Учреждение образования
«Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина»

Кафедра прикладной математики и информатики

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ

Электронный лабораторный практикум
для студентов специальностей 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» и
1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика»

Брест
БрГУ имени А.С. Пушкина
2019

УДК 517
ББК 22.193

Рецензенты
Заведующий кафедрой информатики и прикладной математики
Брестского государственного технического университета
кандидат технических наук, доцент
С.И. Парфомук
Заведующий кафедрой прикладной математики и информатики
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина
кандидат физико-математических наук
Д.В. Грицук

Матысик, О.В. Вычислительные методы алгебры: Электронный лабораторный практикум для студентов специальностей 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» и 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика» / О.В. Матысик. – Брест : Изд-во БрГУ имени А.С. Пушкина, 2019. – 114 с.

Лабораторный практикум составлен в соответствии с учебной программой по вычислительным методам алгебры и ставит своей целью облегчить самостоятельную работу студентов с теоретическим материалом при подготовке к лекциям, лабораторным занятиям и к экзамену. Предназначен для студентов физико-математического факультета специальностей 1-31 03 03-01 «Прикладная математика» и 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика».

УДК 517
ББК 22.193

СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1
Учет погрешностей вычислений. Относительная и абсолютная погрешности и теоремы о них. Прямая задача теории погрешностей

Теоретическая часть

Учет погрешностей вычислений

При решении математических задач появляются погрешности по различным причинам. Можно выделить следующие основные источники погрешностей.

1. При составлении математической модели какого-либо явления приходится принимать определенные условия, упрощающие задачу. Таким образом, математическая формулировка задачи не точно отображает реальные явления, а лишь дает в некоторой степени идеализированную картину. При этом возникает *погрешность постановки задачи.*

2. Бывает, что в данной постановке задачу решить трудно или вообще невозможно. Тогда применяют один из методов приближенного решения задачи, т.е. данную задачу заменяют задачей, решение которой в определенном смысле близко к решению данной задачи. Погрешность, возникающую при этом, называют *погрешностью метода.*

3. Погрешность могла быть вызвана тем, что при вычислениях приходится производить действия над приближёнными, а не точными значениями параметров, входящих в математическую формулу. Очевидно, что погрешность таких начальных данных (начальная погрешность) в некоторой степени переносится в результат. Такую погрешность называют *погрешностью действий.*

4. Погрешность возникает при округлении бесконечных и конечных десятичных чисел, имеющих большее количество значащих цифр или десятичных знаков, чем

требуется при вычислениях. Это *погрешность округления.*

Таким образом, погрешность результата решения задачи складывается из погрешностей, возникающих по разным причинам.

Пусть x – некоторое число. *Приближенным значением (или приближением)* числа x называют некоторое число a, которое в определенном смысле мало отличается от x и заменяет его в вычислениях. Запись $x \approx a$ и заменяет его в вычислениях. Запись будет означать в дальнейшем, что число a есть приближенное значение числа x.

Определение 1.1. *Погрешностью Δ_a приближенного значения a числа x называют разность $\Delta_a = x - a$.*

Модуль погрешности (абсолютная погрешность) указывает, насколько отличается приближение от точного значения. По знаку погрешности можно определить, как взято приближение a – с избытком или недостатком. Погрешность положительна, если приближение a взято с недостатком, и отрицательна в противном случае. *Границей приближенного значения* a числа x называют всякое неотрицательное число h_a, которое не меньше модуля погрешности $|\Delta_a| \leq h_a$. Говорят, что число a является *приближенным значением числа* x *с точностью до* h_a, если выполнено неравенство $|x - a| \leq h_a$. Отсюда следует, что число x заключено в границах $a - h_a \leq x \leq a + h_a$. Запись $x = a \pm h_a$ означает, что число a есть приближенное значение числа x с точностью до h_a.

Пример 1.1. *Число $a = 0,273$ – приближенное значение числа x с точностью до $0,001$. Указать границы, в которых заключено число x.*

Решение

$$a - 0,001 \leq x \leq a + 0,001, \quad 0,272 \leq x \leq 0,274.$$

Определение 1.2. *Относительной погрешностью* ω_a *приближенного значения* $a (a \neq 0)$ *числа* x *называют отношение* $\omega_a = \dfrac{\Delta_a}{a}$.

При округлении чисел считают, что граница погрешности округления равна половине единицы округляемого разряда $h_{окр} = 0,5 \cdot 10^{\alpha}$, где α – порядок округляемого разряда.

Пример 1.2. *Округлить до разряда единиц числа а)* $2,3$; *б)* $1,998$; *в)* $4,5$.

<u>Решение</u>

Граница погрешности округления равна $0,5$, $h_{окр} = 0,5$. После округления получим числа $2, 2, 5$.

Пример 1.3. *Округлить до десятых число* $27,52$. *Найти погрешность и относительную погрешность округления.*

<u>Решение</u>

$$x = 27,52,\ a = 27,5;\ \Delta_a = x - a = 0,02;\ \omega_a = \frac{\Delta_a}{a} = \frac{0,02}{27,5} = \frac{1}{1375}.$$

Так же, как и погрешность, относительная погрешность не всегда может быть вычислена, поэтому приходится иногда лишь оценивать ее модуль.

Модуль относительной погрешности часто выражают в процентах. Чем меньше модуль относительной погрешности, тем лучше приближённое значение характеризует точное значение числа или тем выше качество приближения.

Определение 1.3. *Границей относительной погрешности приближенного значения* a *числа* x *называют всякое неотрицательное число* ε_a, *которое не меньше модуля относительной погрешности:* $|\omega_a| \leq \varepsilon_a$.

Связь между границами погрешности и границами относительной погрешности

Пусть известны a и его граница погрешности h_a, тогда $|\omega_a| = \left|\frac{\Delta_a}{a}\right| \leq$ $\leq \frac{h_a}{|a|}$. Следовательно, за границу относительной погрешности ε_a можно принять отношение $\frac{h_a}{|a|}$, т.е. $\varepsilon_a = \frac{h_a}{|a|}$.

Пусть известны приближение a и граница его относительной погрешности ε_a. Тогда $|\Delta_a| \leq |a|\varepsilon_a$, т.е. $h_a = |a|\varepsilon_a$ – граница погрешности.

Округление приближенных значений чисел

Пусть x – число; a – приближенное значение числа x.

При округлении приближенного значения a числа x получается новое приближенное значение a_1 того же числа x. Вычислим погрешность этого нового приближения a_1 :

$$|\Delta_{a_1}| = |x - a_1| = |x - a + a_{a_1}| = |(x - a) + (a - a_1)| =$$

$$= |\Delta_a + \Delta_{окр}| \leq |\Delta_a| + |\Delta_{окр}| \leq h_a + |\Delta_{окр}|,$$

где $\Delta_{окр}$ – погрешность округления a до a_1;
h_a – граница погрешности приближения a.

Поэтому за границу погрешности полученного приближения a_1 можно принять сумму границ погрешности округляемого приближенного значения и погрешности округления: $h_a + |\Delta_{окр}| = h_{a_1}$.

Таким образом, доказана

Теорема 1.1. *При округлении приближенного значения числа получается новое приближенное значение, для которого границей погрешности является сумма границ погрешности округляемого приближения и погрешности округления.*

Оценка погрешностей результатов действий над приближенными значениями чисел

Пусть $X = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, где x_i – некоторые числа любого знака, заданные приближениями a_i с точностью до h_{a_i}. Обозначим $A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Тогда $X = A \pm h_A$, где h_A – граница погрешности суммы приближенных значений a_i.

Теорема 1.2. *Сумма границ погрешностей приближенных слагаемых является границей погрешности их алгебраической суммы:*

$$\sum_{i=1}^{n} h_{a_i} = h_A.$$

Доказательство.

$$|\Delta_A| = |X - A| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} h_{a_i},$$

т.е. $\sum\limits_{i=1}^{n} h_{a_i} = h_A$. Теорема 1.2 доказана. $\square$

Теорема 1.3. *Среди границ относительной погрешности суммы положительных приближенных слагаемых существует такая, которая не превышает наибольшей из границ относительных погрешностей слагаемых:* $\varepsilon_A \le \max\{\varepsilon_{a_1}, \varepsilon_{a_2}, \dots, \varepsilon_{a_n}\}$.

Теорема 1.4. *Сумма границ относительных погрешностей приближенных сомножителей является границей относительной погрешности их произведения:* $|\omega_{ab}| \le \varepsilon_a + \varepsilon_b$, $(x = a \pm h_a,\ y = b \pm h_b)$.

Следствие 1.1. *При умножении приближенного значения числа на точный множитель* k *граница относительной погрешности не изменяется, а граница погрешности увеличивается в* $|k|$ *раз.*

Следствие 1.2. *Произведение границы относительной погрешности приближенного значения* a *числа* x *на* n *является границей относительной погрешности результата возведения* A *в целую положительную степень* n*:* $|\omega_{a^n}| \le n\varepsilon_a$.

Следствие 1.3. *Частное границы относительной погрешности приближенного значения* a *числа* x *и* n *является границей относительной погрешности корня* n*-ой степени из* a*:* $\left|\omega_{\sqrt[n]{a}}\right| \le \dfrac{\varepsilon_a}{n}$.

Теорема 1.5. *Сумма границ относительных погрешностей приближенных значений делимого и делителя является границей относительной погрешности частного:* $\left|\omega_{\frac{a}{b}}\right| \le \varepsilon_a + \varepsilon_b$.

Связь между количеством верных цифр и относительной погрешностью

Пусть $x \approx a$, $\Delta_a = x - a$.

Определение 1.4. *Цифра приближённого значения, записанная в разряде* α, *называется верной, если модуль его погрешности* Δ_a *не превосходит половины единицы этого разряда, т.е.* $|\Delta_a| \le 0,5 \cdot 10^{\alpha}$.

Очевидно, что слева от верной цифры находятся верные цифры.

