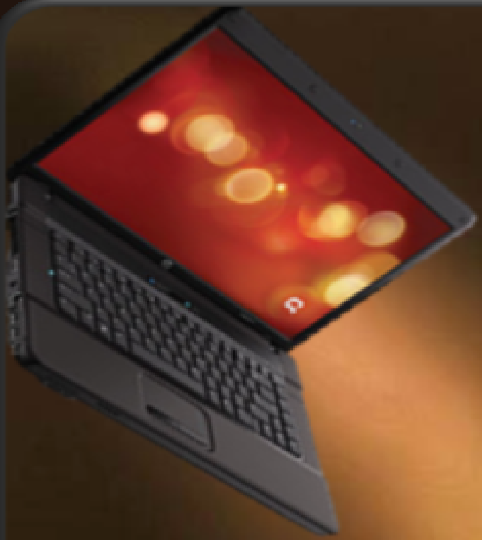
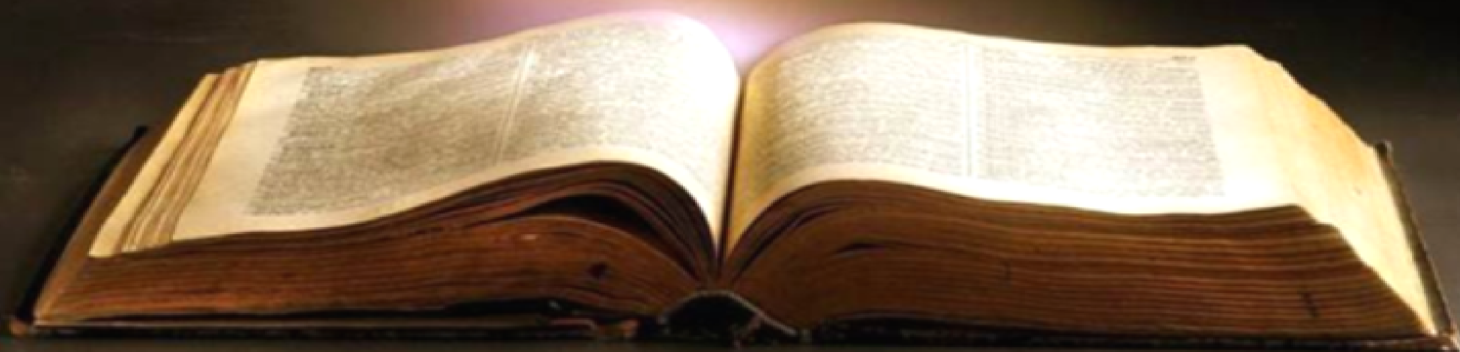


Учреждение образования
«Брестский государственный университет
имени А.С. Пушкина»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. РЯДЫ

Электронный учебно-методический комплекс для студентов специальности «Математика и информатика»



БРЭСЦКІ ДЗЯРЖАЎНЫ ЎНІВЕРСІТЭТ імя А.С. ПУШКІНА
Кафедра
МАДУиП

Авторы:

Марзан Сергей Андреевич — доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина

Сендер Александр Николаевич — заведующий кафедрой алгебры, геометрии и математического моделирования БрГУ имени А.С. Пушкина

Сендер Николай Никитич — заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина

Редактор:

Марзан Сергей Андреевич — доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений БрГУ имени А.С. Пушкина

Рецензенты:

Л.П. Махнист — заведующий кафедрой высшей математики Брестского государственного технического университета,

О.В. Матысик — заведующий кафедрой прикладной математики и информатики БрГУ имени А.С. Пушкина

Знакомство с ЭУМК

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) не предъявляет никаких специальных требований к системе.

В правой части экрана находится навигационная панель. Опишем предназначение кнопок на навигационной панели:

– кнопка «На весь экран» позволяет «развернуть» ЭУМК на весь экран монитора;

– кнопка «Начало» предназначена для быстрого перехода на титульную страницу ЭУМК;

– кнопка «Содержание» предназначена для быстрого перехода к разделу «Содержание» ЭУМК;

– кнопка «Назад» предназначена для возврата на ту страницу ЭУМК, с которой был совершен переход на любую другую страницу с помощью гиперссылки или кнопки навигационной панели;

– кнопка «Закрыть» позволяет закончить работу с ЭУМК.

Кроме указанных выше кнопок навигационная панель содержит кнопки, позволяющие «листать» страницы ЭУМК, а также кнопки быстрого перехода на первую и последнюю страницы (в полноэкранном режиме страницы ЭУМК можно «листать» нажимая клавиши «пробел», «влево», «вправо» на клавиатуре, или с помощью колесика мыши). На навигационной панели указывается номер страницы, которая открыта в момент просмотра ЭУМК. Нажав на отображаемый номер страницы курсором мыши, можно вызвать окно, позволяющее совершить переход на любую страницу ЭУМК.

Интерактивные тестовые задания, включенные в данный ЭУМК, предназначены исключительно для самоконтроля студентов и носят вспомогательный характер. Это связано с тем, что в ходе изучения дисциплины студенты должны, прежде всего, научиться логически мыслить, приобрести навыки решения задач и основное внимание следует уделить построению математических рассуждений и выполнению студентами задач и упражнений.

СОДЕРЖАНИЕ

Брэсцкі дзяржаўны універсітэт імя А.С. Пушкіна
Кафедра МАДУиП

Предисловие

Предлагаемый вниманию читателей электронный учебно-методический комплекс (далее – ЭУМК) является третьей частью следующей серии учебно-методических комплексов для студентов специальности 1–02 05 01 «Математика и информатика» по учебной дисциплине «Математический анализ»:

1. Математический анализ. Часть 1. Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной.

2. Математический анализ. Часть 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.

3. Математический анализ. Часть 3. Ряды.

ЭУМК разработан в соответствии с типовой учебной программой для специальности 1–02 05 01 «Математика и информатика», утвержденной 07.07.2014, рег. № ТД – А.492/тип.

При изложении материала приводятся стандартные и специфические способы решения многих задач с целью обучения на конкретных примерах поиску наиболее рационального способа решения. В конце каждой лекции приводятся вопросы и задания для самоконтроля с целью помочь студентам в проверке усвоения ими теоретического материала. Наряду с примерами, аналогичными решенным на практических занятиях, ЭУМК содержит достаточно большое количество нетривиальных задач, не все из которых могут быть решены в аудитории или самостоятельно, многие задачи окажутся полезными для кружковой работы. ЭУМК содержит обширный материал для контрольных и индивидуальных работ, а также вопросы для подготовки к экзамену и зачету по разделу «Ряды».

ПРИМЕРНЫЙ ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
1	Понятие числового ряда, его частичной суммы, суммы. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Ряды, составленные из слагаемых геометрической прогрессии. Остаток ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд. Арифметические операции над сходящимися рядами. Критерий Коши сходимости ряда.	2	2
2	Знакопостоянные ряды. Критерий сходимости положительных рядов. Теоремы сравнения положительных рядов.	2	2
3	Признаки Даламбера. Признаки Коши.	2	1
4	Частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности. Обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов. Интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов.	2	1
5	Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Абеля – Дирихле.	2	2
6	Функциональные последовательности и ряды, их сходимость. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов. Мажорантный признак Вейерштрасса. Признак Абеля – Дирихле.	2	2
7	Свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда. Почленный переход к пределу. Непрерывности суммы функционального ряда и предельной функции функциональной последовательности. Почленное интегрирование функциональных рядов и функциональных последовательностей. Почленное дифференцирование функциональных рядов и функциональных последовательностей.	2	2
8	Понятие степенного ряда. Теорема Коши – Адамара. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов. Ряд Тейлора. Понятие аналитической функции.	2	2

№	Название темы, перечень изучаемых вопросов	ЛК	ПР
9	Разложение функций в степенные ряды. Разложение в ряд Маклорена функций $f(x) = e^x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \ln(1+x)$, $f(x) = (1+x)^\alpha$.	2	2
10	Приложения степенных рядов для приближенных вычислений значений функций и интегралов.		4

ЛЕКЦИЯ 1
Понятие числового ряда и его сходимости

1.1 Понятие числового ряда, его частичной суммы, суммы. Сходящиеся и расходящиеся ряды

Пусть задана последовательность действительных чисел (a_k). Составим (формально) бесконечную сумму вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{1.1}$$

Запись (символ) (1.1) называется **числовым рядом**. Числа a_k называются **слагаемыми ряда**, а сумма n первых слагаемых ряда называется **n-й частичной суммой ряда** и обозначается

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k. \tag{1.2}$$

Определение 1.1. *Если последовательность (S_n) частичных сумм ряда (1.1) имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R},$$

*то ряд (1.1) называется **сходящимся**, а указанный предел называется **суммой ряда**, если же последовательность (S_n) предела не имеет, то ряд (1.1) называется **расходящимся**.*

В качестве первого примера рассмотрим ряд с постоянными слагаемыми $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a$, который, очевидно, сходится тогда и только тогда, когда $a = 0$.

Второй важный пример – сумма геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$. Если $q = 1$, то этот пример сводится к рассмотреному выше. Если же $q \neq 1$, то справедливо равенство

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} aq^k = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Тогда

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

Если же $q = -1$, то ряд имеет вид $a - a + a - a + \ldots$, а последовательность частичных сумм (S_n) предела не имеет.

Вывод: Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k$ сходится при $|q| < 1$, и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$. Если же $|q| \leqslant 1$, то этот ряд расходится.

Пример 1.1. Найти сумму ряда $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \ldots$.

◀Видно, что ряд составлен из слагаемых бесконечно убывающей геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = -\frac{1}{3}$. Так как

$$|q| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1,$$

то ряд сходится. По формуле (1.3) находим сумму ряда

$$S = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}. \blacktriangleright$$

Пример 1.2. Найти n-ю частичную сумму S_n и сумму S ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots. \tag{1.4}$$

◀Общее слагаемое ряда $a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}$. Тогда n-я частичная сумма ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

А сумма ряда $S = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$.▶

1.2 Остаток ряда. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд

Если задан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $n \in \mathbb{N}$, то ряд $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n-м остатком (или хвостом) исходного ряда.

Теорема 1.1. *Ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *одновременно сходятся или расходятся.*

◀ Ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$. Введём обозначения $S_l = \sum\limits_{k=1}^{l} a_k$ и

$$S'_{l-n} = \sum_{k=1}^{l-n} a_{n+k} = S'_m \ \ (m = l - n)\,.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, т.е. существует $\lim\limits_{l\to\infty} S_l = S$. Если $l \to \infty$, то и $l - n \to \infty$ $(m \to \infty)$ (n – фиксированное натуральное число) и наоборот.

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то

$$\lim_{m\to\infty} S'_m = \lim_{l\to\infty} S_l - \lim_{l\to\infty} S_n = (S - S_n) \in \mathbb{R},$$

т.е. ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ сходится. Так же и обратно.

Аналогично рассматривается и случай расходимости.▶

Следствие 1.1. *Отбрасывание (добавление) конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость или расходимость.*

Следствие 1.2. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.*

$$◀ \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} (S - S_n) = S - S = 0. ▶$$

Теорема 1.2 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.*

◀Из сходимости ряда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$. Но

$$a_n = S_n - S_{n-1} \underset{n\to\infty}{\to} S - S = 0,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. ▶

Замечание 1.1. Покажем, что теорема, обратная теореме 1.2, в общем случае не является верной, т.е. из того, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, не обязательно следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Рассмотрим так называемый гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \tag{1.5}$$

Поясним, откуда происходит название этого ряда. Положительное число $c > 0$ называется **средним гармоническим чисел** $a > 0$, $b > 0$, если $\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$; каждый член ряда (1.5) есть среднее гармоническое предыдущего и последующего членов этого ряда, например:

$$c = \frac{1}{2},\ a = 1,\ b = \frac{1}{3};\quad \frac{1}{c} = 2,\quad \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \frac{1}{2} = (1+3) \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Теорема 1.3. *Гармонический ряд расходится.*

$$\blacktriangleleft\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k};$$

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Допустим, что гармонический ряд сходится. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\geq\frac{1}{2};\quad S-S\geq\frac{1}{2},\quad 0\geq\frac{1}{2}.$$

Получили противоречие.►

Теорема 1.4 (следствие из необходимого признака сходимости ряда). *Если для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ $\lim\limits_{k\to\infty}a_k\neq0$, *то ряд расходится.*

◄Предположим, что ряд сходится. Тогда (необходимый признак сходимости ряда, теорема 1.2)

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0.$$

Получили противоречие.►

Пример 1.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}$.

$$◄\lim_{n\to\infty}(n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}=(\infty\cdot0)=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n+2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1\neq0.$$

Ряд расходится.►

1.3 Арифметические операции над сходящимися рядами

Теорема 1.5. *Линейная комбинация сходящихся рядов сходится к соответствующей линейной комбинации их сумм.*

◀Доказательство проводится по определению сходимости.▶

Следствие 1.3. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится и* C *– любое действительное число, не равное нулю, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Ca_k$ *– расходится.*

◀Допустим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} Ca_k$ – сходится, тогда (теорема 1.5) должен сходиться и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{C}Ca_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, но он расходится. Получили противоречие.▶

Следствие 1.4. а) *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *– сходится, а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *– расходится, то ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ *– расходятся.*

б) *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходятся, то ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ *могут сходиться, а могут и расходиться.*

Пример 1.4. Ряды $(1-2+3-4+\dots)$ и $(-1+2-3+4-\dots)$ расходятся, но ряд, полученный путем сложения этих рядов, сходится (все члены ряда равны 0), а ряд, полученный путем вычитания этих рядов $(2-4+6-8+\dots)$, расходится.

1.4 Критерий Коши сходимости ряда

Сходимость числового ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм. В разделе «Введение в математический анализ» рассматривался критерий Коши сходимости последовательности, из которого следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.6 (критерий Коши сходимости числового ряда). *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, *что для всех* $n \in \mathbb{N}$ $n \geq n_\varepsilon$ *и всех* $p \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Замечание 1.2. Если (S_n) – последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то неравенство (1.6) примет вид

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Замечание 1.3. Из сформулированного критерия Коши для ряда следует справедливость необходимого условия сходимости ряда.

◀Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходится. Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Так как при сходимости ряда выполняется неравенство (1.6) для любого $p \in \mathbb{N}$, то возьмём $p = 1$. Тогда $|a_{n+1}| < \varepsilon$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ $(n + 1 > n_0)$.

Обозначим: $n + 1 = k$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 = n_0$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $k > k_0$ $(n \geq n_0,\ n + 1 = k > k_0 = n_0)$ будет выполняться неравенство $|a_k| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.▶

Кафедра
МАДУиП
На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶
19
Закрыть

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение числового ряда, его частичной суммы, суммы ряда.
2. Дайте определение остатка ряда.
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости числового ряда.
4. Дайте определение гармонического ряда.
5. Сформулируйте теорему о расходимости числового ряда (следствие из необходимого признака сходимости ряда).
6. Какие арифметические операции осуществляются над сходящимися рядами?
7. Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда.
8. Докажите, используя критерий Коши сходимости числового ряда, что гармонический ряд расходится.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 1

Числовой ряд и его сумма. Необходимый признак сходимости ряда

Задание 1. Написать одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые 4 члена:

$$\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{18}+\frac{11}{54}+\ldots.$$

◀Рассмотрим сначала последовательность числителей 2, 5, 8, 11.... Мы видим, что они образуют арифметическую прогрессию, первый член которой равен 2, а разность равна 3. Поэтому в качестве общего выражения для числителя можно взять выражение общего члена арифметической прогрессии $2+3(n-1)=3n-1$. Знаменатели 2, 6, 18, 54... образуют геометрическую прогрессию с первым членом 2 и знаменателем 3. Поэтому в качестве их общего выражения можно взять $2\cdot 3^{n-1}$. Тогда общий член ряда примет вид:

$$a_n=\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}}.\ ▶$$

Замечание 1.4. По нескольким первым членам ряда нельзя однозначно восстановить формулу общего члена. Например, для ряда

$$\frac{2}{2}+\frac{5}{6}+\frac{8}{18}+\frac{11}{54}+\ldots$$

можно положить и $a_n=\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}}$ и $a_n=\frac{3n-1}{2\cdot 3^{n-1}+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}$.

Поэтому в нижеследующих задачах мы будем искать лишь одну из возможных формул, соответствующую данным членам ряда, стараясь выбрать наиболее простую.

Задание 2. Написать одну из возможных формул для общего члена ряда, зная его первые 4 члена:

$$\frac{1}{2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 8}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}+\ldots.$$

◀У этого ряда знаки членов чередуются, и потому каждый его член содержит множитель $(-1)^{n-1}$. Числители являются произведениями членов арифметической прогрессии с первым членом 1 и разностью 2. Знаменатели – произведениями членов арифметической прогрессии с первым членом 2 и разностью 3. Применяя формулу общего члена арифметической прогрессии, получим:

$$a_n = (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot [1 + 2(n-1)]}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot [2 + 3(n-1)]} =$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}. \blacktriangleright$$

Задание 3. Найти общий член последовательности частичных сумм ряда

$$\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} \ldots .$$

Пользуясь определением суммы ряда, показать, что этот ряд сходится, и найти его сумму S. Вычислить R_{10}.

◀**Первый способ.** Составим последовательность частичных сумм ряда:

$$S_1 = \frac{4}{1 \cdot 3} = \frac{4}{3},$$

$$S_2 = \frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{5},$$

$$S_3 = \frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} = \frac{12}{7}.$$

Первые частичные суммы представляют собой дроби, числители которых равны учетверенному индексу (номеру) частичной суммы, а знаменатели – удвоенному индексу, сложенному с единицей. Поэтому можем предположить, что

$$S_n = \frac{4n}{2n+1}.$$

Методом математической индукции легко доказать, что эта формула верна для всех $n \in \mathbb{N}$.
Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$S = \lim_{x\to\infty} S_n = \lim_{x\to\infty} \frac{4n}{2n+1} = 2.$$

Следовательно, сумма данного ряда существует и равна 2, т.е. ряд сходится.
Теперь находим

$$R_n = S - S_n = 2 - \frac{4n}{2n+1} = \frac{2}{2n+1},$$

$$R_{10} = \frac{2}{2\cdot 10+1} = \frac{2}{21}.$$

Следовательно, если бы мы в качестве приближенного значения суммы ряда взяли сумму его первых десяти членов, то имели бы погрешность, равную $\frac{2}{21}$.

Второй способ. Представим общий член ряда в виде суммы двух дробей, т.е. разложим дробь на простейшие, пользуясь методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}.$$

Представляя теперь каждый член данного ряда в виде суммы двух слагаемых, мы получим следующее выражение для n-й частичной суммы:

$$S_n = \frac{4}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{4}{(2n-1)(2n+1)} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} -$$

$$- \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \ldots - \frac{2}{2n-1} + \frac{2}{2n+1} = 2 - \frac{2}{2n+1}.$$

Все слагаемые, кроме первого и последнего, взаимно уничтожились.

Теперь легко находим сумму заданного ряда:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{2}{2n+1}\right) = 2,\ R_n = \frac{2}{2n+1},\ R_{10} = \frac{2}{21}. \blacktriangleright$$

Замечание 1.5. При вычислении конечных сумм часто оказывается полезным следующее утверждение: если существует такая функция $F(x)$, что

$$f(n) = F(n+1) - F(n),$$

то

$$f(1) + \ldots + f(n) = F(n+1) - F(1).$$

Задание 4. Найти выражение для конечной суммы

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

◀Запишем следующие равенства:

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1, \tag{1.8}$$

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1, \tag{1.9}$$

$$(n+1) - n = 1. \tag{1.10}$$

Умножим равенство (1.8) на A, равенство (1.9) на B, равенство (1.10) на C и сложим:

$$\left[A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1)\right] - \left[An^3 + Bn^2 + Cn\right] =$$

$$= 3An^2 + (3A+2B)n + (A+B+C).$$

Подберем коэффициенты A, B, C так, чтобы правая часть равнялась n^2.

$$3An^2 + (3A + 2B)\,n + (A + B + C) = n^2. \tag{1.11}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковой степени в левой и правой частях (1.11), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ 3A + 2B = 0, \\ A + B + C = 0. \end{cases}$$

Из неё находим $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$. Значит,

$$n^2 = F\,(n + 1) - F(n),$$

где

$$F(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}.$$

Но тогда

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = F\,(n+1) - F(1) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

Во многих случаях удается установить расходимость ряда, использовав следствие из необходимого признака сходимости. Для этого достаточно установить, что общий член ряда не стремится к нулю.▶

Задание 5. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{7} + \frac{4}{11} + \ldots + \frac{n}{3n-2} + \ldots.$$

◀Находим предел общего члена a_n ряда при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{2}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Так как в данном случае a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, то заданный ряд не удовлетворяет необходимому признаку сходимости и, следовательно, расходится.►

Задание 6. Найти суммы рядов

$$1)\ \sum_{k=2}^{\infty} \ln \frac{k^3-1}{k^3+1}.$$

$$◄\ \ln \frac{k^3-1}{k^3+1} = (\ln (k-1) - \ln (k+1)) + \left(\ln \left(k^2+k+1\right) - \ln \left(k^2-k+1\right)\right).$$

$$\sum_{k=2}^{n} \ln \frac{k^3-1}{k^3+1} = \ln 1 - \ln 3 + \ln 2 - \ln n - \ln (n+1) +$$

$$+ \ln \left(n^2+n+1\right) = \ln \frac{n^2+n+1}{n(n+1)} - \ln \frac{3}{2} = S_n.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\ln \frac{n^2+n+-1}{n(n+1)} - \ln \frac{3}{2}\right) = -\ln \frac{3}{2}.$$

Ответ: $S = -\ln \frac{3}{2}$. ►

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+4)}.$$

$$◄\ \sum_{n=1}^{n} \frac{3k+4}{k(k+1)(k+4)} = \sum_{n=1}^{n} \left(\frac{4}{k(k+4)} - \frac{1}{(k+1)(k+4)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(4\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}\right)\right) =$$

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◄ ►

◄◄ ►►

Закрыть

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} -$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) = S_n.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{31}{18}.$$

Ответ: $S = \frac{31}{18}$. ▶

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^k} \cdot \cos\frac{3}{2^k}.$$

$$◀ \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{1}{2^k} \cdot \cos\frac{3}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2^{k-2}} + \sin\frac{-1}{2^{k-1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\sin\frac{1}{2^{k-2}} + \sin\frac{-1}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sin 2 - \sin\frac{1}{2^{n-1}}\right) = S_n.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\sin 2.$$

Ответ: $S = \frac{1}{2}\sin 2$. ▶

$$4) \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}.$$

$$◀ a) \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}, \quad -\frac{\pi}{4} < -\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k} \le 0,$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} < \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k} < \frac{\pi}{4},$$

$$-\frac{\pi}{4} < 0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} < \frac{\pi}{4}.$$

На интервале $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ имеется одно значение угла с данным значением тангенса

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}\right) - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k}{k+1}\frac{k-1}{k}} = \frac{\frac{k^2-k^2+1}{k(k+1)}}{\frac{k+1+k-1}{k+1}} = \frac{k+1}{k\,(k+1)\,2k} = \frac{1}{2k^2}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}\right) = \frac{1}{2k^2}.$$

$$b)\sum_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{k+1} - \operatorname{arctg}\frac{k-1}{k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\operatorname{arctg}\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) - \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) =$$

$$= -\operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = S_n.$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $S = \frac{\pi}{4}$. ▶

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

$$5)\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{2^k}.$$

$$\blacktriangleleft \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=1}^{n-1}\left(k^2-(k+1)^2\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^i}+n^2\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{1-\frac{1}{2}}+$$

$$+n^2\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=-2\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n-1}1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}=n^2-\frac{n^2}{2^n}=$$

$$=-2\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)+\sum_{k=1}^{n-2}(k-(k+1))\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2^{i-1}}+$$

$$+(n-1)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^{i-1}}-(n-1)+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}+n^2-\frac{n^2}{2^n}=$$

$$=-(n-1)-(n-1)^2+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1\left(1-\frac{1}{2^k}\right)}{1-\frac{1}{2}}+(n-1)\frac{1\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-$$

$$-(n-1)+1-\frac{1}{2^{n-1}}+n^2-\frac{n^2}{2^n}=2n-2(n-2)\frac{\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{n-1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^n}=4+2-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n-1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^n}=S_n.$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=6.$$

Ответ: $S=6$. $\blacktriangleright$

Задание 7. Исследовать ряды на сходимость, используя следствие из необходимого признака сходимости:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^3}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}-1\right)n^3}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-6n^3}{3n^3+4}}=e^{-2}\neq 0.$$

Ряд расходится.►

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}=1,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}(\ln(n+1))^{\frac{1}{n}}=\left(\infty^0\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln(n+1))}{n}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n+1)\cdot(n+1)}}{1}}=e^0=1\neq 0.$$

Ряд расходится.►

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n n^{\frac{1}{n}}}{n^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n}=\left(\frac{\infty^0}{1^\infty}\right)=$$

$$= \frac{e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}}}{e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2}}} = \frac{e^0}{e^0} = 1 \neq 0.$$

Ряд расходится.▶

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{n+3} \arcsin \frac{1}{n^2+2}.$$

$$◀ \lim_{n\to\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n^2+2}}{\frac{n+3}{n^3+1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\arcsin \frac{1}{n^2+2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2+2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2+2}}{\frac{n+3}{n^3+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{(n^2+2)(n+3)} = 1 \neq 0.$$

Ряд расходится.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Записать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

1.1 $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots;$

1.2 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\ldots;$

1.3 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{42}\ldots;$

1.4 $1-\frac{1\cdot3}{1\cdot4}+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot4\cdot7}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{1\cdot4\cdot7\cdot10}\ldots;$

1.5 $2+\frac{2^2}{1\cdot2}+\frac{2^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\ldots;$

1.6 $1+\frac{2\cdot4}{1\cdot3}+\frac{2\cdot4\cdot6}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2\cdot4\cdot6\cdot8}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots.$

2. Записать 5 первых членов ряда по известной формуле для общего члена:

2.1 $a_n=\frac{3n+2}{n^2+4};$

2.2 $a_n=\frac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}};$

2.3 $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2+4};$

2.4 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, & n=2k-1,\\ \frac{1}{n^2}, & n=2k.\end{cases}$

3. Записать a_3, a_{10}, a_{15}, a_{16}, если

$$a_n=\begin{cases}(5-n)^2, & 1\le n\le 4,\\ \frac{1}{(n-4)^2}, & 5\le n\le 15,\\ \frac{n-15}{n^2-8n}, & n\ge 16.\end{cases}$$

4. Пусть $a_n=\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$. Записать a_{n+1}, a_{2n}, a_{3n-1}, a_{n^2}.

5. Пусть $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$. Записать a_{n+2}, a_{n+m}, a_{nm}, a_{n^2}. Найти $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

6. Пусть $a_n=\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$. Вычислить $(a_n)^2$, $(a_n)^3+1$, $(\sqrt[n]{a_n})$.

7. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

7.1 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$;

7.2 $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$;

7.3 $1^3 + 5^3 + 9^3 + \ldots + (4n-3)^3$;

7.4 $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,(n-k+1)$;

7.5 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\,(n-k+1)^2$;

7.6 $1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots + (-1)^{n-1}\,n^3$;

7.7 $1^4 - 2^4 + 3^4 - \ldots + (-1)^{n-1}\,n^4$;

7.8 $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

7.9 $\frac{1}{c(c+1)(c+2)} + \frac{1}{(c+1)(c+2)(c+3)} + \ldots + \frac{1}{(c+n-1)(c+n)(c+n+1)}$.

8. Вычислить сумму:

8.1 $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$;

8.2 $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln \frac{k^3-1}{k^3+1}$. *Указание.* Принять во внимание тождество

$$(k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1;$$

8.3 $\sum\limits_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$.

9. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\cos\frac{x}{2^k} = \ln\sin x - n\ln 2 - \ln\sin\frac{x}{2^n}$.

10. Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$.

11. Доказать тождество

$$\operatorname{arctg}\frac{c}{a+n-1} - \operatorname{arctg}\frac{c}{a+n} = \operatorname{arctg}\frac{c}{c^2 + (a+n)(a+n-1)}.$$

12. Найти конечные суммы

12.1 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$;

12.2 $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$. *Указание.* Воспользоваться результатом задания 11, подобрав в нем значения a и c.

13. Исходя из равенства

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x} \tag{1.12}$$

определить сумму

$$\frac{x}{1+x} + \frac{2x^2}{1+x^2} + \ldots + \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}.$$

Указание. Прологарифмировать и продифференцировать равенство (1.12).

14. Получить выражения для S_n, S, R_n:

14.1 $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots$;

14.2 $\frac{3}{1^2\cdot 2^2} + \frac{5}{2^2\cdot 3^2} + \ldots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \ldots$;

14.3 $\frac{2}{1^2\cdot 3^2} + \frac{3}{2^2\cdot 4^2} + \ldots + \frac{n+1}{n^2(n+2)^2} + \ldots$;

14.4 $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$;

14.5 $\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{3}{2\cdot 5\cdot 8} + \ldots + \frac{2}{n(n+3)(n+6)} + \ldots$;

14.6 $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2} + \ldots$;

14.7 $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} + \ldots$;

14.8 $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2n(2n-1)} + \ldots$;

14.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right).$

15. С помощью следствия из необходимого признака сходимости ряда установить, какие из указанных ниже рядов заведомо расходятся:

15.1 $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}\ldots;$

15.2 $0,001+\sqrt{0,001}+\sqrt[3]{0,001}+\ldots+\sqrt[n]{0,001}+\ldots;$

15.3 $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n+1}{2n+2}+\ldots;$

15.4 $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{4}{3}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}+\ldots;$

15.5 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\ldots;$

15.6 $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots;$

15.7 $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\frac{3}{3001}+\ldots+\frac{n}{1000n+1}+\ldots;$

15.8 $\sum\limits_{n-1}^{\infty}\cos n^2;$

15.9 $1-1-1+1+1+1-1-1-1-1+\ldots;$

15.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1};$

15.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^9\sin\frac{1}{n^9+n+1};$

15.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{2n^2+3}\right)^{n^9};$

15.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^9}}{e^n};$

15.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n};$

15.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0,3}};$

15.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}};$

15.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\ln n!-2\ln(2!,3!\ldots n!)}{n^2+n};$

15.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin an,\, a\neq xm,\, m\in Z.$

16. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_1+S_2+\ldots+S_n}{n} = S$.

17. Доказать, что если $S_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{S_1 S_2 \ldots S_n} = S.$$

18. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.

19. Пусть b_n, $n = 1, 2, \ldots$ и ряд $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ расходится. Доказать, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = S,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{b_1 + \ldots + b_n} = S.$$

20. Вычислить пределы:

20.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\ldots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}$;

20.2 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\ldots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right]$.

21. Доказать, что

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n, \;\; \varepsilon_n \to 0.$$

Вывести из этого равенства соотношение:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \ln\sqrt{4n} + \frac{1}{2}C + \varepsilon_n, \;\; \varepsilon_n \to 0.$$

ЛЕКЦИЯ 2

Знакопостоянные ряды. Теоремы сравнения положительных рядов

2.1 Критерий сходимости положительных рядов

Будем рассматривать ряды, все члены которых либо неотрицательны (положительные ряды), либо неположительные (отрицательные ряды). Достаточно изучить положительные ряды, так как теория отрицательных рядов строится аналогично.

Теорема 2.1 (критерий сходимости положительных рядов). *Если $a_k \geq 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность (S_n) его частичных сумм ограничена сверху.*

◀**Необходимость.** Если ряд сходится, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. А тогда последовательность (S_n) будет ограниченной (любая сходящаяся последовательность ограничена), а значит, ограниченной сверху.

Достаточность. Последовательность (S_n) ограничена сверху. Кроме того, последовательность (S_n) неубывающая, так как

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n \ \ (a_{n+1} \geq 0)\,.$$

Тогда по теореме о пределе монотонной последовательности существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = S \in \mathbb{R},$$

т.е. ряд сходится.▶

2.2 Теоремы сравнения положительных рядов

Теорема 2.2 (признак сравнения в форме неравенств). *Если для положительных рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (a_k \geq 0) \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (b_k \geq 0) \tag{2.2}$$

существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $C \in \mathbb{R}_+$, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$,

$$a_k \leq C b_k, \tag{2.3}$$

тогда:

1) *из сходимости ряда (2.2) следует сходимость ряда (2.1);*

2) *из расходимости ряда (2.1) следует расходимость ряда (2.2) (символическая запись условия (2.3): $a_k = O(b_k)$ при $k \to +\infty$ – a_k сравнимо по O большому признаку с b_k в некоторой окрестности точки $+\infty$ радиуса k_0).*

◀1. Пусть ряд (2.2) сходится. Так как отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (1.1), то будем считать, что неравенство (2.3) выполняется для любого $k \in \mathbb{N}$ (те члены рядов (2.1) и (2.2), для которых это неравенство не выполняется, можно отбросить). Кроме того, так как ряд (2.2) сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена сверху (теорема 2.1), т.е. существует $C_1 = const > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$S_n^{(b)} \leq C_1. \tag{2.4}$$

$$a_k = O\left(b_k\right): \ a_k \leq C b_k. \tag{2.5}$$

Суммируем неравенства (2.5) от $k = 1$ до $k = n$ и учитываем неравенство (2.4):

$$S_n^{(a)} \leq CS_n^{(b)} \leq C_1C = D. \tag{2.6}$$

Получили, что последовательность частичных сумм ряда (2.1) ограничена сверху, а тогда ряд (2.1) сходится (теорема 2.1).

2. Пусть ряд (2.1) расходится. Но если ряд (2.2) сходится, то по доказанному выше и ряд (2.1) должен сходиться, но он расходится. Получаем противоречие. Отсюда следует, что ряд (2.2) расходится.►

Пример 2.1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{1}{k^k} + \ldots. \tag{2.7}$$

◄Очевидно, что для $k > 2$ будет

$$\frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$ – сходится (ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии). Тогда по теореме 2.2 ряд (2.7) сходится.►

Пример 2.2. Исследовать на сходимость или расходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}. \tag{2.8}$$

$$◄\ a_k = \frac{k}{k^2+1} \geq \frac{k}{2k^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}.$$

Тогда $\frac{1}{k} \leq 2 \cdot \frac{k}{k^2+1}$, т.е. $\frac{1}{k} = O\left(\frac{k}{k^2+1}\right)$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (гармонический) – расходится. Поэтому и ряд (2.8) расходится.►

Пример 2.3. Докажите, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ сходится.

◀ $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k}$ при $k > 1$, но ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}$ – сходится (это показывается точно так же, как и в примере 2.2). Тогда, с учетом теоремы 2.2 получим, что и исследуемый ряд сходится.▶

Теорема 2.3 (признак сравнения в предельной форме). *Если для рядов (2.1) и (2.2), где $a_k \geq 0$ и $b_k > 0$, существует $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k} = l > 0$, то ряды (2.1) и (2.2) одновременно сходятся или расходятся.*

При $l = 0$ из сходимости ряда (2.2) следует сходимость и ряда (2.1), а из расходимости ряда (2.1) следует и расходимость ряда (2.2).

