-01-06026-г). Представлены различные аспекты теории групп, теории графов, теории и методов линейных неравенств, линейного и целочисленного программирования и распознавания образов, а также связанных с ними приложений.

ISBN 978-5-8295-0141-9

О π-дополнениях к нормальным подгруппам в конечных группах

О.М. Адарченко, А.Л. Ковалев
Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины, Гомель
e-mail: andrei.kavaleu@gmail.com

Пусть π — некоторое множество простых чисел, G — конечная группа. Через G_p обозначается некоторая силовская p-подгруппа группы G.

Определение 1. Пусть $G = HK$, где H и K — подгруппы из G. Подгруппа H называется: 1) дополнением к K в G, если $H \cap K = 1$; 2) π-дополнением к K в G, если $|H \cap K|$ не делится на числа из π. Если $G = H \times K$, то подгруппа K называется прямо дополняемой в G.

Понятие π-дополнения было использовано Л. А. Шеметковым [1] как метод для отыскания дополнений. Дело в том, что при доказательстве существования π-дополнения можно применять индукцию по числу простых делителей порядка группы, входящих в π. В работе [1] Л.А. Шеметковым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G. Подгруппа K обладает π-дополнением в G, если для любого простого $p \in \pi$ выполняется условие: $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p. В частности, если $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p для любого простого p, не делящего $|G : K|$, то K обладает дополнением в G.*

В работе [2] В.И. Сергиенко доказал дополняемость π-отделимой нормальной подгруппы K при условии, что $G_p \cap K$ прямо дополняема в G_p для любого $p \in \pi(G) \setminus \pi(G/K)$. Нами доказан следующий результат, являющийся аналогом теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G. Подгруппа K обладает π-дополнением в G, если для любого простого $p \in \pi$ выполняется условие: $G_p \cap K$ прямо дополняема в G_p.*

Литература

[1] *Шеметков Л. А.* О существовании π-дополнений к нормальным подгруппам конечных групп // ДАН СССР. 1970, т. 195, № 1, с. 50–52.

[2] *Сергиенко В. И.* Дополнения в конечных группах // Доклады АН БССР. 1981, т. XXV, № 3, с. 200–202.

возможные композиции $K_x[yK_2]$ и произведения $K_n \times K_4$, а также простые случаи: объединения циклов, полных графов, полных двудольных графов, полные двудольные графы с удаленным паросочетанием и т.п.

Таблица 1: Параметры графов, [illegible]лучаемых из циклических групп.

Параметры	Описание
(19,6,2,1)	локально циклический изоморфен $M(19)$ [2]
(20,13,9,8)	
(21,12,7,6)	
(26,13,12,6)	$Paley(13)[K_2]$ [3]
(28,19,15,12)	
(34,17,16,8)	$Paley(13)[K_2]$ [3]
(37,18,9,8)	имеет те же параметры, что и $Paley(37)$
(37,24,16,15)	
(41,20,10,9)	имеет те же параметры, что и $Paley(41)$
(53,26,13,12)	имеет те же параметры, что и $Paley(53)$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1).

Литература

[1] *Erickson M., Fernando S., Haemers W.H., Hardy D. and Hemmeter J.* Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs// J. Comb. Designs. 1999. V. 7 P. 359-405.

[2] *Зарипов С.Р., Махнев А.А., Яблонко И.П.* О сильно регулярных графах без треугольников // Алгебра и линейная оптимизация: сб. тр. Междунар. семинара, посвящ. 90-летию со дня рождения С.Н. Черникова / И[illegible] математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2002. С. 117-121

[3] *Ермакова Г.М., Кабанов В.В.* Графы Деза, которые являются кликовыми расширениями сильно регулярных графов // Проблемы теорет. и прикл. математики: тр. 37-й Регион. молодёж. конф.. ИММ УрО РАН. 2006. С. 27-29.

О производной π-длине конечной π-разрешимой группы

Д. В. Гри[illegible]к, О. А. Шпырк[illegible]

Гомельский гос[illegible]ситет им. Ф. Скорины,

Филиал МГУ им. [illegible]. В. Ломоносова в Севастополе

e-mail: Dmitry.Gritsuk@gmail.com, sh[illegible]@mail.ru

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и определения соотвествуют [1]

Понятие p-длины p-разрешимых групп предложили Холл и Хигмэн [2]. Они установили зависимость p-длины p-разрешимой группы от некоторых инвариантов ее силовской p-подгруппы. Элементарная теория p-длины изложена в монографии Хупперта [3, V

Картер, Фишер и Хоукс [4] ввели понятие нильпотен[illegible]й π-длины разрешимой группы как обобщение нильпотентной длины и p-длины одновременно. Одной из первых работ по ни[illegible]льпотентной π-длине π-разрешимой группы была статья Ку[illegible]та [5]. Оценкам нильпотентной π-длины π-разрешимой группы посвящены работы В. С. Монахова и О. А. Шпырко [6, 7].