Пример 1.4. $x = 27,421$; $a = 27,384$; $\Delta_a = 0,037$.

Решение

4 – неверная, так как $\Delta_a = 0,037 \overset{\textit{неверно}}{\le} 0,5\Delta 10^{-3} = 0,0005$.
8 – неверная, так как $\Delta_a = 0,037 \overset{\textit{неверно}}{\le} 0,5\Delta 10^{-2} = 0,005$.
3 – верная, так как $\Delta_a = 0,037 \le 0,5\Delta 10^{-1} = 0,05$.
Итак, $2,7,3$ – верные цифры.

Пусть известно количество m верных значащих цифр приближенного значения числа, тогда в стандартной форме его можно записать так:

$$a = \pm\beta_0, \beta_{-1}\beta_{-2}\ldots\beta_{-m+1} \cdot 10^n,$$

где $1 \le \beta_0 \le 9$, $0 \le \beta_{-i} \le 9$, $i = \overline{1, m-1}$, n – порядок числа a.

По предположению, m-я цифра верна, поэтому $|\Delta_a| \le 0,5 \cdot 10^{-m+1} \cdot 10^n$. Тогда $|\omega_a| \le \dfrac{ha}{|a|} = \dfrac{0,5 \cdot 10^{n-m+1}}{\beta_0, \beta_{-1}\ldots\beta_{-m+1} \cdot 10^n} \le \dfrac{0,5}{\beta_0} 10^{-m+1} \le 0,5 \cdot (0,1)^{m-1}$.

Итак, доказана

Теорема 1.6. *Если приближение имеет* m *верных значащих цифр, то число* $0,5\Delta(0,1)^{m-1}$ *является границей его относительной погрешности.*

Замечание 1.1. *Пусть приближение имеет m верных значащих цифр. Если известна первая значащая цифра приближения, то за границу относительной погрешности можно принять число* ${}^1\!/_2\beta_0(0,1)^{m-1}$, *поскольку* ${}^1\!/_2\beta_0(0,1)^{m-1} \geq$ $\geq 0,5 \cdot (0,1)^{m-1}$.

Граница относительной погрешности зависит от количества верных значащих цифр m, от величины первой из них β_0, но не зависит от порядка числа n.

Теорема 1.7. *Если граница относительной погрешности равна* $0,5 \cdot (0,1)^m$, *то приближение a имеет не менее m верных значащих цифр.*

Доказательство. Пусть β_0 – первая значащая цифра приближенного значения a и n – порядок разряда этой цифры. Тогда

$$|\Delta_a| \leq \varepsilon_a \cdot |a| \leq 0,5 \cdot (0,1)^m (\beta_0 + 1) \cdot 10^n \leq 0,5 \cdot 10 \cdot 10^{n-m} = 0,5 \cdot 10^{-m+1} \cdot 10^n,$$

т.е. $|\Delta_a| \leq 0,5 \cdot 10^{-m+1} \cdot 10^n$.

Следовательно, цифра, записанная в $-(m-1)$ разряде значащей части числа верная, следовательно, после запятой верных $m-1$ цифр и еще β_0 – верная, итого всех верных цифр не менее m. Теорема 4.2 доказана. □

Пример 1.5. *Если известно, что относительная погрешность приближения по модулю не превосходит* $0,03\%$, *то, согласно теореме, это приближение имеет не менее трех значащих верных цифр, так как* $0,03\% = 0,0003 < 0,5 \cdot (0,1)^3$.

Функция от приближенных значений аргументов

Пусть функция $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задана в области G и дифференцируема в ней по всем переменным x_i.

Пусть a_i – приближенное значение аргумента x_i, $\left(i = \overline{i,n}\right)$, Δ_{a_i} – погрешность a_i, причем точка $A(a_1, a_2, ..., a_n) \in G$.

Требуется оценить погрешность приближенного значения функции $\tilde{y} = f(a_1, a_2, ..., a_n)$. Имеем

$$|\Delta_{\tilde{y}}| = |y - \tilde{y}| = |f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)| =$$

$$= |f(a_1 + \Delta a_1, ..., a_n + \Delta a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)|.$$

Если предположить, что Δa_i – достаточно малые величины, то их произведениями, квадратами и высшими степенями можно пренебречь. Тогда получим

$$|\Delta_{\tilde{y}}| \approx |df(a_1, a_2, ...a_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_A \cdot \Delta a_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_A\right| \cdot |\Delta a_i| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_A\right| h_{a_i}.$$

Поэтому за границу погрешности $\tilde{y}$ можно взять $h_{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_A\right| h_{a_i}$.

Если $f(a_1, a_2, ..., a_n) > 0$, то, разделив последнее равенство на $f(a_1, a_2, ..., a_n)$, получим оценку модуля относительной погрешности $\tilde{y}$:

$$\frac{h_{\tilde{y}}}{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{1}{f(a_1, a_2, ..., a_n)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_A\right| h_{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right)_A\right| h_{a_i}.$$

Следовательно, $\varepsilon_{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{\partial \ln f(x_1, ..., x_n)}{\partial x_i}\right)_A\right| h_{a_i}$.

Нулевой вариант

Пример 1. *Результаты измерения толщины человеческого волоса и расстояния от Земли до Солнца таковы: $d = 0,15 \pm 0,005$ мм; $l = 149,598 \cdot 10^6 \pm 500$ км. Сравните качества этих измерений.*

Решение

Обозначим $\tilde{d} = 0,15$ мм; $h_{\tilde{d}} = 0,005$ мм; $\tilde{l} = 149,598 \cdot 10^6$ км; $h_{\tilde{l}} = 500$ км. Сравнивая $h_{\tilde{d}}$ и $h_{\tilde{l}}$, видим, что $\dfrac{h_{\tilde{d}}}{h_{\tilde{l}}} = \dfrac{1}{10^{11}}$, то есть измерение толщины волоса произведено с точностью до $h_{\tilde{d}}$, которое в 10^{11} раз меньше, чем $h_{\tilde{l}}$, с которым измерено расстояние до Солнца.

Однако качество измерения расстояния от Земли до Солнца намного выше, чем качество измерения толщины волоса, так как $\dfrac{\varepsilon_{\tilde{d}}}{\varepsilon_{\tilde{l}}} = 10^4$.

Действительно, $|\omega_{\tilde{d}}| = \dfrac{|\Delta_{\tilde{d}}|}{\left|\tilde{d}\right|} \leq \dfrac{h_{\tilde{d}}}{\tilde{d}} = \dfrac{0,005\text{мм}}{0,15\text{мм}} \leq 0,04 = 4\%$;

$$|\omega_{\tilde{l}}| = \frac{|\Delta_{\tilde{l}}|}{\left|\tilde{l}\right|} \leq \frac{h_{\tilde{l}}}{\tilde{l}} = \frac{500\text{км}}{149,598 \cdot 10^6\text{км}} \leq 0,000004 = 0,0004\%,$$

и можно принять $\varepsilon_{\tilde{d}} = 4\%$ а $\varepsilon_{\tilde{l}} = 0,0004\%$.

Пример 2. *Записать следующие приближенные значения чисел, сохраняя в записи только верные цифры:*

а) $x = 2700 \pm 50$;

б) $x = 0,007450 \pm 0,000005$;

в) $x = 38700 \pm 25$.

Начало
Содержание
Страница 16 из 114
Назад
На весь экран
Закрыть

Решение

а) $a = 2700$; $h_a = 50$. Последняя верная цифра – 7. Два последних значащих нуля сомнительные.

$$x \doteq 2,7 \cdot 10^3.$$

б) $a = 0,007450$; $h_a = 0,000005$; $x = 0,00745$ или $x \doteq 7,45 \cdot 10^{-3}$.
в) $a = 38700$; $h_a = 25$;

$$x \doteq 3,87 \cdot 10^4.$$

Пример 3. *Произвести округление приближенных значений чисел так, чтобы округленные значения имели максимально возможное количество верных значащих цифр.*
а) $y = 27,404 \pm 0,03$;
б) $x = 3,874 \cdot 10^{-2} \pm 0,04 \cdot 10^{-2}$.

Решение

а) $a = 27,404$; $h_a = 0,03$. Так как $h_a \leq 0,05$, но $h_a > 0,005$, то последняя верная цифра находится в разряде десятых: $a_1 = 27,4$.

$$|\Delta_{a_1}| \leq h_a + |\Delta_{окр}| = 0,03 + |27,404 - 27,4| = 0,034 < 0,05; y \doteq 27,4.$$

б) $a = 3,874 \cdot 10^{-2}$; $h_a = 0,04 \cdot 10^{-2}$. Последняя верная цифра в разряде десятых значащей части a, но округление до этого разряда приводит к получению значения a_1, содержащего в этом разряде сомнительную цифру, так как $|\Delta_{a_1}| > 0,05 \cdot 10^{-2}$.

Произведем округление a до разряда предпоследней верной цифры, т.е. до разряда единиц значащей части a : $a_2 = 4 \cdot 10^{-2}$. Так как $|\Delta_{окр}| = |a - a_2| = 0,126 \cdot 10^{-2}$, то

$$|\Delta_{a_2}| \leq 0,04 \cdot 10^{-2} + 0,126 \cdot 10^{-2} = 0,166 \cdot 10^{-2} < 0,5 \cdot 10^{-2}; \; h_{a_2} = 0,5 \cdot 10^{-2}.$$

Ответ: $x \doteq 4 \cdot 10^{-2}$.

Пример 4. *Вычислить* $X = x + y - z$, *если* $x \doteq 3,75$; $y \doteq 0,874$; $z = 2,782 \pm 0,001$.

Решение

$$\begin{aligned} a_1 &= 3,75; & h_{a_1} &= 0,005; \\ a_2 &= 0,874; & h_{a_2} &= 0,0005; \\ a_3 &= 2,782; & h_{a_3} &= 0,001. \end{aligned}$$

Тогда $A = a_1 + a_2 - a_3 = 1,842$ и $|\Delta_A| \le \sum\limits_{i=1}^{3} h_{a_i} = 0,0065$.