◀Пусть $\lim\limits_{k\to+\infty}\frac{a_k}{b_k} = l > 0$:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \left(\varepsilon = \frac{l}{2}\right) \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad k > k_0,$$

$$\left|\frac{a_k}{b_k} - l\right| < \frac{l}{2}. \tag{2.9}$$

Неравенство (2.9) равносильно неравенствам

$$-\frac{l}{2} < \frac{a_k}{b_k} - l < \frac{l}{2}; \quad \frac{l}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3l}{2}. \tag{2.10}$$

Рассмотрим, например, случай, когда ряд (2.2) расходится. Тогда из неравенства (2.10) следует

$$b_k < \frac{2}{l}a_k. \tag{2.11}$$

Имеем неравенство типа (2.3), где a_k и b_k меняются ролями и

$$C = \frac{2}{l} = const > 0.$$

На основании теоремы 2.2 ряд (2.1) также будет расходиться. Аналогично, варьируя неравенствами из (2.10) и учитывая теорему 2.2, можно доказать и другие случаи из этого пункта.

Пусть $l = 0$, т.е. $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \in \mathbb{N}, \;\; k > k_0,$$

$$\left| \frac{a_k}{b_k} - 0 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < \varepsilon. \tag{2.12}$$

Из двойного неравенства (2.12) получим:

$$a_k < \varepsilon \cdot b_k. \tag{2.13}$$

Неравенство (2.13) – это неравенство типа (2.3), где $C = \varepsilon$. А тогда на основании теоремы 2.2 и следуют требуемые заключения.▶

Замечание 2.1. Если $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = +\infty$, то из сходимости ряда (2.1) следует сходимость и ряда (2.2), а из расходимости ряда (2.2) следует расходимость ряда (2.1).

Если $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = +\infty$, то $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{b_k}{a_k} = 0$, и мы приходим к рассмотренному выше случаю, но с учетом того, что a_k и b_k меняются ролями, получаем справедливость заключения.

Пример 2.4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{k}\right)$.

$$◀\; 1 - \cos\frac{\pi}{k} = \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{2k^2}.$$

Сравним наш ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k^2}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{\pi^2}{2k^2}}{\frac{1}{k^2}}=\frac{\pi^2}{2}=l>0.$$

Согласно теоремы 2.3 заключаем, что исследуемый ряд сходится.►

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте критерий сходимости положительных рядов.
2. Сформулируйте признак сравнения положительных рядов в форме неравенств.
3. Используя теорему 2.2 и пример 2.3, докажите сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^3+5}$.
4. Используя теорему 2.2, докажите расходимость ряда $\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k-2}$.
5. Используя теорему 2.2, докажите сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k+k}$.
6. Сформулируйте признак сравнения в предельной форме.
7. Используя теорему 2.3, докажите расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k+3}$.
8. Используя теорему 2.3 и пример 2.3, докажите сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^4+3k+1}$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 2

Критерий Коши сходимости ряда. Теоремы сравнения положительных рядов

Задание 1. Пользуясь критерием Коши, исследовать ряды на сходимость.

$$1)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\alpha}{2^k}.$$

◀Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k\alpha}{2^k}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k\alpha|}{2^k} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}\left(1-\frac{1}{2^{n+p}}\right)}{1-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^{n+p}}\right) < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon},\ n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Ряд сходится.▶

$$2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}.$$

◀Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k\alpha}{k(k+1)}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon,\ n > \frac{1}{\varepsilon},\ n_0 = \max\left\{1; \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}.$$

Ряд сходится.►

$$3)\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

◄Возьмём любое $n_0\in\mathbb{N}$, а в качестве $n=p=n_0+1$. Оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\ln\left(k+1\right)-\ln k\right)=$$

$$=\ln\left(n+p+1\right)-\ln\left(n+1\right)=\ln\left(n_0+1+n_0+1+1\right)-\ln\left(n_0+1+1\right)=$$

$$=\ln\frac{2n_0+3}{n_0+2}=\ln\left(2-\frac{1}{n_0+2}\right)\geq\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{5}{3}.$$

Получили

$$\exists\varepsilon\in\left(0,\ln\frac{5}{3}\right]\ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \ \exists n=n_0+1>n_0\ \ \exists p=n_0+1\in\mathbb{N}$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right|\geq\varepsilon\in\left(0,\ln\frac{5}{3}\right].$$

Ряд расходится.►

$$4)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k\left(k+1\right)}}.$$

◄Для любого $n_0\in\mathbb{N}$ $\left(n=p=n_0+1\right)$ оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{\sqrt{k\left(k+1\right)}}\right|=\frac{1}{\sqrt{\left(n_0+2\right)\left(n_0+3\right)}}+\frac{1}{\sqrt{\left(n_0+3\right)\left(n_0+4\right)}}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{\sqrt{(2n_0+2)(2n_0+3)}}\geq\frac{n_0+1}{\sqrt{2(n_0+2)(n_0+3)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n_0+1}{2n_0+3}}>\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{n_0+1}{3n_0+3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\exists\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\forall n_0\in\mathbb{N}\ \ \exists n=n_0+1\ \ \exists p\in\mathbb{N},\ p=n_0+1$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\right|>\varepsilon.$$

Ряд расходится.►

$$5)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k^2+4}.$$

◄Для любого $n_0\in\mathbb{N}$, $n=n_0+1=p$ оценим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{k+1}{k^2+4}\right|>\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{k+1}{(k+1)^2}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k+1}=$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{n+p+2}=\frac{1}{n_0+3}+\frac{1}{n_0+4}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n_0+1+n_0+1+1}=\frac{1}{n_0+3}+\frac{1}{n_0+4}+\ldots+\frac{1}{2n_0+3}>$$

$$>\frac{n_0+1}{2n_0+3}>\frac{n_0+1}{3n_0+3}=\frac{1}{3}.$$

$$\exists\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{3}\right]\ \ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \exists n=n_0+1\ \exists p\in\mathbb{N}\ \ p=n_0+1$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{k+1}{k^2+4}\right|>\varepsilon.$$

Ряд расходится.►

Задание 2. Установить сходимость или расходимость ряда с помощью теорем о сравнении рядов:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln\left(n+1\right)}+\ldots.$$

◄Сравнивая данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}+\ldots,\tag{2.14}$$

видим, что при всех значениях $n\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{\ln\left(n+1\right)}>\frac{1}{n+1}$$

(докажите справедливость этого неравенства).

А так как ряд (2.11) отличается от гармонического ряда лишь на одно слагаемое 1 и потому расходится, то и заданный ряд также расходится.►

Задание 3. С помощью теорем о сравнении рядов установить сходимость или расходимость ряда:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}+\ldots.$$

◄Сравним члены заданного ряда с членами сходящегося ряда

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}+\ldots$$

(смотри задание 3 практического занятия 1).

Имеем: $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{4}{(2n-1)(2n+1)}$ сходится, то и данный ряд сходится, поскольку его члены меньше соответствующих членов сходящегося ряда.►

Задание 4. С помощью теорем о сравнении рядов исследовать, сходится или расходится ряд:

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{2^2}{5^2\sqrt{3}} + \frac{3^3}{7^3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} \ldots .$$

◄Оценим общий член a_n заданного ряда.

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n} = \left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\right)^n < \frac{1}{2^n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, члены заданного ряда меньше членов сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, представляющего собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{2}$; следовательно, данный ряд сходится.►

Задание 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1}\right). \tag{2.15}$$

◄Воспользуемся теоремой сравнения в предельной форме (теорема 2.3). Для нахождения ряда, с которым будем сравнивать наш ряд, найдём для общего члена ряда эквивалентный ему член при $n \to \infty$.

$$-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} 1 - \cos\frac{2\pi}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\pi^2}{(n+1)^2}.$$

Очевидно, что ряд (2.15) надо сравнивать с рядом

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{2.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2\pi^2}{(n+1)^2}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\pi^2}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 2\pi^2 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 2\pi^2 > 0.$$

По теореме сравнения ряды (2.15) и (2.16) одновременно сходятся или расходятся. Но ряд (2.16) – сходится, поэтому и ряд (2.15) – сходится.►

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(3^{\frac{1}{n+1}} + 3^{-\frac{1}{n+1}} - 2\right). \tag{2.17}$$

◄Воспользуемся теоремой сравнения в предельной форме (теорема 2.3). Используем для сравнения ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{n+1}} + 3^{-\frac{1}{n+1}} - 2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{-\frac{1}{n+1}}\left(3^{\frac{2}{n+1}} + 1 - 2\cdot 3^{\frac{1}{n+1}}\right)}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{-\frac{1}{n+1}}\left(3^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{-\frac{1}{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(3^{\frac{1}{n+1}} - 1\right)^2}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \left[\left(3^{\frac{1}{n+1}} - 1 \right)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)^2} \ln^2 3 \right] = 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2} \ln^2 3}{\frac{1}{n^2}} = \ln^2 3 > 0.$$

Ряд (2.17) сходится.►

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд.

$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14} + \ldots . \tag{2.18}$$

◄Вначале найдём общий член ряда, заметив, что в числителе и знаменателе множители образуют арифметическую прогрессию (разность арифметической прогрессии числителя 3, а знаменателя – 4). Общий член прогрессии числителя

$$a_n = 4 + (n-1)\,3 = 3n + 1,$$

а знаменателя

$$b_n = 2 + (n-1)\,4 = 4n - 2.$$

Ряд (2.18) имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}. \tag{2.19}$$

Дальше воспользуемся тем, что если отбросить любое конечное число первых членов ряда, то его сходимость не меняется, причём это выполним так, чтобы можно было использовать теорему сравнения в непредельной форме. Определим, при каких значениях n последний множитель члена ряда в числителе меньше последнего множителя $(n-2)$ в знаменателе.

$$4\,(n-2) - 2 > 3n + 1, \quad n > 11.$$

При $n = 12$ указанный последний множитель числителя будет 37, а соответствующий последний множитель знаменателя (при $n = 10$) будет $(4n-2)\Big|_{n=10} = 38$.

Отбрасываем у ряда (2.19) 9 первых членов, получаем ряд

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{31 \cdot 34 \cdot 37 \cdot 40 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{38 \cdot 42 \cdot 46 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot (4n-2)}. \tag{2.20}$$

Для общего члена ряда (2.20) выполним оценку сверху.

$$\frac{31 \cdot 34 \cdot 37 \cdot 40 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{38 \cdot 42 \cdot 46 \cdot 50 \cdot \ldots \cdot (4n-2)} < \frac{31 \cdot 34}{(4n-6)(4n-2)}. \tag{2.21}$$

Ряд $\sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{1}{(4n-6)(4n-2)}$ – сходится $\left(\text{сравните с рядом } \sum\limits_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)$, поэтому и ряд (2.20), а значит, и ряд (2.18) сходится.▶

Задание 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[4]{n^2-1} \sin \frac{\pi}{n+2}. \tag{2.22}$$

◀Для исследования сходимости ряда (2.22) воспользуемся теоремой сравнения в непредельной форме (теорема 2.3) и известным неравенством $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Оценим снизу общий член ряда (2.22). Если $\frac{1}{2}n^2 > 1$, $n^2 > 2$, $n > \sqrt{2}$, то есть $n = 2, 3, \ldots$, то

$$\sqrt[4]{n^2-1} \sin \frac{\pi}{n+2} > \sqrt[4]{n^2 - \frac{n^2}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n+2} > \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3n} = \frac{\sqrt[4]{8}}{3} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha \le 1$ расходится. У ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, поэтому этот ряд расходится. По указанной теореме сравнения и наш ряд (2.22) расходится.▶

Задание 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 - 2k + 4}{2^k}. \tag{2.23}$$

◄Представим общий член ряда $a_k = \frac{3k^2-2k+4}{2^k}$ следующим образом:

$$a_k = \frac{3k^2 - 2k + 4}{2^{\frac{1}{2}k}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{1}{2}k}}. \tag{2.24}$$

Докажем вначале, что функция натурального аргумента

$$\frac{3k^2 - 2k + 4}{2^{\frac{1}{2}k}}$$

ограничена в своей области определения. Рассмотрим функцию действительного аргумента

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 4}{2^{\frac{1}{2}x}}$$

на луче $[1, +\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 - 2x + 4}{2^{\frac{x}{2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 2}{2^{\frac{x}{2}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{2^{\frac{x}{2}} \left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2} = 0.$$

Тогда существует окрестность точки $x = +\infty$ $U(+\infty, \Delta) = (\Delta, +\infty)$, где функция $f(x)$ ограничена

$$(\exists C_1 > 0 \ \ \forall x \in (\Delta, +\infty) \ \ |f(x)| = f(x) \le C_1).$$

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

Закрыть

Если $\Delta < 1$, то функция будет ограниченной на луче $[1, +\infty)$. Пусть $\Delta > 1$.

На отрезке $[1, \Delta]$ функция $f(x)$ непрерывна, а поэтому ограничена (первая теорема Вейерштрасса):

$$\exists C_2 > 0 \ \ \forall x \in [1, \Delta] \ \ |f(x)| = f(x) \le C_2.$$

Выбираем $C = \max\{C_1, C_2\}$. Тогда

$$\exists C > 0 \ \ \forall x \in (1, +\infty) \ \ f(x) \le C$$

(это будет и при $\Delta = 1$).

Для общего члена ряда (2.24) получим оценку:

$$a_k \le C 2^{-\frac{k}{2}}. \tag{2.25}$$

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}. \tag{2.26}$$

Ряд (2.26) составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \in (0, 1)$, а значит, ряд сходится. По теореме сравнения (учесть неравенство (2.25)) наш ряд (2.23) также будет сходиться.▶

Замечание 2.2. Обобщая решение предыдущего примера, то есть, повторяя его, мы приходим к следующему заключению. Ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(k)}{a^k}, \tag{2.27}$$

где $a > 1$ и $P_n(k)$ – многочлен n-й степени, для любого $n \in \mathbb{N}$, натурального аргумента k, сходятся.

Задание 10. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}. \tag{2.28}$$

◀Воспользуемся основным логарифмическим тождеством $a^{\log_a b} = b$:

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{(e^{\ln \ln n})^{\ln n}} = \frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln \ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}}.$$

Очевидно, что существует $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n > n_0$ $\ln \ln n > 2$. Тогда

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}. \tag{2.29}$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, поэтому и ряд (2.28) сходится (теорема сравнения в непредельной форме 2.2).▶

Задание 11. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}. \tag{2.30}$$

◀Оценим снизу общий член ряда (2.30).

$$(\ln n)^{\ln \ln n} = \left(e^{\ln \ln n}\right)^{\ln \ln n} = e^{(\ln \ln n)^2}. \tag{2.31}$$

Преобразуем (тождественно) неравенство

$$e^{(\ln \ln n)^2} < n. \tag{2.32}$$

$$\left(e^{(\ln\ln n)^2} < e^{\ln n} \Leftrightarrow (\ln\ln n)^2 < \ln n \quad [u = \ln n]\right).$$

Получим

$$\ln u < u^{\frac{1}{2}}. \tag{2.33}$$

Очевидно, что неравенство (2.33) справедливо для любых $u > 0$, то есть справедливо неравенство (2.32) для любых $n \in \mathbb{N}$. Имеем оценку

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} > \frac{1}{n}. \tag{2.34}$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится, поэтому и ряд (2.30) расходится (теорема сравнения в непредельной форме 2.2).►

Задание 12. С помощью теорем сравнения рядов исследовать на сходимость или расходимость ряды:

$$1)\ \sum_{n=2}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}} \ln n. \tag{2.35}$$

◄Сравним с рядом

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{2.36}$$

Используем признак сравнения в предельной форме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n\ln n}{e^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \ln n}{e^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2\ln n + n^3\frac{1}{n}}{e^{\sqrt{n}}\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{(3\ln n + 1)\, n^{\frac{5}{2}}}{e^{\sqrt{n}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3n^{\frac{5}{2}}}{n}+(3\ln n+1)\,\frac{5}{2}n^{\frac{3}{2}}}{e^{\sqrt{n}}\frac{1}{2\sqrt{n}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3+\frac{5}{2}\,(3\ln n+1)\right)n^2}{e^{\sqrt{n}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$= 4\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{11}{2}+\frac{15}{2}\ln n\right)n^2}{e^{\sqrt{n}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\ldots=0,$$

из сходимости (2.36) следует сходимость (2.35).▶

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right). \tag{2.37}$$

$$◀\ \lim_{n\to\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)=\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{2n+1}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2n+1}{2n-1}}{\frac{1}{n}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\right.$$

$$\left.=\left[\ln\frac{2n+1}{2n-1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2n+1}{2n-1}-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2n-1}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1}=1\right]=0.$$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha>0$. Используем признак сравнения в предельной форме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{\alpha+1}}}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2(2n-1)-2(2n+1)}{(2n-1)^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{-\alpha-1}{n^{\alpha+2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{4}{4n^2-1}+\frac{1}{n^2}}{\frac{-\alpha-1}{n^{\alpha+2}}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n^2(4n^2-1)}}{\frac{-\alpha-1}{n^{\alpha+2}}} = [\alpha = 2] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{3\left(n^2\left(4n^2-1\right)\right)} = \frac{1}{12} \in (0, \infty).$$

Ряд сходится.▶

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)^{2n}. \tag{2.38}$$

$$◀ \left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)^{2n} = e^{2n \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)} = e^{2n\left(-\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} =$$

$$= \left(e^{\ln n}\right)^{-2} e^{-\frac{\ln^2 n}{n}} e^{o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{\ln^2 n}{n}} e^{o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln^2 n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{\ln^2 n}{n}\right)} = e^0 = 1\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} e^{o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} o\left(\frac{1}{n}\right)} = e^0 = 1.$$

Получили

$$\left(1 + \frac{\ln n}{n}\right)^{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Тогда ряд (2.38) сходится.▶

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} \ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{2.39}$$

$$◀ \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{\to} 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} \ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^\alpha \sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\left(n^\alpha \sqrt{n+1}\right)^{-1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{0,5\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 2\right) - 1}{\left(n^{\alpha}\sqrt{n+1}\right)^{-1}} = 0,5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)^2}{\left(n^{\alpha}\sqrt{n+1}\right)^{-1}} =$$

$$= \left[e^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right] = 0,5 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\alpha}\sqrt{n+1}}} = 0,5 \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\sqrt{n+1}}} = 0,5 > 0.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – сходится, следовательно, ряд (2.39) – сходится.▶

Задание 13. Сколько членов ряда

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

нужно взять, чтобы получить значение суммы с точностью до $0,0001$?

$$◀\ R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+k)!} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right].$$

Так как

$$1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots <$$

$$< 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1},$$

то $R_n < \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)}$.

Поэтому нам нужно выбрать $n > 7$, так как $R_7 \approx 0,3 \cdot 10^{-4}$. Поэтому достаточно взять 8 членов ряда.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью теорем сравнения:

1.1 $\frac{1}{1001}+\frac{1}{2001}+\frac{1}{3001}+\ldots+\frac{1}{1000n+1}+\ldots;$

1.2 $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots;$

1.3 $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\ldots;$

1.4 $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\ldots;$

1.5 $\sin^2\alpha+\frac{\sin^2 2\alpha}{8}+\frac{\sin^2 3\alpha}{27}+\ldots+\frac{\sin^2 n\alpha}{n^3}+\ldots;$

1.6 $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}+\ldots;$

1.7 $\frac{5}{2}+\frac{25}{12}+\frac{125}{56}+\ldots+\frac{5^n}{2^n(2^n-1)}+\ldots;$

1.8 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\ldots+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}+\ldots;$

1.9 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{4n-2}+\ldots;$

1.10 $\ln 2+\frac{\ln 3}{\sqrt[4]{2^5}}+\frac{\ln 4}{\sqrt[4]{3^5}}+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}+\ldots;$

1.11 $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{17}}+\sqrt{\frac{3}{82}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}+\ldots;$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)2^n};$

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}};$

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}};$

1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{an^2+bn^3+2n+1};$

1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n},\ a>0;$

1.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5\sqrt{n}};$

1.18 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

1.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$;

1.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4+3n^3}{n^4+1}$;

1.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$;

1.22 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$;

1.23 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

1.24 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;

1.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{n+1}{\sqrt[3]{6n^7+3n^3+1}}$.

2. Определить, сколько членов ряда нужно взять, чтобы получить значение суммы ряда с точностью до 0,0001:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!!}$;

2.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!!}$;

2.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!2^n}$.

3. Используя критерий Коши, исследовать на сходимость ряды:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}} \left(e^{\frac{1}{n^{\alpha}+1}} - 1\right)$;

3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n+1}$;

3.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$;

3.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+a^n}$;

3.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}$;

3.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^{10}}{3^n+n^2}$;

3.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n-5^n}$;

2.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$;

3.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$;

3.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{5^n n}$;

3.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

3.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$;

3.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,555}$;

3.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,555}$;

3.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+1}}$.

ЛЕКЦИЯ 3
Признаки Даламбера и Коши

3.1 Признаки Даламбера

Рассмотрим признаки сходимости положительных рядов, основанные на их сравнении с рядами, составленными из членов геометрических прогрессий.

Теорема 3.1 (признак Даламбера в форме неравенств). *Если для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ *существует* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и существует* $q \in (0,1)$, *что для любого* $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, *будет выполняться неравенство*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q < 1, \tag{3.1}$$

то ряд будет сходиться. Если же для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, *будет выполняться неравенство*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \ge 1, \tag{3.2}$$

то указанный ряд будет расходиться.

◀1. Так как отбрасывание любого конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость, то будем считать, что неравенство (3.1) выполняется для любого $k \in \mathbb{N}$ (так же, как и неравенство (3.2)).

Тогда получим: $\frac{a_k}{a_{k-1}} \le q < 1$, для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, или

$$a_2 \le qa_1;\ \ a_3 \le a_2 q \le a_1 q^2; \ldots; a_k \le a_1 q^{k-1}.$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} \tag{3.3}$$

сходится, так как этот ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. А тогда $a_k = (q^{k-1})$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. Если же выполняется неравенство (3.2), то для любого $k \in \mathbb{N}$ получим:

$$a_{k+1} \geq a_k \geq a_{k-1} \geq \ldots \geq a_1,$$

т.е.

$$a_k \geq a_1 > 0. \tag{3.4}$$

В неравенстве (3.4) переходим к пределу при $k \to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty} a_k \geq \lim_{k\to+\infty} a_1 = a_1 > 0. \tag{3.5}$$

Значит, в любом случае $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k \neq 0$, а это означает (теорема 1.4), что искомый ряд расходится.▶

Теорема 3.2 (признак Даламбера в предельной форме). *Если для ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = p,$$

то при $p < 1$ ряд сходится; при $p > 1$ – расходится.

◀1. Пусть $p < 1$. Тогда существует $q \in \mathbb{R}_+$, что $p < q < 1$ (свойство непрерывности действительных чисел). А тогда

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k > k_0\ \ \frac{a_{k+1}}{a_k} < q < 1. \tag{3.6}$$

Значит, выполняются условия теоремы 3.1, поэтому ряд будет сходиться.

2. Если $p > 1$, то

$$\exists k_0 \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N},\ k > k_0,\quad \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1. \tag{3.7}$$

Тогда искомый ряд (смотри теорему 3.1) будет расходиться.▶

Замечание 3.1. Если $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = +\infty$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Если $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = +\infty$, то для любого $E > 0$ (возьмём $E > 1$) существует $k_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $k > k_0$ $\frac{a_{k+1}}{a_k} > E > 1$ и по теореме 3.1 ряд расходится.

Замечание 3.2. Если для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k > 0)$ $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться (признак Даламбера ответа не даёт).

Рассмотрим два ряда (наряду с индексом k можно использовать и индекс n, причем их использование равнозначно):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{3.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{3.9}$$

Ряд (3.8) – сходится. Для ряда (3.8)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Ряд (3.9) – расходится. Для ряда (3.9)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Пример 3.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$.

$$◀\ a_n = \frac{(2n+1)!}{(3n+4)\,3^n};\quad a_{n+1} = \frac{(2\,(n+1)+1)!}{(3\,(n+1)+4)\,3^{n+1}}.$$

Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+3)!\,(3n+4)\,3^n}{(3n+7)\,3^{n+1}\,(2n+1)!} = \frac{(2n+2)\,(2n+3)\,(3n+4)}{(3n+7)\cdot 3}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\,(2n+3)\,(3n+4)}{(3n+7)\cdot 3} = +\infty.$$

Ряд расходится.▶

Пример 3.2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$.

◀Символ $(2n+1)!!$ означает произведение всех нечётных чисел, начиная от 1 и заканчивая $(2n+1)$. У нас $a_n = \frac{(2n+1)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)}$; $a_{n+1} = \frac{(2n+3)!!}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n+1)(3n+4)}$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{3n+4} < \frac{2n+0,5n}{3n} < \frac{2,5n}{3n} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} < 1,$$

если $0,5n \geq 3$, $n \geq 6$. Ряд сходится.▶

3.2 Признаки Коши

Теорема 3.3 (признак Коши в форме неравенств). *Если для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$, *существует* $n_0 \in \mathbb{N}$ *и существует* $q \in (0,1)$, *что для любого* $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, *будет выполняться неравенство:*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \tag{3.10}$$

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

то ряд сходится, если же для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, будет выполняться неравенство

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \tag{3.11}$$

то ряд расходится.

◀1. По указанным выше причинам будем считать, что неравенство (3.10) выполняется для всех натуральных $n \in \mathbb{N}$. Возводим левую и правую части неравенства $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ в n-ю степень, получим

$$a_n \leq q^n. \tag{3.12}$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

2. Пусть выполняется неравенство (3.11). Тогда, возводя правую и левую части этого неравенства в n-ю степень, получим неравенство

$$a_n \geq 1. \tag{3.13}$$

Из неравенства (3.13) видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.▶

Теорема 3.4 (признак Коши в предельной форме). *Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = p, \tag{3.14}$$

то при $p < 1$ – ряд сходится; при $p > 1$ – расходится.

◀1. Если $p < 1$, то по свойству непрерывности действительных чисел существует $q \in \mathbb{R}_+$, что $p < q < 1$. А тогда существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} < q < 1. \tag{3.15}$$

Отсюда следует (теорема 3.3), что искомый ряд сходится.

2. При $p > 1$ также существует $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$,

$$\sqrt[n]{a_n} > 1. \tag{3.16}$$

Из теоремы 3.3 следует, что искомый ряд расходится.▶

Замечание 3.3. Если $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = +\infty$:

$$\forall E > 0 \;\; (E > 1) \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; n > n_0 \quad \sqrt[n]{a_n} > E > 1,$$

т.е. и в этом случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Замечание 3.4. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться, т.е. признак Коши ответа не даёт (для доказательства работают те же примеры, что и в замечании 3.2).

Пример 3.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

◀Воспользуемся признаком Коши в предельной форме (теорема 3.3).

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} 2 \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Ряд сходится.▶

Замечание 3.5. Есть положительные ряды, при исследовании которых на сходимость признак Даламбера не применим, а с помощью признака Коши этот ряд исследуется на сходимость. Говорят, что признак Коши «сильнее» признака Даламбера.

Пример 3.4. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3}{2^{n+1}}. \tag{3.17}$$

$$◀ \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(-1)^n+3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln((-1)^n+3)}{n}} = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд сходится. Но

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(-1)^{n+1}+3}{2^{n+2}}}{\frac{(-1)^n+3}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n+1}+3}{2\left((-1)^n+3\right)} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & n = 2k, \ k \in \mathbb{N}, \\ 1, & n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

т.е. указанного предела не существует.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите признаки Даламбера.
2. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов, для которых признак Даламбера в предельной форме не дает ответа на вопрос о сходимости.
3. Сформулируйте и докажите признаки Коши.
4. Приведите примеры сходящихся и расходящихся рядов, для которых признак Коши в предельной форме не дает ответа на вопрос о сходимости.

ЛЕКЦИЯ 4
Обобщенный признак Коши. Интегральный признак сходимости

4.1 Частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 4.1. *Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется **частичным пределом** последовательности (a_n), если существует (a_{n_k}) – подпоследовательность последовательности (a_n), такая, что $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = \alpha$.*

Очевидно, что для ограниченной последовательности наибольший и наименьший частичные пределы существуют.

Определение 4.2. ***Нижним** (**верхним**) **пределом** ограниченной снизу (ограниченной сверху) последовательности называется наименьший (наибольший) из частичных пределов этой последовательности.*

Если последовательность не ограничена снизу (не ограничена сверху), то нижний (верхний) предел этой последовательности будем считать равным $-\infty$ $(+\infty)$, так как в этом случае существует подпоследовательность a_{n_k}, для которой (например, в случае неограниченности сверху) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

Нижний (верхний) предел последовательности (a_n) обозначается следующим образом:

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \quad \left(\varlimsup_{n\to+\infty} a_n\right).$$

Замечание 4.1. Действительное число α будет нижним (верхним) пределом ограниченной снизу (сверху) последовательности (a_n), если:

1) существует (a_{n_k}) – подпоследовательность последовательности (a_n), что

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha;$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, будет выполняться неравенство $a_n > \alpha - \varepsilon$ $(a_n < \alpha + \varepsilon)$.

Пример 4.1. Для последовательности

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k-2, \ k \in \mathbb{N}, \\ 2, & n = 3k-1, \ k \in \mathbb{N}, \\ 3, & n = 3k, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

указать множество A частичных пределов, а также нижний и верхний пределы.

$$◀ \ A = \{1, 2, 3\}, \ \varliminf_{n\to+\infty} a_n = 1, \ \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 3. \ ▶$$

Пример 4.2. Найти верхний и нижний пределы последовательности

$$a_n = n \sin \frac{\pi n}{2}. \tag{4.1}$$

◀Верхним пределом данной последовательности будет предел подпоследовательности, для которой $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$, т.е. эта подпоследовательность будет иметь вид

$$a_{n_k} = (4k-3) \sin \frac{\pi}{2}(4k-3)$$

(числа $1, 5, 9, 13, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию с общим членом $a_k = 1 + + (k-1) \cdot 4 = 4k-3$).

Тогда

$$\varlimsup_{n\to+\infty} n \sin \frac{\pi n}{2} = \lim_{k\to+\infty} (4k-3) \sin \frac{\pi}{2}(4k-3) = \lim_{k\to+\infty} (4k-3) = +\infty.$$

Аналогично

$$\varliminf_{n\to+\infty} n \sin \frac{\pi n}{2} = \lim_{l\to+\infty} (4l-1) \sin \frac{\pi}{2}(4l-1) = \lim_{l\to+\infty} (1-4l) = -\infty. \ ▶$$

Справедлива теорема-критерий.

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

Теорема 4.1. *Действительное число $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ будет пределом последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда*

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = \alpha.$$

Замечание 4.2. Можно показать, что для верхнего предела последовательности будет справедливо равенство:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \lambda a_n = \lambda \varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \ \lambda > 0. \tag{4.2}$$

4.2 Обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов

Теорема 4.2. *Если для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \geq 0)$*

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \tag{4.3}$$

то при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится, а при $q = 1$ ряд может сходиться, а может и расходиться.

◀Пусть $q < 1$. Можно указать число $p \in (q, 1)$. Тогда (по определению верхнего предела последовательности) для любого $\varepsilon > 0$, в частности $\varepsilon = p - q$, существует $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, будет $\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = p$, что равносильно неравенству $a_n < p^n$. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p^n$ – сходится (ряд состоит из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $p \in (0, 1)$), поэтому будет сходиться и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (теорема 2.2).

Если $q > 1$, то существует (a_{n_k}) – подпоследовательность последовательности (a_n) такая, что

$$\lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = q.$$

Возьмем $1 < p < q$. Тогда (теорема о сохранении функцией знака предела) существует $k_0 \in \mathbb{N}$ (существует $n_{k_0} \in \mathbb{N}$), для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$ $(n_k > n_{k_0})$, будет $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > p > 1$, что равносильно неравенству

$$a_{n_k} > p^{n_k}. \tag{4.4}$$

Из неравенства (4.4) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то есть ряд расходится.▶

Замечание 4.3. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geq 0)$ $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ряд может сходиться, а может расходиться, т.е. признак Коши ответа не даёт (для доказательства работают те же примеры, что и в замечании 3.2).

Пример 4.3. Исследовать на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{((-1)^n + 2)n^n}{(n+1)^n}\right)^n. \tag{4.5}$$

◀Находим

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{((-1)^n + 2)\, n^n}{(n+1)^n}\right)^n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + 2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Ряд (4.5) расходится.▶

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

Закрыть

4.3 Интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов

Пусть функция $f : [m, +\infty) \to \mathbb{R}$ принимает на луче $[m, +\infty)$, где $m \in \mathbb{N}$, неотрицательные значения и не возрастает.

Теорема 4.3 (интегральный признак Коши – Маклорена). *Несобственный интеграл*

$$\int\limits_{m}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{4.6}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k)\,. \tag{4.7}$$

◀Рассмотрим отрезок $[m, n]$, $m < n$. Разбиваем отрезок на $(n-m)$ частичных отрезков точками m, $m+1$, $m+2$,…,k,$k+1$, …,$n-1$,n, где $k = \overline{m, n-1}$.

На отрезке $[k, k+1]$ функция f не возрастает, поэтому она интегрируема на этом отрезке, и будут справедливы неравенства:

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k)\,,$$

$$f(k+1) = \int\limits_{k}^{k+1} f(k+1)\,dx \le \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \le \int\limits_{k}^{k+1} f(k)\,dx = f(k)\,. \tag{4.8}$$

Суммируем неравенства (4.8) по k от m до $n-1$, получим:

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = \sum_{k=m}^{n-1} f(k+1) \le \int\limits_{m}^{n} f(x)\,dx \le \sum_{k=m}^{n-1} f(k) \tag{4.9}$$

$$\left(\sum_{k=m}^{n-1} f(k+1) = [l = k+1] = \sum_{l=m+1}^{n} f(l) = [l = k] = \sum_{k=m+1}^{n} f(k)\right).$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) = S_n - f(m),$$

где S_n – n-я частичная сумма ряда (4.7) при $m = 1$;

$$\sum_{k=m}^{n-1} f(k) = S_{n-1},$$

где S_{n-1} –$(n-1)$-я сумма ряда (4.7) при $m = 1$.

Тогда неравенство (4.9) примет вид:

$$S_n - f(m) \le \int_m^n f(x)\,dx \le S_{n-1}. \qquad (4.10)$$

Последовательность $a_n = \int_m^n f(x)\,dx$ – не убывающая, т.к.

$$a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx \ge 0.$$

Значит, для сходимости этой последовательности необходима и достаточна ее ограниченность. Для сходимости ряда (4.7) необходима и достаточна ограниченность последовательности (S_n) (теорема 2.1). Из неравенств (4.10) следует, что последовательность (S_n) ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность (a_n), т.е. тогда и только тогда, когда последовательность (a_n) сходится.▶

Замечание 4.4. Рассмотрим так называемый **обобщенный гармонический ряд**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \tag{4.11}$$

где α – любое действительное число.

