Неразрешимые группы с бипримарными кофакторами ненильпотентных подгрупп

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

Рассматриваются только конечные группы. Кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G, где $H_G = \bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx$. Подгруппа Фиттинга и наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G обозначаются через $F(G)$ и $R(G)$ соответственно, а $|\pi(G)|$ — количество различных простых делителей порядка группы G. Если $|\pi(G)| = 1$, то группу G называют примарной, при $|\pi(G)| = 2$ — бипримарной.

Строение группы существенно зависит от свойств кофакторов ее подгрупп. Я. Г. Беркович [1] исследовал группы, у которых ненильпотентные кофакторы максимальных подгрупп являются разрешимыми группами с нильпотентными собственными нормальными подгруппами. С. М. Евтухова и В. С. Монахов [2] изучили группы со сверхразрешимыми кофакторами максимальных подгрупп. Е. Т. Огарков [3] рассматривал группы, у которых порядки кофакторов всех подгрупп делятся не более, чем на два простых числа. Доказана следующая

Теорема 1. *Если в группе G кофакторы ненильпотентных подгрупп примарны или бипримарны, то $|\pi(R(G)/F(G))| \le 2$ или $R(G)/F(G)$ метанильпотентна, а $G/R(G)$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(H/R(G))$, где $H/R(G)$ — подгруппа в $G/R(G)$ и $H/R(G)$ изоморфна одной из следующих групп:*

(1) *$SL(2, 2^p)$, где $p = 2$ или $p = 3$;*

(2) *$PSL(2, 3^p)$, где p — нечетное простое число такое, что $3^p - 1 = 2 \cdot q^\alpha$, $\alpha \ge 1$, q — простое число, $q > 3$, $3^p + 1 = 4 \cdot r^\gamma$, $\gamma \ge 1$, r — простое число, $r > 3$ и $r \ne q$;*

(3) *$PSL(2, p)$, где p — простое число такое, что $p > 5$, $p^2 \equiv -1 \pmod 5$, $p - 1 = 2 \cdot 3^\alpha$, $\alpha \ge 1$, $p + 1 = 2^s \cdot q^\beta$, $s \ge 2$, $\beta \ge 0$, q — простое число, $q > 3$;*

(4) *$PSL(2, p)$, где p — простое число такое, что $p > 5$, $p^2 \equiv -1 \pmod 5$, $p - 1 = 2^l \cdot r^\gamma$, $l \ge 1$, $\gamma \ge 0$, r — простое число, $r > 3$ и $\gamma = 0$ при $l > 1$, $p + 1 = 2^t \cdot 3^\delta$, $t \ge 1$, $\delta \ge 1$;*

(5) $PSL(3,3)$;
(6) $Sz(2^q)$, *где* $q = 3$ *или* $q = 5$.

Доказанная теорема пополняет список групп теоремы 2 [3].

Список литературы

1. Я. Г. Беркович. Конечные группы с большими ядрами максимальных подгрупп // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 243–248.

2. С. М. Евтухова, В. С. Монахов. О конечных группах со сверхразрешимыми кофакторами подгрупп // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 4. С. 53–57.

3. Е. Т. Огарков. Конечные группы с определенными свойствами кофакторов // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-матэм. навук. 1974. № 3. С. 118–120.

2-хорошие формальные матрицы над кольцом целых чисел

Ц. Д. Норбосамбуев

Томский государственный университет, Томск

Элемент кольца называется *k-хорошим*, если он представим в виде суммы k обратимых элементов этого кольца. С формальными матрицами и кольцами формальных матриц можно ознакомиться в [1] и [2]. Здесь будут приведены некоторые условия 2-хорошести формальных матриц над кольцом целых чисел.

Теорема 1. *[1] Пусть дано кольцо формальных матриц* $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, *где* R — *коммутативное кольцо с единицей. Пусть* A — *матрица из этого кольца. Матрица* A *обратима тогда и только тогда, когда её определитель — обратимый элемент кольца* R.

Лемма 1. *Пусть* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — *кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел. Диагональная матрица* $A=diag(a,b)$ *будет 2-хорошей в* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ *тогда и только тогда, когда найдутся такие целые числа* x, a_1, a_2, b_1, b_2, *что* $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ *и* $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x = \pm 1$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x = \pm 1$.