После округления до разряда последней верной цифры имеем: $A_1 = 1,8$ и $|\Delta_{A_1}| \le$ $\le 0,0065 + 0,042 = 0,0485 \le 0,05$; $X = 1,8$.

Однако модуль погрешности округления намного больше границы погрешности числа A. В данном примере имеет смысл записать ответ с одной сомнительной цифрой.

Ответ: $X \doteq 1,84$.

Пример 5. *Найти произведение двух чисел* x *и* y *приближенные значения которых даны:*

$$x \doteq -5,87; \; y \doteq 2,33.$$

Решение

Рассмотрим произведение $\tilde{p} = a \cdot b$, где $a = -5,87$, $b = 2,33$ и $h_a = h_b =$ $= 0,005$. Границы относительных погрешностей сомножителей равны $\varepsilon_a = 0,0009$; $\varepsilon_b = 0,0022$.

Отсюда $\varepsilon_a + \varepsilon_b = 0,0031 = \varepsilon_{\tilde{p}}$; $\tilde{p} = a \cdot b = 13,6771$.

Так как $\varepsilon_{\tilde{p}} < 0,5 \cdot (0,1)^2$, то $\tilde{p}$ имеет не менее двух верных значащих цифр. Более точно, три:

$$|\Delta_{\tilde{p}}| \le \varepsilon_{\tilde{p}} |\tilde{p}| \le 0,0031 \cdot 14 = 0,0434 \le 0,05; \; h_{\tilde{p}} = 0,05.$$

Последняя верная цифра в разделе десятых, но округление до него дает приближенное значение $p_1 = 13,7$, имеющее сомнительную цифру 7, так как $|\Delta_{p_1}| \leq 0,05 + 0,02 = 0,07$; $p = 13,7 \pm 0,1$.

Округление до целых даст $P \doteq 14$.

Ответ: $P \doteq 14$.

Пример 6. *Вычислить* $D = \dfrac{x}{y}$, *если* $x \doteq 2,74$; $y \doteq 1,97$.

Решение

Обозначим $a = 2,74$; $b = 1,97$; $\tilde{D} = \dfrac{a}{b}$;

$$|\omega_a| \leq \frac{0,005}{2,74} \leq 0,0018; |\omega_b| \leq \frac{0,005}{1,97} \leq 0,0027,$$

т. е. $\varepsilon_a = 0,0018$ и $\varepsilon_b = 0,0027$.

Отсюда $\varepsilon_a + \varepsilon_b = 0,0045$ и $\varepsilon_{\tilde{D}} = 0,0045$;

$$\tilde{D} = 1,390...; |\Delta_{\tilde{D}}| \leq \varepsilon_{\tilde{D}} \left|\tilde{D}\right| \leq 0,0045 \cdot 1,4 \leq 0,0063; h_{\tilde{D}} = 0,0063.$$

Произведем округление до разряда последней верной цифры:

$$D_1 = 1,4; |\Delta_{D_1}| \leq h_{\tilde{D}} + |\Delta_{окр}| \leq 0,0063 + 0,01 = 0,0163 < 0,02; h_{D_1} = 0,02.$$

Ответ: $D \doteq 1,4$.

Пример 7. *Вычислить величину погрешности приближенного значения большего корня уравнения* $x^2 + \rho x + q = 0\,(\rho \doteq 3,5, q \doteq -7,8)$, *обусловленную погрешностями приближенных значений коэффициентов, точка над знаком "$\doteq$" означает, что в записи числа участвуют только верные цифры.*

Решение

$$x_1(\rho, q) = -\frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - q};\ \rho \doteq 3,5;\ q \doteq -7,8;\ \tilde{\rho} = 3,5;\ \tilde{q} = -7,8;$$

$x_1(\tilde{\rho}, \tilde{q}) = \tilde{x}_1$ (обозначим), $h_{\tilde{\rho}} = 0,05$, $h_{\tilde{q}} = 0,05$. Тогда

$$|\Delta_{\tilde{x}_1}| \leq \left| \left(\frac{\partial x_1(\rho, q)}{\partial \rho}\right)_{\tilde{\rho},\tilde{q}} \right| \cdot h_{\tilde{\rho}} + \left| \left(\frac{\partial x_1(\rho, q)}{\partial q}\right)_{\tilde{\rho},\tilde{q}} \right| \cdot h_{\tilde{q}} =$$

$$= \left| -\frac{1}{2} + \frac{\tilde{\rho}}{4 \cdot \sqrt{\left(\frac{\tilde{\rho}}{2}\right)^2 - \tilde{q}}} \right| h_{\tilde{\rho}} + \left| \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{\tilde{\rho}}{2}\right)^2 - \tilde{q}}} \right| h_{\tilde{q}} =$$

$$= \left| -\frac{1}{2} + \frac{3,5}{4 \cdot \sqrt{\left(\frac{3,5}{2}\right)^2 + 7,8}} \right| \cdot 0,05 + \left| \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{3,5}{2}\right)^2 + 7,8}} \right| \cdot 0,05 \leq 0,02.$$

Таким образом, $h_{\tilde{x}_1} = 0,02$.
Ответ: $h_{\tilde{x}_1} = 0,02$.

Задания к лабораторной работе № 1

Вариант 1

1. В качестве приближенного значения числа $4,748$ взято число $4,72$. Найдите погрешность этого приближенного значения. Можно ли утверждать, что число $4,72$ является приближенным значением числа $4,740$ с точностью до $0,1$; $0,01$; $0,001$?

2. Сравните качества трех измерений длины одного отрезка, если $l = 10 \pm 1$ м; $l = 10,2 \pm 0,1$ м; $l = 10,24 \pm 0,01$ м.

3. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа x : а) $x = 9,78 \pm 0,01$; б) $x = 10,27 \pm 0,03$.

4. Округлите приближенное значение числа x до первой справа верной цифры. Укажите границу погрешности и верные цифры в записи нового приближения числа x : а) $x = 3727 \pm 10$; б) $x = 454300 \pm 750$.

5. Найдите периметр равнобедренного треугольника с основанием $3,1$ см и боковой стороной $4,2$ см. Укажите точность полученного результата (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

6. Расстояние между городами на карте равно $19,7$ см. Масштаб карты – 100 км в 1 см. Вычислите расстояние между городами, считая значения масштаба точно известными (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

7. Расстояние между двумя железнодорожными станциями – $18,8$ км. За какое время распространяется звук от одной станции до другой по воздуху и по рельсам. Скорость звука в воздухе – $331,63$ м/с, скорость звука в стали – $5,50 \cdot 10^3$ м/с (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

8.Оцените абсолютную погрешность результатов вычислений значений функции, а обусловленной погрешностями исходных данных: $v(x,y) = \lg x \cdot (x+y)$; $x \doteq 25,3$; $y \doteq 5,48$.

Вариант 2

1. Число 785 является приближенным значением числа x с точностью до а) $0,1$; б) 1; в) 10. Укажите границы, в которых заключено число x.

2. Температуру раствора измерили тремя различными приборами и получили такие результаты:

$$t = 45 \pm 1^oC;$$
$$t = 45,1 \pm 0,1^oC;$$
$$t = 45,13 \pm 0,01^oC.$$

Сравните качества этих измерений.

3. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа x :

а) $x = 3,454 \pm 0,015$; б) $x = 0,0748 \pm 0,0028$.

4. Площадь Каспийского моря – $371 \cdot 10^3$ км^2, площадь Аральского моря – $66,5 \cdot 10^3$ км^2, площадь озера Байкал – $31,5 \cdot 10^3$ км^2. Найдите площадь общей водной поверхности. Укажите в ответе только верные цифры приближения.

5. Вычислите объем куба, если его ребро a равно $9,2$ мм (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

6. Вычислите: $18,6 : 0,83$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

7. Округлите приближенное значение числа x до первой справа верной цифры. Укажите границу погрешности и верные цифры в записи нового приближения числа x : а) $x = 0,3754 \pm 0,0093$; б) $x = 2,743 \pm 0,006$.

8. Оцените абсолютную погрешность результатов вычислений значений функции, обусловленную погрешностями исходных данных:

$$v\left(x,y\right) = \sin x + \frac{y}{\sqrt{x}}; \quad x \doteq 0,275; \quad y \doteq 0,357.$$

Вариант 3

1. Комнатный термометр имеет шкалу с ценой деления в 1. При измерении температуры воздуха получили 18. Укажите границы, в которых заключено точное значение температуры.

2. Укажите точность следующих приближений, если известна относительная точность: а) $a = 106,3; \quad \varepsilon_a = 2\%$; б) $a = 0,274; \quad \varepsilon_a = 0,1\%$.

3. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа y : а) $y = 270 \pm 1$; б) $y = 374 \pm 2$.

4. Округлите приближенное значение числа x до первой справа верной цифры. Укажите границу погрешности и верные цифры в записи нового приближения числа x : а) $x = 3,07 \cdot 10^2 \pm 0,02 \cdot 10^2$; б) $x = 5,130 \cdot 10^{-3} \pm 0,024 \cdot 10^{-3}$.

5. Найдите разность следующих приближенных значений чисел: а) $10,442 - 5,42$; б) $0,0268 - 0,008$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

6. Прямоугольный брус высотой 15,5 см, шириной 2,3 дм и длиной 0,9 м изготовлен из материала, плотность которого 3,45 г/см^3. Вычислите массу бруса (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

7. Вычислите: $0,128 : 0,75$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

8. Оцените абсолютную погрешность результатов вычислений значений функции, обусловленную погрешностями исходных данных: $f(x, y) = 3,8x + x\cos y$; а) $x \doteq 0,89$; $y \doteq 1,3$; б) $x \doteq -0,531$; $y \doteq 1,38$.