Известно из теории несобственных интегралов, что интеграл

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \tag{4.12}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Тогда (теорема 4.3) ряд (4.11) также сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Полученное заключение применяют при исследовании рядов на сходимость с помощью признаков сравнения.

Пример 4.4. Исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+4}{\sqrt{7k^8 - 3k}}. \tag{4.13}$$

◀Оценим сверху общий член ряда (4.13).

$$\frac{3k+4}{\sqrt{7k^8 - 3k}} \le \frac{3k+4k}{\sqrt{7k^8 - 3k^8}} = \frac{7k}{2k^4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{k^3}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3 > 1$, тогда будет сходиться и ряд (4.13).▶

Замечание 4.5. Можно показать, что ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k} \tag{4.14}$$

сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$. Для этого достаточно исследовать на сходимость соответствующий несобственный интеграл

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{\alpha} x}. \tag{4.15}$$

Пример 4.5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)\ln(n+1)}. \tag{4.16}$$

◀Оценим снизу общий член ряда

$$\frac{1}{(n-2)\ln(n+1)} > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}. \tag{4.17}$$

Ряд

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = [k = n+1] = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$$

расходится, а поэтому ряд (4.16) расходится.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение частичного предела последовательности.
2. Дайте определение верхнего и нижнего предела последовательности.
3. Сформулируйте обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов.
4. Сформулируйте интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов.
5. Дайте определение обобщенного гармонического ряда и докажите его расходимость.

Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак Коши – Маклорена

Задание 1. Исследовать вопрос о сходимости ряда

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$$

с помощью признака Коши.

$$\blacktriangleleft \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n (n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln (n+1)} = 0 < 1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд сходится.►

Задание 2. Установить с помощью признака Даламбера, сходится или расходится ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4!!} + \frac{5}{6!!} + \ldots + \frac{2n-1}{(2n)!!} + \ldots.$$

$$\blacktriangleleft \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2n+1}{(2n+2)!!} : \frac{2n+1}{(2n)!!}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!!\,(2n+1)}{(2n+2)!!\,(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{(2n+2)\,(2n-1)} = 0 < 1.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

то ряд сходится.►

Задание 3. С помощью признака Даламбера установить, сходится или расходится ряд:

$$3+\frac{3^2 2!}{2^2}+\frac{3^3 3!}{3^3}+\ldots+\frac{3^n n!}{n^n}+\ldots.$$

$$◀ \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\,(n+1)\,n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то ряд расходится.▶

Задание 4. С помощью интегрального признака исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\ln^3 2}+\frac{1}{3\ln^3 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}+\ldots.$$

◀Функция $\frac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$ при $x>1$ положительна, непрерывна и монотонно убывает, поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно воспользоваться интегральным признаком.

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}=\int\limits_1^\infty\frac{d\left(\ln(x+1)\right)}{\ln^3(x+1)}=-\lim_{N\to\infty}\left.\frac{1}{2\ln^2(x+1)}\right|_1^N=$$

$$=-\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2\ln^2(N+1)}-\frac{1}{2\ln^2 2}\right]=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Таким образом, соответствующий несобственный интеграл сходится, значит, ряд также сходится.▶

Для оценки остатка ряда с положительными членами удобно пользоваться интегральным признаком сходимости. Если этот признак применим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$, то имеет место оценка

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)dx < R_n < \int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Задание 5. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0$.

◄Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ с общим членом $a_n = \frac{100^n}{n!}$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0,$$

то по признаку Даламбера этот ряд сходится. Следовательно, его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100^n}{n!} = 0. \blacktriangleright$$

Задание 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \ln \frac{n^3+1}{n^3}. \qquad (4.18)$$

◄Для решения задачи используем интегральный признак сходимости числовых рядов. Условия этого признака выполняются:

$$f(x) = x \ln \frac{x^3+1}{x^3} > 0,$$

для любых $x \in [1,+\infty)$; кроме того,

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x^3+1}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x^3+1}{x^3}}{x^{-1}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[\ln\frac{x^3+1}{x^3} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^3}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}}{x^{-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0,$$

то есть функция $f(x)$ убывает на луче $[1,+\infty)$.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$I = \int\limits_1^{+\infty} x\ln\frac{x^3+1}{x^3}dx. \tag{4.19}$$

Для исследования сходимости применим теорему сравнения для несобственных интегралов.

$$I = \int\limits_1^{+\infty} x\ln\frac{x^3+1}{x^3}dx = \int\limits_1^{\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int\limits_1^{\infty}\frac{x^3}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{x^3}dx < \ln 3\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx.$$

Так как интеграл $\int\limits_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx$ сходится, то и интеграл (4.19) сходится, поэтому сходится и ряд (4.18).▶

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right). \tag{4.20}$$

◀Воспользуемся интегральным признаком сходимости рядов. Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} x\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx. \tag{4.21}$$

Проверим выполнимость условий интегрального признака.

$$f(x)=x\operatorname{tg}\frac{1}{x}-1,\ \ D(f)=[1,+\infty).$$

Докажем, что функция $f(x)$ – убывающая и принимает неотрицательные значения на $D(f)$.

$$f'(x)=\operatorname{tg}\frac{1}{x}+x\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\frac{1}{x\cos^2\frac{1}{x}}=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\cos\frac{1}{x}}-\frac{1}{x\cos^2\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x\cos\frac{1}{x}}\right),\ \ \frac{1}{\cos\frac{1}{x}}>0$$

для любых $x\in[1,+\infty)$.

Докажем, что

$$\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x\cos\frac{1}{x}}<0. \tag{4.22}$$

Неравенство (4.22) равносильно неравенству

$$\sin\frac{2}{x}-\frac{2}{x}<0. \tag{4.23}$$

Неравенство (4.23) справедливо на $D(f)$, поэтому $f'(x)<0$, то есть функция $f(x)$ убывает на $D(f)$.

Кроме того,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\operatorname{tg}\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-1\right) = 0 = \inf_{x\in[1,+\infty]} f(x).$$

А тогда $f(x)\geq 0$. Условия интегрального признака выполняются. Дальше докажем сходимость несобственного интеграла (4.21). Используем так называемый **метод выделения главной части**. Справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано

$$\operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + o\left(t^3\right),\ t\to 0. \tag{4.24}$$

У нас

$$x\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{3x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{4.25}$$

Из (4.25) следует, что интеграл (4.21) сходится, поэтому сходится и ряд (4.20).►

Задание 8. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\sqrt[5]{\frac{2n-1}{2n+1}}\right). \tag{4.26}$$

◄Исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty}\left(1-\sqrt[5]{\frac{2x-1}{2x+1}}\right)dx. \tag{4.27}$$

Функция

$$f(x) = 1-\sqrt[5]{\frac{2x-1}{2x+1}}$$

принимает на луче $[1, +\infty)$ неотрицательные значения.

$$f'(x) = -\frac{1}{5}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{2(2x+1) - 2(2x-1)}{(2x+1)^2} =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \frac{4}{(2x+1)^2} < 0.$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям интегрального признака сходимости рядов.

Исследуем на сходимость несобственный интеграл (4.27). Применим метод выделения главной части.

$$A = \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{\frac{1}{5}}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-\frac{1}{5}}. \tag{4.28}$$

Воспользуемся формулой (формула Тейлора с остатком в форме Пеано):

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \alpha t + o(t),\ t \to 0. \tag{4.29}$$

Тогда

$$A = \left(1 - \frac{1}{10x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{10x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 - \frac{2}{10x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.30}$$

и

$$f(x) = \frac{1}{5x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \tag{4.31}$$

Из (4.31) следует, что несобственный интеграл (4.27) расходится, так как расходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

Значит, ряд (4.26) расходится.►

Задание 9. С помощью признаков Даламбера, Коши и интегрального признака Коши – Маклорена исследовать на сходимость ряды:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}.$$

◀Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{6}}<1.$$

Ряд сходится.▶

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}.$$

◀Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n}=$$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}n^{\frac{\ln n}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{\ln^2 n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n\frac{1}{n}}{1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\frac{1}{n}}{1}}=1\right]=0<1.$$

Ряд сходится.▶

$$3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^{n}}{2^{n}}.$$

◀Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}<1.$$

Ряд сходится.▶

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2,6n^n)^n}{(n+1)^{n^2}}\cos\frac{1}{n!}.$$

◀Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2,6n^n)^n}{(n+1)^{n^2}}\cos\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2,6n^n}{(n+1)^n}\left(\cos\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=2,6\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\cos\frac{1}{n!}}{n}}=\frac{2,6}{e}<1.$$

Ряд сходится.▶

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}.$$

$$◀\ \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}<\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n2n.$$

Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n2n. \qquad (4.32)$$

Признак Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n}\sqrt[n]{2n}=\frac{2}{3}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 2n}{n}}=\frac{2}{3}<1.$$

Признак сравнения: ряд (4.32) сходится, следовательно, наш ряд тоже сходится.►

$$6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 6\cdot\ldots\cdot 3n}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}.$$

$$◄\ a_{n+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 6\cdot\ldots\cdot 3n\,(3n+3)}{(n+1)!\,(n+2)}\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+3)\arcsin\frac{1}{2^{n+1}}}{(n+2)\arcsin\frac{1}{2^n}}=3\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}}=\frac{3}{2}>1.$$

Ряд расходится.►

$$7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\,(2^n+3^n)}.$$

◄Признак Даламбера:

$$a_n=\frac{n^n}{n!\,(2^n+3^n)},$$

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,(2^{n+1}+3^{n+1})}.$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}\,n!\,(2^n+3^n)}{(n+1)!\,(2^{n+1}+3^{n+1})\,n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}=\frac{e}{3}<1.$$

Ряд сходится.►

$$8)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

◄Признак Даламбера:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^n\left(2n^2+n+1\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(2\left(n+1\right)^2+n+2\right)^{\frac{n+1+1}{2}}n^{n-1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n-1}{n}}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\left(2n^2+5n+4\right)^{\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{2n^2+5n+4}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+1}{2n^2+5n+4}\right)^{\frac{n+1}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-4n-3)(n+1)}{\left(2n^2+5n+4\right)^2}}=e^{-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1.$$

Ряд сходится.►

$$9)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(2n)}.$$

◀Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 2n}.$$

По интегральному признаку Коши – Маклорена

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln 2x)^2} = \int_1^{\infty} (\ln 2x)^{-2} d(\ln 2x) = \left.\frac{(\ln 2x)^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^{\infty} = -\left.\frac{1}{\ln 2x}\right|_1^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 2n}$ сходится. Но

$$\frac{1}{(n+1)\ln^2(2n)} < \frac{1}{n \ln^2(2n)},$$

а тогда по признаку сравнения и наш ряд сходится.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Коши:

1.1 $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots;$

1.2 $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots;$

1.3 $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots;$

1.4 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\ldots$

Указание. $\sqrt{2}==2\cos\frac{\pi}{4};$

1.5 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\sqrt{2-}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\ldots;$

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\left|\sqrt{5}+(-1)^n\right|^n}{4^n};$

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n+n};$

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{(-2)n-n};$

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5-(-1)^n)^n}{n^2-4^n};$

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)};$

1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(5+(-1)^n)^n}{n^2 7^n};$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^2+1};$

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}.$

2. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью признака Даламбера:

2.1 $2+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\ldots+\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n-1)}{1\cdot5\cdot9\ldots(4n-3)}+\ldots;$

2.2 $1+\frac{1\cdot4}{3!!}+\frac{1\cdot4\cdot7}{5!!}+\ldots+\frac{1\cdot4\cdot7\ldots(3n-2)}{(2n-1)!!}+\ldots;$

2.3 $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}+\ldots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots;$

2.4 $2+1+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2^n}{n^2}+\ldots;$

2.5 $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{n^n}+\ldots;$

2.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}};$

2.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!};$

2.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!};$

2.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!};$

2.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot7\cdot13\ldots\cdot(3n+4)}{3\cdot7\cdot11\ldots(4n+3)};$

2.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!}\cdot\frac{1}{n2^{n+1}};$

2.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot6\cdot\ldots(3n)}{(n+1)!}\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n};$

2.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(3k+1)}{(2n)^n};$

2.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n\sin\frac{x}{2^n}}{n!};$

2.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!2^n}.$

3. Установить сходимость или расходимость указанных рядов с помощью интегрального признака Коши – Маклорена:

3.1 $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots;$

3.2 $\frac{1}{2\ln 2\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\ln\ln 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}+\ldots;$

3.3 $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}+\ldots;$

3.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1};$

3.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2;$

3.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}};$

3.7 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}.$

ЛЕКЦИЯ 5
Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Абеля – Дирихле. Знакочередующиеся ряды

5.1 Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Пусть дан ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \tag{5.1}$$

члены которого могут быть любыми действительными числами (положительными, отрицательными, нулём).

Определение 5.1. *Ряд (5.1) называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится ряд, составленный из модулей членов этого ряда, то есть если сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|\,. \tag{5.2}$$

Теорема 5.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

◄Для доказательства воспользуемся критерием Коши о сходимости рядов: для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $k, p \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, будет выполняться неравенство

$$\left|\sum_{k=k_0+1}^{k_0+p} u_k\right| \leq \sum_{k=k_0+1}^{k_0+p} |u_k| < \varepsilon.$$

То есть ряд (5.1) сходится.►

Замечание 5.1. Обратная теорема в общем случае неверна.

Определение 5.2. *Ряд* (5.1) *называется* ***условно сходящимся****, если он сходится, а ряд* (5.2) *– расходится.*

Пример 5.1. Исследовать на абсолютную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}. \tag{5.3}$$

◀Составим ряд из модулей членов ряда (5.3):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}. \tag{5.4}$$

По признаку Даламбера

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2k+3)!}}{\frac{1}{(2k+1)!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(2k+1)!}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} = 0 < 1.$$

Ряд (5.4) – сходится, поэтому ряд (5.3) сходится абсолютно.▶

5.2 Признак Абеля – Дирихле

Для исследования сходимости рядов с членами произвольного знака важное значение имеет признак Абеля – Дирихле.

Теорема 5.2 (признак Абеля – Дирихле). *Если у ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{5.5}$$

последовательность частичных сумм ограничена, а (b_k) – невозрастающая и сходящаяся к нулю последовательность, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k b_k \tag{5.6}$$

сходится.

◀Для доказательства теоремы в силу критерия Коши (теорема 1.6) достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для любых $n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ и любого $p \in \mathbb{N}$ $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k b_k\right| < \varepsilon$.

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. По условию существует такое число $M > 0$, что $|S_n| \leq M$ для любых $n \in \mathbb{N}$.

Так как последовательность (b_k) невозрастающая и сходящаяся к нулю, то для любого положительного $\frac{\varepsilon}{2M}$ найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $n > n_0$ $0 \leq b_n < \frac{\varepsilon}{2M}$.

Для оценки сверху $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} u_k b_k\right|$ воспользуемся тождеством Абеля [1, с. 76]:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_{n+p}b_{n+p} - S_{n-1}b_n.$$

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k b_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |S_k|(b_k - b_{k+1}) + |S_{n+p}|b_{n+p} + |S_{n-1}|b_n \leq$$

$$\leq M\left(\sum_{k=n}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) + b_{n+p}\right) + Mb_n = 2Mb_n < 2M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \blacktriangleright$$

Пример 5.2. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k}. \tag{5.7}$$

◀Составим ряд из модулей членов ряда (5.7)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k|}{k}. \tag{5.8}$$

Справедливо неравенство

$$\frac{|\sin k|}{k} \geq \frac{\sin^2 k}{k} = \frac{1-\cos 2k}{2k}. \tag{5.9}$$

Ряд с общим членом $a_k = \frac{1}{2k}$ расходится. Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k}{2k} \tag{5.10}$$

сходится.

Воспользуемся признаком Абеля – Дирихле (теорема 5.2). Последовательность $\left(\frac{1}{2k}\right)$ убывающая, а поэтому невозрастающая. Покажем, что последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos 2k \tag{5.11}$$

ограничена.

$$S_n = \frac{2\sin 2(\cos 2 + \cos 4 + \cos 6}{2\sin 2} + \ldots +$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\cos(2n-4)+\cos(2n-2)+\cos 2n)}{2\sin 2} = \\
&= \frac{\sin 4+\sin 6-\sin 2+\sin 8-\sin 4+\sin 10-\sin 6}{2\sin 2}+\ldots+ \\
&+\frac{\sin(2n-2)-\sin(2n-6)+\sin 2n}{2\sin 2}+ \\
&+\frac{-\sin(2n-4)+\sin(2n+2)-\sin(2n-2)}{2\sin 2} = \\
&= \frac{-\sin 2+\sin 2n+\sin(2n+2)}{2\sin 2}.
\end{aligned}
$$

Тогда $|S_n| < \frac{3}{2\sin 2}$.

Условия признака Абеля – Дирихле выполняются, то есть ряд с общим членом $\frac{\cos 2k}{2k}$ сходится. Из неравенства (5.9) следует неравенство

$$\frac{1}{2k} \leq \frac{\cos 2k}{2k} + \frac{|\sin k|}{k}.$$

Если предположить, что ряд (5.8) сходится, то из теоремы о почленном сложении сходящихся рядов и теоремы сравнения, ряд с общим членом $\left(\frac{1}{2k}\right)$ – сходится, но он расходится. Получили противоречие. Значит, ряд (5.8) расходится.

Далее доказывается сходимость ряда (5.7) (с использованием признака Абеля – Дирихле аналогично, как и при доказательстве сходимости ряда (5.8)). Причем для доказательства ограниченности последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin k$ можно воспользоваться равенством

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)},$$

которое легко доказывается методом математической индукции.

Ряд (5.8) сходится условно.▶

5.3 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

Определение 5.3. *Ряд называется* ***знакочередующимся****, если члены этого ряда поочередно являются то положительными, то отрицательными или наоборот.*

Например, знакочередующимся будет ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k, \quad a_k > 0. \tag{5.12}$$

Теорема 5.3 (признак Лейбница). *Если члены ряда (5.12) по абсолютной величине образуют невозрастающую, сходящуюся к нулю последовательность, то ряд (5.12) сходится и n-й остаток ряда имеет знак своего первого члена, а модуль n-го остатка ряда не превосходит модуля первого члена остатка.*

◀Сходимость ряда (5.12) следует из признака Абеля – Дирихле.

Докажем остальные заключения теоремы. Пусть S_n – частичная сумма ряда (5.12), S – сумма ряда (5.12).

$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

где разности во всех скобках неотрицательны, так как последовательность (a_k) невозрастающая. Тогда $S_{2n+1} = S_{2n-1} - (a_{2n} - a_{2n+1}) \leq S_{2n-1}$, т.е. последовательность (S_{2n-1}) невозрастающая, поэтому справедливо неравенство

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n-1}.$$

Тогда для остатков ряда (5.12) получим оценки

$$0 > R_{2n-1} = S - S_{2n-1} \geq S_{2n} - S_{2n-1} = (-1)^{2n-1}a_{2n} = -a_{2n},$$

т.е. знак остатка R_{2n-1} совпадает со знаком первого члена остатка

$$(-1)^{2n-1} a_{2n} = -a_{2n}.$$

А тогда из оценки $0 \geq R_{2n-1} \geq (-1)^{2n-1} a_{2n}$ получим:

$$|R_{2n-1}| \leq \left|(-1)^{2n-1} a_{2n}\right|.$$

Аналогично

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}.$$

Тогда

$$0 < R_{2n} = S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1-1} a_{2n+1} = a_{2n+1}.$$

Значит, знак остатка R_{2n} совпадает со знаком первого члена остатка, а

$$|R_{2n}| = R_{2n} \leq (-1)^{2n+1-1} a_{2n+1} = a_{2n+1} = \left|(-1)^{2n+1-1} a_{2n+1}\right|. \blacktriangleright$$

Замечание 5.2. При доказательстве теоремы учтено то, что все разности $a_{k+1} - a_k$ не могут быть равны нулю (не равных нулю разностей бесконечно много). В противном случае не выполнялось бы условие $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, так как начиная с некоторого номера последовательность (a_k) стала бы последовательностью-константой с положительными членами. По этой причине у нас и получены неравенства: $R_{2n-1} < 0$; $R_{2n} > 0$.

Определение 5.4. *Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 5.3, называется* ***рядом Лейбница****.*

Пример 5.3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \tag{5.13}$$

◀Ряд (5.13) есть ряд Лейбница:
1) (5.13) знакочередующийся ряд;
2) $\left(\frac{1}{k}\right)$ – убывающая, а значит, невозрастающая последовательность;
3) $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{1}{k} = 0$, то есть он сходится.

Но ряд, составленный из модулей ряда (5.13), есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – гармонический ряд, он расходится. Значит, ряд (5.13) сходится условно.▶

Пример 5.4. Найти сумму ряда (5.3) с точностью до 10^{-3}.

◀Ряд (5.3) есть ряд Лейбница. Его общий член

$$u_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)!}. \tag{5.14}$$

Если $k = 2$, то $u_2 = -\frac{1}{5!} = -\frac{1}{120}$; $|u_2| = \frac{1}{120} > 10^{-3}$.
Если $k = 3$, то $u_3 = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} = 0,000198\ldots$; $|u_3| = \frac{1}{5040} < 10^{-3}$.
Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \approx \frac{1}{6} - \frac{1}{120} = \frac{19}{120} \approx 0,15833\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \approx 0,158$$

с точностью до 10^{-3}, причём с недостатком, так как $R_2 > 0$ $(u_3 > 0)$.▶

5.4 О свойствах ассоциативности и коммутативности для рядов

Важнейшими свойствами суммы конечного числа действительных слагаемых являются свойства ассоциативности и коммутативности. Естественно, возникает вопрос, останутся ли эти свойства справедливыми для суммы сходящегося ряда? Ответ на этот вопрос содержится в следующих теоремах.

Теорема 5.4. *Если в сходящемся ряде произвольным образом расставить скобки (с конечным числом слагаемых внутри каждой скобки), то получим сходящийся ряд с той же суммой, что и у исходного ряда.*

◀Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{5.15}$$

и

$$\underbrace{(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1})}_{u_1} + \ldots + \underbrace{(a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k})}_{u_k} + \ldots + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{5.16}$$

Если S_k есть k-я частичная сумма ряда (5.16), то S_{n_k} есть n_k-я частичная сумма ряда (5.15), причём $n_k \geq k$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть ряд (5.15) – сходится (при $k \to \infty$ $n_k \to \infty$). Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{n_k\to\infty} S_{n_k} = S$.▶

Замечание 5.3. Обратная теорема в общем случае не верна. Например: ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots$$

расходится, но ряд

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

сходится. Но если ряд (5.16) расходится, то и (5.15) – расходится (доказательство проводится методом от противного).

Следующая теорема показывает, что условно сходящийся ряд не обладает свойством коммутативности.

Теорема 5.5 (теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). *Если ряд (5.1) сходится условно, то для любого $L \in \overline{\mathbb{R}}$ можно так переставить члены этого ряда, что преобразованный ряд будет иметь своей суммой L.*

В то же время свойство коммутативности справедливо для абсолютно сходящегося ряда.

Теорема 5.6 (теорема Коши). *Если числовой ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из исходного ряда посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.*

Доказательства теорем 5.5 и 5.6 можно найти в [5, с. 449–452].

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение знакочередующегося ряда.
2. Сформулируйте признак Лейбница
3. Дайте определение ряда Лейбница.
4. Дайте определение абсолютно и условно сходящихся рядов.
5. Сформулируйте признак Абеля – Дирихле.
6. Сформулируйте свойство ассоциативности числового ряда.
7. Сформулируйте теорему Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 4

Признаки Лейбница и Абеля – Дирихле

Задание 1. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\ldots.$$

◀Члены заданного знакочередующегося ряда по абсолютной величине убывают и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.$$

Следовательно, по признаку Лейбница данный ряд сходится. Выясним теперь, как сходится данный ряд: абсолютно или условно. Для этого исследуем на сходимость соответствующий ему знакоположительный ряд:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots. \tag{5.17}$$

Ряд (5.17) получается из гармонического ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots.$$

в результате умножения всех его членов на $\frac{1}{2}$. Так как гармонический ряд расходится, то и ряд (5.17) также расходится.

Таким образом, данный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно.▶

Задание 2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда:

$$1-\frac{2}{7}+\frac{3}{13}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\ldots.$$

◀Покажем, что члены этого ряда по абсолютной величине монотонно убывают. В самом деле, неравенство

$$\frac{n}{6n-5} > \frac{n+1}{6(n+1)-5}$$

при $n \geq 1$ эквивалентно неравенству $6n^2+n > 6n^2+n-5$, которое выполняется при всех значениях $n \geq 1$. Однако

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Следовательно, данный ряд расходится по следствию из необходимого признака.▶

Задание 3. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда:

$$\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \frac{64}{16} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n} + \ldots .$$

◀Исследуем, сходится ли заданный ряд абсолютно, т.е. исследуем на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \ldots + \frac{n^3}{2^n} + \ldots . \tag{5.18}$$

По признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3\, 2^n}{2^{n+1} n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд (5.18) сходится. Отсюда вытекает, что данный ряд также сходится, и притом абсолютно.▶

Задание 4. Сколько нужно взять членов ряда

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots , \tag{5.19}$$

чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

◀Ряд (5.19) знакочередующийся и члены его монотонно убывают по абсолютной величине (ряд Лейбница). Поэтому его остаток по абсолютной величине меньше абсолютной величины первого отброшенного члена, т.е.

$$|R_n| < a_{n+1}.$$

В нашем задании $R_n < \frac{1}{(n+1)^2}$. Для вычисления суммы ряда (5.19) с точностью до $0,01$ надо потребовать, чтобы $|R_n| < 0,01$, $\frac{1}{(n+1)^2} < 0,01$.

Из последнего неравенства получаем, что при $n > 10$ остаток ряда будет меньше $0,01$. Значит, чтобы вычислить сумму ряда с точностью до $0,01$, нужно взять 10 членов ряда.

Для вычисления суммы ряда (5.19) с точностью до $0,001$ необходимо взять 31 член ряда. Мы видим, что ряды Лейбница удобнее для вычислений, чем знакоположительные ряды. Чтобы найти сумму ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

с точностью до $0,001$, надо взять 1001 член ряда, а чтобы найти с той же точностью сумму ряда (5.19), достаточно взять 31 член ряда.▶

Задание 5. Зная, что сумма ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots \tag{5.20}$$

равна $\ln 2$, найти сумму ряда

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots, \tag{5.21}$$

полученного из данного в результате перестановки членов.

◀Сумма первых $3m$ членов ряда (5.21) равна

$$S_{3m}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{4m-2}-\frac{1}{4m}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2m}\right).$$

Выражение в скобках является $2m$-й частной суммой ряда (5.20). Таким образом, $S_{3m}=\frac{1}{2}H_{2m}$, где H_n – n-я частичная сумма ряда (5.20). Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем $S=\frac{1}{2}\ln 2$.

Рассмотренное задание показывает, что при перестановке членов условно сходящегося ряда его сумма может измениться.▶

Задание 6. а) Найти сумму ряда

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots.$$

$$◀\ S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{4n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\ln(4n)-\frac{1}{2}\ln(2n)-\frac{1}{2}\ln n+\varepsilon_n=\frac{3}{2}\ln 2+\varepsilon_n,\ \varepsilon_n\to 0.$$

Ответ: $S=\frac{3}{2}\ln 2$.▶

б) Найти сумму ряда

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots.$$

$$\blacktriangleleft\ S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{4n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4n}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2n+1}+\ldots+\frac{1}{4n-1}\right)=$$

$$=\ln(4n)-\ln(2n)-\ln(4n)+\frac{1}{2}\ln 2n+\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)=$$

$$=\frac{\ln 2^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}+\varepsilon_n\to\frac{1}{2}\ln 2.$$

Ответ: $S=\frac{1}{2}\ln 2.\blacktriangleright$

Задание 7. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\ldots.$$

$$\blacktriangleleft\ S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k\,(3k-1)}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=+\infty.$$

Ряд расходится.$\blacktriangleright$

Задание 8. Показать, что ряд

$$2+\left(\frac{5}{4}-\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{10}{9}-\frac{26}{27}\right)+\ldots+\left(\frac{n^2+1}{n^2}-\frac{n^3-1}{n^3}\right)+\ldots \tag{5.22}$$

сходятся, а ряд

$$2+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\frac{10}{9}-\frac{26}{27}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^2}-\frac{n^3-1}{n^3}+\ldots, \tag{5.23}$$

полученный из ряда (5.22) опусканием скобок, расходится.

◀Общий член заданного ряда имеет вид:

$$a_n=\frac{n^2+1}{n^2}-\frac{n^3-1}{n^3}=\frac{n+1}{n^3}.$$

Так как при любом $n>1$:

$$\frac{n+1}{n^3}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3},$$

а ряд с общим членом $\frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha>1$ сходится, то и заданный ряд сходится. В то же время общий член ряда (5.23) не стремится к нулю при $n\to\infty$, а потому ряд (5.23) расходится.▶

Задание 9. Доказать, что ряд, получаемый при возведении в квадрат условно сходящегося ряда

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\ldots, \tag{5.24}$$

расходится (при обычном расположении членов).

◀Располагая в обычном порядке члены, получающиеся после раскрытия скобок в произведении

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\ldots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\ldots\right),$$

получаем ряд:

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\ldots+$$
$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\ldots. \qquad (5.25)$$

Но при $0 \le k \le n$ имеем:

$$\sqrt{(n-k)\,(k+1)} \le \frac{(n-k)+(k+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

И поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n-1}\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n-k}\sqrt{k}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{2}{n+1}+\ldots+\frac{2}{n+1}=\frac{2n}{n+1}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$, то члены ряда (5.25) не стремятся к нулю, и этот ряд расходится.

Это задание показывает, что условно сходящиеся ряды нельзя перемножать так, как перемножаются конечные суммы.▶

Задание 10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n+1)!}. \qquad (5.26)$$

При сходимости ряда найти его сумму с точностью до 10^{-3} как с недостатком, так и с избытком.

◀Составим ряд из модулей членов нашего ряда (5.26)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)!}. \tag{5.27}$$

Для исследования на сходимость ряда (5.27) воспользуемся признаком Даламбера.

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)!},\ a_{n+1} = \frac{1}{(3n+4)!},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3n+1)!}{(3n+4)!} = \frac{(3n+1)!}{(3n+1)!(3n+2)(3n+3)(3n+4)} =$$

$$\frac{1}{(3n+2)\,(3n+5)\,(3n+4)},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1.$$

Ряд (5.27) сходится, поэтому ряд (5.26) сходится абсолютно. А абсолютно сходящийся ряд сходится. Ряд (5.26) является рядом Лейбница, так как он знакочередующийся, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+1)!} = 0$ и последовательность $\left(\frac{1}{(3n+1)!}\right)$ – убывающая ($a_n > a_{n+1}$). Тогда модуль остатка ряда (5.26) не превосходит модуля первого члена остатка.

У нас:

$$a_1 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 0,04166\ldots;\, a_2 = -\frac{1}{7!} = -0,0001984\ldots.$$

Очевидно, что первым членом остатка надо взять a_2. Тогда приближённая сумма ряда с избытком будет $0,042$ с точностью до 10^{-3}, а с недостатком – $0,041$.▶

Задание 11. Исследовать на обсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right), \ \alpha>0. \tag{5.28}$$

$$◀ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n}\right]=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}=1,$$

то есть

$$\ln^{\alpha}\left(1+\frac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{5.29}$$

Сходимость ряда, составленного из модулей членов ряда (5.28), равносильна сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{5.30}$$

При $\alpha>1$ ряд (5.30) сходится абсолютно, а при $0<\alpha\leq 1$ – расходится, то есть и ряд (5.28) при $\alpha>1$, сходится абсолютно, а при $0<\alpha\leq 1$ не является абсолютно сходящимся. При $0<\alpha\leq 1$ ряд (5.28) есть ряд Лейбница (показать), то есть он сходится условно.▶

Задание 12. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n}\frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx, \ \alpha>0. \tag{5.31}$$

◀Оценим сверху ряд (5.31).

$$|A| \le \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n} \frac{dx}{x^{\alpha}} =$$

$$= \left[\int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n} x^{-\alpha} dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_{\pi n}^{\pi+\pi n} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(\pi+\pi n)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\pi n)^{\alpha-1}}\right) = \right.$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{\pi^{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}} - 1\right) =$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1 = 1 - 1 + (1-\alpha)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$\left. = C\cdot\frac{1}{n^{\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} C\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{5.32}$$

Из (5.32) следует, что при $\alpha > 1$ ряд (5.31) сходится абсолютно.
Рассмотрим случай, когда $0 < \alpha \le 1$. Тогда

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} dx. \tag{5.33}$$

Ряд (5.33) есть ряд Лейбница. Покажем это. Он знакочередующийся. Последовательность

$$a_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha}} dx$$

убывающая, потому что функция $y=\frac{1}{x^\alpha}$ – убывающая, и каждому $n\in\mathbb{N}$ соответствует криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $f(x)=\frac{|\sin x|}{x^\alpha}$ и осью Ox.

Площади этих трапеций есть соответственно члены последовательности (a_n). Последовательность этих площадей является убывающей и стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Утверждение о ряде Лейбница доказано. А любой ряд Лейбница сходится.

Дальше рассмотрим на предмет сходимости ряд, составленный из модулей ряда (5.33):

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx. \tag{5.34}$$

Докажем, что ряд (5.34) расходится. Применим признак сравнения в форме неравенств (теорема 2.2).

$$\int\limits_{\pi n}^{\pi+\pi n}\frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx=\left[x=\pi n+t\ (0\le t\le\pi)\right]=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{|\sin(\pi n+t)|}{(\pi n+t)^\alpha}dt>$$

$$>\int\limits_{0}^{\pi}\frac{|\sin t|}{(\pi n+\pi)^\alpha}=\frac{1}{\pi^\alpha(n+1)^\alpha}\int\limits_{0}^{\pi}\sin t dt=\frac{2}{\pi^\alpha(n+1)^\alpha}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ при $0<\alpha\le 1$ расходится, а значит, и ряд (5.34) расходится.

Таким образом, ряд (5.31) при $0<\alpha\le 1$ сходится условно.►

Задание 13. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{n-\sin n}. \tag{5.35}$$

◀Вначале воспользуемся признаком Абеля – Дирихле (теорема 5.2) сходимости рядов.

В нашем случае положим $b_n = \sin 2n$ и $a_n = \frac{1}{n-\sin n}$. Проверим для ряда (5.35) справедливость условий признака Абеля – Дирихле.