Пусть G — π-разрешимая гру[illegible]. Тогда она обладает субнормальным рядом

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_{n-1} \supseteq G_n = 1,$$

факторы G_{i-1}/G_i которого являются либо π'-группами, либо абелевыми π-группами, $i = 1, 2, \ldots, n$. Наименьшее число абелевых π-факторов среди всех таких субнормальных рядов группы G называется производной π-длиной π-разрешимой группы G и обозна[illegible] $l^a_\pi(G)$.

Ясно, что в случае $\pi = \pi(G)$ значение $l^a_\pi(G)$ совпадает со значением производной длины группы G.

Сво[illegible]ва π-длины $l_\pi(G)$ и нильпотентной π-длины $l^n_\pi(G)$ π-разрешимой [illegible]уппы можно найти в работах [6, 7]. Свойства производной [illegible]лины во многих схожи, но есть и отличия. Например,

$$l_\pi(G) = l_\pi(G/\Phi(G)), \quad l^n_\pi(G) = l^n_\pi(G/\Phi(G)),$$

[illegible] для производной π-длины аналоги этих равенств [illegible]. Здесь $\Phi(G)$ [illegible] подгруппа Фраттини группы G.

Из определения производной π-длины следует, что

$$l^a_\pi(G) \leq l_\pi(G) d(G_\pi),$$

где $d(G_\pi)$ — производная длина π-холловой подгруппы π-разрешимой группы G. Отсюда, в частности, вытекает, что $l_\pi(G) \leq 1$ для группы с абелевой π-холловой подгруппой. Если π-холлова подгруппа метабелева, то производная π-длина в общем случае не превышает 4. Но в некоторых ситуациях значение $l_\pi^a(G)$ можно снизить.

Теорема. *Пусть G — π-разрешимая группа с метабелевой π-холловой подгруппой. Если $2 \notin \pi$, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.*

Напомним, что группой Шмидта называют ненильпотентную группу, в которой все собственные подгруппы нильпотентны.

Следствие. *Если в π-разрешимой группе G π-холлова подгруппа является группой Шмидта, то $l_\pi^a(G) \leq 3$.*

Литература

[1] *Монахов В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа. 2006.

[2] *Hall P., Higman G.* The p-lengh of a p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 3, № 7. P. 1–42.

[3] *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin, Heidelberg, New York. 1967.

[4] *Carter R., Hawkes T.* Extreme Classes of finite soluble groups // J.Algebra. 1968. V. 9, № 3. P. 285–313.

[5] *Numata M.* On the π-nilpotent length of π-soivable groups // Osaka J. Math. 1971. V. 8. P. 447–451.

[6] *Монахов В.С., Шпырко О.А.* О нильпотентной π-длине конечных π-разрешимых групп // Дискретная математика. 2001. Т. 13, вып. 3. С. 145–152.

[7] *Монахов В.С., Шпырко О.А.* О нильпотентной π-длине максимальных подгрупп конечных π-разрешимых групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2009. №6. С. 3–8.

О локально разрешимых AFM–группах

О.Ю. Дашкова

Днепропетровский национальный универси

e-mail: odashk...a@yandex.ru

Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $GL(A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $GL(A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $n \times n$-матриц, где $n = dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях науки, и изучались достаточно много. В случае, когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений. К таким ограничениям относятся различные условия конечности. Одним из условий конечности, которое достойно особого внимания, является финитарность линейной группы. Группа G называется финитарной, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A (см., например [1], [2]). Финитарные линейные группы изучались многими алгебраистами, и в этом направлении был получен ряд интересных результатов [2].

В [3] авторы ввели в рассмотрение антифинитарные линейные группы. Пусть $G \leq GL(A)$, $A(wFG)$ — фундаментальный идеал группового кольца FG. Авторы полагают $augdim_F(G) = dim_F(A(wFG))$. Линейная группа G называется антифинитарной, если любая собственная подгруппа H группы G, для которой размерность $augdim_F(H)$ бесконечна, конечно порождена. В [3] исследовались антифинитарные локально разрешимые линейные группы.

Если $G \leq GL(A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbb{R}G$-модуля A, где $\mathbb{R}$ — кольцо. Б. Верфриц ввел в рассмотрение артиново-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbb{R}$ и нетерово-финитарные группы автоморфизмов модуля M над кольцом $\mathbb{R}$, являющиеся аналогами финитарных линейных групп [4, 5]. Группа автоморфизмов $F_1Aut_{\mathbb{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbb{R}$ называется артиново-финитарной, если для любого элемента $g \in F_1Aut_{\mathbb{R}}M$ $A(g-1)$ является артиновым $\mathbb{R}$–модулем. Группа автоморфизмов $FAut_{\mathbb{R}}M$ модуля M над кольцом $\mathbb{R}$ называется нетерово–финитарной, если для любого элемента $g \in FAut_{\mathbb{R}}M$

Содержание