Вариант 4

1. Пусть $R = 18,5 \pm 0,7$. Может ли точное значение R оказаться равным а) 18,2; б) 18,9; в) 19,2; г) 17,9; д) 17,8?

2. Указать точность следующих приближений, если известна относительная точность: а) $a = 0,287$; $\varepsilon_a = 11\%$; б) $a = 7,24 \cdot 10^5$; $\varepsilon_a = 5\%$.

3. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа y : а) $y = 27454 \pm 250$; б) $y = 27 \pm 0,5$.

4. Укажите, какие из цифр в записи приближенных значений чисел верные до и после округления до разряда единиц: а) $2,273 \pm 0,02$; б) $12,523 \pm 0,6$.

5. Масса колбы – 243 г, масса колбы с раствором – 1,194 кг. Вычислите массу раствора. Укажите границу погрешности полученного значения (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

6. Даны приближенные значения чисел: $a_1 = 1,45 \pm 0,01$; $a_2 = 2,280 \pm 0,005$; $a_3 = 1,1261 \pm 0,0002$. Вычислите произведение этих чисел. Укажите точность полученного результата.

7. Вычислите: $3,6 \cdot 10^2 : 2,7$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

8. Оцените абсолютную погрешность результатов вычислений значений функции, обусловленную погрешностями исходных данных: $y(\omega, u) = \omega^2 \cdot \sqrt{u} + 5,4\cos u$; $u \doteq 1,8$; $\omega \doteq 3,28$.

Вариант 5

1. Пусть $M = 2,85 \cdot 10^4 \pm 0,09 \cdot 10^4$. Может ли точное значение M оказаться равным: а) $2,7 \cdot 10^4$; б) $3 \cdot 10^4$; в) $2,8 \cdot 10^4$; г) $2,79 \cdot 10^4$?

2. Укажите границу относительной погрешности приближения, если
а) $x = 27 \pm 0,1$; б) $x = 0,2787 \pm 0,0024$; в) $x = 1,02 \cdot 10^3 \pm 0,07 \cdot 10^3$.

3. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа z :
а)$z = 1,28 \cdot 10^2 \pm 0,01 \cdot 10^2$; б)$z = 2,3400 \cdot 10^3 \pm 0,0005 \cdot 10^3$; в) $z = 4,24 \cdot 10^{-3} \pm 0,05 \cdot 10^{-3}$.

4. Округлите приближенное значение числа x до первой справа верной цифры. Укажите границу погрешности и верные цифры в записи нового приближения числа x : а) $x = 0,0283 \pm 0,0007$; б) $x = 0,2375 \pm 0,0015$.

5. Найдите сумму следующих приближенных значений и укажите ее точность: а) $0,52 + 0,038$; б) $6,0 \cdot 10^2 + 7,1 \cdot 10^3 + 1,02 \cdot 10^2$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

6. Вычислите произведение приближенных сомножителей: а)$63 \cdot 0,27$; б)$7,5 \cdot 420$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

7. Вычислите: $3,6 \cdot 10^{-2} : 2,7$ (в записи даны только верные цифры).

8. Оцените абсолютную погрешность результатов вычислений значений функции, обусловленную погрешностями исходных данных: $\omega(x, y) = -\dfrac{\cos x}{y} + x^2 y$; $x \doteq 0,548$; $y \doteq 1,20$.

Вариант 6

1. Вычислите погрешности округления следующих чисел до разряда десятков: а) 203; б) $204,79$; в) $10,28$; г) $14,5$.

2. Вычислите относительные погрешности округления следующих чисел до разряда единиц: а) $256,93$; б) $0,78$.

3. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа z : а) $z = 4,275 \cdot 10^6 \pm 0,063 \cdot 10^6$; б) $z = 2,029 \cdot 10^2 \pm 0,015 \cdot 10^2$.

4. Укажите, какие из цифр в записи приближенных значений чисел верные до и после округления до разряда единиц: а) $z = 19,8 \pm 0,1$; б) $z = 13,75 \pm 1$.

5. Вычислите $X = A - B + C$ и $Y = A + B - C$, если $A = 43,87 \pm 0,01$; $B = 28,10 \pm 0,05$; $C = 9,450 \pm 0,005$. Какова точность результата?

6. Вычислите произведение приближенных сомножителей: а) $6,14 \cdot 0,405$; б) $103,5 \cdot 0,204 \cdot 0,9875$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

7. Вычислите: $6,12 \cdot 10^2 : (3,81 \cdot 10^1)$ (в записи приближенных значений даны только верные цифры).

8. Оцените абсолютную погрешность результатов вычислений значений функции, обусловленную погрешностями исходных данных:

$$f\left(x,y\right) = \sqrt[3]{x} + x\sin y; x\doteq 0,253; \quad y\doteq 63.$$

Лабораторная работа № 2
Вычисления без учета погрешностей. Обратная задача теории погрешностей. Метод границ

Теоретическая часть

Приближенные вычисления без учета погрешностей

Правило 2.1. Для того чтобы вычислить алгебраическую сумму приближенных слагаемых, нужно:

1) среди слагаемых выделить наименее точное (содержащее наименьшее число разрядов после запятой);

2) все остальные слагаемые округлить, сохраняя один запасной разряд, следующий за последним разрядом в выделенном слагаемом;

3) сложить полученные после округления числа;

4) округлить полученный результат до предпоследнего разряда.

Пример 2.1. *Найти сумму приближенных слагаемых* $2,737$; $0,77974$; $27,1$; $0,293$.

Решение

1. Наименее точным слагаемым является $27,1$.
2. Округляем остальные слагаемые до сотых: $2,74$; $0,78$; $27,1$; $0,29$.
3. Сумма равна $39,91$.
4. Округляем до десятых $30,9$.

Определение 2.1. *Значащими цифрами в десятичной записи числа называют все его цифры, кроме нулей, записанных слева от первой цифры, отличной от нуля.*

Правило 2.2. Для того чтобы произвести умножение (деление) приближенных значений чисел, следует:

1) выделить сомножитель, имеющий наименьшее количество значащих цифр,

2) округлить остальные сомножители, сохраняя на одну запасную значащую цифру больше, чем в выделенном сомножителе,

3) произвести умножение (деление),

4) полученный результат округлить, сохраняя столько значащих цифр, сколько их в выделенном сомножителе.

Пример 2.2. *Вычислить* $\rho = 4,748 \times 3,34 \times 0,7$.

Решение

1. Наименьшее число значащих цифр в $0,7$ – только одна.

2. Остальные сомножители округляем, сохраняя по две значащие цифры $4,7$ и $3,3$.

3. $4,7 \times 3,3 \times 0,7 = 10,657$.

4. Округляем результат, сохраняя одну значащую цифру, как в выделенном сомножителе: $1 \cdot 10^1$. Следовательно, $\rho = 1 \cdot 10^1$.

Правило 2.3. При возведении приближенного значения в квадрат или куб, а также при извлечении корня квадратного или кубического из него в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет основание.

Правило 2.4. Если число является результатом промежуточных действий, то следует сохранить в нем на одну-две цифры больше, чем указано в правилах 2.1.–2.3.

Правило 2.5. При вычислениях с заданной точностью исходные данные следует брать с таким количеством верных цифр, чтобы, действуя по правилам 2.1.–2.4, обеспечить количество верных цифр на одну больше, чем требуется. Иначе говоря, при небольшом количестве промежуточных действий количество значащих (десятичных) цифр в исходных данных следует брать на одну-две больше, чем требуется в результате.

Правило 2.6. При вычислении по таблицам значения синуса и косинуса приближенного аргумента, выраженного в радианах, в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их имеет аргумент.

Правило 2.7. Если приближенное значение угла, выраженное в радианах, принадлежит промежутку $[-\pi/4, \pi/4]$, то при вычислении значения тангенса этого угла в результате следует сохранить не больше десятичных знаков, чем их имеет приближенное значение угла.

Правило 2.8. При вычислении мантиссы десятичного логарифма приближенного аргумента в результате следует сохранять на один десятичный знак меньше, чем количество значащих цифр аргумента. При этом в результате все цифры верные, если они верны в аргументе.

Правило 2.9. Если значение функции является результатом промежуточных действий, то следует сохранять в нем на одну цифру больше, чем рекомендуют правила 2.6–2.8.

Обратная задача теории погрешностей

Все задачи теории погрешностей можно разделить на два класса – прямые и обратные задачи.

Прямая задача. Определить погрешность данной функции от приближенных значений аргументов, заданных с известной относительной или абсолютной точностью.

Обратная задача. Какими должны быть абсолютные или относительные погрешности аргументов, чтобы модуль абсолютной или относительной погрешности значения функции от этих аргументов не превышал заданную величину?

Пусть $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функция непрерывно-дифференцируемая в области

G. Пусть точка $A\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in G$ вместе с параллелепипедом $a_i - h_{a_i} \le x_i \le a_i + h_{a_i}$, $\left(i = \overline{1, n}\right)$.

С какой точностью h_{a_i} следует взять приближенные значения a_i аргументов x_i, чтобы погрешность значения функции $\tilde{y} = f\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не превышала по модулю заданную величину $h_{\tilde{y}}$? Из условия задачи имеем:

$$|\Delta_{\tilde{y}}| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_A \right| \cdot h_{a_i} \le h_{\tilde{y}}.$$

Существуют различные подходы к решению этой задачи. Рассмотрим *принцип равных влияний* [3], который заключается в дополнительном предположении, что погрешности всех аргументов вносят одинаковые доли в погрешность функции, т.е. все частные дифференциалы равны между собой по модулю. Тогда

$$\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_A \right| \cdot h_{a_i} \le \frac{h_{\tilde{y}}}{n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда следует: для того чтобы значение $\tilde{y}$ было вычислено с точностью до $h_{\tilde{y}}$, достаточно, чтобы погрешности аргументов не превосходили по модулю

$$h_{a_i} \le \frac{h_{\tilde{y}}}{n \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_A \right|}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Иногда при решении обратной задачи предполагают, что погрешность всех аргументов одна и та же, т.е. $h_{a_1} = h_{a_2} = \ldots = h_{a_n} = h$, тогда $h_{a_i} = h \le$ $\le \dfrac{h_{\tilde{y}}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_A \right|}, \quad i = \overline{1, n}.$

Пример 2.3. *С каким числом десятичных знаков следует представить дроби, чтобы сумма* $S = {}^1\!/_{23} - {}^1\!/_{28} + {}^1\!/_3 - {}^1\!/_7$ *могла быть получена с точностью до* $0,001$?