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin 2k\right| = \left|\frac{2\sin 2\,(\sin 2 + \sin 4 + \sin 6 + \ldots + \sin(2n-4) + \sin(2n-2) + \sin 2n)}{2\sin 2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1 - \cos 4 + \cos 2 - \cos 6 + \cos 4 - \cos 8 + \ldots}{2\sin 2} +\right.$$

$$\left.+ \frac{\cos(2n-6) - \cos(2n-2) + \cos(2n-4) - \cos 2n + \cos(2n-2) - \cos(2n+2)}{2\sin 2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1 + \cos 2 - \cos 2n - \cos(2n+2)}{2\sin 2}\right| \leq \frac{2}{\sin 2}.$$

Ограниченность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin 2k$ доказана. Исследуем на монотонность последовательность $a_n = (n - \sin n)^{-1}$. Вначале рассмотрим соответствующую функцию $y = \frac{1}{x-\sin x}$.

$$y' = \frac{-1 + \cos x}{(x - \sin x)^2} \leq 0$$

для любых допустимых x.

Функция невозрастающая на луче $[1, +\infty)$, а поэтому последовательность (a_n) будет невозрастающей для любого $n \in \mathbb{N}$. Также

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \sin n} = 0.$$

Все условия признака Абеля – Дирихле выполняются, значит, ряд (5.35) сходится.

Исследуем ряд (5.35) на абсолютную сходимость.
Составим ряд из модулей ряда (5.35).

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin 2n|}{n - \sin n}. \tag{5.36}$$

Имеем оценку снизу:

$$|A| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2n}{n - \sin n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,(n - \sin n)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2\,(n - \sin n)}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n-\sin n)}$ – расходится, так как $\frac{1}{n-\sin n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2(n-\sin n)}$ – сходится (по признаку Абеля – Дирихле). Значит, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{n-\sin n}$ – расходится, поэтому расходится и ряд (5.36) (теорема сравнения). Ряд (5.35) сходится условно.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Выяснить, какие из данных знакочередующихся рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

   1.1 $3 - \frac{4}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\frac{n+2}{n} + \ldots;$

   1.2 $1 - \frac{1}{3^3} + \ldots + (-1)^{n+1}\,\frac{1}{(2n-1)^3} + \ldots;$

   1.3 $-1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \ldots + (-1)^n\,\frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \ldots;$

   1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{2n+1}{n(n+1)};$

   1.5 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^{n}\,\frac{\ln n}{n};$

   1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{(2n+1)!!}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)};$

   1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)};$

   1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\frac{\pi}{n}}{n};$

   1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\frac{\pi}{n}}{n};$

   1.10 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1}};$

   1.11 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n};$

   1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1,1)^n;$

   1.13 $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \ldots;$

   1.14 $1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \ldots;$

   1.15 $1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + \ldots.$

2. Убедится в том, что признак Лейбница неприменим к данным знакочередующимся рядам. Выяснить, какие из них расходятся, какие сходятся условно, какие абсолютно:

2.1 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}+1}-\frac{1}{\sqrt{k}-1}+\ldots;$

2.2 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{3^{2k-1}}+\ldots;$

2.3 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{3^k}+\ldots;$

2.4 $\frac{1}{3}-1+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-3}+\ldots.$

3. При каких значениях α сходятся следующие ряды:

3.1 $1-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}-\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7}-\ldots;$

3.2 $1+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\ldots.$

4. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является сходящимся, если выполнены условия:

а) общий член ряда a_n стремится к нулю при $n\to\infty$;

б) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, полученный в результате группировки членов данного ряда без нарушения их порядка, сходится; число слагаемых a_i, входящих в член A_n, ограничено.

5. Показать, что заданные ряды сходятся. Исследовать сходимость рядов, получаемых из данных, если опустить скобки:

5.1 $1+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{8}{9}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n^2-1}{n^2}\right)+\ldots;$

5.2 $\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k)^2}\right]+\ldots;$

5.3 $\sqrt{2}+(3-\sqrt{7})+(\sqrt{28}-\sqrt{26})+\ldots+\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right)+\ldots.$

6. Зная, что сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ равна $\frac{\pi^2}{12}$, найти суммы рядов:

6.1 $1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}-\ldots$;

6.2 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$, полученных из данного в результате перестановки его членов.

7. Дан условно сходящийся ряд. Изменится ли сумма ряда, если первые 1000 членов его переставить, а порядок следования остальных членов оставить без изменения?

8. Составить почленную разность расходящихся рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$$

и исследовать ее сходимость.

9. Сходится ли ряд, образованный почленным вычитанием ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$?

10. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ суммой его первых n членов. Оценить точность такого приближения при $n=10$.

11. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ суммой его первых n членов. В частности, оценить точность такого приближения при $n=1000$.

12. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{(4n+1)\cdot 5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

13. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

14. Найти суммы рядов:

14.1 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots;$

14.2 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\ldots;$

14.3 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5}+\ldots,$ получаемых из ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ldots$ перестановкой членов.

15. Доказать сходимость ряда и найти его сумму

15.1 $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots;$

15.2 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots;$

15.3 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots;$

15.4 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots;$

15.5 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots;$

15.6 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{7}+\ldots;$

15.7 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots;$

15.8 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}+\ldots;$

15.9 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\ldots.$

16. Применяя признаки Лейбница, показать, что ряды сходятся условно:

16.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-4n+1}};$

16.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n^9}{\sqrt{n^{20}+4n^3+1}};$

16.3 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^{25}n}{n};$

16.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{\sqrt{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}};$

16.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3,1}}{2\sqrt{n}+n}$;

16.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sqrt{n}}{n+20}$.

17. Исследовать сходимость (абсолютную и условную) рядов:

17.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$;

17.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

17.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2(n+1)}{2^n+3^n}$;

17.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \sin\frac{1}{n}$;

17.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

17.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

17.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$;

17.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

17.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{5^{\frac{n}{2}} - n^2}$;

17.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+\sin^2 n}$;

17.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$;

17.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

17.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.

18. Применяя признак Абеля – Дирихле, показать, что данные ряды сходятся условно.

18.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n+2}$;

18.2 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln\ln n}$;

18.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)}$;

18.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

18.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$;

18.6 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{(n+2)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^2-n+1}$.

ЛЕКЦИЯ 6
Функциональные последовательности и ряды

6.1 Функциональные последовательности и ряды, их сходимость

Определение 6.1. *Пусть каждому натуральному числу по определённому закону (правилу) ставится в соответствие некоторая функция f_n с областью определения $D(f_n)$, тогда это соответствие называется* ***функциональной последовательностью*** $(f_n(x))$ *с областью определения* $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(f_n)$.

Другими словами, функциональная последовательность – это множество занумерованных функций: $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$. Функции f_n $(n = \overline{1, \infty})$ называются **членами функциональной последовательности**.

Пусть задана последовательность функций $f_n(x)$, причем все функции заданы на одном множестве D. Тогда при каждом фиксированном $x \in D$ числовая последовательность $(f_n(x))$ может оказаться как сходящейся, так и расходящейся в зависимости от точки x.

Множество точек $x \in D$, для которых последовательность $(f_n(x))$ сходится, называется **областью сходимости** последовательности функций $(f_n(x))$.

Пример 6.1. Найти область определения и область сходимости функциональной последовательности $(f_n(x))$, $f_n(x) = x^n$.

◀Все члены функциональной последовательности определены на числовой прямой, то есть область определения функциональной последовательности есть $\mathbb{R}$. Очевидно, что для любого $x = x_0 \in (-1; 1)$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x_0^n = 0$; при $x_0 = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$. Но при $x > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = +\infty$, а при $x < -1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = \infty$, если же $x = -1$, то не существует $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$.

Вывод: Функциональная последовательность сходится для любого $x \in (-1; 1]$, то есть полуинтервал $(-1; 1]$ есть область сходимости функциональной последовательности $f_n(x) = x^n$. Область определения функциональной последовательности есть $\mathbb{R}$ $(D = \mathbb{R})$ ▶.

Если функциональная последовательность $(f_n(x))$ имеет область сходимости D, то множество всех пределов соответствующих числовых последовательностей есть множество значений некоторой функции $f : D \to \mathbb{R}$. Функция f называется **предельной функцией** функциональной последовательности $(f_n(x))$. В примере 6.1 предельной функцией функциональной последовательности (x^n) будет

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Другими словами, предельная функция f функциональной последовательности $(f_n(x))$ есть предел

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \tag{6.1}$$

который по Коши определяется следующим образом:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \forall x \in D \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Дальше дадим понятие функционального ряда, его области определения и области сходимости.

Пусть на множестве $D \subset \mathbb{R}$ определена функциональная последовательность $(u_k(x))$. Тогда запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots \tag{6.2}$$

называется **функциональным рядом** с областью определения D.

Возьмём любое $x = x_0 \in D$, тогда получим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0), \tag{6.3}$$

который может сходиться, а может расходиться. Множество всех точек x из области определения ряда (6.2), для которых соответствующие числовые ряды сходятся, называется **областью сходимости** функционального ряда (6.2).

Замечание 6.1. Также как и для числовых рядов, для функциональных рядов вводится понятие n-й частичной суммы ряда

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x). \tag{6.4}$$

Сходимость функционального ряда – это и есть сходимость последовательности соответствующих частичных сумм $(S_n(x))$, то есть функциональной последовательности.

По этой причине изучение функциональных рядов равносильно изучению функциональных последовательностей. Поэтому

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x) \tag{6.5}$$

называется **суммой ряда** (6.2) (область определения функции S совпадает с областью сходимости соответствующего ряда).

По Коши (6.5) означает:

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall x \in D\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ |S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| = |R_n(x)| < \varepsilon,$$

$R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ – n-й остаток ряда (6.2).

Замечание 6.2. Введённое нами понятие сходимости функциональной последовательности (функционального ряда) на некотором множестве называется **поточечной сходимостью** функциональной последовательности (функционального ряда).

Например, для исследования функциональных рядов на такую сходимость можно использовать аналоги признаков Даламбера и Коши на абсолютную и условную сходимость таких рядов. Если дан функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{6.6}$$

и существует

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \varphi(x), \tag{6.7}$$

то на множестве точек $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству $|\varphi(x)| < 1$, ряд будет сходиться, причём абсолютно (будет сходиться ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k(x)|$). Если же $|\varphi(x)| > 1$, то на множестве точек, удовлетворяющих этому неравенству, ряд расходится. Если же $|\varphi(x)| = 1$, то на множестве точек, удовлетворяющих указанному уравнению, ряд может сходиться, а может и расходиться, причём сходимость может быть как абсолютной, так и условной. Для исследования сходимости в последнем случае находим корни уравнения $|\varphi(x)| = 1$ и поочерёдно подставляем их в (6.2). Получаем соответственно числовые ряды, которые исследуем на сходимость (расходимость) указанными раннее (для числовых рядов) методами.

Также можно использовать аналог признака Коши (заключения аналогичны указанным выше):

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|u_k(x)|} = |\varphi(x)|. \tag{6.8}$$

Пример 6.2. Исследовать на сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k}^{\infty}\mathrm{ctg}^k(2x). \tag{6.9}$$

◀Находим $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\mathrm{ctg}^k(2x)\right|} = |\mathrm{ctg}2x| = |\varphi(x)|$.

Решаем неравенство

$$|\mathrm{ctg}2x| < 1. \tag{6.10}$$

$$\frac{\pi}{4}+\pi n < 2x < \frac{3\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}.$$

В интервалах $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, ряд (6.9) сходится, причём абсолютно, а в интервалах $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$ $(|\varphi(x)| > 1)$ – расходится. Если $x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ или $x = \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ $(|\varphi(x)| = 1)$ (учесть, что период функции $y = \operatorname{ctg} 2x$ есть $T = \frac{\pi}{2}$), то получим соответственно числовые ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg}^k \frac{\pi}{4} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$; $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg}^k \frac{3\pi}{4} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, которые расходятся, так как предел их общих членов при $k \to \infty$ не равен нулю.▶

6.2 Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов

Основной вопрос, который будет нас интересовать в дальнейшем, – это в какой мере свойства элементов функциональной последовательности (членов функционального ряда) такие, как непрерывность, интегрируемость и т.д., будут наследоваться ее пределом (суммой ряда). Уже простые примеры показывают, что предел последовательности непрерывных функций может оказаться разрывной функцией и т.п. Так, в примере 6.1 все члены функциональной последовательности $f_n(x) = x^n$ непрерывны на промежутке $(-1, 1]$, а предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

терпит разрыв в точке $x = 1$.

Дальше мы изучим новое понятие, которое играет важную роль в рассматриваемом вопросе.

Определение 6.2. *Функциональная последовательность $(f_n(x))$ (ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с последовательностью частичных сумм $(S_n(x))$) называется* ***равномерно сходящейся*** *на множестве $E \subset \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, для любого $x \in E$*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ (|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon),$$

где f – предельная функция функциональной последовательности (S – сумма ряда).

Обозначение равномерной сходимости:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} S(x)\right).$$

Теорема 6.1 (критерий равномерной сходимости функциональной последовательности). *Функциональная последовательность $(f_n(x))$ будет равномерно сходиться на $E \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| = 0$.

◀Пусть функциональная последовательность равномерно сходится на E:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \forall x \in E \ \ |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последнего неравенства видно, что число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ будет верхней границей для множества модулей $|f(x) - f_n(x)|$ при $n > n_0$. Но тогда

$$\sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \forall x \in E \ \ \sup_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |f(x) - f_n(x)| = 0$. Легко доказывается и достаточное условие (доказать самостоятельно).▶

Теорема 6.2 (критерий равномерной сходимости функционального ряда). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *будет равномерно сходиться на $E \subset \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |S(x) - S_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} \left| \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in E} |R_n(x)| = 0.$$

Пример 6.3. Доказать, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k+x} \tag{6.11}$$

равномерно сходится на $E = [0; +\infty)$.

◀Ряд является рядом Лейбница для любого $x \in E$. Тогда

$$0 \le |R_n(x)| \le \left| \frac{(-1)^{n+1-1}}{n+1+x} \right| = \frac{1}{n+1+x} \le \frac{1}{n+1}. \tag{6.12}$$

Из неравенства (6.12) видно, что $\frac{1}{n+1}$ есть верхняя граница множества $\{|R_n(x)|\}$. Но тогда и

$$0 \le \sup_{x \in \mathrm{E}} |R_n(x)| \le \frac{1}{n+1}. \tag{6.13}$$

Воспользуемся теоремой о трёх функциях: $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, а тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in E} |R_n(x)| = 0$, т.е. ряд (6.11) равномерно сходится на E.▶

6.3 Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов

Теорема 6.3 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей). *Функциональная последовательность* $(f_n(x))$ *сходится равномерно на множестве* $E \subset D$ *(*D *– область определения функциональной последовательности) к предельной функции* $f : E \to \mathbb{R}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n, p \in \mathbb{N} \;\; n \geq n_0 \;\; \forall x \in E \;\; |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

◀**Необходимость.** Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тогда будем иметь:

а) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0' \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0'$, и для любого $x \in E$ будет справедливо неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$;

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0'' \in \mathbb{N}$, что для любых $n, p \in \mathbb{N}$, $n > n_0''$, для любого $x \in E$ будет выполняться неравенство $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Выбираем в качестве $n_0 = \max\{n_0'; \, n_0''\}$. Тогда для любого $n > n_0$ и для любого $x \in E$ будут выполняться неравенства

$$\begin{cases} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

С учётом последней системы неравенств проведём оценку сверху:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+p}(x) - f_n(x) - f(x) + f(x)| \leq$$

$$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n, p \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in E \; |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n, p \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ \forall x \in E$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.14}$$

Тогда для любого $x \in E$ (x фиксируем) получим числовую последовательность, которая при наших условиях является фундаментальной (последовательностью Коши), а значит, эта последовательность сходится (критерий Коши для числовой последовательности). Значит, имеем поточечную сходимость функциональной последовательности $(f_n(x))$ к предельной функции f: для любого $x \in E$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Перейдя к пределу, в (6.14) получим:

$$\lim_{\substack{p\to+\infty \\ (n+p)\to+\infty}} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \lim_{\substack{p\to+\infty \\ (n+p)\to+\infty}} f_{n+p}(x) - \lim_{p\to+\infty} f_n(x) \right| =$$

$$= |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, и для любого $x \in E$, то есть:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ n > n_0\ \ \forall x \in E\ \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.\ ◀$$

Теорема 6.4 (критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно к* $f : E \to \mathbb{R}$ *на множестве* E *тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)\ \ \ \forall n, p \in \mathbb{N}\ n \geq n_0 \forall x \in E\ \ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

6.4 Признаки Вейерштрасса и Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов

Теорема 6.5 (мажорантный признак Вейерштрасса). *Если для функционального ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{6.15}$$

существует такой положительный сходящийся числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{6.16}$$

и существуют $c > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > k_0$, и для любого $x \in E$ будет выполняться неравенство

$$|u_k(x)| \leq c \cdot a_k, \tag{6.17}$$

то ряд (6.15) сходится равномерно и абсолютно на E.

◀Так как числовой положительный ряд (6.16) сходится, то по необходимому условию критерия Коши о сходимости числовых рядов

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \; n \geq n_0 \;\; \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \frac{\varepsilon}{c} \tag{6.18}$$

(причем берём $n_0 \geq k_0$). Но тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq c \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon. \tag{6.19}$$

Тогда

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \ \forall n,p\in\mathbb{N}\ \ n\geq n_0\ \ \forall x\in E\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|<\varepsilon,$$

то есть ряд (6.15) сходится на E равномерно и абсолютно (достаточное условие критерия Коши равномерной сходимости функционального ряда).►

Пример 6.4. Исследовать функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}\qquad(6.20)$$

на равномерную сходимость на множестве $E=(-\infty;+\infty)$.

◄Найдем $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)|$.

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^5x^2};\quad f_n'(x)=\frac{n(1+n^5x^2)-nx\cdot n^5 2x}{(1+n^5x^2)^2}=\frac{n-n^6x^2}{(1+n^5x^2)^2};$$

$$f_n'(x)=0\Leftrightarrow n-n^6x^2=0;\quad x_{1,2}=\pm\frac{1}{n^2\sqrt{n}}.$$

$$f_n\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)=\frac{n\cdot\frac{1}{n^2\sqrt{n}}}{1+n^5\frac{1}{n^5}}=\frac{1}{2n\sqrt{n}},\quad\left|f_n\left(-\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)\right|=\frac{1}{2n\sqrt{n}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}=0.$$

Тогда $|f_n(x)|=\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ сходится. По признаку Вейерштрасса ряд (6.20) сходится равномерно и абсолютно на $E=\mathbb{R}$.►

Теорема 6.6 (признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов). *Функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\ b_n(x) \tag{6.21}$$

сходится равномерно на множестве $E \subset \mathbb{R}$, *если выполняются условия:*

1. *Последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ *равномерно ограничена на множестве* E:

$$\exists M > 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \quad \left|\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\right| \le M < \infty.$$

2. *Последовательность* $(a_n(x))$ *монотонна для любого* $x \in E$ *(при любом фиксированном* $x \in E$*) и равномерно стремится к нулю при* $n \to \infty$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall x \in E \ \ a_{n+1}(x) \le a_n(x) \quad \text{или} \quad a_n(x) \ge a_{n+1}(x) \quad a_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} 0.$$

Пример 6.5. Исследовать на равномерную сходимость на $E = \mathbb{R}$ функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos nx}{\sqrt{n^2 + x^2}}. \tag{6.22}$$

◀Пусть $a_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ и $b_n(x) = 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos nx$. Тогда для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos kx$

$$S_n(x) = 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x + \sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x + \ldots +$$

$$+\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{5}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)x+$$
$$+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x=-\sin\frac{x}{2}+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Видно, что $|S_n(x)|\le 2$ для любых $x\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$, то есть последовательность $(S_n(x))$ равномерно ограничена на $E=\mathbb{R}$.

Рассмотрим последовательность $(a_n(x))=\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$. Обозначим

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+x^2}}.$$

$\varphi'(t)=\frac{-\frac{t}{\sqrt{t^2+x^2}}}{t^2+x^2}<0$ при $t\ge 1$. Значит, $\varphi(t)$ – убывающая функция при $t\ge 1$, т.е. последовательность $a_n(x)$ – убывающая (монотонная) для любого $x\in E=\mathbb{R}$ (при любом фиксированном $x\in E=\mathbb{R}$). Кроме того,

$$0\le\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\le\frac{1}{\sqrt{n^2}}=\frac{1}{n},\quad 0\le\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}\le\frac{1}{n};\quad \lim_{n\to\infty}0=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}=0$, то есть последовательность $a_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$ равномерно сходится к нулю на $\mathbb{R}$.

По признаку Абеля – Дирихле ряд (6.22) сходится равномерно на $\mathbb{R}$.►

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте понятие функциональной последовательности, её области определения и области сходимости.
2. Дайте понятие функционального ряда, его области определения и области сходимости.
3. Дайте понятие поточечной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
4. Дайте определение равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
5. Сформулируйте критерий равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
6. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов.
7. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса.
8. Сформулируйте признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.

Область сходимости функциональной последовательности и ряда. Равномерная сходимость

Задание 1. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$-\frac{1-x}{1+x}+\frac{1}{3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n+\ldots. \tag{6.23}$$

◀По признаку Даламбера ряд (6.23) будет абсолютно сходится при тех значениях x, для которых будет выполняться неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1.$$

В нашем задании

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n+1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n+1}}{\frac{1}{2n-1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{n}}=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

Неравенство $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$ выполняется при $x>0$. При $x<0$ $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$, а потому по признаку Даламбера ряд расходится. Осталось исследовать ряд при $x=0$. При $x=0$ получим ряд

$$-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n-1}+\ldots, \tag{6.24}$$

который сходится по признаку Лейбница. Так как ряд

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\ldots$$

расходится, то ряд (6.24) сходится лишь условно.

Итак, областью сходимости ряда (6.23) является полуось $0 \leq x < \infty$, причем на открытой полуоси $0 < x < \infty$ он сходится абсолютно.▶

Задание 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}. \tag{6.25}$$

◀Применим к ряду (6.25) признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{1+x^{2n+2}}}{\frac{x^n}{1+x^{2n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}}\right|.$$

Если $|x| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}}\right| = |x| < 1$, а потому ряд абсолютно сходится.

Если $|x| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\left(1+x^{2n}\right)}{1+x^{2n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{x^{2n+1}}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^{2n+2}}+1}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < 1,$$

и ряд снова абсолютно сходится. При $x = -1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}$ и расходится, так как его общий член не стремится к нулю, а при $x = 1$ ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ и сходится. Поэтому область сходимости ряда $(-\infty < x < -1) \cup (-1 < x < +\infty)$.▶

Задание 3. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\ln x^2}. \tag{6.26}$$

◀Воспользуемся «эталонным» рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{6.27}$$

Ряд (6.27) сходится, если $\alpha > 1$, и расходится при $\alpha \leq 1$.
У нас общий член ряда (6.26) $u_n(x) = \frac{1}{n^{\ln x^2}}$. Ряд (6.26) будет сходиться, причем абсолютно, если

$$\ln x^2 > 1 \Leftrightarrow \ln x^2 > \ln e \Leftrightarrow x^2 > e \Leftrightarrow |x| > \sqrt{e}.$$

Ответ: Область сходимости ряда (6.26), причём абсолютной, есть множество

$$\left(-\infty, -\sqrt{e}\right) \cup \left(\sqrt{e}, +\infty\right). \blacktriangleright$$

Задание 4. Найти область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n\,(n+1)}. \tag{6.28}$$

◀Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет сходиться, причём абсолютно, если

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} \xrightarrow[n\to\infty]{} |\varphi(x)|,$$

где $|\varphi(x)| < 1$, при $|\varphi(x)| = 1$ ряд может расходиться, а может сходиться, причём сходимость будет или абсолютной, или условной. У нас

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n\,|\sin x|^n}{n\,(n+1)}} = 2\,|\sin x|\,. \tag{6.29}$$

Тогда

$$|\varphi(x)| = 2|\sin x|, \quad 2|\sin x| < 1 \Leftrightarrow |\sin x| < \frac{1}{2}, \quad -\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

при таких значениях x ряд (6.28) будет сходиться абсолютно.

Если $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin x = \frac{1}{2}$. Получим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}. \tag{6.30}$$

Ряд (6.30) сходится по признаку сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Если $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\sin x = -\frac{1}{2}$. Имеем числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, который также сходится абсолютно. Область сходимости ряда (6.28) определяется неравенствами $|x - \pi n| \leq \frac{\pi}{6}$, причём ряд сходится абсолютно.▶

Задание 5. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}. \tag{6.31}$$

◀Вначале находим область определения ряда (6.31). Это будет множество точек $A = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Введём обозначение

$$u_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}.$$

Тогда $u_{n+1}(x) = \frac{x^n}{(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}$.

Исследуем предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^n(1-x^n)(1-x^{n+1})}{x^{n-1}(1-x^{n+1})(1-x^{n+2})}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x(1-x^n)}{1-x^{n+2}}\right|.$$

Рассмотрим следующие случаи:
а) $|x| < 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x| = |\varphi(x)|$.
Если $|\varphi(x)| < 1$, то ряд сходится, причём абсолютно.
Вывод: при $|x| < 1$ ряд (6.31) сходится абсолютно.
б) $|x| > 1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\left(\frac{1}{x^n}-1\right)}{x^{n+2}\left(\frac{1}{x^{n+2}}-1\right)}\right| = \frac{1}{|x|} = |\psi(x)|$.
Если $|\psi(x)| < 1$, то ряд сходится, причём абсолютно. У нас

$$\frac{1}{|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1, \\ x < -1 \end{array}\right].$$

$B = \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ – область сходимости ряда, причём абсолютной.▶
Задание 6. Для функциональной последовательности

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}, \tag{6.32}$$

где $x \in \mathbb{R}$, установить:
1) сходится ли последовательность на $\mathbb{R}$;
2) где на $\mathbb{R}$ сходимость будет равномерной.
◀Найдем поточечный предел последовательности (6.32):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+nx^2} = 0 = f(x)\,. \tag{6.33}$$

Исследуем (6.32) на равномерную сходимость, используя критерий равномерной сходимости функциональной последовательности.

$$y = \frac{x}{1+nx^2},\ y' = \frac{1+nx^2 - x\cdot 2nx}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2};\ y' = 0,\ 1-nx^2 = 0,\ x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Элементы функциональной последовательности – нечетные функции. Достаточно найти

$$\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\geq 0}\frac{x}{1+nx^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\cdot\frac{1}{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Аналогично и для $x<0$.

Последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$.►

Задание 7. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональную последовательность

$$f_n(x)=\frac{n+\operatorname{arcctg} nx}{3nx} \tag{6.34}$$

на множествах $E_1=(0,1)$ и $E_2=(1,+\infty)$.

◄Вначале покажем, что последовательность $f_n(x)$ сходится на каждом из множеств E_1 и E_2, и найдём её предельную функцию.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\operatorname{arcctg} nx}{3nx}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3nx}\cdot\left(1+\frac{\operatorname{arcctg} nx}{n}\right)=\frac{1}{3x}=f(x).$$

Дальше докажем, что на множестве E_1 сходимость функциональной последовательности $f_n(x)$ будет неравномерной. Воспользуемся следующим определением неравномерной сходимости функциональной последовательности:

$$\exists\varepsilon>0\ \ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \ \exists n\in\mathbb{N}\ \ n>n_0\ \ \exists x\in E_1\ \ |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon.$$

Возьмём любое $n_0\in\mathbb{N}$. В качестве n возьмём $n=n_0+1$, а $x=\frac{1}{n_0+1}$. Тогда будет справедлива оценка снизу

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{n_0+1+\operatorname{arcctg}\frac{n_0+1}{n_0+1}}{3(n_0+1)\cdot\frac{1}{n_0+1}}-\frac{n_0+1}{3}\right|=\left|\frac{\operatorname{arcctg} 1}{3}\right|=\frac{\pi}{12}.$$

В качестве ε можно взять любое действительное число из полуинтервала $\left(0, \frac{\pi}{12}\right]$. В этом случае определение неравномерной сходимости будет выполняться.

Вывод: на множестве $E_1 = (0, 1)$ функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится неравномерно.

Покажем, что на множестве $E_2 = (1, +\infty)$ сходимость функциональной последовательности $f_n(x)$ будет равномерной. Воспользуемся следующим определением: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; \forall x \in E_2 \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в определении n_0 оценим сверху $|f_n(x) - f(x)|$:

$$\left|\frac{n + \operatorname{arcctg} nx}{3nx} - \frac{1}{3x}\right| = \frac{1}{3x}\left|\frac{n + \operatorname{arcctg} nx - n}{n}\right| =$$

$$= \frac{\operatorname{arcctg} nx}{3xn} < \frac{\frac{\pi}{4}}{3 \cdot 1 \cdot n} = \frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{n}. \tag{6.35}$$

В правой части (6.35) потребуем, чтобы $\frac{\pi}{12} \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon$. Тогда $n > \frac{\pi}{12\varepsilon}$. В качестве n_0 возьмём

$$n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{\pi}{12\varepsilon}\right]\right\}.$$

При таком выборе n_0 будет выполняться определение равномерной сходимости функциональной последовательности $f_n(x)$ на множестве $E_2 = (1, +\infty)$ к предельной функции $f(x) = \frac{1}{3x}$.▶

Задание 8. Доказать, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{8n+1} + x} \tag{6.36}$$

равномерно сходится на луче $[-2, +\infty)$.

◀Вначале покажем, что ряд (6.36) есть ряд Лейбница. Он знакочередующийся. При любых фиксированных $x \in [-2, +\infty]$ последовательность

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{8n+1}+x} \tag{6.37}$$

убывающая, так как

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{8n+1}+x} > \frac{1}{\sqrt{8n+9}+x} = u_{n+1}(x).$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{8n+1}+x} = 0.$$

Дальше воспользуемся тем, что модуль n-го остатка ряда Лейбница не превосходит модуля первого члена этого остатка.

Имеем оценку

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{8n+9}+x} \right| = \frac{1}{\sqrt{8n+9}+x} \leq \frac{1}{\sqrt{8n+9}-2}. \tag{6.38}$$

Выражение $\frac{1}{\sqrt{8n+9}-2}$ есть верхняя граница $|R_n(x)|$, а тогда

$$0 \leq \sup_{x\in[-2,+\infty]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{8n+9}-2}. \tag{6.39}$$

Но

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{8n+9}-2} = 0.$$

Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[-2,+\infty]} |R_n(x)| = 0$, то есть ряд (6.36) сходится равномерно на луче $[-2, +\infty]$ (достаточное условие критерия равномерной сходимости функциональных рядов).▶

Задание 9. Доказать что ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2} \tag{6.40}$$
сходится равномерно на любом отрезке числовой прямой, но не сходится абсолютно ни при одном значении $x\in\mathbb{R}$.

◀Возьмём любой отрезок $[a,b]\subset\mathbb{R}$, $a<b$. При любом $x\in[a,b]$ ряд (6.40) будет рядом Лейбница (показать), поэтому он сходится на $E=[a,b]$.

Проведём следующие оценки
$$0\le|R_n(x)|\le\frac{x^2+n+1}{(n+1)^2}\le\frac{(\max\{|a|,\ |b|\})^2+n+1}{(n+1)^2};$$
$$0\le\sup_{x\in[a,b]}|R_n(x)|\le\frac{(\max\{|a|,|b|\})^2+n+1}{(n+1)^2}=\alpha_n, \tag{6.41}$$
$\lim\limits_{n\to\infty}0=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Тогда
$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|R_n(x)|=0. \tag{6.42}$$

Значит, ряд (6.40) равномерно сходится на любом отрезке $[a,b]$ числовой прямой. С другой стороны, для любого $x\in\mathbb{R}$ справедлива оценка снизу
$$\frac{x^2+n}{n^2}\ge\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}. \tag{6.43}$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – гармонический, он расходится, поэтому по теореме сравнения с учётом оценки (6.43) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2+n}{n^2}$ также расходится при любых $x\in\mathbb{R}$.▶

Задание 10. Доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{3^k\sqrt{1+kx^2}} \tag{6.44}$$

на отрезке $[0,2]$, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

◀Используем критерий Коши для функциональных рядов (теорема 6.4). Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Для нахождения указанного в теореме натурального числа n_0 оценим сверху $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|$. Исследуем на наибольшее значение функцию

$$\varphi_k(x) = \frac{x}{3^k\sqrt{1+kx^2}},$$

$$\varphi_k'(x) = \frac{1}{3^k} \cdot \frac{\sqrt{1+kx^2} - x\frac{kx}{\sqrt{1+kx^2}}}{1+kx^2} = \frac{1}{3^k\left(1+kx^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

для любых $x \in [0,2]$, то есть $\varphi_k(x)$ возрастает на отрезке $[0,2]$. Тогда

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{2}{3^k\sqrt{4k+1}} < 2\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{3^k}$$

$$= 2\cdot\frac{\frac{1}{3^{n+1}}\left(1-\frac{1}{3^p}\right)}{1-\frac{1}{3}} < 3\cdot\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}.$$

Потребуем, чтобы $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, $n_0 = \max\left\{1, \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$.▶

Задание 11. Доказать равномерную сходимость функционального ряда

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}\sin kx - \sqrt{k}\sin(k+1)x}{\sqrt{k^2+k}} \tag{6.45}$$

на $\mathbb{R}$, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

◀Тождественно преобразуем функциональный ряд (6.45):

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kx}{\sqrt{k}} - \frac{\sin (k+1)\, x}{\sqrt{k+1}} \right). \tag{6.46}$$

Зададимся любым $\varepsilon > 0$. Оценим сверху модуль

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{\sin kx}{\sqrt{k}} - \frac{\sin (k+1)\, x}{\sqrt{k+1}} \right) \right| = \left| \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} - \frac{\sin (n+1+p)\, x}{\sqrt{n+1+p}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|\sin nx|}{\sqrt{n}} + \frac{|\sin (n+1-p)|}{\sqrt{n+1+p}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Потребуем, чтобы

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n} > \frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon^2}, \quad n_0 = \max \left\{ 1, \left[\frac{4}{\varepsilon^2} \right] \right\}. \blacktriangleright$$

Задание 12. Показать, что на луче $0 \leq x < \infty$ функциональный ряд

$$\frac{1}{3\sqrt{1+x}} + \frac{1}{9\sqrt{1+3x}} + \ldots + \frac{1}{3^n \sqrt{1+(2n-1)\, x}} + \ldots$$

равномерно сходится. Начиная с какого номера n остаток ряда $r_n(x)$ (независимо от значения x) удовлетворяет неравенству $|R_n(x)| < 0,01$?

◀Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Так как при $x \geq 0$

$$\sqrt{1+(2n-1)\, x} > 1,$$

то члены данного ряда в заданном интервале не больше соответствующих членов ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots, \tag{6.47}$$

представляющего собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{3}$ и, следовательно, сходящегося. Поэтому данный ряд сходится равномерно.