Решение

Обозначим $x_1 = {}^1\!/_{23}$, $x_2 = {}^1\!/_{28}$, $x_3 = {}^1\!/_3$, $x_4 = {}^1\!/_7$. Тогда $S = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$. Обозначим приближенное значение суммы, получаемое как сумма приближенных значений $\tilde{x}_i$ аргументов x_i буквой $\tilde{S}$, $\left|\tilde{S} - S\right| \le h_{\tilde{s}}$. Тогда $h_{\tilde{s}}$ не должно превосходить $0,001$. Положим, $h_{\tilde{s}} = 0,001$.

Требуется установить допустимые границы погрешностей $h_{\tilde{x}_i}$ $(i = 1,2,3,4)$. По принципу равных влияний: $h_{\tilde{x}_i} \le \dfrac{h_{\tilde{s}}}{4} = 0,00025$. Таким образом, дроби следует представлять в десятичном виде так, чтобы модуль погрешности не превосходил $0,00025$, т.е. с четырьмя десятичными знаками. При этом модуль погрешности не будет превосходить не только $0,00025$ но и $0,00005$, а следовательно, вычисление суммы с указанной точностью будет заведомо обеспечено.

Метод границ

Метод границ [2–5] позволяет установить границы, в которых заключено значение, вычисляемое по формуле, если известны границы, в которых заключены значения параметров, содержащихся в этой формуле.

Рассмотрим сначала метод границ для четырех действий арифметики, а также действий возведения в целую положительную степень и извлечения корня.

Для этого нижнюю и верхнюю границы, в которых заключено значение некоторой переменной, будем обозначать соответственно НГ и ВГ.

Например, НГ$_x$, ВГ$_x$ – границы для x;

НГ$_y$, ВГ$_y$ – границы для y;

НГ$_{xy}$, ВГ$_{xy}$ – границы для произведения xy.

Теорема 2.1. *Сумма верхних (нижних) границ слагаемых является верхней (нижней) границей суммы:*

$$НГ_{x+y} = НГ_x + НГ_y;$$

$$ВГ_{x+y} = ВГ_x + ВГ_y.$$

Доказательство. Действительно, если справедливы неравенства: $\text{НГ}_x \le x \le \text{ВГ}_x$ и $\text{НГ}_y \le y \le \text{ВГ}_y$, то по теореме о сложении неравенств будет справедливо неравенство $\text{НГ}_x + \text{ВГ}_x \le x + y \le \text{ВГ}_x + \text{ВГ}_y$. Теорема 2.1 доказана. □

Пример 2.4. *Найти сумму $x+y$, если известны границы, в которых заключены x и y : $5,7 \le x \le 8,4$; $3,3 \le y \le 5,4$.*

Решение

$\text{НГ}_x = 5,7$; $\text{ВГ}_x = 8,4$; $\text{НГ}_y = 3,3$; $\text{ВГ}_y = 5,4$. Отсюда $\text{НГ}_{x+y} = \text{НГ}_x + \text{НГ}_y = 9.0$; $\text{ВГ}_{x+y} = \text{ВГ} + \text{ВГ}_y = 13,8$, т. е. $9,0 \le x + y \le 13,8$.

Теорема 2.2. *Разность верхней (нижней) границы уменьшаемого и нижней (верхней) границы вычитаемого является верхней (нижней) границей разности:*

$$НГ_{x-y} = НГ_x - ВГ_y;$$

$$ВГ_{x-y} = ВГ_x - НГ_y.$$

Доказательство. По теореме о вычитании неравенств противоположного смысла $\text{НГ}_x - \text{ВГ}_y \le x - y \le \text{ВГ}_x - \text{НГ}_y$. Теорема 2.2 доказана. □

Пример 2.5. *Найти разность $x - y$, если известны границы, в которых заключены x и y : $5,2 \le x \le 8,8$; $3,2 \le y \le 5,0$.*

Решение

НГ$_x = 5,2$; ВГ$_x = 8,8$; НГ$_y = 3,2$; ВГ$_y = 5,0$. Отсюда НГ$_{x-y}$ = НГ$_x$ − ВГ$_y = 0,2$; ВГ$_{x-y}$ = ВГ$_x$ − НГ$_y = 5,6$ и $0,2 \le x - y \le 5,6$.

Теорема 2.3. *Пусть нижние границы сомножителей неотрицательные. Тогда произведение верхних (нижних) границ сомножителей является верхней (нижней) границей произведения:*

$$ВГ_{xy} = ВГ_x \cdot ВГ_y,$$

$$НГ_{xy} = НГ_x \cdot НГ_y.$$

Доказательство. Так как НГ$_x \le x \le$ ВГ$_x$ и НГ$_y \le y \le$ ВГ$_y$, то по теореме о произведении неравенств одного смысла имеем НГ$_x \cdot$ НГ$_y \le xy \le$ ВГ$_x \cdot$ ВГ$_y$. Теорема 2.3 доказана. □

Пример 2.6. *Вычислить произведение xy, если известно:*

$$3,7 \le x \le 4,1; \quad 1,1 \le y \le 1,4.$$

Решение

НГ$_{xy}$ = НГ$_x \cdot$ НГ$_y = 4,07$; ВГ$_{xy}$ = ВГ$_x \cdot$ ВГ$_y = 5,74$; $4,07 \le xy \le 5,74$.

Теорема 2.4. *Пусть нижняя граница числа неотрицательна, а n – целое положительное число. Тогда n-я степень нижней (верхней) границы числа является нижней (верхней) границей n-й степени числа : $НГ_{x^n} = (НГ_x)^n$; $ВГ_{x^n} = (ВГ_x)^n$.*

Пример 2.7. *Найти границы x^3, если $3,7 \le x \le 3,8$.*

Решение

$(\text{НГ}_x)^3 = 50,653 > 50$; $\text{НГ}_{x^3} = 50$; $\text{ВГ}_{x^3} = 55$; $50 \leq x^3 \leq 55$.

Теорема 2.5. *Если нижняя граница числа неотрицательна, то при извлечении корня n-й степени из него корень этой степени из верхней (нижней) границы является верхней (нижней) границей корня из числа* : $НГ_{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{НГ_x}$, $ВГ_{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{ВГ_x}$.

Пример 2.8. *Вычислить* $\sqrt{x}$, *если* $5,74 \leq x \leq 5,80$.

Решение

$$\text{НГ}_x = 5,74; \quad \text{ВГ}_x = 5,80.$$

Отсюда $\sqrt{\text{НГ}_x} = 2,39\ldots > 2,39$ и $\text{НГ}_{\sqrt{x}} = 2,39$; $\sqrt{\text{ВГ}_x} = 2,40\ldots < 2,41$; $\text{ВГ}_{\sqrt{x}} = 2,41$; $2,39 \leq \sqrt{x} \leq 2,41$.

Теорема 2.6. *Пусть нижняя граница делителя положительна. Тогда частное верхней (нижней) границы делимого и нижней (верхней) границы делителя является верхней (нижней) границей частного чисел:*

$$ВГ_{\frac{x}{y}} = \frac{ВГ_x}{НГ_y},\ НГ_{\frac{x}{y}} = \frac{НГ_x}{ВГ_y}.$$

Доказательство. Так как $\text{НГ}_y > 0$, то $\dfrac{1}{\text{ВГ}_y} \leq \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{\text{НГ}_y}$, а тогда $\dfrac{\text{НГ}_x}{\text{ВГ}_y} \leq \dfrac{x}{y} \leq \dfrac{\text{ВГ}_x}{\text{НГ}_y}$.

Теорема 2.6 доказана.

$\square$

Пример 2.9. *Вычислить* $\dfrac{x}{y}$, *если* $5,7 \le x \le 8,7$ *и* $3,5 \le y \le 4,1$.

Решение

$$\text{НГ}_x = 5,7; \text{ВГ}_x = 8,7; \text{НГ}_y = 3,5; \text{ВГ}_y = 4,1.$$

$$\text{НГ}_{\frac{x}{y}} = 1,39; \text{ВГ}_{\frac{x}{y}} = 2,49; 1,39 \le \frac{x}{y} \le 2,49.$$

Практическая часть

Нулевой вариант

Пример 1. *С каким количеством значащих цифр следует взять число π и с какой точностью следует измерить диаметр D и высоту H цилиндра, чтобы его объем V можно было вычислить с точностью до 1 м^3. Известно, что $D \approx 2,5$ м и $H \approx 4,5$ м.*

Решение

$V = \dfrac{\pi D^2 H}{4}$. Обозначим $\tilde{V}$ – приближенное значение объема; $\tilde{\pi}, \tilde{D}, \tilde{H}$ – приближенные значения π, D и H. $h_{\tilde{v}} = 1$ м^3 по условию.

$\dfrac{\partial v}{\partial \pi} = \dfrac{D^2 H}{4}$; $\dfrac{\partial v}{\partial D} = \dfrac{\pi D H}{2}$; $\dfrac{\partial v}{\partial H} = \dfrac{\pi D^2}{4}$. Тогда по принципу равных влияний $h_{\tilde{\pi}} \leq \dfrac{4h_{\tilde{v}}}{3\tilde{D}^2\tilde{H}}$; $h_{\tilde{D}} \leq \dfrac{2h_{\tilde{v}}}{3\tilde{\pi}\tilde{D}\tilde{H}}$; $h_{\tilde{H}} \leq \dfrac{4h_{\tilde{v}}}{3\tilde{\pi}\tilde{D}^2}$. Дроби вычисляем с недостатком. $h_{\tilde{\pi}} \leq \dfrac{4 \cdot 1}{3 \cdot 3^2 \cdot 5} \leq \dfrac{4h_{\tilde{v}}}{3\tilde{D}^2\tilde{H}}$. Тогда: $h_{\tilde{\pi}} \leq 0,028$; $h_{\tilde{D}} \leq 0,013$ м; $h_{\tilde{H}} \leq 0,0046$ м.

Таким образом, для обеспечения требуемой точности результата достаточно $\tilde{\pi}$ взять не менее чем с тремя значащими цифрами, диаметр измерить с точностью до 1 см, а высоту с точностью до 0,5 см.

Пример 2. *Вычислить значение* $A = \dfrac{(x-y)\,z}{x+y}$, *если известно:*

$$2,57 \leq x \leq 2,58; \quad 1,45 \leq y \leq 1,46; \quad 8,33 \leq z \leq 8,34.$$

Решение

Вычисление границ будем вести с тремя значащими цифрами последовательно. Для удобства ведения вычислений составим расчетную схему:

№	Действие	Содержание	НГ	ВГ
1	2	3	4	5
1		x	2,57	2,58
2		y	1,45	1,46
3		z	8,33	8,34
4	$(1)+(2)$	$x+y$	4,02	4,04
5	$(1)-(2)$	$x-y$	1,11	1,13
6	$(5)\times(2)$	$(x-y)z$	9,24	9,43
7	$(6):(4)$	A	2,28	2,35

Итак, $2,28 \le A \le 2,35$.

Если же за приближенное значение A_1 числа A принять полусумму границ $A_1 = 2,315$, то полуразность границ есть граница его погрешности $h_{A_1} = 0,035$.

Таким образом, $A = 2,315 \pm 0,035$ или, округляя до разряда последней верной цифры, $A = 2,3 \pm 0,05$, т.е. $A \doteq 2,3$.

Пример 3. *Вычислить*

$$P = \frac{5,7007 \cdot 10^{-1} \cdot 2,9992 \cdot 10^{3}}{2,0074 \cdot 1,1 \cdot 10^{-1} \cdot 7,8 \cdot 10^{5}}.$$

Решение

Округляем сомножители в числителе и знаменателе до трех значащих цифр:

$$\frac{5,70 \cdot 10^{-1} \cdot 3,00 \cdot 10^{3}}{2,01 \cdot 1,1 \cdot 10^{-1} \cdot 7,8 \cdot 10^{5}} = 0,991\ldots.$$

Получаем результат с двумя значащими цифрами $0,99$. Ответ: $P \approx 0,99$.

Пример 4. *Вычислить* $B = \sqrt{8,7} + \dfrac{3,7487 \cdot 2,8 \cdot 10^{-2}}{3,737487 \cdot 0,007878977}$.

Решение

1. По правилам 3.3 и 3.4 имеем: $\sqrt{8,7} \approx 2,05$.
2. По правилам 3.2 и 3.4 получаем приближенное значение дроби $0,355$.
3. $2,05 + 0,355$. Второе слагаемое имеет на один десятичный знак больше, чем первое, в котором один знак является запасным, поэтому округлим сумму до десятых: $B \approx 2,4$. Ответ: $B \approx 2,4$.

Задания к лабораторной работе № 2

Вариант 1

1. (Обратная задача теории погрешностей.) С какой точностью следует взять табличные значения слагаемых, чтобы вычислить сумму с точностью до $0,005$: $y = \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32}$?

2. (Метод границ.) Вычислить значение $A = \dfrac{(x-y)\,z}{x+y}$, если известно: $2,57 \le x \le 2,58$; $1,45 \le y \le 1,46$; $8,33 \le z \le 8,34$.

3. (Правила вычислений без учета погрешностей.) Вычислить приближенные значения следующего выражения: $A = \dfrac{39,48^2 \cdot \sqrt{0,0124}}{\sqrt[3]{84483} \cdot 9,8}$.

Вариант 2

1. (Обратная задача теории погрешностей.) Приближенные значения оснований трапеции 6м и 4м, высоты трапеции 3м. С какой точностью надо измерить основания и высоту трапеции, чтобы относительная погрешность при вычислении площади трапеции не превышала 3%?

2. (Метод границ.) Вычислить значение $A = \dfrac{(x+y)\,z}{x+z}$, если известно: $2,57 \le x \le 2,58$; $1,45 \le y \le 1,46$; $8,33 \le z \le 8,34$.

3. (Правила вычислений без учета погрешностей.) Вычислить приближенные значения следующего выражения: $A = \dfrac{9,44^3 \cdot 55,8^2}{\sqrt{69,4} \cdot \sqrt[3]{0,00035}}$.

Вариант 3

1. (Обратная задача теории погрешностей.) С какой точностью должен быть измерен диаметр окружности $d \approx 16$мм, чтобы можно было вычислить ее длину с точностью до $0,5\%$?

2. (Метод границ). Вычислить значение $A = \dfrac{xy}{(x+y)\,z}$, если известно: $2,57 \le x \le 2,58$; $1,45 \le y \le 1,46$; $8,33 \le z \le 8,34$.

3. (Правила вычислений без учета погрешностей.) Вычислить приближенные значения следующего выражения: $= \dfrac{\cos {}^{\pi}\!/_6 + 0,75 \cdot 0,274875}{3,7^4 \cdot \sqrt[3]{0,753} - \sqrt{67} \cdot 2,48}$.

Вариант 4

1. (Обратная задача теории погрешностей.) С какой точностью должен быть измерен радиус круга $A \approx 7$ см, чтобы можно было вычислить площадь круга с точностью до 0,5 см^2?

2. (Метод границ). Вычислить значение $A = \dfrac{(z-x)\,y}{xz}$, если известно: $2,57 \le x \le 2,58$; $1,45 \le y \le 1,46$; $8,33 \le z \le 8,34$.

3. (Правила вычислений без учета погрешностей.) Вычислить значение $A = \dfrac{\sqrt{784181} \cdot 0,23^3}{1,64 \cdot \sqrt[3]{0,67}}$.

Вариант 5

1. (Обратная задача теории погрешностей.) Приближенные значения оснований трапеции – 6м и 4м, высоты трапеции – 3 м. С какой точностью надо измерить основания и высоту, чтобы относительная погрешность при вычислении площади трапеции не превышала 3%?

2. (Метод границ.) Вычислить значение $A = \dfrac{yz - x}{y + z}$, если известно: $2,57 \le x \le 2,58$; $1,45 \le y \le 1,46$; $8,33 \le z \le 8,34$.

3. (Правила вычислений без учета погрешностей.) Вычислить значение $A = \dfrac{\sqrt{\cos 0,25} + \operatorname{tg} 0,56}{\sin 1,25}$.

Вариант 6

1. (Обратная задача теории погрешностей.) Требуется вычислить плотность металлического тела цилиндрической формы. С какой точностью следует измерить массу m, диаметр основания цилиндра d и высоту h, чтобы плотность вычислить с точностью до 0,1, если $m \approx 6,6$ г, $d \approx 11$ мм, $h \approx 80$ мм? Плотность ρ определяется по формуле $\rho = \dfrac{m}{V}$ г/см^3, где V – объем тела; m – масса тела.

2. (Метод границ.) Вычислить значение $A = \dfrac{xz + y}{x - y}$, если известно: $2,57 \le x \le 2,58$; $1,45 \le y \le 1,46$; $8,33 \le z \le 8,34$.

3. (Правила вычислений без учета погрешностей.) Вычислить значение $A = \sqrt{5,6} + \dfrac{2,84 \cdot 2,5}{3,44 \cdot 0,0028}$.

Лабораторная работа № 3
Метод исключения Гаусса. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Метод оптимального исключения решения системы линейных алгебраических уравнений

Теоретическая часть

Метод исключения Гаусса

Идея этого метода заключается в том, чтобы исходную систему линейных уравнений

$$Ax = b \tag{3.1}$$

с произвольной матрицей A свести некоторыми *эквивалентными* преобразованиями (не меняющими множества решений системы (3.1) к системе вида

$$\overline{A}x = \overline{b}, \tag{3.2}$$

где $\overline{A}$ – треугольная (например, верхняя треугольная) матрица. Ясно, что алгоритм решения систем вида (3.2) уже прост: из последнего уравнения легко находится x_n, затем из предпоследнего – x_{n-1} и т.д.

Рассмотрим одну из возможных реализаций метода Гаусса [7] более подробно. Распишем систему (3.1) в виде:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{gathered} \tag{3.3}$$

мы считаем, что матрица $A = (a_{ij})$ невырождена).