Для оценки остатка $R_n(x)$ функционального ряда подсчитаем остаток числового ряда (6.47). Имеем:

$$R_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} + \ldots = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Остаток $R_n(x)$ данного функционального ряда будет не больше остатка числового ряда (6.47), поэтому

$$R_n(x) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}.$$

Найдем теперь, при каком значении n будет выполняться неравенство

$$R_n(x) \ < 0,01.$$

Для этого решаем неравенство

$$\frac{1}{2 \cdot 3^n} < 0,01\ 8; 8\ 3^n > 50.$$

Откуда $n \geqslant 4$.▶

Задание 13. Доказать, что ряд

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots \tag{6.48}$$

равномерно сходится на всей числовой оси.

◀Так как $|\sin nx| \leq 1$, то для всех x выполняется неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Значит, сходящийся числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

является мажорантой ряда (6.48), а потому ряд (6.48) равномерно сходится на всей числовой оси.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Определить область сходимости (абсолютной и условной) данных функциональных рядов:

1.1 $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\ldots+\frac{n}{x^n}+\ldots$;

1.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$;

1.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}$;

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;

1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1-x^n}$;

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$;

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x(x+n)}{n}\right]^n$;

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$;

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2n-1})}$;

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^n)}$;

1.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\ldots(x+n)}$;

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\sin^n x}{n^2}$;

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n}$;

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n+x}$;

1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^{n\sin x}}$;

1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln x)^n}$;

1.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\sin^n x}{n(n+2)}$;

1.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos^n x}{n^4}$;

1.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(x+1)^n}$;

1.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2+n+1}$;

1.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$;

1.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$;

1.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x-3)^n}$;

1.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{|x|}}{2^{n \sin x}}$;

1.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$;

1.26 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+2^n}$;

1.27 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$;

1.28 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^n}{x^2+n^2}$;

1.29 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^4+n}$;

1.30 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x^2+1}$;

1.31 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos^2 x}$;

1.32 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$.

2. Найти сумму ряда:

2.1 $\frac{3}{1+3x} + \frac{5}{(1+3x)(1+5x)} + \frac{7}{(1+3x)(1+5x)(1+7x)} + \ldots, \ x > 0$;

2.2 $\frac{2}{1+2x} + \frac{3}{(1+2x)(1+3x)} + \frac{4}{(1+2x)(1+3x)(1+4x)} + \ldots, \ x > 0$;

2.3 $\frac{1^2}{x^2+2^2} + \frac{(2!)^2}{(x^2+2^2)(x^2+3^2)} + \frac{(3!)^2}{(x^2+2^2)(x^2+3^2)(x^2+4^2)} + \ldots, \ x > 0$.

3. Исследовать равномерную сходимость ряда на множестве E:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{n^2x^2}}, \ E = (-\infty; +\infty)$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, \ E = (-2; +\infty)$;

3.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}, \ E = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$;

3.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n}+(n+1)x}}, \ E = [0; +\infty)$;

3.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$, $E = [0; +\infty)$;

3.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+(nx)^3}$, $E = [0; 1]$;

3.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-xn}$, $E = [0; +\infty)$;

3.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^x}{n!}$, $E = [-1; 1]$;

3.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+nx+x^2}$, $E = (0; 10)$;

3.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n+1)x}}$, $E = (0; +\infty)$;

3.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^x(n+2)}{n!}$, $E = (0; +\infty)$.

4. Доказать, что последовательность функций $u_n(x) = xe^{-nx}$ равномерно сходится к нулю на луче $[0; +\infty)$.

5. При каких значениях α последовательность функций

$$u_n(x) = n^{\alpha} x e^{-nx}$$

равномерно сходится к нулю на луче $[0; +\infty]$?

6. Показать, что последовательности сходятся на отрезке $0 \le x \le \pi$, но не равномерно:

6.1 $u_n(x) = \sqrt[n]{\sin x}$;

6.2 $u_n(x) = \sin^n x$;

6.3 $u_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}$;

6.4 $u_n(x) = [f(x)]^n$, где $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

6.5 $u_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}$, где $f(x)$ имеет тот же смысл, что и выше.

7. Определить при $0 < x \le 1$ сумму и остаток функционального ряда

$$x + x(1-x) + x(1-x)^2 + \ldots + x(1-x)^{n-1} + \ldots$$

и показать, что он сходится равномерно на отрезке $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. При каком значении n остаток данного ряда удовлетворяет неравенству $|r_n(x)| < 0,01$ независимо от значения x на этом отрезке?

8. Показать, что функциональный ряд

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+5)} + \ldots + \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)} + \ldots$$

равномерно сходится к функции $\frac{1}{2(x+1)}$ для всех $x \geq 0$. При каком значении n остаток ряда удовлетворяет неравенству $|r_n(x)| < 0,01$ для любого $x \geq 0$.

9. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x+\sqrt{n}}$$

равномерно сходится на луче $[0;+\infty)$. Сколько членов ряда нужно взять, чтобы его остаток на всем луче $[0;+\infty)$ не превосходил $0,01$?

10. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n x}$$

абсолютно сходится при $x \neq 0$, но не является равномерно сходящимся на полуоси $0 < x < +\infty$.

11. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1} x^2}{(1+x^2)^n}$$

равномерно сходится на всей числовой прямой, а ряд из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

всюду сходится, но неравномерно.

12. Пользуясь признаком Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость в указанных промежутках следующих функциональных рядов:

12.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $0 \leq x < \infty$;

12.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}$, $-1 \leq x \leq 1$;

12.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n - x^{-n})$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$;

12.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $0 \leq x < \infty$;

12.5 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots$ на отрезке $[a; b]$, где $0 < a < b$.

ЛЕКЦИЯ 7

Свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда

7.1 Непрерывность предельной функции функциональной последовательности и суммы функционального ряда

Теорема 7.1 (о перестановке пределов). *Пусть D – область сходимости функциональной последовательности $(f_n(x))$, $a \in D$ – предельная точка для D. Если последовательность $(f_n(x))$ удовлетворяет условиям*

1) $(f_n(x))$ сходится к функции $f : D \to \mathbb{R}$ равномерно в некоторой проколотой окрестности точки a,

2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = b_n$.

Тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, т.е.

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

◄Из критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности (теорема 6.3) получаем:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in \overset{o}{U}(a, \delta) \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве при $x \to a$, получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m \in \mathbb{N} \quad |b_n - b_m| \le \varepsilon.$$

Отсюда из критерия Коши для числовых последовательностей следует существование $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Выберем теперь n таким образом, чтобы

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3}, \;\; |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

при $x \in \overset{o}{U}(a,\delta)$, и при таком n выберем проколотую окрестность точки a $\overset{o}{V}(a,\delta_1)$ так, чтобы $|f_n(x)-b_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $x \in \overset{o}{V}(a,\delta_1)$.

В итоге получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \overset{o}{V}(a,\delta_1) \ \ \forall x \in \overset{o}{V}(a,\delta_1) \quad |f(x) - b| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Теорема 7.2. *Пусть D – область сходимости функциональной последовательности $(f_n(x))$. Если $(f_n(x))$ сходится равномерно к $f : D \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки $a \in D$ и все функции f_n непрерывны в точке a, то и функция f непрерывна в точке a.*

◀Доказательство теоремы следует из теоремы 7.1.▶

Следствие 7.1. *Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f(x)$ и функции f_n непрерывны на $E \subset D$, то и функция f непрерывна на E.*

Следствие 7.2. *Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} U_k(x) \underset{n\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} S(x)$ и функции U_k непрерывны на $E \subset D$, то и функция S непрерывна на E.*

7.2 Почленное интегрирование функциональных последовательностей и функциональных рядов

Теорема 7.3. *Если $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) \in C[a,b]$, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

◄Из непрерывности членов функциональной последовательности и ее равномерной сходимости на $[a, b]$ следует, что $f(x) \in C[a, b]$ (следствие 7.1). А тогда существует $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Из равномерной сходимости функциональной последовательности на $[a, b]$ следует, что

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \forall x \in [a, b] \ \ \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

А тогда для любого $x \in [a, b]$

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b \left|f_n(x) - f(x)\right| dx < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \forall x \in [a, b] \ \ \left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon. \ ►$$

Пример 7.1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx \ne \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx,$$

где $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$.

Выяснить причины нарушения заключения теоремы 7.3.

◀1) $f_n(0)=0$; 2) Если $x\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{e^{nx^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{x^2e^{nx^2}}=0$.

Тогда

$$\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx=\int\limits_0^1 0dx=0.$$

С другой стороны:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 ne^{-nx^2}dx=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\int\limits_0^1 e^{-nx^2}d\left(-nx^2\right)=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-nx^2}\Big|_0^1=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(e^{-n}-1\right)=\frac{1}{2}\neq 0,$$

то есть

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx\neq\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Дальше покажем, что $f_n(x)$ не сходится равномерно к $f(x)=0$ на отрезке $[0,1]$.

$$f_n'(x)=\left(nxe^{-nx^2}\right)_x'=ne^{-nx^2}-nxe^{-nx^2}\cdot 2nx=ne^{-nx^2}\left(1-2nx^2\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

$x=\frac{1}{\sqrt{2n}}$ – точка наибольшего значения $f_n(x)$ на отрезке $[0,1]$. Тогда

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\frac{n}{\sqrt{2n}}\cdot e^{-0.5}\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Функиональная последовательность $f_n(x)$ не сходится равномерно на $E=[0,1]$, то есть условие теоремы 7.3 нарушается. В этом и состоит причина полученного неравенства (7.1).▶

Теорема 7.4. *Если функциональный ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{7.2}$$

равномерно сходится на отрезке $E = [a, b]$ $(a < b)$ *к функции* $S(x)$, *а члены этого ряда непрерывны на указанном отрезке, то существует*

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx. \tag{7.3}$$

Пример 7.2. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} \tag{7.4}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

◄Покажем, что ряд (7.4) сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Применим признак Вейерштрасса:

$$|u_n(x)| = \left|\frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}\right| = \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ – сходится. Тогда ряд (7.4) сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к $f(x)$. Члены ряда (7.4)

$$u_n(x) = \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}$$

непрерывны на $\mathbb{R}$, но тогда (следствие 7.2) функция $f(x)$ – непрерывна на $\mathbb{R}$, а поэтому и на отрезке $[0, 2\pi]$. У нас выполняются все условия теоремы 7.4, поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2nx}{2} dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \pi,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \right.$$

$$\left. = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \right),$$

то есть, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ▶

7.3 Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и функциональных рядов

Теорема 7.5. *Если выполняются следующие условия:*
1) *члены функциональной последовательности* $(f_n(x))$ *дифференцируемы на отрезке* $[a, b]$, $a < b$,
2) $(f_n'(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \varphi(x)$,
3) $(f_n(x_0))$ *сходится для некоторого* $x_0 \in [a, b]$, *тогда:*
a) $(f_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x)$,
b) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \varphi(x) = f'(x)$.

◀Для упрощения доказательства дополнительно предположим, что $f'_n(x) \in C[a,b]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\varphi(x) \in C[a,b]$. Из условий 2 и 3 теоремы и соответствующих необходимых условий критерия Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall n, p \in \mathbb{N} \ \ n > n_0 \ \ \forall x \in [a,b]$$

$$\left| f'_{n+p}(x) - f'_n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \tag{7.5}$$

$$\left| f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.6}$$

На отрезке $[x, x_0]$ выполняются условия теоремы Лагранжа для

$$\mu(x) = f_{n+p}(x) - f_n(x),$$

поэтому существует $\xi \in (x, x_0)$, что для любого $x \in [a,b]$

$$\mu(x) - \mu(x_0) = \mu'(\xi)(x - x_0). \tag{7.7}$$

Тогда

$$|\mu(x)| = |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |\mu(x) - \mu(x_0) + \mu(x_0)| \leq$$

$$|\mu(x_0)| + |\mu(x) - \mu(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

то есть

$$(f_n(x)) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f(x).$$

По теореме 7.3:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f'_n(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} \left(\lim_{n\to\infty} f'_n(z) \right) dz = \int_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \Big|_{x_0}^{x} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) = f(x) - f(x_0),$$

то есть

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz, \tag{7.8}$$

где $\int\limits_{x_0}^{x} \varphi(z)\,dz$ – интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции. Тогда $f'(x) = \varphi(x)$.►

Теорема 7.6. *Если члены ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *дифференцируемы на отрезке* $[a,b]$, $a < b$ *и ряд сходится хотя бы в одной точке* $x_0 \in [a,b]$, *а ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \sigma(x)$, *тогда:*

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \underset{n\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} S(x)$;

б) $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = S'(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u'_k(x) = \sigma(x)$.

Пример 7.3. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3} \tag{7.9}$$

имеет непрерывную производную на $\mathbb{R}$.

◄Возьмем любой отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ и любую точку $x \in [a,b]$. На $[a,b]$ все условия теоремы 7.6 выполняются, а именно:

1. Члены $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}$ ряда дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, так как они дифференцируемы на $\mathbb{R}$ $\left(u'_n(x) = -\frac{\sin nx}{n^2}\right)$.

2. Ряд (7.9) сходится, даже равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ $\left(\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}\right)$.

3. Также равномерно сходится на $[a, b]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)$ $\left(\left|-\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}\right)$.

4. Члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)$ непрерывны на $[a, b]$.

Значит, в точке $x \in \mathbb{R}$ существует $f'(x)$, причём непрерывная. Так как $x \in \mathbb{R}$, поэтому на $\mathbb{R}$ функция имеет непрерывную производную.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте условия непрерывности предельной функции функциональной последовательности.
2. Сформулируйте условия непрерывности суммы функционального ряда.
3. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.
4. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.
5. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности.
6. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 6

Свойства предела функциональной последовательности и суммы ряда

Задание 1. Найти область определения функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{7.10}$$

и исследовать ее на непрерывность.

◀Найдем область сходимости функционального ряда (7.10) с помощью признака Коши.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(x^2 + \frac{1}{n}\right) = x^2.$$

Ряд (7.10) сходится, если $x^2 < 1$, и расходится, если $x^2 > 1$. Иными словами, ряд сходится на промежутке $(-1; 1)$. В точках $x = \pm 1$ он расходится, поскольку при $x = \pm 1$ общий член ряда равен $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$ (не выполнен необходимый признак сходимости ряда).

Исследуем теперь функцию $f(x)$ на непрерывность. Для этого докажем, что ряд (7.10) равномерно сходится на любом отрезке $[-a; a]$, где $0 < a < 1$. Выберем число b, лежащее между a и 1, $0 < a < b < 1$. Найдется такое n_0, что при $n \geq n_0$ $a + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b$. Но тогда при $n \geq n_0$ и $|x| \leq a$ выполняется неравенство

$$\left(x^2 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(|x| + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2n} \leq \left(a + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq b^{2n}.$$

Это неравенство показывает, что сходящийся числовой ряд

$$b^2 + b^4 + \ldots + b^{2n} + \ldots$$

(геометрическая прогрессия со знаменателем $b^2 < 1$) является мажорантой для ряда (7.10) на отрезке $[-a; a]$, а потому ряд (7.10) равномерно сходится на этом отрезке. Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-a; a]$. В силу произвольности a, $0 \le a < 1$, функция $f(x)$ непрерывна на всем промежутке $(-1; 1)$.▶

Задание 2. Определить область определения функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx}dx \tag{7.11}$$

и исследовать ее на непрерывность.

◀Если $x < 0$, то предел общего члена ряда (7.11)

$$\lim_{n\to\infty} xe^{-nx} = -\infty \ne 0,$$

если $x = 0$, то $f(x) = 0$. Пусть $x > 0$, тогда

$$f(x) = x\left(\frac{1}{e^x} + \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 + \left(\frac{1}{e^x}\right)^3 + \dots\right) = \left[\left|\frac{1}{e^x}\right| \approx \frac{1}{x} < 1\right] =$$

$$= x \cdot \frac{\frac{1}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} = \frac{x}{e^x - 1},$$

но

$$\lim_{x\to+0} \frac{x}{e^x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left[e^x - 1 \underset{x\to+0}{\sim} x\right] = \lim_{x\to+0} \frac{x}{x} = 1.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases},$$

точка $x = 0$ – точка устранимого разрыва функции $f(x)$.▶

Задание 3. Показать, что последовательность $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, сходится на отрезке $[0,1]$, но

$$\int\limits_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx \neq \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx. \tag{7.12}$$

◀Находим поточечный предел данной функциональной последовательности при $x \in (0,1]$:

$$x \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{nx^2}} = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2 e^{nx^2}} = 0.$$

Если $x = 0$, то $f_n(0) = 0$, значит, предельная функция последовательности будет $f(x) = 0$. Тогда $\int\limits_0^1 \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = \int\limits_0^1 0dx = 0$. С другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 nxe^{-nx^2} dx = \left[d(-nx^2) = -2nxdx\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{e^n} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Утверждение задачи доказано. Покажем еще, что наша функциональная последовательность сходится неравномерно. Докажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \neq 0, f_n(x) - f(x) = nxe^{-nx^2},$$

$$y = nxe^{-nx^2},\ y' = n\left(e^{-nx^2} + x(-2nx)e^{-nx^2}\right) = ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2),$$

$$y' = 0,\ 1 - 2nx^2 = 0,\ x^2 = \frac{1}{2n},\ x = \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Тогда $\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-n\cdot\frac{1}{2n}} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \to +\infty$. Сходимость будет неравномерной, то есть условие теоремы об интегрировании функциональных последовательностей нарушается. Это и привело к неравенству (7.12).▶

Задание 4. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \tag{7.13}$$

непрерывна при $x > 0$ и вычислить

$$I = \int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\, dx. \tag{7.14}$$

◀Возьмем любое $x_0 \in (0, +\infty)$. Существует отрезок $[a, b] \subset (0, +\infty)$, что $x_0 \in [a, b]$. Члены ряда (7.13) непрерывны на отрезке $[a, b]$. Докажем, что ряд (7.13) равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ (пусть $a < b$). Воспользуемся признаком Вейерштрасса. Справедлива оценка

$$|u_n(x)| = \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{e^{an}}.$$

Покажем, что числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{an}} \tag{7.15}$$

сходится. Воспользуемся интегральным признаком сходимости числовых рядов (выполнение условий признака проверьте самостоятельно).

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x}{e^{ax}} dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} x e^{-ax} dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^{-ax}dx, & v = -\frac{1}{a}e^{-ax} \end{matrix} \right]_1^A =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(\left(-\frac{1}{a}\right) x\, e^{-ax}\Big|_1^A + \frac{1}{a}\int\limits_1^{A} e^{-ax} dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{a} \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{A}{e^{aA}} - \frac{1}{e^{a}} + \frac{1}{a}\, e^{-ax}\Big|_1^A \right) =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\left[\lim_{A\to+\infty} \frac{A}{e^{aA}} = 0 \right] - e^{-\frac{1}{a}} + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{e^{aA}} - \frac{1}{e^{a}} \right) \right) = \frac{1+a}{e^a \cdot a^2}.$$

Значит, ряд (7.15) сходится, поэтому функциональный ряд (7.13) сходится равномерно на отрезке $[a,b]$, а это значит, что функция $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a,b]$, в том числе и в точке $x = x_0$. Так как $x = x_0$ любая точка открытого луча $(0,+\infty)$, то функция $f(x)$ – непрерывна на этом луче. У нас выполняются все условия теоремы об интегрировании функциональных рядов для ряда (7.13) на любом отрезке $[a,b] \subset (0,+\infty)$. Найдем $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} f(x)\, dx$.

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \int\limits_{\ln 2}^{\ln 5} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(-\frac{1}{n}\right) e^{-nx}\Big|_{n2}^{n5} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{n\ln 5}} - \frac{1}{e^{n\ln 2}} \right) =$$

$$= -\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right) = -\left(\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} - \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \blacktriangleright$$

Задание 5. Показать, что последовательность $(f_n(x))$, где

$$f_n(x) = x^3 + \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \tag{7.16}$$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$, но

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim_{n\to\infty} f_n'(x). \tag{7.17}$$

◀Для доказательства равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$ на $\mathbb{R}$ воспользуемся критерием равномерной сходимости функциональной последовательности. Вначале найдем предельную функцию для последовательности $f_n(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left(x^3 + \frac{1}{n}\sin n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = x^3 = f(x).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

то есть функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Дальше находим

$$(\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = (x^3)' = 3x^2.$$

С другой стороны,

$$f_n'(x) = 3x^2 + \frac{1}{n}\cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot n = 3x^2 + \cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

но $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(3x^2 + \cos n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ не существует.▶

Задание 6. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2 + x^2} \tag{7.18}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$ и вычислить

$$\int\limits_0^{+\infty} f(x)dx. \tag{7.19}$$

◀Члены ряда (7.18) $u_n(x) = \frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывны на числовой прямой. Кроме того, ряд (7.18) сходится равномерно на числовой прямой в силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ – сходится $\left(\frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n^2}\right)$. То есть сумма ряда (7.18) есть непрерывная функция на $\mathbb{R}$. Дальше вычислим несобственный интеграл (7.19), используя теорему об интегрировании функциональных рядов (выполнение условий показать самостоятельно).

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2 + x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2 + x^2}dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} \frac{dx}{n^2(n+1)^2 + x^2}dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\operatorname{arctg}\frac{x}{n(n+1)}\Bigg|_0^A = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(\operatorname{arctg}\frac{A}{n(n+1)} - 0\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Задание 7. Доказать, что последовательность функций

$$u_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \tag{7.20}$$

равномерно сходится к нулю на числовой оси, но последовательность производных этих функций не сходится к нулю.

◀Так как $|\sin nx| \le 1$, то $|u_n(x) - 0| = \left|\frac{\sin nx}{n}\right| \le \frac{1}{n}$, и $\rho(u_n, u) \le \frac{1}{n}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$, то последовательность функций $u_n(x)$ равномерно сходится к нулю. Продифференцировав функции последовательности (7.20), получаем последовательность функций

$$u_n'(x) = \cos nx,$$

так как $u_n'(0) = \cos 0 = 1$, то эта последовательность не сходится к нулю.▶

Задание 8. Определить множество A точек сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}} \tag{7.21}$$

и доказать существование производной суммы ряда $f(x)$ на множестве A.

◀Члены ряда определены на числовой прямой $\mathbb{R}$. Применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)(x+1)}\left(1+2^{nx}\right)}{2^{n(x+1)}\left(1+2^{(n+1)x}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{x+1}\left(1+2^{nx}\right)}{1+2^{(n+1)x}}. \tag{7.22}$$

Возможные случаи.

а) Если $x>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{x+1}2^{nx}\left(1+\frac{1}{2^{nx}}\right)}{2^{(n+1)x}\left(1+\frac{1}{2^{(n+1)x}}\right)}=2>1$.

Если $x>0$, то функциональный ряд (7.21) расходится.

б) Если $x=0$, то $u_n(0)=2^n$ не стремится к 0 при $n\to\infty$.

Предел общего члена ряда не равен нулю, поэтому при $x=0$ ряд (7.21) расходится.

в) Если $x<0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{x+1}(1+2^{nx})}{1+2^{(n+1)x}}=2^{x+1}$.

Ряд (7.21) сходится, причем абсолютно, если

$$2^{x+1}<1\Leftrightarrow 2^{x+1}<2^0\Leftrightarrow x+1<0\Leftrightarrow x<-1.$$

Если $2^{x+1}=1$, $x=-1$, то имеем числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+2^{-n}}. \tag{7.23}$$

Ряд (7.23) расходится $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2^n}}=1\neq 0\right)$.

Вывод: область сходимости функционального ряда (7.21) есть открытый луч $(-\infty,-1)=A$.

Дальше докажем, пользуясь теоремой о дифференцировании функциональных рядов, что существует производная сумма ряда (7.21).

Берем любую точку $x\in A$. Пусть отрезок $[a,b]\subset A$, $a<b$ и $x\in[a,b]$.

Рассмотрим на предмет равномерной сходимости функциональный ряд, составленный из производных членов рядов (16).

$$\left(\frac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}}\right)'=\frac{2^{n(x+1)}\cdot n\cdot\ln 2\cdot(1+2^{nx})-2^{nx}\cdot n\cdot\ln 2\cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^2}=y.$$

Имеем функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot \ln 2 \cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^2}. \tag{7.24}$$

$$y' = \frac{2^{n(x+1)}(n \cdot \ln 2)^2 (1+2^{nx})^2 - 2^{n(x+1)} \cdot n \cdot \ln 2 \cdot 2 \cdot (1+2^{nx})}{(1+2^{nx})^4} =$$

$$= 2^{n(x+1)} (n \ln 2)^2 \frac{1+2^{nx} - 2 \cdot 2^{nx}}{(1+2^{nx})^3}.$$

$$y' = 0, \; 1 - 2^{nx} = 0, \; x = 0.$$

На отрезке $[a, b]$ $y' = 0$, то есть функция (общий член ряда (7.24) возрастает). Положим $x = b$ для ряда (7.24), получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \ln 2 \cdot 2^{n(b+1)}}{(1+2^{nb})^2}. \tag{7.25}$$

Докажем, что числовой ряд (7.25) сходится. Справедлива оценка

$$\frac{n \ln 2 \cdot 2^{n(b+1)}}{(1+2^{nb})^2} < n \cdot 2^{n(b+1)}. \tag{7.26}$$

У нас $b < -1$, $b+1 < 0$, $-\alpha = b+1$, $\alpha > 0$. Имеем числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n\alpha}}. \tag{7.27}$$

Проведём следующие преобразования:

$$\frac{n}{2^{n\alpha}} = \frac{n}{2^{\frac{n\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}}} \leq C \cdot \frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}}},$$

так как
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^{\frac{n\alpha}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\alpha}{2}}=0.$$

Ряд
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{n\alpha}{2}}}$$
сходится (применим интегральный признак):
$$\int\limits_0^{+\infty}2^{\frac{-\alpha x}{2}}dx=\lim_{B\to+\infty}\int\limits_0^{B}2^{-\frac{\alpha x}{2}}dx=-\frac{2}{\alpha}\lim_{B\to+\infty}2^{-\frac{\alpha x}{2}}\Big|_0^B=$$
$$=-\frac{2}{\alpha}\lim_{B\to+\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{\alpha B}{2}}}-1\right)=\frac{2}{\alpha}.$$

Тогда сходится и числовой ряд (7.27) и (7.25) (теорема сравнения). Выполняются все условия признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов, то есть функциональный ряд (7.24) сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. В этом случае выполняются все условия теоремы о дифференцировании функциональных рядов на $[a,b]$, то есть существует производная суммы ряда (7.21) на $[a,b]$, поэтому и на луче A (x – любая точка A)
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n(x+1)}}{1+2^{nx}}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\ln 2\cdot 2^{n(x+1)}}{(1+2^{nx})^2}. \blacktriangleright$$

Задание 9. Проверить, выполняются ли условия теоремы об интегрировании функциональных последовательностей (если нет, то справедливо ли заключение этой теоремы) на $[0,1]$ для
$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^4}. \tag{7.28}$$

◀Находим предельную функцию для последовательности (7.28):

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

Дальше найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|$.

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{nx}{1+n^2x^4} = y,$$

$$y' = \frac{n(1+n^2x^4) - nx\cdot 4x^3n^2}{(1+n^2x^4)^2} = \frac{n(1-3n^2x^4)}{(1+n^2x^4)^2},$$

$$y' = 0,\ 1 - 3n^2x^4 = 0,\ x = \frac{1}{\sqrt[4]{3n^2}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3n^2}}}{1 + n^2\cdot\frac{1}{3n^2}} = +\infty.$$

Значит, функциональная последовательность (7.28) сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$. Дальше выясним, справедливо ли равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}dx.$$

$$\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(nx^2)}{1+(nx^2)^2} = \begin{bmatrix} t = nx^2, \\ t_{\text{н}} = 0, \\ t_{\text{в}} = n \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^n \frac{dt}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^n = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} n \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\pi}{4}.$$

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

С другой стороны,

$$\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+n^2x^4}dx = \int\limits_0^1 0dx = 0.$$

Заключение теоремы также неверно $\left(\frac{\pi}{4} \neq 0\right)$.▶

Задание 10. Показать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nx^n-(n-1)x^{n-1})(1-x) \tag{7.29}$$

сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$, но справедливо равенство

$$\int\limits_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}(nx^n-(n-1)x^{n-1})(1-x)\right)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^1 (nx^n-(n-1)x^{n-1})(1-x)dx. \tag{7.30}$$

◀Вначале найдем сумму ряда

$$S_n(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{n}(kx^k-(k-1)x^{k-1}) =$$

$$= (1-x)(x+2x^2-x+3x^2-2x^2+4x^4-3x^2+\ldots+$$

$$+(n-1)x^{n-1}-(n-2)x^{n-2}+nx^n-(n-1)x^{n-1} = (1-x)nx^n \xrightarrow[n\to\infty]{[0,1]} 0 = S(x).$$

Воспользуемся критерием равномерной сходимости функциональности рядов.

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = (x-1)nx^n, |R_n(x)| = (1-x)nx^n = y,$$

$$y' = -nx^n + (1-x)n^2x^{n-1} = n(-x + (1-x)n)x^{n-1},$$

$$y' = 0,\ -x + (1-x)n,\ n = x(1+n),\ x = \frac{n}{n+1},$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |R_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^1 =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n}{n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Значит, ряд (7.29) сходится неравномерно на отрезке $[0,1]$. Дальше проверим справедливость равенства (7.30). Сумма ряда $S(x) = 0$, поэтому слева в равенстве (7.30) будет $\int\limits_0^1 0\cdot dx = 0$. Найдем ряд правой части равенства (7.30):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 (nx^n - (n-1)x^{n-1})(1-x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 (nx^n - (n-1)x^{n-1} - nx^{n+1} + (n-1)x^n)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+2} + \frac{n-1}{n+1}\right).$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k} \right) - \left(\frac{k}{k+2} - \frac{k-1}{k+1} \right) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{2}{(k+2)(k+1)} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - 2 \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} - 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то есть правая часть в (7.30) также равна нулю.►

Задание 11. Доказать, что функция

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x} \tag{7.31}$$

бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

◄Возьмем любое $p \in \mathbb{N}$ и любую точку $x \in (0, +\infty)$. Рассмотрим отрезок $[a, b]$, $a < b$, такой, что $x \in [a, b]$. Обозначим $y = e^{-n^2 x}$. Тогда $y^{(p)} = (-1)^p n^{2p} e^{-n^2 x}$. Докажем, что функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^p n^{2p} e^{-n^2 x} \tag{7.32}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Общий член ряда (7.32) представим в виде

$$(-1)^p n^{2p} e^{-n^2 x} = (-1)^p \cdot \frac{n^{2p}}{e^{\frac{n^2 x}{2}}} \cdot \frac{1}{e^{n^2 x}}.$$

Находим, используя правило Лопиталя p-раз,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2p}}{e^{\frac{n^2x}{2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{2pn^{2p-1}}{\frac{x}{2}\cdot 2ne^{\frac{n^2x}{2}}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\overset{\text{Пр.Л.}}{=}\ldots=0.$$

Тогда

$$\left|(-1)^p n^{2p}e^{-n^2x}\right|\leq C\cdot\frac{1}{e^{\frac{n^2x}{2}}}\leq C\cdot\frac{1}{e^{\frac{n^2a}{2}}}\leq C\cdot\frac{1}{e^{\frac{na}{2}}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\frac{na}{2}}}$ сходится (интегральный признак).

По признаку Вейерштрасса ряд (7.32) будет сходиться равномерно, также будет сходиться равномерно на $[a,b]$ и ряд, соответствующий $(p-1)$ производной функции $f(x)$ (нам нужна просто его сходимость).

Нами доказано, что существует на отрезке $[a,b]$ (а значит, и в точке $x\in[a,b]$) производная любого порядка $p\in\mathbb{N}$ функции $f(x)$. Но x – любая точка промежутка $(0,+\infty)$, поэтому функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема при $x>0$.▶

Задания для самостоятельного решения

1. Определить область существования функций и исследовать их на непрерывность:

1.1 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$;

1.2 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-(x-n)^2}$ равномерно сходится на отрезке $[0;1]$ и допускает на этом отрезке дифференцирование любого порядка.

3. Показать, что ряд
$$x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n} + \ldots$$
равномерно сходится на отрезке $-q \le x \le q$, где q – любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда
$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

4. Исходя из равенства
$$1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{3n} + \ldots = \frac{1}{1-x^3} \quad (|x| < 1),$$
найти сумму ряда $3x^2 + 6x^5 + \ldots + 3nx^{3n-1} + \ldots$.

5. Показать, что ряд $x^2 + x^6 + \ldots + x^{6n-2} + \ldots$ равномерно сходится на отрезке $-q \le x \le q$, где q – любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найти сумму ряда
$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \ldots.$$

6. Исходя из формулы для суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \; (|x| < 1),$$

найти сумму ряда:

6.1 $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)\, x^n + \ldots$;

6.2 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots + (n+1)\,(n+2)\, x^n + \ldots$.

7. Доказать равенство:

$$x + \frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{9} + \ldots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

8. Исходя из равенства

$$(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\ldots\left(1+x^{2^{n-1}}\right) = \frac{1-x^{2^n}}{1-x},$$

определить сумму

$$S_n = \frac{x}{1+x} + \frac{2x^3}{1x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}.$$

Затем найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2^{n-1}}}{1+x^{2^{n-1}}}.$$

9. Исходя из равенства

$$\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{8} \ldots \cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}},$$

определить сумму

$$S_n = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\mathrm{tg}\frac{x}{2^n},$$

затем найти суммы рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2n} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n \cos\frac{x}{2^n}}\right)^2.$$

ЛЕКЦИЯ 8
Степенные ряды. Теорема Коши – Адамара

8.1 Понятие степенного ряда. Теорема Коши – Адамара. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда

Определение 8.1. ***Степенным рядом*** *называется функциональный ряд вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k, \tag{8.1}$$

где x_0 *– фиксированное действительное число.*

a_k $(k=0,1,2\ldots)$ *называют* ***коэффициентами*** *степенного ряда.*

Замечание 8.1. Частным случаем степенного ряда (8.1) при $x_0=0$ является ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k. \tag{8.2}$$

Теорема 8.1 (Коши – Адамара). *Если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k|}=\frac{1}{R}$, $R\in[0,+\infty]$, *то:*

1. *При* $R=+\infty$ *ряд* (8.1) *абсолютно сходится на всей действительной оси* $\mathbb{R}$.

2. *При* $0<R<+\infty$ *ряд* (8.1) *абсолютно сходится на интервале* $(x_0-R;x_0+R)$ $(|x-x_0|<R)$ *и расходится вне этого интервала* $(|x-x_0|>R)$.

3. *При* $R=0$ *ряд сходится только в одной точке* $x=x_0$ (мы считаем здесь $\frac{1}{0}=\infty$ и $\frac{1}{\infty}=0$).

◀Очевидно, что при $x=x_0$ ряд (8.1) всегда сходится, так как все члены ряда при $k\neq 0$ обращаются в нуль (сумма ряда равна a_0).

Пусть $x \neq x_0$. При $R = +\infty$ получим:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} |x-x_0| \sqrt[k]{|a_k|} = |x-x_0| \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = 0 < 1$$

для любого $x \neq x_0$ (множитель $|x-x_0| > 0$ вынесен за знак верхнего предела на основании замечания 4.2). Тогда (с учетом теоремы 4.2 и сходимости ряда при $x = x_0$) следует, что ряд абсолютно сходится на $\mathbb{R}$.