В предположении, что $a_{11} \neq 0$, делим первое уравнение системы (3.3) на коэффициент a_{11}, в результате чего получаем уравнение

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Затем из каждого из остальных уравнений вычитается первое, умноженное на соответствующий коэффициент a_{i1}. В результате первое неизвестное оказывается исключенным из всех уравнений, кроме первого, и мы приходим к системе, эквивалентной (3.3):

$$\begin{gathered} x_1 + a_{12}^1 x_2 + \cdots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ a_{22}^1 x_2 + \cdots + a_{2n}^1 x_n = b_2^1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n2}^1 x_2 + \cdots + a_{nn}^1 x_n = b_n^1 \end{gathered} \tag{3.4}$$

(здесь $a_{1j}^1 = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}$, $j = 2, \ldots, n, b_1^1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}, a_{ij}^1 = a_{ij} - a_{i1} a_1^1, b_i^1 = b_i - b_1^1 a_{i1}$, $i = 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Далее предполагается, что $a_{22}^1 \neq 0$, делим второе уравнение системы (3.4) на коэффициент a_{22}^1 и исключаем неизвестное x_2 из всех уравнений, начиная с третьего. Получим систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{gathered} x_1 + a_{12}^1 x_1 + a_{13}^1 x_3 + \cdots + a_{1n}^1 x_2 = b_1^1, \\ x_2 + a_{23}^2 x_3 + \cdots + a_{2n}^2 x_n = b_2^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n3}^2 x_3 + \cdots + a_{nn}^2 x_n = b_n^2, \end{gathered}$$

где

$$a_{2j}^2 = \frac{a_{2j}^1}{a_{22}^1}, a_{ij}^2 = a_{ij}^1 - a_{2j}^2 a_{i2}^1,$$

$$b_2^2 = \frac{b_2^1}{a_{22}^1}, b_i^2 = b_i^1 - b_2^2 a_{i2}^1, \; i = 3, 4, \ldots, n, \; j = 2, 3, \ldots, n.$$

Продолжая описанный процесс исключения неизвестных (т.е. исключая $x_3, x_4, \ldots, x_n$), мы вместо системы (3.3) получим эквивалентную систему:

$$\begin{gathered} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + \cdots + a_{1n}^1 x_n = b_1^1, \\ x_2 + a_{23}^2 x_3 + \cdots + a_{2n}^2 x_n = b_2^2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = b_n^n. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Выпишем формулы для коэффициентов преобразованной системы на k-м шаге (когда x_k исключается из всех уравнений, начиная с $(k+1)$-го):

$$\begin{gathered} a_{kj}^k = \frac{a_{kj}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, \quad a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - a_{kj}^k a_{ik}^{k-1}, \\ b_k^k = \frac{b_k^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, \quad b_i^k = b_i^{k-1} - b_k^k a_{ik}^{k-1}, \\ i = k+1, k+2, \ldots, n; \quad j = k, k+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Процесс сведения системы (3.3) к системе с треугольной матрицей называется *прямым ходом метода Гаусса*. Выполнение всех указанных преобразований возможно, если получающиеся при расчетах коэффициенты $a_{22}^1, \ldots, a_{nn}^{n-1}$ отличны от нуля. В противном случае, например, если $a_{22}^1 = 0$, нужно произвести перестановку уравнений и перенумерацию неизвестных: среди коэффициентов $a_{32}^1, \ldots, a_{n2}^1$ обязательно найдется хотя бы один, отличный от нуля, иначе матрица A была бы вырожденной.

Получив систему (3.5), последовательно находим ее решение:

$$
\begin{aligned}
x_n &= b_n^n, \\
x_{n-1} &= b_{n-1}^{n-1} - a_{n-1,n}^{n-1} x_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_k &= b_k^k - \sum_{i=k+1}^{n} a_{ki}^k x_i.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Нахождение решения системы (3.5) обычно называют *обратным ходом метода Гаусса.*

Контроль вычислений в методе Гаусса. При вычислениях, производимых по методу Гаусса, без помощи ЭВМ велика вероятность случайных ошибок. В таких случаях необходимо проводить текущий контроль правильности вычислений. Для проверки прямого хода метода Гаусса вводят *контрольный столбец системы*

$$K\Sigma = \begin{pmatrix} K\Sigma_1 \\ \vdots \\ K\Sigma_n \end{pmatrix},$$

состоящий из контрольных элементов уравнений системы:

$$K\Sigma_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + b_i.$$

При преобразовании уравнений системы над контрольными элементами производятся те же операции, что и над свободными членами уравнений. В результате этого контрольный элемент каждого нового уравнения должен равняться сумме коэффициентов этого уравнения; большое расхождение между ними указывает на ошибки в вычислениях или на неустойчивость алгоритма вычислений по отношению к вычислительной погрешности. Однако совпадение этих сумм еще не дает гарантии правильности выполнения всех операций. Конечно, маловероятно, чтобы при «взаимном гашении» нескольких ошибок получался верный результат, но окончательный контроль все же необходим. Это можно сделать следующим образом. Рассмотрим вместе с системой $Ax = b$ систему $A\overline{x} = K\Sigma$. Легко видеть, что решения $x_1, \ldots, x_n$ и $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ этих двух систем связаны соотношением $\overline{x}_i = x_i + 1$.

Поскольку со столбцом $K\Sigma$ свободных членов системы $A\overline{x} = K\Sigma$ мы производим (при контроле) все те же действия, что и со столбцом b свободных членов исходной системы (при приведении ее матрицы коэффициентов к треугольному виду), у нас в конце прямого хода метода Гаусса система $A\overline{x} = K\Sigma$ также имеет треугольный вид, и мы легко можем найти значения неизвестных $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$.. Если окажется, что $\overline{x}_i - x_i = 1$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то решение $x_1, \ldots, x_n$ найдено правильно.

Метод Гаусса с выбором главного элемента

В системе (3.1) выбирают сначала уравнение, в котором содержится наибольший по абсолютной величине коэффициент системы (главный элемент), и делят данное уравнение на этот коэффициент.

После этого так же, как и в простейшей схеме метода Гаусса [7], исключают из остальных уравнений то неизвестное, при котором был наибольший коэффициент в выбранном уравнении (для удобства главный элемент можно поместить в первую строку и первый столбец матрицы, над которой производятся соответствующие преобразования). Далее, оставляя неизменным уравнение с главным элементом, ищут наибольший по абсолютной величине коэффициент в остальных уравнениях (новый главный элемент), делят на него уравнение, в котором он находится, и исключают из остальных уравнений соответствующее неизвестное и т.д., пока не останется одно уравнение с одним неизвестным, т.е. пока система (3.1) не будет приведена к диагональному виду.

Чтобы не сделать ошибок, применяют контрольные вычисления. Для этого поступают следующим образом. Делают замену

$$y = x + e,$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$y_i = x_i + 1, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.8}$$

в результате чего приходят к новой системе

$$Ay = Ax + Ae = b + Ae = \sigma; \quad Ay = \sigma, \tag{3.9}$$

где $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{bmatrix}, \quad \sigma_i = b_i + \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}.$

Одновременно решают обе системы (3.1), (3.9), приводят их к диагональному виду, все вычисления сводят в таблицу, контролируют их с помощью чисел контрольного столбца.

Метод оптимального исключения по существу является вариацией метода Гаусса. Идея этого метода состоит в том, что последовательным исключением неизвестных матрица системы приводится к диагональному виду. Возможность же таких эквивалентных преобразований следует из теоремы о приведении матрицы к диагональному виду, формулировку которой (без доказательства) мы сейчас приведем.

Теорема 3.1. *Для любой квадратной вещественной матрицы A n-го порядка существуют такие квадратные вещественные матрицы U и V (n-го порядка), что матрица UAV – диагональная [1–4].*

Опишем вкратце схему оптимального исключения. Пусть у нас есть система общего вида (3.1) с матрицей A. Допустим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Разделив все коэффициенты первого уравнения на a_{11}, получим систему:

$$
\begin{gathered}
x_1 + a^1_{12}x_2 + \dots + a^1_{1n}x_n = b^1_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{gathered}
$$

Умножив первое уравнение на коэффициент $-a_{21}$, сложив его со вторым и поделив все коэффициенты второго уравнения на $a_{22} - a^1_{12}a_{21}$ (в предположении, что $a_{22} - a^1_{12}a_{21} \neq 0$), придем к системе:

$$
\begin{gathered}
x_1 + a^1_{12}x_2 + \dots + a^1_{1n}x_n = b^1_1, \\
x_2 + \dots + a^1_{2n}x_n = b^1_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{gathered}
$$

Начало
Содержание
Страница 48 из 114
Назад
На весь экран
Закрыть

Умножив теперь второе уравнение на $-a^1_{12}$ и сложив его с первым, исключим неизвестное x_2 из первого уравнения.

Допустим, что таким образом мы преобразовали первые k уравнений $(k \geq 1)$, исключив из первого уравнения системы неизвестные $x_2, \dots, x_k$, из второго неизвестные $x_1, x_3, \dots, x_k$; наконец, из k-го уравнения – неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Т.е. допустим, что система (3.1) приведена к эквивалентной системе вида:

$$
\begin{gathered}
x_1 + a^k_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a^k_{1n}x_n = b^k_1,\\
x_2 + a^k_{2,k+1}x_{k+1} + \dots + a^k_{2n}x_n = b^k_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_k + a^k_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + a^k_{kn}x_n = b^k_k,\\
a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \dots + a_{k+1,k}x_k + a_{k+1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k + a_{n,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{gathered}
$$

Исключим теперь неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_k$. из $k+1$-го уравнения. Для этого сложим его с первым, умноженным на $-a_{k+1,1}$; со вторым, умноженным на $-a_{k+1,2}$, и т.д. Разделим полученное в результате этих действий уравнение на коэффициент при x_{k+1}; $k+1$-ое уравнение примет вид:

$$x_{k+1} + a^{k+1}_{k+1,k+2}x_{k+2} + \dots + a^{k+1}_{k+1,n}x_n = b^{k+1}_{k+1}.$$

Умножая это уравнение на $-a^k_{1,k+1}, -a^k_{2,k+1}, \dots, -a^k_{k,k+1}$ и складывая его соответственно с первым, вторым, ... , k-ым уравнениями, получим систему, в первых k уравнениях которой коэффициенты при x_{k+1} равны нулю.

После аналогичных преобразований всех уравнений системы получим систему с диагональной матрицей: $x_i = b^n_i \quad (i = 1, \dots, n)$.

Заметим, что количество арифметических операций для решения системы методом оптимального исключения примерно то же самое, что и в методе Гаусса. Однако этот метод требует несколько меньшего объема используемой памяти ПЭВМ.