Если $x \neq x_0$ и $0 < R < +\infty$, то

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} = |x-x_0| \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = |x-x_0| \cdot \frac{1}{R}.$$

На основании той же теоремы 4.2 (обобщённый признак Коши сходимости положительных рядов) заключаем, что ряд абсолютно сходится для любых $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-x_0| < R, \tag{8.3}$$

и расходится для любых $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству

$$|x-x_0| > R. \blacktriangleright \tag{8.4}$$

Замечание 8.2. Число R из формулировки теоремы 8.1 называется **радиусом сходимости**, а интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$ – **интервалом сходимости** степенного ряда. В концевых точках $x_0 \pm R$ интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

8.2 Алгоритм исследования степенных рядов на сходимость

1. По формулам

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad \left(R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|, \; R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \right) \tag{8.5}$$

находим радиус сходимости степенного ряда.

2. Записываем интервал сходимости степенного ряда $(x_0 - R; x_0 + R)$.

3. Исследуем ряд на сходимость при $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$, после чего указываем область сходимости степенного ряда.

Пример 8.1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n (x+1)^n. \qquad (8.6)$$

◀Находим радиус сходимости ряда (8.6): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{4^n}} = \frac{1}{4}$. Интервал сходимости:

$$|x+1| < \frac{1}{4}; \quad -\frac{1}{4} < x+1 < \frac{1}{4}; \quad \left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right).$$

Исследуем на сходимость ряд (8.6) в точках: $x = -\frac{5}{4}$, $x = -\frac{3}{4}$.

Если $x = -\frac{5}{4}$, имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n. \qquad (8.7)$$

Ряд (8.7) расходится ($\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$ – вообще не существует). Так же при $x = -\frac{3}{4}$, имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^n \cdot \frac{1}{4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ – расходится.

Ответ: $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.▶

Теорема 8.2 (о равномерной сходимости). *Степенной ряд (8.1) с радиусом сходимости $R > 0$ сходится равномерно на отрезке $[x_0-r, x_0+r]$ для любого $r \in (0, R)$.*

◀Пусть $r_1 = \frac{r+R}{2} < R$, тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k r_1^k$ сходится и $|a_k| r_1^k \le M$ для некоторого $M > 0$ и всех $k \in N$. Отсюда при $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$

$$|a_k(x - x_0)^k| \le |a_k| r^k = |a_k| r_1^k \left(\frac{r}{r_1}\right)^k \le M \left(\frac{2r}{R + r}\right)^k$$

и по признаку Вейерштрасса (теорема 6.5) ряд (8.1) сходится равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$. ▶

Следствие 8.1 (о непрерывности суммы). *Сумма степенного ряда непрерывна в интервале сходимости этого степенного ряда.*

◀Возьмём любую точку $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$. Существует $r \in (0, R)$ такое, что $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$. На отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$ степенной ряд сходится равномерно, члены ряда непрерывны на этом отрезке, а поэтому и сумма ряда непрерывна на $[x_0 - r, x_0 + r]$, а значит, и в точке x, поэтому и во всех точках интервала $(-R; R)$.▶

Для исследования непрерывности суммы степенного ряда на конце интервала сходимости полезной является следующая теорема.

Теорема 8.3 (теорема Абеля). *Если степенной ряд (8.1) сходится при $x = t$, то его сумма непрерывна на отрезке $[x_0, t]$.*

Из теоремы 8.2 и теоремы о почленном интегрировании функционального ряда (теорема 7.4) следует справедливость следующего утверждения.

На весь экран
Начало
Содержание
Назад
◀ ▶
◀◀ ▶▶

Закрыть

Теорема 8.4 (об интегрировании степенных рядов). *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку из интервала сходимости.*

Теорема 8.5 (о дифференцировании степенных рядов). *Если степенной ряд (8.1) с радиусом сходимости $R > 0$ имеет сумму $S : (x_0 - R; x_0 + R) \to \mathbb{R}$, то существует*

$$S'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k (x - x_0)^{k-1}, \tag{8.8}$$

и радиус сходимости ряда (8.8) есть также R.

◄Вначале докажем, что радиус сходимости ряда (8.8) есть R, то есть, если $R' > 0$ – радиус сходимости ряда (8.8), то $R' = R$.

$$R' = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k-1]{k|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k-1]{k} \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)^{\frac{k}{k-1}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} = R.$$

Покажем, что дифференцирование ряда (8.1) по формуле (8.8) законно. На любом $[\alpha, \beta] \subset (-R; R)$ ряды (8.1) и (8.8) сходятся равномерно и члены их непрерывны. Тогда из теоремы 7.6 следует справедливость заключения теоремы.►

Следствие 8.2. *Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ в интервале его сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз, то есть при радиусе сходимости $R > 0$ и $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ для любого $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ существует*

$$S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k k (k-1) \ldots (k - (n-1))(x - x_0)^{k-n}, \tag{8.9}$$

причём радиус сходимости ряда (8.9) также будет R.

◄При доказательстве используем теорему 8.2 и метод математической индукции.►

Теорема 8.6 (необходимое условие разложимости функции в степенной ряд). *Если радиус сходимости степенного ряда (8.1) положителен, то его сумма $S:(x_0-R;x_0+R)\to\mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема в интервале сходимости, а его коэффициенты вычисляются по форуле*

$$a_k=\frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}. \tag{8.10}$$

◀Бесконечная дифференцируемость функции S в интервале сходимости вытекает из следствия 8.2. Также из следствия 8.2 для любого $x\in(x_0-R;x_0+R)$ и для любого $n\in\mathbb{N}$ следует

$$S^{(n)}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}a_kk(k-1)\ldots(k-(n-1))(x-x_0)^{k-n}.$$

Возьмём $x=x_0$. Тогда $S^{(n)}(x_0)=n(n-1)\cdot\ldots\cdot1\cdot a_n$, то есть $a_n=\frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$, или $a_k=\frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}$.▶

Следствие 8.3. *Если функция $f:U_{x_0}\to\mathbb{R}$ разложена в степенной ряд в интервале*

$$(x_0-R,x_0+R)\subset U_{x_0}\ \ (R>0),$$

то это разложение единственное.

◀Следствие справедливо, так как коэффициенты этого ряда однозначно определяются формулой типа (8.10).▶

Определение 8.2. *Степенной ряд (8.1) сходящийся в интервале (x_0-R,x_0+R) $(R>0)$, коэффициенты которого находятся по формуле*

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \tag{8.11}$$

называется ***рядом Тейлора*** *функции* f.

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \tag{8.12}$$

сходящийся в интервале $(-R, R)$ $(R > 0)$, *коэффициенты которого находятся по формуле*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \tag{8.13}$$

называется ***рядом Маклорена или Тейлора – Маклорена***.

Следствие 8.4. *Степенной ряд своей суммы в соответствующем интервале есть ряд Тейлора этой суммы в указанном интервале.*

◀Справедливость заключения данного предложения следует из определения 8.2 и теоремы 8.6.▶

Определение 8.3. *Функция* $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ *называется* ***аналитической в точке*** x_0, *если она разложима в степенной ряд (ряд Тейлора) в некоторой окрестности* $U(x_0, R) = (x_0 - R, x_0 + R) \subset D(f)$ *этой точки. Если функция* f *является аналитической в каждой точке некоторого множества* $G \subset D(f)$, *то она называется* ***аналитической на множестве*** G.

Пример 8.2. Функция $y = \frac{1}{1-x}$ будет аналитической на интервале $(-1, 1)$, так как

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{8.14}$$

Замечание 8.3. Бесконечная дифференцируемость функции в интервале сходимости является необходимым условием разложимости функции в степенной ряд, но в общем случае не является достаточным. Покажем это.

Пример 8.3. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, но её степенной ряд сходится, но не к функции $f(x)$.

◀Бесконечная дифференцируемость функции в точках не равных нулю очевидна. Покажем, что f – бесконечно дифференцируема и в точке $x = 0$. Воспользуемся определением производной функции в точке

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-1}{(\Delta x)^2}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{-2}{(\Delta x)^3}} = 0.$$

При $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{-1}{x^2}}\right)' = e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3};\ f''(x) = e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right)^2 + e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \frac{-6}{x^4} = e^{\frac{-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4}\right)$$

и т.д. Введем обозначения $\frac{1}{x} = t$ (при $x \to 0$ следует $t \to \infty$). Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}\left(\frac{1}{t}\right) = e^{-t^2} P_k(t),$$

где $P_k(t)$ – многочлен степени $k > n$ переменной t. Используя правило Лопиталя, можно показать, что

$$\lim_{t \to \infty} \left(e^{-t^2} P_k(t)\right) = 0. \tag{8.15}$$

При нахождении $f^{(n)}(0)$ меняются ролями x и Δx, а степень многочлена $P_k(t)$ увеличивается на единицу, но аналог предела (8.15) (при замене t на $\frac{1}{x}$ и увеличении k на единицу) всё равно будет равным нулю. Покажем это на примере $f''(0)$.

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(0+\Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\frac{-1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{2}{(\Delta x)^3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(\Delta x)^4}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} \overset{\text{Пр.Л.}}{=}$$

$$\overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\frac{-8}{(\Delta x)^5}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{-2}{(\Delta x)^3}} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\frac{4}{(\Delta x)^2}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-8}{(\Delta x)^3}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{-2}{(\Delta x)^3}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = 0.$$

Вывод: Функция f бесконечно дифференцируема и в точке $x = 0$, причём производные любого порядка в точке $x = 0$ будут равны нулю, а поэтому степенной ряд функции f (по степеням x) сходится на $\mathbb{R}$, и его сумма $S(x) = 0 \neq f(x)$.▶

Теорема 8.7 (достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора). *Если функция $f : U_{x_0} \to \mathbb{R}$ бесконечно дифференцируема в интервале*

$$(x_0 - R, x_0 + R) \subset D(f) \ (R > 0),$$

а её производные любого порядка равномерно ограничены в этом интервале, то есть существует $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ будет выполняться неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M < \infty, \tag{8.16}$$

тогда функция f разложима в указанном интервале в ряд Тейлора (по степеням $(x - x_0)$).

◀В формуле Тейлора для функции f выберем остаточный член в форме Лагранжа.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{8.17}$$

где $x < \xi < x_0$ или $x_0 < \xi < x$.

Для остатка (8.17) справедлива оценка

$$0 \le |R_n(x)| \le M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{8.18}$$

Но ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{8.19}$$

сходится на интервале (x_0-R, x_0+R). Докажем это.

$$u_n(x) = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!};\ u_{n+1}(x) = \frac{|x-x_0|^{n+2}}{(n+2)!};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+2}(n+1)!}{|x-x_0|^{n+1}(n+2)!} = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0 < 1$$

для любого $x \in (x_0-R, x_0+R)$. Сходимость ряда на (x_0-R, x_0+R) доказана. Но тогда (необходимое условие сходимости ряда)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \tag{8.20}$$

Из (8.20) и (8.18) следует (теорема о пределе промежуточной функции), что $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$.▶

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Дайте определение степенного ряда.
2. Сформулируйте теорему Коши – Адамара.
3. Сформулируйте алгоритм исследования степенных рядов на сходимость.
4. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы степенного ряда.
5. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости степенного ряда на любом отрезке из интервала сходимости.
6. Сформулируйте теорему о дифференцировании степенных рядов.
7. Сформулируйте теорему о об интегрировании степенных рядов.
8. Сформулируйте необходимое условие разложимости функции в степенной ряд.
9. Дайте определение ряда Тейлора.
10. Сформулируйте достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 7

Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов

Задание 1. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{3000}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\ldots .$$

◀Радиус сходимости ряда находим по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

В нашей задаче $a_n=\frac{1}{n\cdot 10^n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}}$.
Поэтому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n}=10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10.$$

Значит, данный ряд сходится при значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|<10$ или $-10<x<10$.

Исследуем теперь поведение ряда на концах интервала. Подставляя в данный ряд вместо x число 10, получим гармонический расходящийся ряд:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots .$$

Следовательно, при $x=10$ данный степенной ряд расходится. При $x=-10$ получим числовой знакопеременный ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots,$$

который условно сходится.

Таким образом, данный степенной ряд сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам $-10 \le x < 10$, и его область сходимости представляет собой промежуток $[-10; 10)$.▶

Задание 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{1^2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{x^4}{2^2} + \ldots + \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n} + \ldots \tag{8.21}$$

и исследовать его поведение на концах интервала.

◀Здесь мы не вправе применить формулу (8.5) для отыскания радиуса сходимости ряда (8.21), так как он не содержит нечетных степеней x. Для отыскания промежутка сходимости ряда (8.21) применим непосредственно предельный признак Даламбера.

$$D = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2 x^{2n+2}}{(n+2)^2 2^{n+1}}}{\frac{n^2 x^{2n}}{(n+1)^2 2^n}} \right| = \frac{x^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{n^2 (n+1)^2} = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, ряд сходится, если $x^2 < 2$, и расходится, если $x^2 > 2$. Радиус сходимости ряда (8.21) равен $R_1 = \sqrt{2}$. Выясним, сходится ли он при $x = \pm\sqrt{2}$. Подставляя в ряд (8.21) $x = \pm\sqrt{2}$, получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2},$$

который расходится, так как его общий член не стремится к нулю при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Итак, область сходимости ряда (8.21) определяется неравенством

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}. \text{ ▶}$$

Задание 3. Найти область сходимости ряда

$$(x-1)+\frac{2!\,(x-1)^2}{2^2}+\ldots+\frac{n!\,(x-1)^n}{n^n}+\ldots.$$

◀Находим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{n^n\,(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Следовательно, данный ряд сходится при всех значениях, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<e$ или неравенствам $-e<x-1<e$. Прибавляя ко всем частям неравенств по 1, получим: $1-e<x<1+e$.

Исследуем теперь поведение ряда на концах интервала. При $x=1+e$ получим числовой ряд:

$$e+\frac{2!e^2}{2^2}+\ldots+\frac{n!e^n}{n^n}+\ldots.$$

Чтобы выяснить поведение этого ряда, воспользуемся признаком Даламбера в непредельной форме:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!e^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}\,n!e^n}=\frac{(n+1)\,e\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{e\cdot n^n}{(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,$$

так как $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$ при любых конечных значениях n. Это неравенство показывает, что члены полученного числового ряда с возрастанием номера члена возрастают, следовательно, не выполняется необходимый признак сходимости ряда, и ряд расходится.

Это задание показывает, что в ряде случаев выгоднее воспользоваться признаком Даламбера в непредельной форме, чем в предельной. В самом деле, попытка воспользоваться здесь предельной формой признака Даламбера не дала бы никаких результатов, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

При $x = 1 - e$ получим такой же, только знакопеременный ряд, и так как его члены не убывают по модулю, то он расходится. Итак, область сходимости данного степенного ряда есть интервал $(2 - e; 2 + e)$.▶

Задание 4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}(x+2)^n. \tag{8.22}$$

◀Находим радиус сходимости степенного ряда (8.22).

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!n!}{(n+1)!\,(2n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$$

$$((2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)\,(2n+1)).$$

$$|x+2| < 2 \Leftrightarrow -2 < x+2 < 2 \Leftrightarrow -4 < x < 0.$$

Получим $(-4, 0)$ – интервал сходимости степенного ряда (8.22). Дальше исследуем сходимость ряда (8.22) на концах указанного интервала.

Пусть $x = -4$. Имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{n!} 2^n. \tag{8.23}$$

Проверим, будет ли предел общего члена ряда равен нулю при $n \to +\infty$.

$$\frac{(2n-1)!! \cdot 2^n}{n!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2^n \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot n!} = \frac{(2n-1)!2^n}{2^n \cdot (n!)^2} =$$

$$= \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} = \frac{n!\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+n-1)}{n!n!} > \frac{n^{n-1}}{n!} > 1.$$

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{n!}2^n\neq 0.$$

Ряд (8.23) расходится.

Аналогично, при $x=0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}2^n$ также расходится.

Таким образом, интервал $(-4,0)$ есть область сходимости ряда (8.22).►

Задание 5. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n}}{8^n(2n+1)}. \tag{8.24}$$

◄Будем использовать аналог признака Даламбера.

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n}=\frac{(x-1)^{3n+3}\cdot 8^n(2n+1)}{(x-1)^{3n}\cdot 8^{n+1}(2n+3)}=(x-1)^3\frac{2n+1}{8(2n+3)}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(x-1)^3\frac{2n+1}{8(2n+3)}\right|=\frac{|x-1|^3}{8}=|\varphi(x)|.$$

Если $|\varphi(x)|<1$, то есть

$$\frac{|x-1|^3}{8}<1\Leftrightarrow|x-1|^3<8\Leftrightarrow|x-1|<2\Leftrightarrow-2<x-1<2\Leftrightarrow-1<x<3,$$

то ряд (8.24) сходится абсолютно. $R=2$ – радиус сходимости степенного ряда (8.24), и интервал его сходимости $(-1,3)$.

Исследуем ряд (8.24) на сходимость на концах указанного интервала. Если $x = -1$, то имеем числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^{3n}}{8^n(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{3n} \frac{2^{3n}}{8^n\,(2n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}. \tag{8.25}$$

Ряд (8.25) – ряд Лейбница, он сходится (покажите самостоятельно).

Ряд, составленный из модулей членов ряда (8.24)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}. \tag{8.26}$$

Ряд (8.26) расходится (сравнивать с гармоническим рядом при $n \in \mathbb{N}$). Значит, ряд (8.25) сходится условно.

Если $x = 3$, то имеем также ряд (8.26), который расходится.

Ряд (8.24) сходится абсолютно в интервале $(-1, 3)$ и условно в точке $x = -1$; промежуток $[-1, 3)$ есть область сходимости ряда (8.24).

Таким образом, ряд (8.24) сходится абсолютно в интервале $(-1, 3)$ и условно в точке $x = -1$. Промежуток $[-1, 3)$ есть область сходимости ряда (8.24).▶

Задание 6. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n. \tag{8.27}$$

◀Находим радиус сходимости ряда (8.27)

$$R = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e}.$$

Интервал сходимости ряда (8.27) будет $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$. Исследуем ряд (8.27) на сходимость на концах этого интервала.

Пусть $x = \frac{1}{e}$. Тогда имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{e^n}. \tag{8.28}$$

Найдем предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty} e^{n \ln \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} n\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \right.$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\cdot\frac{n}{n+1}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)n^3}{2} =$$

$$\left. = \lim_{n\to\infty} \frac{-n^3\cdot\frac{1}{2}}{n\,(n+1)^2} = -\frac{1}{2}\right] = e^{-\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Значит, ряд (8.28) расходится. При $x = -\frac{1}{e}$, проводя аналогичные рассуждения, получим, что предел общего члена ряда не существует, а значит, ряд расходится.

На $\left(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ сходимость абсолютная.▶

Задание 7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}. \tag{8.29}$$

◀У нас $u_n(x) = \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$ и $u_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{3n+1}}{2^{3n+3}(n+2)\ln(n+2)}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{3n+1}\cdot 2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}{|x+1|^{3n-2}\cdot 2^{3n+3}(n+2)\ln(n+2)} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1\right] = \frac{|x+1|^3}{2^3}.$$

Решаем неравенство

$$\frac{|x+1|^3}{2^3} < 1 \Leftrightarrow -3 < x < 1.$$

Получим $R = 2$ – радиус сходимости ряда (8.29); $(-3, 1)$ – интервал сходимости ряда (8.29).
Если $x = -3$, то имеем числовой ряд Лейбница

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4(n+1)\ln(n+1)},$$

который сходится.

Аналогично при $x = 1$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4(n+1)\ln(n+1)}$ – ряд расходится.

$[-3, 1)$ – область сходимости (8.29), причём в точке $x = -3$ сходимость условная, в остальных точках абсолютная.▶

Задание 8. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n}(x-1)^n. \tag{8.30}$$

$$◀ R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|2^{\ln^2 n}|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{\ln^2 n}{n}}} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n\cdot\frac{1}{n}}{1} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1} = 0\right] = \frac{1}{2^0} = 1,$$

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Итак, $(0,2)$ – интервал сходимости степенного ряда (8.30). Исследуем степенной ряд (8.30) на концах интервала сходимости. Пусть $x = 0$. Тогда имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2^{\ln 2n},$$

который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n 2^{\ln 2n} \neq 0$. Если $x = 2$, мы имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\ln^2 n},$$

расходящийся по той же причине.

Интервал $(0,2)$ есть область сходимости ряда (8.30).▶

Задание 9. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)x^n. \tag{8.31}$$

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 a_2 \ldots a_n\right).$$

◄Находим радиус сходимости степенного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{n+1}\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)} = 1.$$

Интервал сходимости ряда (8.31): $(-1, 1)$. Исследуем ряд на сходимость в точке $x = \pm 1$. Если$x = 1$, то имеем числовой ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right). \tag{8.32}$$

Преобразуем общий член ряда (8.32):

$$\frac{1}{n}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\ldots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n^2}.$$

Ряд (8.32) примет вид

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2n^2}. \tag{8.33}$$

Ряд (8.33) расходится $\left(\frac{n+1}{2n^2} > \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n}\right)$. Если $x = -1$, то имеем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n^2}. \tag{8.34}$$

Ряд (8.34) есть ряд Лейбница, он сходится условно, так как ряд из модулей его членов расходится (ряд (8.33)).

Область сходимости ряда (8.31) есть полуинтервал $[-1, 1)$, причем сходимость в точке $x = -1$ условная, а в точках интервала $(-1, 1)$ – абсолютная.▶

Задание 10. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2 + (-1)^n)^n}{n} (x + 1)^n, \tag{8.35}$$

исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость на концах интервала сходимости.

◀Вычисляем радиус сходимости ряда по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

где

$$a_n = \frac{(2 + (-1)^n)^n}{n}.$$

Тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}\right|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{2+(-1)^n}{n^{\frac{1}{n}}}} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}} = e^0 = 1 \right).$$

Интервал сходимости определяем, решая неравенство

$$|x + 1| < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x + 1 < \frac{1}{3}, \ -\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}.$$

Получили: $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ – интервал сходимости степенного ряда (8.35). Дальше исследуем ряд (8.35) на сходимость на концах указанного интервала. Если $x = -\frac{4}{3}$, то имеем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{n} \left(-\frac{4}{3}+1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n =$$

$$= -\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{6} - \ldots = \left(-\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{4}\right) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{6}\right) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}}\right). \qquad (8.36)$$

Проведём оценку снизу общего члена ряда (8.36).

$$\frac{1}{2k} - \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}} \geq \frac{1}{2k} - \frac{1}{k3^k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^k}\right).$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^k}\right)$ сравним с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ по предельному признаку сравнения

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^k}\right)}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2},$$

а значит, он расходится, а тогда (теорема сравнения) ряд (8.36) также расходится, то есть $x = -\frac{4}{3}$ – точка расходимости степенного ряда (8.35).

Пусть$x = -\frac{2}{3}$. Тогда имеем числовой ряд (с учетом преобразований, выполненных выше)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2+(-1)^n}{3}\right)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} + \frac{1}{(2k-1)\,3^{2k-1}}\right). \qquad (8.37)$$

Справедлива оценка снизу $\frac{1}{2k} + \frac{1}{(2k-1)3^{2k-1}} > \frac{1}{2k}$.

Гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ – расходится, поэтому (теорема сравнения) расходится и ряд (8.37).

Таким образом, $R = \frac{1}{3}$ – радиус сходимости степенного ряда (8.35), $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ – интервал сходимости степенного ряда (8.35), $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ – область абсолютной сходимости степенного ряда (8.35).▶

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите область сходимости каждого из степенных рядов:

1.1 $\frac{x}{1\cdot 3}+\frac{x^2}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+2)}+\ldots;$

1.2 $\frac{\ln 2}{1}x^2+\frac{\ln 3}{2}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n}x^{n+1}+\ldots;$

1.3 $x-\frac{x^3}{3\cdot 2\sqrt{2}}+\frac{x^5}{3^2\cdot 3\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{3^{n-1}n\sqrt{n}}+\ldots;$

1.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n+1};$

1.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$

1.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\cdot(x-5)^{n+1}}{(n+1)!};$

1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n};$

1.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)};$

1.9 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n;$

1.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c^{\sqrt{n}}x^n,\ c>0;$

1.11 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n;$

1.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c^{\ln n}x^n,\ c>0;$

1.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{-\sqrt{n}}x^n}{\sqrt{n^2+1}};$

1.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+c^n},\ c\geq 0;$

1.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n};$

1.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n-2};$

1.17 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}};$

1.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n;$

1.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};$

1.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n!}x^n$;

1.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$;

1.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln n}$;

1.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{a^{n^2}}$, $a > 1$.

2. При каких значениях α, β, γ, x сходится ряд

$$F(\alpha;\beta;\gamma;x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\,2!}x^2 +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdot 3!}x^3 + \ldots ?$$

3. Обозначим через $\Gamma(p)$ следующий предел:

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)^p \left(1^{p-1} + 2^{p-1}x + \ldots + n^{p-1}x^{n-1} + \ldots\right).$$

Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = \alpha$, то

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)^p \left(a_1 + a_2 x + \ldots + a_n x^{n-1} + \ldots\right) = \alpha\Gamma(p).$$

ЛЕКЦИЯ 9
Разложение функций в ряд Тейлора – Маклорена

9.1 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена показательной функции

Функция $f(x) = e^x$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, и для любого $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = e^x$, а $f^{(n)}(0) = 1$. Тогда ряд Тейлора – Маклорена для функции будет

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{9.1}$$

Находим радиус сходимости ряда (9.1):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

Ряд (9.1) сходится на всей числовой прямой, причём абсолютно.

Дальше применим достаточный признак разложимости функции в степенной ряд. Возьмём любой интервал $(-R, R) \subset \mathbb{R}$, $R > 0$. Видно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in (-R, R)$ $\left|f^{(n)}(x)\right| = |e^x| = e^x < e^R$ (функция e^x возрастает на $\mathbb{R}$), а поэтому (теорема 8.7) функция $f(x) = e^x$ разложима в ряд (9.1)) на любом $(-R, R) \subset \mathbb{R}$ $(R > 0)$, а значит, и на всей числовой прямой, то есть для любого $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{9.2}$$

9.2 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена тригонометрических функций

а) $f(x) = \cos x$. Функция бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой причём, для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in \mathbb{R}$

$$f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot n\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}0, & n=2k+1,\\ 1, & n=4k,\\ -1, & n=4k+2,\end{cases}$$

где $k=0,1,2,\ldots$

Кроме того, $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)\right|\leq 1$, для любого $n\in\mathbb{N}$ и для любого $x\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x). \tag{9.3}$$

Найдём область сходимости степенного ряда (9.3).

Пусть $x\neq 0$ (ряд при $x=0$ сходится).

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(x^2\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\right)=0<1.$$

Значит, ряд сходится на всей числовой прямой, причём абсолютно.

Таким образом, для любых $x\in\mathbb{R}$:

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{9.4}$$

б) Аналогично приходим к выводу, что функция $f(x)=\sin x$ разложима на всей числовой прямой в ряд Тейлора – Маклорена

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{9.5}$$

9.3 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена логарифмической функции

Разложим в ряд Тейлора – Маклорена функцию $f(x) = \ln(x+1)$. Область определения функции $D(f) = (-1, +\infty)$. Для разложения функции в степенной ряд воспользуемся теоремой 8.5 об интегрировании степенных рядов.

Имеем: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Знаем, что: $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, если $|x| < 1$, тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \tag{9.6}$$

если $x \in (-1, 1)$.

(9.6) можно почленно интегрировать на любом отрезке $[0, x] \subset (-1, 1)$, причём радиус сходимости степенного ряда не меняется.

Тогда

$$\int_0^x f'(x)\,dx = \int_0^x df(x) = f(x)\Big|_0^x = f(x) - f(0) =$$
$$= \ln(1+x) - \ln 1 = \ln(1+x).$$

С другой стороны,

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Получим разложение функции $f(x) = \ln(1+x)$ в ряд Тейлора – Маклорена в интервале $(-1, 1)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{9.7}$$

Очевидно, что ряд (9.7) сходится на $(-1,1)$, причём условно и в точке $x=1$ (это будет ряд Лейбница):

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n}. \tag{9.8}$$

По теореме Абеля (теорема 8.3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+n}=\ln 2.$

Таким образом, функция $f(x)=\ln(1+x)$ разложима в полуинтервале $(-1,1]$ в ряд Тейлора – Маклорена

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{9.9}$$

причём сходимость ряда (9.9) в интервале $(-1,1)$ будет абсолютной, а при $x=1$ – условной.

9.4 Разложение в ряд Тейлора – Маклорена степенной функции

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора – Маклорена функции

$$f(x)=(1+x)^{\alpha},\ \alpha\neq 0.$$

Видно, что для любого $n\in\mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\,(1+x)^{\alpha-n}, \tag{9.10}$$

а

$$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\,(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}. \tag{9.11}$$

Тогда из (9.10)

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))\,, \tag{9.12}$$

а из (9.11)

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}, \tag{9.13}$$

где $0 < \theta < 1$.

Имеем ряд Тейлора – Маклорена для нашей функции

$$(1+x)^{\alpha} \sim 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \ldots. \tag{9.14}$$

Найдём радиус сходимости степенного ряда (9.14).

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}\right|}{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))(\alpha-n)}{(n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1.$$

Значит, интервал сходимости ряда (9.14) есть $(-1, 1)$.

Дальше докажем, что ряд (9.14) сходится в интервале $(-1, 1)$ к порождающей его функции, то есть к $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Возьмём остаточный член в формуле Тейлора в форме Коши и преобразуем его.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n}{n!}x^{n+1} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} =$$

$$= \alpha\cdot x\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots((\alpha-1)-(n-1))\,x^n}{n!}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{\alpha-1}. \tag{9.15}$$

Выражение

$$u_n(x) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots((\alpha-1)-(n-1))}{n!}x^n$$

есть n-й член ряда Тейлора – Маклорена функции

$$g(x) = (1+x)^{\alpha-1}.$$

Ряд Тейлора для этой функции так же, как и для $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, сходится в интервале $(-1, 1)$. А тогда $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = 0$, то есть $u_n(x)$ – бесконечно малая при $n \to \infty$.

В правой части равенства (9.15) имеем произведение этой бесконечно малой на ограниченные величины или константы в интервале $(-1, 1)$. Для $|x| < 1$:

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \le \left|\frac{1-\theta}{1-\theta}\right| = 1;\ 0 < 1-|x| < 1+\theta x < 1+|x| < 2,$$

то есть величина $(1+\theta x)^{\alpha-1}$ при фиксированных x и α заключена между $(1-|x|)^{\alpha-1}$ и $(1+|x|)^{\alpha-1}$. Тогда $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для любого $x \in (-1, 1)$.

Таким образом, в интервале $(-1, 1)$ функция $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$, разложима в ряд Тейлора – Маклорена (биноминальный ряд)

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n. \tag{9.16}$$

Замечание 9.1. Можно показать, что:
1) при $\alpha > 0$ ряд (9.16) абсолютно и равномерно сходится к функции $(1+x)^{\alpha}$ на отрезке $[-1, 1]$;
2) при $-1 < \alpha < 0$ ряд (9.16) сходится к функции $(1+x)^{\alpha}$ на полуинтервале $(-1, 1]$;
3) при $\alpha \le -1$ ряд (9.16) сходится, причём абсолютно, к функции $(1+x)^{\alpha}$ только на интервале $(-1, 1)$.

Замечание 9.2. Приведём примеры рядов Тейлора – Маклорена для некоторых других функций.
1) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(|x| \le 1)$;

2) $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| < 1)$;

3) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(|x| \leq 1)$;

4) $\operatorname{ch} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(x \in \mathbb{R})$;

5) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Запишите формулу разложения в ряд Тейлора – Маклорена функции $f(x) = e^x$.
2. Запишите формулу разложения в ряд Тейлора – Маклорена функций $f(x) = \cos x$ и $f(x) = \sin x$.
3. Запишите формулу разложения в ряд Тейлора – Маклорена функции $f(x) = \ln(1 + x)$.
4. Запишите формулу разложения в ряд Тейлора – Маклорена степенной функции $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$.

Разложение функций в степенные ряды

Рассмотрим основные методы разложения функций в степенные ряды.

1. Непосредственное разложение функций в ряд Тейлора

Задание 1. Разложить в ряд Тейлора с центром в точке $x_0 = \frac{\pi}{4}$ функцию $\operatorname{tg} x$, найдя четыре первых, отличных от нуля, члена разложения.

$$\blacktriangleleft\ f(x) = \operatorname{tg} x,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2;$$

$$f''(x) = \frac{-2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x};\ f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4;$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos^4 x - 2\sin x\cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2\cos^2 x + 6\sin^2 x}{\cos^4 x};$$

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 16.$$

Ответ: $1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \ldots\blacktriangleright$

Задание 2. С помощью формулы Тейлора разложить многочлен

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

по степеням двучлена $x + 1$. Найти с точностью до $0,001$ $P(-1,002)$ и $P(-0,997)$.

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

Закрыть

◄Воспользуемся формулой Тейлора для многочлена при $x_0 = -1$. Вычислим значения функции и ее производных в этой точке:

$$P'(x) = 3x^2 + 6x - 2, \quad P(-1) = 8,$$

$$P''(x) = 6x + 6, \quad P'(-1) = -5,$$

$$P'''(x) = 6, \quad P''(-1) = 0,$$

$$P'''(-1) = 6.$$

Подставляя полученные значения в формулу Тейлора для многочлена, найдем:

$$P(x) = 8 - 5(x+1) + (x+1)^3.$$

Имеем:

$$P(-1,002) = 8 - 5(-1,002 + 1) + (-1,002 + 1)^3 \approx 8 + 5 \cdot 0,002 = 8,010$$

и

$$P(-0,997) = 8 - 5(-0,997 + 1) + (-0,997 + 1)^3 \approx 8 - 5 \cdot 0,003 = 7,985. \blacktriangleright$$

2. Разложение функций в ряды Тейлора с использованием формулы суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Используем формулу для суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (a_n) со знаменателем q, где $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}. \tag{9.17}$$

Задание 3. Функцию $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $x-2$, указать радиус и интервал сходимости ряда.

◄«Особыми» точками функции будут нули знаменателя $x = 1$, $x = 3$. Расстояние от центра разложения $x_0 = 2$ до ближайшей особой точки равно $1 = R$ – это и будет радиус сходимости степенного ряда. Тогда

$(1,3)$ – интервал сходимости искомого степенного ряда. Представим функцию в виде суммы простейших дробей.

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}\right).$$

Тогда (по формуле (9.17))

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{x-2-1} = -\frac{1}{1-(x-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n,$$

$$-\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{x-2+1} = -\frac{1}{1-(-1)(x-2)} = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)(x-2)^n\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} n=2k,\ 1+(-1)^n=2 \\ n=2k-1,\ 1+(-1)^n=0 \end{array}\right] = -\sum_{k=0}^{\infty}(x-2)^{2k}.$$

Ответ: $f(x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-2)^{2k}$, $R=1$ – радиус сходимости ряда, $(1,3)$ – интервал сходимости.►

Задание 4. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$ функцию

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-2}.$$

◀Используем при решении нашей задачи формулу суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии справа налево. Вначале представим дробь $\frac{2x+1}{x^2-x-2}$ в виде суммы простейших дробей. Особые точки (нули знаменателя указанной дроби) будут $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

$$\frac{2x+1}{x^2-x-2} = \frac{2x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)},$$

$$2x+1 = A(x+1) + B(x-2), \quad x=1, \quad -1 = 3B, \quad B = \frac{1}{3}, \quad x = 2, \quad 5 = 3A, \quad A = \frac{5}{3},$$

$$f(x) = \frac{\frac{5}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} = \frac{\frac{5}{3}}{(x-1)-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-1)+2} = \frac{-\frac{5}{3}}{1-(x-1)} + \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{-(x-1)}{2}}.$$

В качестве радиуса сходимости (максимального) искомого ряда Тейлора будет $R = 1$ (расстояние от середины интервала сходимости ряда до ближайшей особой точки, то есть от $x = 1$ до $x = 2$).

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{5}{3}(x-1)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3\cdot 2^{k+1}}(x-1)^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{3} + \frac{(-1)^k}{3\cdot 2^{k+1}}\right)(x-1)^k .$$

Теперь найдём радиус сходимости ряда уже «обычным» методом.

Имеем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \,(x - x_0)^k ,$$

где $x_0 = 1$ и $a_k = \left(-\frac{5}{3} + \frac{(-1)^k}{3\cdot 2^{k+1}}\right)$.

Радиус сходимости находим по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

У нас

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{5}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{3\cdot 2^{k+1}}}} =$$

$$= \left[\lim_{k\to\infty} \left(\frac{5}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{3\cdot 2^{k+1}} \right)^{\frac{1}{k}} = e^{\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{5}{3} + \frac{(-1)^{k+1}}{2}\right)}{3\cdot 2^{k+1}}} = e^0 = 1 \right] = 1. \blacktriangleright$$

3. Использование основных табличных разложений

Задание 5. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

◀Воспользуемся формулой (9.16):

$$f(x) = (1 + (-x))^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right)}{n!} (-x)^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (|x| < 1),$$

$$\begin{cases} (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1), \\ (2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2n. \end{cases} \blacktriangleright$$

Задание 6. Разложить в ряд Тейлора по степеням $x-1$ функцию $f(x) = e^x$.

$$\blacktriangleleft\ e^x = e^{x-1+1} = e^{x-1}e = \left[t = x-1,\ e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right] = e\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n!}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.►

Задание 7. Разложить функцию $y = \sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

◄Произведем над заданной функцией тождественные преобразования такие, чтобы под знаком функции получить выражение $(x-2)$:

$$\sin\frac{\pi}{4}x = \sin\frac{\pi}{4}(x-2+2) = \sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2) + \frac{\pi}{2}\right] = \cos\frac{\pi}{4}(x-2).$$

Теперь воспользуемся разложением (9.4), в котором вместо x поставим $\frac{\pi}{4}(x-2)$, получим:

$$\cos\frac{\pi}{4}(x-2) = 1 - \frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2\cdot 2!} + \frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4\cdot 4!} - \ldots + (-1)^k\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!} + \ldots.$$

Полученный ряд сходится к заданной функции при

$$-\infty < \frac{\pi}{4}(x-2) < \infty,$$

т.е. при $-\infty < x < \infty$.

Таким образом,

$$\sin\frac{\pi}{4}x = 1 - \frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2\cdot 2!} + \frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4\cdot 4!} - \ldots + (-1)^k\frac{\pi^{2k}(x-2)^{2k}}{4^{2k}(2k)!} + \ldots$$

при $-\infty < x < \infty$.▶

Задание 8. Функцию $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1-2x}}$ разложить в ряд Тейлора – Маклорена (по степеням x). Найти радиус сходимости R полученного ряда.

◀Воспользуемся формулой (9.16):

$$(1+t)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!} t^k,$$

причём радиус сходимости ряда есть $R = 1$ и $(-1, 1)$ – его интервал сходимости.

Вначале разложим в ряд функцию $\varphi(x) = (1 + (-2x))^{-\frac{1}{2}}$. Это функция вида $y = (1+t)^{\alpha}$, где $t = -2x$ и $\alpha = -\frac{1}{2}$. Найдём вначале радиус и интервал сходимости искомого ряда функции φ, а значит, и f. Из оценки $|-2x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$ получаем, что $R = \frac{1}{2}$ и интервал сходимости $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Тогда

$$\varphi(x) = (1+(-2x))^{-\frac{1}{2}} = + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x) + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 +$$

$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \dots + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}x^k + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^k \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\dots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot 2k \frac{(-1)^k 1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot(2k-1)}{2^k \cdot k!}x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}x^k.$$

Тогда

$$f(x) = x^3 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}x^{k+3}$$

есть искомое разложение с радиусом сходимости $R=\frac{1}{2}$ и $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ – интервалом сходимости.►

4. Использование сложения, вычитания и умножения абсолютно сходящихся рядов

Указанный приём был нами применён в задании 3. При решении указанного задания можно было использовать умножение рядов, а именно:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{x-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n\cdot\left(-\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n\right)=$$

$$=(1-(x-2)+(x-2)^2-(x-2)^3+(x-2)^4-\ldots)\cdot$$

$$\cdot(-1-(x-2)-(x-2)^2-(x-2)^3-(x-2)^4-\ldots)=$$

$$=-1-(x-2)^2-(x-2)^4-\ldots=-\sum_{k=0}^{\infty}(x-2)^{2k}.$$

Задание 9. Разложить в ряд Маклорена функцию: $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

$$◄\ \ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)\,.$$

Пользуясь формулой (9.7), можем записать:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots.$$

Отсюда находим:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

$$\ldots-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots-\frac{x^n}{n}-\ldots\right).$$

Раскрывая скобки, переставляя члены ряда и делая приведение подобных членов, получим:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2x+\frac{2x^3}{3}+\ldots+\frac{2x^{2k-1}}{2k-1}+\ldots.$$

Очевидно, что полученный ряд сходится при $-1<x<1$.►

Разложения некоторых функций получаются с помощью почленного интегрирования уже известных разложений.

Задание 10. Разложить в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$ функцию $f(x)=\sin x$. Найти радиус сходимости полученного при разложении ряда.

◄Будем использовать разложения (9.4) и (9.5).

$$f(x)=\sin x=\sin(x+2-2)=\sin(x+2)\cdot\cos 2-\sin 2\cdot\cos(x+2)=[t=x+2]=$$

$$=\cos 2\cdot\sin t-\sin 2\cdot\cos t=\left((\cos 2\cdot(x+2)-\cos 2\cdot\frac{(x+2)^5}{3!}+\cos 2\cdot\frac{(x+2)^5}{5!}-\ldots\right)-$$

$$-\left(\sin 2-\sin 2\cdot\frac{(x+2)^2}{2!}+\sin 2\cdot\frac{(x+2)^4}{4!}-\ldots\right)=$$

$$=-\sin 2+\cos 2\cdot(x+2)+\sin 2\cdot\frac{(x+2)^2}{2!}-\cos 2\cdot\frac{(x+2)^3}{3!}-\sin 2\cdot\frac{(x+2)^4}{4!}+\ldots=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\sin\left(2+k\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x+2)^k}{k!}.$$

Найдём радиус сходимости полученного ряда, имеющего вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+2)^k ,$$

где

$$a_k = (-1)^{k+1} \sin\left(2 + \frac{k\pi}{2}\right) \frac{1}{k!}.$$

Тогда

$$a_{k+1} = (-1)^{k+2} \sin\left(2 + \frac{(k+1)\pi}{2}\right) \frac{1}{(k+1)!}.$$

Радиус сходимости находим по формуле $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$.

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \sin\left(2 + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)(k+1)!}{k!\,(-1)^{k+2} \sin\left(2 + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} (k+1)\left[\operatorname{tg}\left(2 + \frac{k\pi}{2}\right)\right] = +\infty,$$

так как $\left|\operatorname{tg}\left(2 + \frac{k\pi}{2}\right)\right| > 0$.

Ответ: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin\left(2 + k\frac{\pi}{2}\right) \frac{(x+2)^k}{k!}$, $R = +\infty$.▶

Задание 11. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию

$$f(x) = \ln^2(1-x).$$

Найти радиус сходимости полученного ряда.

◀Функция $y = \ln(1+x)$ представима рядом

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k},$$

радиус сходимости которого $R = 1$ и интервал сходимости $(-1, 1)$, в котором ряд сходится абсолютно. Известно, что если ряды сходятся абсолютно, то их можно перемножить произвольно (как многочлены). Тогда:

$$f(x) = \ln(1+(-x)) \ln(1+(-x)) = \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\right) \times$$

$$\times \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots\right) = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + \frac{137}{180}x^6 + \ldots.$$

Найдём общий член полученного ряда. Из произведения

$$\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right)$$

находим

$$u_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n} + \frac{x^{n+1}}{2(n-1)} + \frac{x^{n+1}}{3(n-2)} + \frac{x^{n+1}}{4(n-4)} + \ldots +$$

$$+ \frac{x^{n+1}}{4(n-3)} + \frac{x^{n+1}}{3(n-2)} + \frac{x^{n+1}}{2(n-1)} + \frac{x^{n+1}}{n} = a_n x^{n+1},$$

где

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(n-(k-1))} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n} + \frac{n+1}{2(n-1)} + \frac{n+1}{3(n-2)} + \frac{n+1}{4(n-3)} + \ldots +\right.$$

$$+\frac{n+1}{(n-3)\,4}+\frac{n+1}{(n-2)\,3}+\frac{n+1}{(n-1)2}+\frac{n+1}{n}\right)=$$

$$=\left[\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n};\quad \frac{n+1}{2\,(n-1)}=\frac{n-1+2}{2\,(n-1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1};\right.$$

$$\left.\frac{n+1}{3\,(n-2)}=\frac{n-2+3}{3\,(n-2)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{n-2}\ldots\right]=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1}.$$

Получим ряд-произведение

$$\ln^2(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Радиус сходимости полученного ряда $R=1$ (равен радиусу сходимости рядов-множителей). В подтверждение этого найдём радиус ряда непосредственно. У нас

$$a_n=\frac{2\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{n+1}.$$

Тогда

$$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)(n+2)}{2\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}-$$

$$-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}\right)=1+0=1,$$

так как $S_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-(n+1)$ – частичная сумма гармонического ряда. Тогда $\lim\limits_{a\to\infty}S_{n+1}=+\infty$.▶

5. Использование почленного дифференцирования и интегрирования

Указанный метод нами был использован при разложении функции $f(x)=\ln(x+1)$ в ряд.

Задание 12. Доказать, что

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\ (0<|x|<1). \tag{9.18}$$

◀Знаем, что

$$\frac{1}{(1-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\quad(0<|x|<1). \tag{9.19}$$

Дифференцируем левую и правую части равенства (9.19):

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\begin{bmatrix}k=n-1\\ n=k+1\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k=$$

$$=[n=k]=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.\ ▶$$

Задание 13. Разложить в степенной ряд функцию $y=\operatorname{arctg}x$.

◀Так как

$$(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots,\ |x|<1$$

и $\operatorname{arctg} 0 = 0$, то при $|x| < 1$ имеем:

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_0^x dx - \int\limits_0^x x^2 dx - \ldots =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots . \blacktriangleright$$

Задание 14. Разложить функцию $y = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ в ряд Маклорена.

◀Как известно, этот интеграл нельзя выразить через элементарные функции. Для отыскания разложения данного интеграла в ряд Маклорена разложим подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем почленно проинтегрируем (степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри промежутка сходимости, поэтому его можно интегрировать почленно).

Раскладываем функцию $\frac{\sin t}{t}$ в степенной ряд. Воспользовавшись разложением (9.5), получим:

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots ,$$

$$\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{t^{2k-2}}{(2k-1)!} + \ldots ,$$

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!\,(2k-1)} + \ldots .$$

Промежуток сходимости полученного ряда будет таким же, что и промежуток сходимости ряда для подынтегральной функции. Поэтому полученная формула верна при всех значениях $x \in \mathbb{R}$. ▶

Задание 15. Разложить в ряд Тейлора – Маклорена функцию

$$f\left(x\right) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Найти радиус сходимости полученного ряда.

◀Вначале найдём производную функции $f\left(x\right)$ и разложим найденную функцию-производную в ряд Тейлора – Маклорена.

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$f'\left(x\right) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\left(-x^2\right)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-1\right)^k x^{2k}.$$

Радиус сходимости полученного ряда $R = 1$.

Интегрируем последнее равенство в интервале сходимости указанного ряда. Получим:

$$\int\limits_0^x f'\left(t\right) dt = f\left(t\right)\Big|_0^x = f\left(x\right) - f\left(0\right) = f\left(x\right),$$

с одной стороны; с другой стороны

$$\int\limits_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(-1\right)^k t^{2k}\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^x \left(-1\right)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-1\right)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}\Bigg|_0^x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-1\right)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

При дифференцировании и интегрировании степенных рядов их радиусы сходимости не изменяются.

Ответ: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$, $R = 1$.▶

6. Метод неопределённых коэффициентов

Используя указанный метод, имеем разложение функции f в виде ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, который будем называть степенным рядом с центром $x_0 = 0$, причём степенной ряд с центром $x_0 = 0$ для чётной функции имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$, а для нечётной функции – $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k+1}$.

Далее составляется соотношение (равенство), в которое входит функция f или f', а также другие (известные) функции. Представляя функции указанного равенства рядами и учитывая единственность разложения в степенной ряд, получим систему уравнений для определения n-первых коэффициентов степенного ряда функции $f(x)$.

Задание 16. Используя метод неопределённых коэффициентов, записать три первых ненулевых члена разложения функции $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$.

◀Из условия $f(x)\cos x = 1$. Тогда

$$\left(a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) \equiv 1,$$

следовательно, $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{5}{24}$. ▶

Есть ещё и другие методы разложения функций в степенные ряды, например: метод подстановки ряда в ряд, метод деления степенных рядов и т.д.

Задания для самостоятельного решения

1. Разложить функцию $f(x) = x^3 - 2x + 1$ по степеням двучлена $x - 1$.
2. Разложить функцию $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$.
3. Разложить функцию $f(x) = x^6$ по степеням двучлена $x + 2$.
4. Разложить по степеням x функцию $f(x) = \ln(1 + 2x)$, заданную на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
5. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням двучлена $x - 4$. Ограничиться четырьмя членами.
6. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ по степеням x. Оценить $R_{10}(x)$ на $[0; 1]$.
7. С помощью формулы Тейлора написать разложение функции

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt{1 - 3x + x^2}$$

по степеням x до члена с x^3 включительно.

8. Разложить функцию $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ по степеням двучлена $x - 2$.
9. Разложить функцию $y = 2^x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$.
10. Пользуясь формулами разложений (9.2), (9.4), (9.5) и (9.7), разложить заданные функции в ряд по степеням x (в ряд Маклорена):

10.1 $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

10.2 $y = \cos^2 x$;

10.3 $y = \cos^3(x + \alpha)$;

10.4 $y = \sin^3 x$;

10.5 $y = \sin^6 x$;

10.6 $y = \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}$;

10.7 $y = \frac{x}{1+x-2x^2}$;

10.8 $y = \ln(1+x+x^2+x^3)$;

10.9 $y = \frac{1+x}{(1-x^2)^2}$.

11. Применяя дифференцирование, разложить заданные функции в ряд по степеням x.

11.1 $y = (1+x)\ln(1+x)$;

11.2 $y = \operatorname{arctg}\frac{2-2x}{1+4x}$;

11.3 $y = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$;

11.4 $y = \arcsin x$;

11.5 $y = \arcsin x^3$;

11.6 $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

11.7 $y = \arcsin^2 x$.

12. Применяя различные методы, найти разложение в ряд по степеням x следующих функций:

12.1 $y = x\operatorname{arctg} x - \ln\sqrt{1-x^2}$;

12.2 $y = \arccos(1-2x^2)$;

12.3 $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

13. Разложить $\frac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд по степеням $(x+2)$.

14. Разложить e^x в ряд по степеням $(x+2)$.

15. Разложить $\sqrt{x}$ в ряд по степеням $(x-4)$.

16. Функцию $y = \ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по степеням бинома $(x+1)$.

17. Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложение в ряды по степеням x следующих функций:

17.1 $y = e^x \cos x$;

17.2 $y = e^x \sin x$.

18. Вывести формулы:

18.1 $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 - \ldots \ (|x|<1)$;

18.2 $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots \ \left(x > -\frac{1}{2}\right)$;

18.3 $x = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{2\cdot 4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5 + \ldots \ (|x|<1)$.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ 9

Приложения степенных рядов для приближённых вычислений

Задание 1. Вычислить $\cos 5^0$ с точностью до 10^{-5}.

$$◀ \cos 5^0 = \cos\frac{\pi}{36} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^4}{4!} - \ldots . \qquad (9.20)$$

Ряд (9.20) есть ряд Лейбница. Воспользуемся тем, что модуль остатка ряда Лейбница не превосходит модуля первого члена остатка.

Оценим сверху

$$\left|\frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^4}{4!}\right| = \frac{\left(\frac{\pi}{36}\right)^4}{4!} < \frac{1}{9^4\cdot 25} = \frac{1}{157464} = 0,00000635\ldots < 10^{-5}.$$

Тогда $\cos 5^0 \approx 1 - \frac{\pi^2}{36^2\cdot 2} = 1 - 0,0038077\ldots \approx 0,99619$.

Ответ: $\cos 5^0 \approx 0,99619$ с точностью до 10^{-5}.▶

Задание 2. Вычислить с точностью до 10^{-2} значение $\sqrt[4]{18}$.

◀Преобразуем наш корень $\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{16+2} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}}$. Тогда, используя ряд (9.16), получим:

$$\sqrt[4]{18} = 2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{8^2} + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{8^3} + \ldots\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{16} - \frac{3}{16\cdot 64} + \ldots .$$

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

Видно, что наш ряд (начиная со второго члена) есть ряд Лейбница, причём

$$\left|-\frac{3}{16\cdot 64}\right| < \frac{1}{8\cdot 64} = \frac{1}{512} = 0,00195\ldots < 10^{-2}.$$

Тогда

$$\sqrt[4]{18} \approx 2 + \frac{1}{16} = 2,0625 \approx 2,06.$$

Причём округление взято с недостатком, а частичная сумма $S_2 = 2 + \frac{1}{16}$ есть приближение ряда с избытком $\left(R_2\left(\frac{1}{8}\right) < 0\right)$.

Ответ: $\sqrt[4]{18} \approx 2,06.$▶

Задание 3. Используя разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора – Маклорена, вычислить с точность до 10^{-3} интеграл

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx. \tag{9.21}$$

$$◀ \int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \ldots\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{24}x^{\frac{13}{3}} - \frac{1}{720}x^{\frac{19}{3}} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left.\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{\frac{10}{3}}}{2\cdot\frac{10}{3}}\right|_0^1 + \left.\frac{x^{\frac{16}{3}}}{\frac{16}{3}\cdot 24}\right|_0^1 - \left.\frac{x^{\frac{22}{3}}}{\frac{22}{3}\cdot 720}\right|_0^1 + \ldots =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{20} + \frac{1}{8\cdot 16} - \frac{1}{22\cdot 240} + \ldots. \tag{9.22}$$

Ряд (9.22) – ряд Лейбница. Видно, что

$$\left|-\frac{1}{22\cdot 240}\right| = \frac{1}{5280} = 0,000189\ldots < 10^{-3}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx = \frac{3}{4} - \frac{3}{20} + \frac{1}{8\cdot 16} = \frac{3}{5} + \frac{1}{128} = \frac{389}{640} = 0,60781\ldots \approx 0,608.$$

Ответ: $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x dx \approx 0,608$ с точность до 10^{-3}.▶

Задание 4. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $0,0001$.

◀Воспользуемся биномиальным рядом:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

который, как известно, сходится при $-1 < x < 1$. Представим теперь данный корень в виде

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{5}{125}} = 5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для функции $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ получим следующее разложение:

$$(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3 - \frac{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}{3^4\cdot 4!}x^4 + \ldots .$$

Мы здесь имеем знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница. Поэтому если возьмём в качестве приближенного значения суммы этого ряда сумму n первых его членов, то будем иметь абсолютную погрешность, меньшую, чем первый отброшенный член. Так как мы должны вычислить значение корня с точностью до $0,0001$, то для подсчёта нужно взять первые три члена ряда. В самом деле, уже четвёртый член, умноженный на пять, будет

$$\frac{5\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!5^6}=\frac{2}{27\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5^4}=\frac{1}{81\cdot 625}<0,0001.$$

Производим вычисление (умножаем каждый член ряда на 5):

$$5,00000+0,06667-0,00089=5,06578.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{130}\approx 5,0658$ (с точностью до $0,0001$).►

Замечание 9.3. Бином, для которого справедлива использованная формула разложения, состоит из единицы и второго слагаемого, которое должно быть меньше 1, поэтому подкоренное число мы разбили на два слагаемых: первое 125 – из него легко извлекается кубический корень, и второе слагаемое 5. Здесь нельзя было число 130 разбить на такие два слагаемых, как $64+66$; хотя из 64 и извлекается корень 3-й степени, но второе слагаемое, делённое на 64, было бы больше единицы, и формула разложения для бинома была бы неприменима. Число 130 можно было бы представить и так: $130 = 216-86$, тогда $\sqrt[3]{130}=6\sqrt[3]{1-\frac{86}{216}}$. Как легко проверить, такое представление числа $\sqrt[3]{130}$ было бы менее удачным, так как $\frac{86}{216}>\frac{5}{125}$ и числовой ряд сходился бы медленнее; для вычислений с нужной нам точностью пришлось бы взять больше членов, кроме того, мы получили бы знакопостоянный числовой ряд, для которого оценка погрешности производится сложнее.

Задание 5. Вычислить приближенно значение интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}\,dx,$$

взяв три члена разложения в ряд подынтегральной функции; указать допущенную при этом погрешность.

◀Разложив подынтегральную функцию в степенной ряд, получим:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots,$$

значит,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3 \cdot 3} + \frac{1}{4^5 \cdot 2! \cdot 5} - \frac{1}{4^7 \cdot 3!7} + \ldots.$$

Так как полученный ряд знакопеременный, то для приближенного значения интеграла, взяв первые три члена ряда, мы будем иметь абсолютную погрешность меньшую, чем первый отброшенный член, т. е. меньше, чем $\frac{1}{4^7 \cdot 3! \cdot 7} < 0,0001$. Поэтому, производя вычисления с точностью до $0,00001$, будем иметь:

$$0,250000 - 0,005208 + 0,000098 = 0,244890.$$

Таким образом, $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx \approx 0,24489$ (с точностью до $0,00001$).▶

Задание 6. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x} \cdot e^x dx$ с точностью до $0,001$.

◀По формуле (9.2) имеем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Умножив все члены ряда на $\sqrt{x}$, получим функциональный ряд:

$$\sqrt{x}e^x = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots .$$

Члены полученного функционального ряда при $0 \le x \le a$ не больше членов числового ряда

$$\sqrt{a} + a\sqrt{a} + \frac{a^2\sqrt{a}}{2!} + \ldots + \frac{a^n\sqrt{a}}{n!} + \ldots, \quad a > 0,$$

который сходится (это легко установить, используя признак Даламбера). Следовательно, по признаку Вейерштрасса полученный функциональный ряд сходится равномерно на любом отрезке $[0;\ a]$.

Из равномерной сходимости функционального ряда вытекает, что его можно почленно интегрировать. Поэтому

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}\cdot e^x dx = \int_0^{\frac{1}{9}} \left(\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sqrt{x}}{n!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{2x^3\sqrt{x}}{2!7} + \ldots + \frac{2x^{n-1}\sqrt{x}}{n!\,(2n+3)} + \ldots\right]_0^{\frac{1}{9}} =$$

$$= \frac{2}{3\cdot 3^3} + \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{2!\cdot 7\cdot 3^7} + \ldots + \frac{2}{n!\,(2n+3)\,3^{2n+3}} + \ldots (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Выясним, сколько членов числового ряда необходимо взять для вычисления интеграла с точностью до $0,001$. Для этого сначала оценим остаточный член:

$$R_n = \frac{2}{n!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+3}} + \frac{2}{(n+1)!\,(2n+5)\cdot 3^{2n+5}} + \ldots <$$

$$< \frac{2}{n!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\left[1 + \frac{1}{n\cdot 3^2} + \frac{1}{n^2\cdot 3^4} + \ldots\right] =$$

$$=\frac{2}{n!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n\cdot 3^2}}=\frac{2}{(n-1)!\,(2n+3)\cdot 3^{2n+1}\cdot(3^2n-1)}.$$

Очевидно, что для вычисления интеграла с точностью до $0,001$ достаточно взять два члена полученного числового ряда. В самом деле,

$$R_2<\frac{2}{7\cdot 3^5\cdot 17}<6\cdot 10^{-5}.$$

Производя вычисления с точностью до $0,0001$, будем иметь:

$$0,0242+0,0016=0,0258.$$

Таким образом, мы здесь в квадратных скобках уменьшили знаменатели слагаемых, заменяя $(n+k)!$ на $n!\cdot n^k$, а $2n+3+2k$ на $2n+3$, от этого величина в квадратных скобках только увеличилась, и, следовательно, усилилась оценка R_n.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}}\sqrt{x}e^x dx\approx 0,026$$

с точностью до $0,001$.

С помощью рядов можно упрощать многие формулы, если некоторые входящие в них величины малы по сравнению с другими.►

Задание 7. Тяжелая нить (провод, цепь) под влиянием собственного веса провисает по цепной линии

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a},$$

причём $a=\frac{H}{q}$, H – горизонтальное натяжение нити, а q – вес единицы длины. Какой более простой линией может быть заменена цепная линия, если x мало сравнительно с a?

◄Так как

$$e^{\frac{x}{a}}=1+\frac{x}{a}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{a}\right)^4\ldots,$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(\frac{x}{a}\right)^4 \ldots,$$

то с точностью до $\left(\frac{x}{a}\right)^4$ имеем: $y = a + \frac{x^2}{2a}$, или $y = \frac{H}{q} + \frac{qx^2}{2H}$. Таким образом, при малых по сравнению с a значениях x цепная линия может быть заменена параболой.▶

Задание 8. Вычислить пределы, используя разложения функций в ряд Тейлора – Маклорена:

$$◀\ 1)\ \lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + o\left(x^2\right) - 1 - \frac{1}{2}2x - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(2x\right)^2 + o\left(x^2\right)}{x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) - x} = \frac{\frac{1}{8}\cdot 4}{-\frac{1}{2}} = -1.$$

$$2)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^{2x} + \ln\left(1 - x^2\right)}{x\cos x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^3}{1!}2 + o\left(x^3\right) - x^2 + o\left(x^3\right)}{x - \frac{x^3}{2!} + o\left(x^4\right) - x + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)} = \frac{2}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = -6.$$

$$3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}\sin x - (1+0,5x)\,x}{\sqrt[3]{1-x^3} - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + o\left(x^2\right)\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^4\right)\right) - x - \frac{1}{2}x^2}{1 - \frac{1}{3}x^3 + o\left(x^5\right) - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^3 - x - \frac{1}{2}x^2}{-\frac{1}{3}x^3} = \frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{8}}{-\frac{1}{3}} = \frac{7}{8}.$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{0.75\left(x-x^2\right)}-\sqrt[4]{1+3x}}{1-\cos 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{3}{4}\left(x-x^2\right)+\frac{9}{16}\frac{\left(x-x^2\right)^2}{2!}+o\left(x^2\right)-1-\frac{3}{4}x-\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{2!}\left(3x\right)^2+o\left(x^2\right)}{1-1+\frac{(3x)^2}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{32}x^2+\frac{27}{32}x^2}{\frac{9}{2}x^2}=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{9}{32}+\frac{27}{32}}{\frac{9}{2}}=\frac{\frac{-24+36}{32}}{\frac{9}{2}}=\frac{1}{12}.$$

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cos x)+x\ln\left(1+\frac{2}{3}x^2\right)-x}{\sqrt{1+x^5}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\frac{x^3\cos^3 x}{3!}+\frac{x^5\cos^5 x}{5!}+o\left(x^5\right)+x\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{\left(\frac{2}{3}x^2\right)^2}{2}o\left(x^5\right)\right)-x}{1+\frac{1}{2}x^5+o\left(x^5\right)-1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^5\right)\right)-\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)\right)+\frac{x^5}{5!}\left(1+o\left(x\right)\right)^5+\frac{2}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{4}+\frac{x^5}{120}+\frac{2x^3}{3}-\frac{2x^5}{9}-x}{\frac{1}{2}x^5}=$$

$$=\frac{\frac{1}{24}+\frac{1}{4}+\frac{1}{120}-\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}}=\frac{7}{45}.$$

$$6)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cos x+x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{2\cos x + x}{2\sqrt{1+x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2\cos x + x}{2\sqrt{1+x}}\right)\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos x - 2\sqrt{1+x}+x}{2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2-x^2+o\left(x^2\right)-2-x-2\frac{\frac12\left(\frac12-1\right)}{2!}x^2+o\left(x^2\right)+x}{2(1+o(x))x^2}} = e^{\frac{-1+\frac14}{2}} = e^{-\frac38}.$$

$$7)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x-\ln\left(1+x\right)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \left(1^\infty\right) =$$

$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}}{e^x-\ln\left(1+x\right)}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-e^x+\ln(+x)}{(e^x-\ln(1-x))x^2}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\frac12(\cos x-1)+o\left(x^2\right)-1-x-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^2\right)+x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)}{x^2+o(x^2)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\frac12\frac{x^2}{2!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^2}{2}}{x^2}} = e^{-\frac54}. \blacktriangleright$$

Задание 9. Вычислить с точностью до 10^{-4} $\cos 27^\circ$ с помощью степенного ряда.
◀Ряд Тейлора – Маклорена для функции $f\left(x\right) = \cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

$27^\circ = \frac{27\pi}{180} = \frac{3}{20}\pi$ (радиан).
Тогда

$$\cos 27^\circ = 1 - \frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)}{2!} + \frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)^6}{6!} + \ldots.$$

Полученный числовой ряд есть ряд Лейбница, который сходится. Дальше воспользуемся тем, что модуль остатка ряда Лейбница не превосходит модуля первого члена этого остатка. Ищем член ряда, модуль которого меньше 10^{-4} (это будет первый член указанного остатка).

$\left|\frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)^4}{4!}\right| \approx \frac{1}{384}$. Очевидно, что $\left|\frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)\pi^4}{4!}\right| > 10^{-4}$.

$$\left|-\frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)\pi^6}{6!}\right| = \frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)^6}{6!} < \frac{\frac{1}{2^6}}{6!} = 0,0000217\ldots < 10^{-4}.$$

Тогда

$$\cos 27^\circ \approx 1 - \frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{3}{20}\pi\right)^4}{4!} = 1 - 0,111033\ldots + 0,002054\ldots \approx 0,8910.$$

Указанное приближенное значение $\cos 27^\circ$ с точностью до 10^{-4} будет с избытком, так как отброшенный остаток имеет знак своего первого члена, то есть отрицательный.

Ответ: $\cos 27^\circ \approx 0,8910$ точностью до 10^{-4}.►

Задание 10. Вычислить с точностью до 10^{-4} $\sqrt[5]{34}$ с помощью степенного ряда.

◄Воспользуемся разложением функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в биномиальный ряд.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots\frac{(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + \ldots.$$

Радиус сходимости ряда $R = 1$ и интервал сходимости $(-1, 1)$. Преобразуем $\sqrt[5]{34}$.

$$\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32+2} = \sqrt[5]{32\left(1+\frac{1}{16}\right)} = 2\left(1+\frac{1}{16}\right)^5 =$$

$$= 2\left(1 + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} + \frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)}{2!}\cdot\frac{1}{16^2} + \right.$$

$$+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\left(\frac{1}{5}-2\right)}{3!}\cdot\frac{1}{16^3}+\ldots+\frac{\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{5}-(k-1)\right)}{k!\cdot 16!}+\ldots\Bigg)=$$

$$=2+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2^8}+\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}}{3\cdot 2^{12}}-\ldots.$$

Полученный ряд есть ряд Лейбница (он знакочередующийся начиная со второго своего члена). Видно, что третий член ряда имеет значение своего модуля большее, чем 10^{-4}. Оценим четвёртый член ряда:

$$\frac{3}{5^3\cdot 2^{10}}=\frac{3}{125\cdot 1024}=0,000023\ldots<10^{-4}.$$

Тогда находим сумму трёх первых членов ряда:

$$2+\frac{1}{40}-\frac{1}{25\cdot 64}=2+\frac{1}{40}-\frac{1}{1600}=2+0,025-0,000625=2,024375\approx 2,0244.$$

Ответ: $\sqrt[5]{34}\approx 2,0244$ с точность до 10^{-4} с избытком.►

Задание 11. Вычислить определённый интеграл

$$\int\limits_0^{0,5} x^2\cos\sqrt[3]{x}dx$$

с точностью до 10^{-3}.

◄Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора – Маклорена и применим теорему об интегрировании степенных рядов. Радиус сходимости указанного степенного ряда $R=+\infty$.

$$I=\int\limits_0^{0.5} x^2\cos\sqrt[3]{x}2x=\int\limits_0^{0,5} x^2\left(1-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2!}+\frac{x^{\frac{4}{3}}}{4!}-\frac{x^2}{6!}+\ldots\right)dx=$$

$$= \int\limits_0^{0,5} \left(x^2 - \frac{x^{\frac{8}{3}}}{2!} + \frac{x^{\frac{10}{3}}}{4!} - \frac{x^4}{6!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{0,5} - \frac{x^{\frac{11}{3}}}{2 \cdot \frac{11}{3}}\Bigg|_0^{0,5} + \frac{x^{\frac{13}{3}}}{\frac{13}{3} \cdot 4!}\Bigg|_0^{0,5} - \frac{x^5}{5 \cdot 6!}\Bigg|_0^{0,5} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{11 \cdot 2^5} + \frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{13 \cdot 2^5 \cdot 4!} - \frac{1}{5 \cdot 6! \cdot 2^5} + \ldots .$$

Правая часть последнего равенства есть ряд Лейбница (показать). Находим член ряда, модуль которого меньше 10^{-3}. Проведём следующую оценку сверху $\left(2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4} < 1,6\right)$:

$$\left|\frac{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{13 \cdot 2^5 \cdot 4!}\right| = \frac{\sqrt[3]{4}}{13 \cdot 32 \cdot 8} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3328} < \frac{1.6}{3328} = 0,000480 < 10^{-3}.$$

Тогда искомое приближённое значение интеграла

$$I = \frac{1}{24} - \frac{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{352} = 0,041666\ldots - 0,010737\ldots \approx 0,031.$$

Ответ: $\int\limits_0^{0.5} x^2 \cos \sqrt[3]{x} dx \approx 0,031$ с точностью до 10^{-3}.▶

Задание 12. Вычислить $\ln 2$ с точностью до 10^{-4}.

◀Из формулы

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

следует, что

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots .$$

Для нахождения приближенного значения $\ln 2$ с точностью до 10^{-4} по указанной выше формуле пришлось бы взять минимум 10 000 членов ряда. Для реальной разрешимости указанной задачи используют следующую формулу

$$\ln(t+1) = \ln t + 2\left(\frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3\,(2t+1)^3} + \frac{1}{5\,(2t+1)^5} + \dots\right). \tag{9.23}$$

Остаточный n-й член ряда имеет вид

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2k-1)\,(2t+1)^{2n+2k-1}}.$$

Тогда справедлива для R_n оценка сверху

$$R_n < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\,(2n+1)\,t\,(t+1)\,(2t+1)^{2n-1}}. \tag{9.24}$$

В формуле (9.23) полагаем $t+1=2$, $t=1$. Имеем:

$$\ln 2 = \ln 1 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \dots\right).$$

В оценке (9.24) возьмем $n=4$ при $t=1$

$$R_4 < \frac{1}{4\cdot 9\cdot 3^7} = \frac{1}{4\cdot 19683} = 0,0000127\dots$$

Искомое приближенное значение $\ln 2$ будет

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7}\right) =$$

$$= 2\,(0,333333\ldots + 0,012345\ldots + 0,000823 + 0,000065\ldots) =$$

$$= 2 \cdot 0,346566\ldots \approx 0,6931.$$

Ответ: $\ln 2 \approx 0,6931$ с точностью до 10^{-4}.▶

Задание 13. Вычислить с точностью до 10^{-3} значение функции $f(x) = e^x$ в точках $x = 0,11$ и $x = 0,14$. Затем методом линейной интерполяции вычислить приближенно значения $e^{0,12}$ и $e^{0,13}$.

◀Ряд Тейлора – Маклорена для функции $f(x) = e^x$ будет

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

При $|x| < n+1$, $n \in \mathbb{N}$, оценка остатка $R_n(x)$ ряда имеет вид

$$|R_n| < \frac{|x|^{n+1}}{n!\,(n+1-|x|)}.$$

Возьмем $x = 0,11$. Тогда при $n = 2$

$$R_2 < \frac{(0,11)^3}{2(3-0,11)} = \frac{11^3}{10^6 \cdot 5,78} = 0,00023\ldots < 10^{-3}.$$

Значит,

$$e^{0,11} \approx 1 + \frac{0,11}{1!} + \frac{0,11^2}{2!} = 1,11 + \frac{0,0121}{2} = 1,11 + 0,00605 \approx 1,116.$$

Аналогично для $x = 0,14$

$$R_2 < \frac{14^3}{10^6 \cdot 5,72} < \frac{7^3}{10^3 \cdot 714} = 0,00048\ldots < 10^{-3},$$

$$e^{0,14} \approx 1 + 0,14 + \frac{0,0196}{2} \approx 1,150.$$

Метод линейной интерполяции состоит в замене значения функции $f(x) = e^x$ в точке $x \in (0,11; 0,14)$ значением в этой точке линейной функции

$$y = e^{0,11} + \frac{e^{0,14} - e^{0,11}}{0,14 - 0,11}(x - 0,11) \tag{9.25}$$

(через точки $A\,(0,11; e^{0,11})$ и $B\,(0,14; e^{0,14})$ проводим прямую, уравнение которой есть (9.25)).

Тогда

$$e^{0,12} \approx 1,116 + \frac{1,150 - 1,116}{0,14 - 0,11}\,(0,12 - 0,11) \approx 1,127, e^{0,13} \approx 1,139.$$

Ответ: $e^{0,11} \approx 1,116$; $e^{0,12} \approx 1,127$; $e^{0,13} \approx 1,139$; $e^{0,14} \approx 1,150$.►

Задание 14. Методом последовательного дифференцирования найти первые семь членов разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ задачи Коши для дифференциального уравнения

$$y'' + 0,1\,(y')^2 + (1 + 0,1x)\,y = 0 \tag{9.26}$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1,\;\; y'(0) = 2. \tag{9.27}$$

◄Вначале кратко остановимся на теории указанного выше метода. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{9.28}$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, \tag{9.29}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть $y = y(x)$ – решение задачи Коши (9.28)–(9.29). Предположим, что $y(x)$ разложена в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$, то есть

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x)}{n!}\,(x - x_0)^n. \tag{9.30}$$

Начальные условия (9.29) используются для нахождения $y^{(n)}(x_0)$, подстановкой их в уравнение (9.28). Значения $y^{(n+1)}(x_0)$, $y^{(n+2)}(x_0), \ldots$, последовательно определяются дифференцированием уравнения (9.28) и подстановкой $x = x_0$, $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Замечание 9.4. Справедливо утверждение, состоящее в том, что если правая часть уравнения (9.28) в некоторой окрестности точки

$$M_0\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$$

радиуса $\delta > 0$ есть аналитическая функция своих аргументов, то существует окрестность точки x_0 радиуса δ_1, в которой имеется единственное решение Задачи Коши (9.28)–(9.29) $y = y(x)$, представимое рядом Тейлора (9.30). Тогда частичные суммы этого ряда будут приближенными решениями указанной задачи Коши. Аналогично применяется метод последовательного дифференцирования и для приближенных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Дальше на нашей задаче покажем реализацию указанного метода.

Решение задачи (9.26)–(9.27) ищем в виде ряда (9.30) ($x_0 = 0$). Решаем уравнение (9.26) относительно y''.

$$y'' = -0,1\left(y'\right)^2 - (1 + 0,1x)\,y. \tag{9.31}$$

Тогда $y''(0) = -0,1(2)^2 - (1 + 0,1 \cdot 0)1 = -1,4$.

Дальше последовательно дифференцируем уравнение (9.31):

$$y''' = -0,2y' \cdot y'' - 0,1y - (1 + 0,1x)y';\;\; y'''(0) = -1,54;$$

$$y^{(4)} = -0,2((y''')^2 + y' \cdot y''') - 0,2y' - (1 + 0,1x)y''';\;\; y^{(4)}(0) = 1,224;$$

$$y^{(5)} = -0,2(2y'' \cdot y''' + y'' \cdot y''' + y' \cdot y^{(4)}) - 0,3y'' - (1 + 0,1x)y''';\;\; y^{(5)}(0) = 0,1768.$$

Ответ: $y(x) \approx 1 + 2x - 0,7x^2 - 0,2567x^3 + 0,051x^4 + 0,00147x^5$.►

Задание 15. Найти первые четыре члена разложения в ряды Тейлора – Маклорена решения $y = y(x)$, $z = z(x)$ системы

$$\begin{cases} y' = y\cos x - z\sin x, \\ z' = y\sin x + z\cos x, \end{cases} \tag{9.32}$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $z(0) = 0$.

◀Функции $y(x)$ и $z(x)$ (решение системы (9.32)) ищем в виде степенных рядов

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots \tag{9.33}$$

и

$$z(x) = z(0) + \frac{z'(0)}{1!}x + \frac{z''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{z^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots \tag{9.34}$$

Из начальных условий имеем: $y(0) = 1$, $z(0) = 0$. Положив в системе (9.32) $x = 0$ и учтя указанные начальные условия, получим: $y'(0) = 1$, $z'(0) = 0$. Дальше продифференцируем систему (9.32) по x, получим:

$$\begin{cases} y''(x) = -(y + z')\sin x - (z - y')\cos x, \\ z''(x) = -(z - y')\sin x + (y + z')\cos x. \end{cases}$$

Имеем: $y'''(0) = 0$, $z'''(0) = 3$. Подставляем найденные значения производных в точке $x = 0$ в ряды (9.33) и (9.34).

Ответ: $y(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$,$z(x) \approx \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$.▶

Задание 16. Методом неопределенных коэффициентов решить задачу Коши (найти четыре ненулевых члена соответствующего решения ряда)

$$\begin{cases} y'' - xy' + y = 1 - \cos x, \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{9.35}$$

◀Указанный метод чаще всего применяют при решении нелинейных дифференциальных уравнений (с переменными коэффициентами). Возьмем уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{9.36}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0, \; y'(0) = y'_0. \tag{9.37}$$

Пусть все функции $p(x), q(x), r(x)$ можно разложить в ряды Тейлора – Маклорена.

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n; \; q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \; r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n x^n. \tag{9.38}$$

Решение уравнения (9.36) будем искать в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{9.39}$$

где коэффициенты c_n надо определить. Дифференцируем равенство (9.39) два раза по x.

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \; y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \tag{9.40}$$

Подставляем ряды (9.38)–(9.40) в уравнение (9.36). Умножив ряды, получим равенство двух рядов. Ввиду единственности разложения функций в степенные ряды, коэффициенты их при одинаковых степенях должны быть равны. Приравниваем их. С учетом начальных условий решаем полученную систему, то есть находим коэффициенты c_n. Покажем это на конкретном примере, решая предложенную выше задачу.

У нас $p(x) = -x$, $q(x) = 1$, $r(x) = 1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots$. После указанных выше подстановок получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{9.41}$$

Преобразуем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \left[\begin{array}{c} n-2=k \\ k+2=n \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k = [k=n] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n. \tag{9.42}$$

Преобразуем (9.41), подставив в него (9.42),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1)(n+2)\, c_{n+2} - nc_n + c_n \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}. \tag{9.43}$$

У ряда правой части формулы (9.43) коэффициенты с нечетными степенями x и с показателем ноль равна нулю.

$$\left\{ \begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2 + c_0 = 0, \\ x^1 & 6c_3 = 0, \\ x^2 & 12c_4 - c_2 = 1/2, \\ x^3 & -2c_3 + 20c_5 = 0, \\ x^4 & -3c_4 + 30c_6 = -1/24, \\ x^5 & -4c_5 + 42c_7 = 0, \\ x^6 & -5c_6 + 56c_8 = 1/720. \end{array} \right. \tag{9.44}$$

Решаем систему (9.44). Из начальных условий имеем:

1) $y(x) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n x^n$, $0 = y(0) = c_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \cdot 0^n$, то есть $c_0 = 0$;

2) $y'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = c_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, $1 = y'(0) = c_1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n c_n 0^{n-1}$, то есть $c_1 = 1$.

Из системы (9.44) видно, что все $c_{2n+1} = 0$ для $n = 1, 2, 3$. Тогда

$$c_2 = 0,\ c_4 = \frac{1}{24},\ c_6 = \frac{1}{360},\ c_8 = \frac{11}{40320}.$$

Ответ: $y(x) \approx x + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{360} + \frac{11x^8}{40320}$.▶

Задание 17. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 12, \\ y(0) = 5,\ y'(0) = 2, \end{cases} \tag{9.45}$$

в виде ряда Тейлора – Маклорена.

◀Для нахождения коэффициентов ряда используем, как и в предыдущей задаче, метод неопределенных коэффициентов.

Искомый ряд имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k. \tag{9.46}$$

Подставляем ряд (9.46) в уравнения системы (9.45).

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}; y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} = \left[\begin{array}{l} n = k-2 \\ k = n+2 \end{array} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n =$$

$$= [n = k] = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k;$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left((k+2)\,(k+1)\,c_{k+2} + kc_k + 2c_2\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 12b_k x^k, \qquad (9.47)$$

где $b_0 = 1$ и $b_k = 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Из формулы (9.47) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях

$$\begin{cases} 2c_2 + 2c_0 = 12, \\ (k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+2)c_k = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad (9.48)$$

Из начальных условий и формулы

$$c_k = \frac{y^{(k)}\,(0)}{k!}$$

находим $c_0 = \frac{y(0)}{0!} = \frac{5}{1} = 5$; $c_1 = \frac{y'(0)}{1!} = \frac{2}{1} = 2$.

Из первого уравнения системы (9.48) получим, что

$$c_2 = 6 - c_0 = 6 - 5 = 1.$$

Из второго уравнения системы (9.48) имеем

$$c_{k+2} = -\frac{c_k}{k+1}. \qquad (9.49)$$

Тогда получаем:

$$c_3 = -\frac{c_1}{2} = -\frac{2}{2} = -1;\; c_4 = -\frac{c_2}{3} = -\frac{1}{3};\; c_5 = -\frac{c_3}{4} = -\frac{1}{4};\; c_6 = -\frac{c_4}{5} = \frac{1}{15};$$

$$c_7 = -\frac{c_5}{6} = -\frac{1}{24};\ c_8 = -\frac{c_6}{7} = -\frac{1}{105}$$

и так далее.

Из выше найденного заключаем, что $c_{2k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!}$, $k \in \mathbb{N}$, так как, например, из формулы (9.49) имеем: $c_4 = c_{2\cdot 2} = -\frac{1}{3} = \frac{(-1)^{2-1}}{(2\cdot 2-1)!!}$.

А тогда $c_6 = c_{2\cdot 3} = -\frac{c_4}{4+1} = -\frac{(-1)^{2-1}}{(2\cdot 2-1)!!\cdot 5} = \frac{(-1)^{3-1}}{(2\cdot 3-1)!!}$.
Так будет и в общем виде.

Аналогично рассуждая, получим $c_{2k+1} = \frac{(-1)^k 2}{(2k)!!}$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда $y(x) = 5 + 2x + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!!} x^{2k} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!!} x^{2k+1}$. ►

Задание 18. Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)} x^{2n-3}. \tag{9.50}$$

◄Ряд (9.50) – это ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

у которого коэффициенты членов ряда с чётными показателями равны нулю. Исследуем ряд (9.50) на сходимость. Обозначаем

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)} x^{2n-3}. \tag{9.51}$$

Тогда

$$u_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+2}}{(2n-1)!\,(2n+1)} x^{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{2n-1}(2n-3)!\,(2n-1)}{(2n-1)!\,(2n+1)\,|x|^{2n-3}} =$$

$$= x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-2)(2n-1)} = 0.$$

Значит, ряд (9.51) сходится на всей числовой прямой $\mathbb{R}$. Проинтегрируем наш ряд (9.51).

$$A(x) = \int\limits_0^x\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)}t^{2n-3}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)}\int\limits_0^x t^{2n-3}dt =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!\,(2n-1)}\cdot\left.\frac{t^{2n-2}}{2n-2}\right|_0^x = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-2}. \qquad (9.52)$$

Если $x\neq 0$, то следующим образом преобразуем ряд (9.52).

$$A(x) = -1+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} = -1+\frac{\sin x}{x}.$$

Если $x=0$, то, очевидно, что сумма ряда (9.50) равна нулю. Находим сумму ряда (9.50) при $x\neq 0$. Эта сумма $S(x)$ будет равна

$$S(x) = A'(x) = \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{Пр.Л.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{2x} = 0.$$

Ответ: $S(x) = \begin{cases} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ ▶

Задание 19. Вычислить предел

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{\sin^4 x}.$$

◀Имеем предел отношения бесконечно малых в точке $x = 0$. Вначале применим принцип замены бесконечно малых:

$$\sin^4 x \underset{x\to 0}{\sim} x^4;\ 1 - \sqrt{1+x^2}\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \sqrt{1+x^2}\cos x.$$

Дальше разложим функции $y = \sqrt{1+x^2}$ и $y = \cos x$ в ряды Тейлора – Маклорена до бесконечно малых при $x \to 0$ более высокого порядка, чем x^4 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Применим так же принцип отбрасывания бесконечно малых более высокого порядка.

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cos x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4 + o\left(x^4\right)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right)}{x^4} = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $I = \frac{1}{3}$.▶

Задание 20. Пользуясь разложением функции

$$f(x) = (x-2)^2 \ln(3x+2)$$

в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$, найти производную $f^{(7)}(x)$.

◀Разложим нашу функцию в указанный ряд Тейлора.

$$f(x) = (x-2)^2 \ln(3(x-2)+8) = (x-2)^2 \ln\left(8\left(\frac{3}{8}(x-2)+1\right)\right) =$$

$$= (x-2)^2\left(\ln 8 + \ln\left(1+\frac{3}{8}(x-2)\right)\right) =$$

$$(x-2)^2 \ln 8 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{3}{8}\right)^k}{k}(x-2)^{k+2}. \tag{9.53}$$

Очевидно, что производная седьмого порядка первого слагаемого правой части (9.53) равна нулю. Во втором слагаемом указанной правой части (9.53) считаем

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}\left(\frac{3}{8}\right)^k}{k}. \tag{9.54}$$

Тогда $7 = k+2$, где $k = 5$. По формуле для коэффициентов ряда Тейлора имеем

$$\frac{f^{(7)}(2)}{7!} = a_5. \tag{9.55}$$

Из равенства (9.55) с учетом (9.54) находим

$$f^{(7)}(2) = 7!\frac{(-1)^{5-1}\left(\frac{3}{8}\right)^5}{5} = \frac{7!}{5}\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^5.$$

Ответ: $f^{(7)}(2) = \frac{7!}{5} \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^5$.►

Задание 21. Представить в виде ряда интеграл

$$\int\limits_0^x t^2 e^{-t^2} dt,$$

где $x > 0$.

◄Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора – Маклорена.

$$A = \int\limits_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \int\limits_0^x t^2 \sum_{n-0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} dt = \int\limits_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, t^{2n+2}}{n!} dt. \qquad (9.56)$$

При любом фиксированном $x > 0$ ряд, стоящий в правой части равенства (9.56) под знаком интеграла, равномерно сходится на отрезке $[0, x]$ (показать, используя достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Можно также использовать свойство степенных рядов).

Тогда указанный ряд можно почленно интегрировать на отрезке $[0, x]$. Получим:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int\limits_0^x t^{2n+2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \left. \frac{t^{2n+3}}{2n+3} \right|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, x^{2n+3}}{(2n+3)\, n!}.$$

Ответ: $\int\limits_0^x t^2 e^{-t^2} dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)n!}$.►

Задания для самостоятельного решения

1. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до $0,001$.

2. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до $0,001$.

3. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью до $0,0001$.

4. Вычислить $\ln 3$ с точностью до $0,0001$.

5. Доказать, что:
$$\ln 2 = 7a + 5b + 3c,\ \ln 3 = 11a + 8b + 5c,\ \ln 5 = 16a + 12b + 7c,$$
где $a = \ln\frac{16}{15}$, $b = \ln\frac{25}{24}$, $c = \ln\frac{81}{80}$.
С помощью этих равенств вычислить $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 10$ с точностью до $0,0001$.

6. Доказать, что
$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$
С помощью этого тождества вычислить π с точностью до $0,00001$.

7. Выяснить происхождение приближённой формулы
$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}\,(a > 0)\,,$$
вычислить с её помощью $\sqrt{23}$, положив $a = 5$, и оценить допущенную при этом ошибку.

8. При каких значениях x приближённая формула $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ даёт ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$, $0,0001$?

9. При каких значениях x приближённая формула $\sin x \approx x$ даёт ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$?

10. Сколько нужно взять членов ряда $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, чтобы найти число e с точностью до $0,0001$?

11. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx$ с точностью до $0,001$.

12. Вычислить с точностью до $0,001$ $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

13. Выяснить происхождение приближённого равенства $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оценить погрешность для $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

14. Определить значения x, для которых приближенное равенство
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$
выполняется с точностью до $0,0001$.

15. Вычислить значение $\operatorname{tg} 46^\circ$, взяв три первых члена разложения функции $\operatorname{tg} x$ по формуле Тейлора. Результат сравнить с табличным.

16. Вычислить значение $\cos 32^\circ$ с точностью до $0,0001$, пользуясь разложением функции $f(x) = \cos x$ по формуле Тейлора. Результат сравнить с табличным.

Итоговый тест по теме «Ряды»

Проверьте свои знания, пройдя тест по теме «Ряды».

Варианты заданий для индивидуальной работы

Вариант 1.
Вариант 2.
Вариант 3.
Вариант 4.
Вариант 5.
Вариант 6.
Вариант 7.
Вариант 8.
Вариант 9.
Вариант 10.
Вариант 11.
Вариант 12.

Задания для подготовки к экзамену и (или) зачету

1. Найти общий член последовательности частичных сумм ряда

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)\,(2n+1)}\ldots .$$

   Пользуясь определением суммы ряда, показать, что этот ряд сходится, и найти его сумму.

2. Найти выражение для конечной суммы $S_n=1+2^2+3^2+\ldots+n^2$.

3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\ln\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

4. Исследовать ряд на сходимость, используя следствие из необходимого признака сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n+3}\arcsin\frac{1}{n^2+2}.$$

5. Пользуясь критерием Коши, исследовать ряды на сходимость и расходимость:

   5.1 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\alpha}{2^k}$;

   5.2 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

6. Установить сходимость и расходимость рядов с помощью теорем сравнения:

   6.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$;

   6.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}}$;

6.3 $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{2\pi}{n+1}\right)$;

6.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[4]{n^2-1}\,\sin\frac{\pi}{n+2}$;

6.5 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n e^{-\sqrt{n}}\ln n$.

7. Сколько членов ряда

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$$

нужно взять, чтобы получить значение суммы с точностью до $0,0001$?

8. Исследовать ряды на сходимость:

8.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2n}{3}}$;

8.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$;

8.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot6\cdot\ldots\cdot3n}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}$;

8.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!(2^n+3^n)}$;

8.5 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(2n)}$;

8.6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\operatorname{tg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)$;

8.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$;

8.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$.

9. Сколько нужно взять членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, чтобы вычислить его сумму с точностью до $0,01$, до $0,001$?

10. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(3n+1)!}$. В случае сходимости ряда найти его сумму с точностью до 10^{-3} как с недостатком, так и с избытком.

11. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

12. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость функциональную последовательность

$$f_n(x) = \frac{n + \operatorname{arcctg} nx}{3nx}$$

на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

13. Доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n \ln^2 n}$ на множестве $A = [-c, c]$ $(c > 0)$.

14. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin x \cdot \cos nx}{\sqrt{n^2+x^2}}$, используя признак Абеля – Дирихле о равномерной сходимости функциональных рядов.

15. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ равномерно сходится на полуоси $0 \leq x < \infty$.

16. Доказать равномерную сходимость на отрезке $[0, 2]$ функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x}{3^k \sqrt{1+kx^2}}$, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.

17. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится на всей числовой оси, используя мажорантный признак Вейерштрасса.

18. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$.

19. Найти область сходимости степенного ряда $\frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{x^{2n}}{2^n}$.

20. С помощью формулы Тейлора разложить многочлен $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$. Найти с точностью до $0,001$ $p(-1,002)$ и $p(-0,997)$.

21. Указать промежуток значений x, на котором приближенная формула

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

имеет место с точностью до $0,00005$.

22. Разложить функцию $y = \sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$.

23. Разложить в ряд Маклорена функцию $y = \operatorname{arctg} x$.

24. Разложить функцию $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ в ряд Маклорена.

25. Вычислить $\sqrt[3]{130}$ с точностью до $0,0001$.

26. Вычислить приближенно значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$, взяв 3 члена разложения в ряд подынтегральной функции; указать допущенную при этом погрешность.

27. Вычислить пределы, используя разложения функций в ряд Маклорена:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x\cos x - \sqrt{1+2x}}{\ln(1+x) - x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 e^{2x} + \ln\left(1 - x^2\right)}{x\cos x - \sin x}.$$

28. Вычислить с точностью до 10^{-4} $\cos 27°$.

29. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{0,5} x^2 \cos \sqrt[3]{x} dx$ с точностью до 10^{-3}.

30. Представить в виде ряда интеграл $\int\limits_0^{x} t^2 e^{-t^2} dt$, где $x > 0$.

Вопросы для подготовки к экзамену и (или) зачету

1. Понятие числового ряда, его частичной суммы, суммы. Ряды сходящиеся и расходящиеся. Ряды, составленные из слагаемых геометрической прогрессии. Остаток ряда.
2. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд.
3. Арифметические операции над сходящимися рядами.
4. Критерий Коши сходимости ряда.
5. Знакопостоянные ряды. Критерий сходимости положительных рядов. Теоремы сравнения положительных рядов.
6. Признаки Даламбера сходимости числовых рядов.
7. Признаки Коши сходимости числовых рядов.
8. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы последовательности. Обобщенный признак Коши сходимости положительных рядов.
9. Интегральный признак Коши – Маклорена сходимости рядов.
10. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.
11. Признак Абеля – Дирихле сходимости числовых рядов с членами произвольных знаков.
12. Функциональные последовательности и ряды, их сходимость. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов.
13. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов.
14. Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.
15. Признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости функциональных рядов.
16. Почленный переход к пределу. Непрерывности суммы функционального ряда и предельной функции функциональной последовательности.
17. Почленное интегрирование функциональных рядов и функциональных последовательностей.
18. Почленное дифференцирование функциональных рядов и функциональных последовательностей.

19. Понятие степенного ряда. Теорема Коши – Адамара. Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда.

20. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Понятие аналитической функции.

21. Разложение в ряд Тейлора – Маклорена функций

$$f(x) = e^x,\ f(x) = \cos x,\ f(x) = \sin x,\ f(x) = \ln(1+x),\ f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \neq 0.$$

Литература

1. Марзан, С. А. Электронный учебно-методический комплекс для студентов специальности «Математика и информатика» : в 3 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2019. – Ч. 1 : Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной.

2. Марзан, С. А. Электронный учебно-методический комплекс для студентов специальности «Математика и информатика» : в 3 ч. / С. А. Марзан, А. Н. Сендер, Н. Н. Сендер ; Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина. – Брест : БрГУ, 2020. – Ч. 2 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных.

3. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа : в 2 т. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 2 : Основы математического анализа. – 463 с.

4. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа : в 2 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 1988. – Т. 2 : Курс математического анализа. – 584 с.

5. Ильин, В.А. Основы математического анализа : в 2 т. / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М. : Наука, 1982. – Т. 1. – 599 с.

6. Дадаян, А.А. Математический анализ / А.А. Дадаян. – Минск : Высш. шк., 1990. – 428 с.

7. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1977. – 528 с.

8. Виноградова, И.А. Задачи и упражнения по математическому анализу : в 2 кн. / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий ; под ред. В.А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. – М. : Высш. шк., 2002. – Кн. 2 : Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы. – 712 с.

9. Давыдов, Н.А. Сборник задач по математическому анализу : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов / Н.А. Давыдов, П.П. Коровкин, В.Н. Никольский ; под ред. Н.А. Давыдова. – М. : Просвещение, 1973. – 256 с.

10. Задачник по курсу математического анализа : учеб. пособие для студентов заоч. отд-ний физ.-мат. фак-тов пединститутов : в 2 т. / Н.Я. Виленкин [и др.]; под общ. ред. Н.Я. Виленкина. – М. : Просвещение, 1971. – Т. 1. – 343 с.

Вариант 1

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1+\frac{2\cdot 4}{1\cdot 3}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{\pi n}{n^2\sqrt{n}+n+1}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi}{n}}{n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2(n+1)}{2^n+3^n}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^x}.$$

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{x}{n}$$

на множестве $E=(-\infty;+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд на указанном множестве, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{n^2x^2+n}, \ E = \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t^{17}}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать его радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln n}$.

9. Разложить функцию $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ по степеням двучлена $x + 1$.

10. Вычислить с точностью до $0,001$ $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^5}$.

Вариант 2

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$2+\frac{2^2}{1\cdot 2}+\frac{2^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots .$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^9}}{e^n}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^{n-1}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^3+1}}\left(e^{\frac{1}{n^{\alpha}+1}}-1\right)$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}}{n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{5^{\frac{n}{2}}-n^2}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\cos^2 x}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\sin nx}{2^n}$$

на множестве $E=(-\infty;+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд на указанном множестве, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{n^2x^2+n},\ E=\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x)=\int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ в степенной ряд с центром в точке $x_0=0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

9. Разложить по степеням x функцию $f(x)=\ln(1+2x)$, заданную на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Оценить погрешность, получаемую при отбрасывании дополнительного члена в формуле Тейлора после пяти первых членов.

10. Вычислить с точностью до $0,001$ $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

Вариант 3

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1-\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}-\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}\ldots .$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^3+1}{2n^2+3}\right)^{n^9}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n(2^n-1)}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 6\cdot\ldots\cdot(3n)}{(n+1)!}\operatorname{arctg}\frac{1}{2^n}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+\sin^2 n}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^4+n}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{1+(2n+1)x}}$$

на множестве $E=(0;+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд на указанном множестве, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n + n^2 x^2}, \; E = \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-5)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

9. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{x}$ по степеням двучлена $x - 4$. Ограничиться четырьмя членами.

10. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx$ с точностью до $0,001$.

Вариант 4

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{42}\ldots.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^9 \sin\frac{1}{n^9+n+1}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n \sin\frac{x}{2^n}}{n!}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2n+1)!!}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)a^{2n}}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x)^n}{x^2+n^2}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4+1}$ на множестве $E=(-\infty;+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\cos nx}{\sqrt[4]{n^4+x^4}},\ E=\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x)\int\limits_0^x \frac{\sin t^2}{t}dt$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3n-2}$.

9. Разложить функцию $f(x) = \sin^2 x$ по степеням x. Оценить $R_{10}(x)$ на $[0;1]$.

10. Вычислить приближенное значение определенного интеграла, взяв два члена разложения в ряд подынтегральной функции. Указать допущенные при этом погрешности $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} x^3 \operatorname{arctg} x dx$.

Вариант 5

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}\ldots.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{n+1}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+2)2^n}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{5^n+3^n}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+4}\right)^{n^2+1}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^{\frac{2}{3}}}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+(nx)^3}$ на множестве $E=[0;1]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}e^{-nx}\cos nx,\ E=\left[0;\frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arccos(1-2x^2)$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}n^n}$.

9. Выяснить происхождение приближённого равенства $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ и оценить погрешность для $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

10. Вычислить приближенное значение определенного интеграла, взяв два члена разложения в ряд подынтегральной функции. Указать допущенные при этом погрешности $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Кафедра
МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

◀ ▶

◀◀ ▶▶

Закрыть

Вариант 6

1. Написать одну из возможных формул для n-го члена ряда по указанным его первым членам:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n+2}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^{10}}{3^n+n^2}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n\sqrt{n}}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{x^2+n^2}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{x}}$ на множестве $E=[0;+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-\ln(n+x)},\ E=(0;1].$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

9. Определить значения x, для которых приближенное равенство $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ выполняется с точностью до $0,0001$.

10. Сколько нужно взять членов ряда $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, чтобы найти число e с точностью до $0,0001$?

Вариант 7

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+2)(n^2+1)}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n-5^n}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n+1}}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2-4n+1}}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{3n+2}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x-3)^n}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)\sin^2 nx}{n\sqrt{n+1}}$$

на множестве $E = [-3; 0]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x \sin \frac{\pi}{1+n^5x^3},\ E=(-\infty;+\infty)\,.$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arccos x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

9. Вычислить значение $\operatorname{tg} 46^\circ$, взяв три первых члена разложения функции $\operatorname{tg} x$, по формуле Тейлора. Результат сравнить с табличным.

10. При каких значениях x приближённая формула $\sin x \approx x$ даёт ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$?

Кафедра МАДУиП

На весь экран

Начало

Содержание

Назад

Закрыть

Вариант 8

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3\,.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \cos n^2$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{5\sqrt{n}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^9}{\sqrt{n^{20}+4n^3+1}}$;

3.2 $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{\cos 2n}{\ln \ln n}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{2n} + (n+1)x}}$$

на множестве $E = [0; +\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx} \cos nx, \ E = \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x) = \arcsin x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

9. Вычислить значение $\cos 32^\circ$ с точностью до $0,0001$. Результат сравнить с табличным.

10. При каких значениях x приближённая формула $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ даёт ошибку, не превышающую $0,01$, $0,001$, $0,0001$?

Вариант 9

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3+5^3+9^3+\ldots+(4n-3)^3.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin an, a\neq xm, m\in Z;$

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^{n^2}};$

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{5^n n};$

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)\ln\ln(n+1)}.$

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^{25}n}{n};$

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{\pi}{3}\right)}{n-\ln^2(n+2)}.$

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(x+n)^3}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi-x)\cos^2 nx}{\sqrt[5]{n^7+1}}$ на множестве $E=[0;\pi]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}\cos nx}{n},\ E=\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}$.

9. Оценить абсолютную погрешность на промежутке $[0;1]$ приближенной формулы $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$.

10. Вычислить $\ln 3$ с точностью до $0,0001$.

Вариант 10

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \ldots + (-1)^{n-1} n^3.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^9 \sin \frac{1}{n^9+n+1}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n^2}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{\sqrt{(n+1)\sqrt[3]{n+2}}}$;

3.2 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{tg}^n x}{n^2+n+1}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ на множестве $E = \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x e^{-nx} \cos nx, \ E = \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

7. Разложить функцию $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n}$.

9. Разложить функцию $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ по степеням двучлена $x - 2$. Вычислить приближенное значение $f(2,1)$, взяв первые три члена разложения. Вычислить точное значение $f(2,1)$. Найти абсолютную и относительную погрешности, допущенные при приближенном вычислении $f(2,1)$.

10. Вычислить $\ln 1,2$ с точностью до $0,0001$.

Вариант 11

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - \ldots + (-1)^{n-1} n^4.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

2.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$;

2.4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{3,1}}{2\sqrt{n}+n}$;

3.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 3n}{\sqrt{n^2+1}}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos^n x}{n^4}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ на множестве $E = (-2; +\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin nx}{n \ln^{\alpha} n}\right), \ \alpha > 0, \ E = (-\infty; +\infty).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \mathrm{arcctg} x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \cdot (x-5)^{n+1}}{(n+1)!}$.

9. Указать промежуток значений x, при которых приближенная формула

$$\sin^2 x \approx \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3 \cdot x^4}{4!}$$

имеет место с точностью до $0,01$.

10. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до $0,001$.

Вариант 12

1. Для конечных сумм получить выражения, не требующие сложения n слагаемых:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,(2n+1)}.$$

2. Исследуйте сходимость приведенных ниже числовых рядов:

2.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{0{,}3}}$;

2.2 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

2.3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4n^2+1}}$;

2.4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln^2 n}$.

3. Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость:

3.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+20}$;

3.2 $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{(n+2)\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n^2-n+1}$.

4. Определить область сходимости (абсолютной и условной) функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot\sin^n x}{n(n+2)}$.

5. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2e^{n^2x^2}}$$

на множестве $E=(-\infty;+\infty)$.

6. Исследовать на равномерную сходимость функциональный ряд, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{1+n^2}, \; E = (-\infty; +\infty).$$

7. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в степенной ряд с центром в точке $x_0 = 0$ и указать радиус сходимости.

8. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}$.

9. Сколько нужно взять членов в формуле Тейлора для функции $f(x) = \cos x$, чтобы получить многочлен, представляющий эту функцию с точностью до $0,0001$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

10. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до $0,001$.