Практическая часть

Нулевой вариант

Решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 0,6x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 = 0; \\ x_1 + 0,6x_2 + 0,35x_3 = 1; \\ 0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,6x_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Применяем схему с выбором главного элемента (в данном случае главным элементом является коэффициент 1,28). Составим таблицу, в которой i означает номер строки (в первом вертикальном столбце), k – номер неизвестного (в последней строке), b – вектор, координаты которого составлены из свободных членов системы, σ-вектор, координаты которого равны суммам всех коэффициентов и свободных членов соответствующих уравнений (каждый элемент последнего столбца равен сумме чисел, стоящих в соответствующей строке: $1{,}28 + 0{,}21 + 0{,}6 + 0 = 2{,}09$ и т.д. (таблица 3.1).

Таблица 3.1 – Выбор в системе главного элемента.

i	A			b	σ
1	1,28	0,21	0,6	0	2,09
2	0,35	0,6	1	1	2,95
3	0,6	0, 75	0,52	0	1,87
k	3	2	1		

Первое уравнение делим на 1,28 (главный элемент) и исключаем x_3 из двух остальных уравнений (таблица 3.2).

Таблица 3.2 – Исключение из двух уравнений неизвестной x_3.

i	A			$\bar{b}$	$\bar{\sigma}$	Σ
1	1	0,164	0,469	0	1,633	1,633
2	0	0,543	0,836	1	2,379	2,379
3	0	0,652	0,239	0	0,890	0,891
k	3	2	1			

В таблице 3.2 последний столбец Σ служит для контроля вычислений (его члены равны суммам элементов второго, третьего, четвертого и пятого столбцов: $1 + 0,164 + 0,469 + 0 = 1,633$ и т.д.).

Элементы предпоследнего столбца σ получены в результате преобразований над матрицей системы (3.1), например, $1,633 = \dfrac{2,09}{1,28}$ и т.д. Совпадение двух последних столбцов, элементы которых, как было указано, получаются в результате различных действий, означает, что вычисления произведены верно.

Рассматриваем оставшиеся два уравнения, не содержащие x_3 : в матрице, составленной из их коэффициентов, выбираем новый главный элемент (он равен 0,836), делим на него второе уравнение и исключаем x_1 из последнего уравнения (таблица 3.3).

Таблица 3.3 – Исключение неизвестной x_1 из последнего уравнения.

i	A		$\bar{b}$	σ	$\bar{\Sigma}$
2	0,836	0,543	1	2,379	
3	0,239	0,652	0	0,891	
k	1	2			
2	1	0,650	1,196	2,846	2,846
3	0	0,497	-0,286	0,210	0,211

Следовательно, исходная система и соответствующая ей система (3.9) приведены к диагональному виду, причем

$$\left.\begin{aligned} x_3 + 0,164x_2 + 0,469x_1 = 0;\\ 0,650x_2 + x_1 = 1,196;\\ 0,497x_2 = -0,286; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y_3 + 0,164x_2 + 0,469y_1 = 1,633;\\ 0,650y_2 + y_1 = 2,846;\\ 0,497y_2 = 0,210. \end{aligned}\right\}$$

Решая эти системы, находим: $x_2 = -0,575$, $x_1 = 1,570$, $x_3 = -0,642$, $y_2 = 0,423$, $y_1 = 2,571$, $y_3 = 0,358$. Следовательно, исходная система имеет решение: $x_1 = 1,570$, $x_2 = -0,575$, $x_3 = -0,642$.

1. Решить систему уравнений

$$0,80x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 + 2,00x_4 = 1;$$

$$x_1 + 0,80x_2 + 0,35x_3 + 1,20x_4 = 0;$$

$$0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,80x_3 + 1,39x_4 = 1;$$

$$0,87x_1 + 0,92x_2 + 0,64x_3 + 0,80x_4 = 0.$$

Применяем метод Гаусса с выбором главного элемента. Результаты вычислений представим в таблице (таблица 3.4).

Таблица 3.4 – Нахождение в системе главного элемента.

		A				b	σ	Σ
	i \ k	4	2	3	1			
I	1	2,00	0,21	1,28	0,80	1,00	5,29	
	2	1,20	0,80	0,35	1,00	0,00	3,35	
	3	1,39	0,75	0,80	0,52	1,00	4,46	
	4	0,80	0,92	0,64	0,87	0,00	3,23	
II	1	1	0,105	0,640	0,400	0,500	2,645	2,645
	4	0	0,836	0,128	0,550	–0,400	1,114	1,114
	3	0	0,604	–0,090	–0,036	0,305	0,783	0,783
	2	0	0,674	–0,418	0,520	–0,600	0,176	0,176
III	4	0	1	0,153	0,658	–0,478	1,333	1,333
	3	0	0	–0,182	–0,433	0,594	–0,022	–0,021
	2	0	0	–0,521	0,077	–0,278	–0,722	–0,722
IV	2	0	0	1	–0,148	0,534	1,386	1,386
	3	0	0	0	–0,460	0,691	0,230	0,231

Из таблицы 3.4 следует, что исходная система и система вида (3.9) приведены соответственно к системам:

$$\left.\begin{aligned} x_4 + 0,105x_2 + 0,640x_3 + 0,400x_1 = 0,500;\\ x_2 + 0,153x_3 + 0,658x_1 = -0,478;\\ x_3 - 0,148x_1 = 0,534\\ -0,460x_1 = 0,691; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} y_4 + 0,105y_2 + 0,640y_3 + 0,400y_1 = 2,645; \\ y_2 + 0,153y_3 + 0,658y_1 = 2,645; \\ y_3 - 0,148y_1 = 1,386 \\ -0,460y_1 = 0,230; \end{array}\right\}$$

Решая эти системы, находим $x_1 = -1,502, x_3 = 0,312, x_2 = 0,462, x_4 = 0,851$; $y_1 = -0,500, y_3 = 1,312, y_2 = 1,462, y_4 = 1,851$. Итак, исходная система имеет решения: $x_1 = -1,502, x_2 = 0,462, x_3 = 0,312, x_4 = 0,851$.

Задания к лабораторной работе № 3

3.1. Используя алгоритмические языки программирования, методом Гаусса и методом оптимального исключения решить системы уравнений:

1. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6; \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 2; \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4; \\ 4x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 14. \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 7; \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5; \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6. \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11; \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 &= -2; \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= -1. \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 1; \\ x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= -1; \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -1. \end{aligned}\right\}$

7. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 12; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 14; \\ 4x_1 + x_2 - 6x_3 &= 9. \end{aligned}\right\}$

8. $\left.\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 5; \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 8. \end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1; \\ 6x_1 + 11x_2 - x_3 &= 7. \end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= -1; \\ 4x_1 + x_3 &= -8. \end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1; \\ x_1 - 2x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$

12. $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1; \\ 3x_2 - x_3 &= 0; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$

13. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=10;\\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4&=2;\\ 3x_1+2x_2+x_3-3x_4&=2;\\ 4x_1+2x_2-5x_3+2x_4&=1. \end{aligned}\right\}$$

14. $$\left.\begin{aligned} 2x_1-4x_2+x_3+x_4&=3;\\ x_1+2x_2+5x_3+2x_4&=5;\\ 5x_1+3x_2-x_3+8x_4&=2;\\ 6x_1-x_2-6x_3+9x_4&=1. \end{aligned}\right\}$$

15. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+3x_3+2x_4&=1;\\ x_1-2x_2-3x_3+4x_4&=2;\\ 3x_1+4x_2+6x_3+8x_4&=5;\\ 5x_1-8x_2+9x_3+4x_4&=-1. \end{aligned}\right\}$$

16. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3-2x_4&=3;\\ 2x_1-x_2-9x_3+4x_4&=6;\\ 3x_1+2x_2-x_3+5x_4&=1;\\ 11x_1+x_2+6x_3+15x_4&=-9. \end{aligned}\right\}$$

17. $$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=15;\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4+x_5&=8;\\ 3x_1+x_2-2x_3-4x_4-5x_5&=0;\\ 4x_1-2x_2-x_3+3x_4+2x_5&=17;\\ 5x_1+3x_2-6x_3-2x_4-4x_5&=11. \end{aligned}\right\}$$

$$18.\quad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1;\\ 2x_2 - x_3 &= -1;\\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -5;\\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 6;\\ x_1 - 2x_3 - 2x_5 &= 7. \end{aligned}\right\}$$

$$19.\quad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0;\\ x_1 - x_2 + x_4 &= 0;\\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 &= 0;\\ 2x_1 - 2x_2 + x_6 &= 1;\\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 &= 1;\\ x_1 - x_2 - x_4 - x_6 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

$$20.\quad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21;\\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 &= 3;\\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 - 4x_5 + 5x_6 &= 2;\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 + x_5 - x_6 &= 24;\\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 5x_4 - 2x_5 + x_6 &= 19;\\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 - 7x_6 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

3.2. Используя алгоритмические языки программирования, методом Гаусса, с помощью схемы выбора главного элемента, решить системы уравнений:

$$1.\quad \left.\begin{aligned} 0,40x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 &= 0;\\ x_1 + 0,40x_2 + 0,35x_3 &= 1;\\ 0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,40x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

2. $$\left.\begin{aligned} 0,50x_1+0,21x_2+1,28x_3&=0;\\ x_1+0,50x_2+0,35x_3&=1;\\ 0,52x_1+0,75x_2+0,50x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

3. $$\left.\begin{aligned} 0,70x_1+0,21x_2+1,28x_3&=0;\\ x_1+0,70x_2+0,35x_3&=1;\\ 0,52x_1+0,75x_2+0,70x_3&=0. \end{aligned}\right\}$$

4. $$\left.\begin{aligned} 0,7x_1+0,21x_2+1,28x_3+2x_4&=1;\\ x_1+0,7x_2+0,35x_3+1.24x_4&=0;\\ 0,52x_1+0,75x_2+0,7x_3+1,39x_4&=1;\\ 0,87x_1+0,92x_2+0,64x_3+0,7x_4&=0. \end{aligned}\right\}$$

5. $$\left.\begin{aligned} 0,5x_1+0,21x_2+1,28x_3+2x_4&=1;\\ x_1+0,5x_2+0,35x_3+1,24x_4&=0;\\ 0,52x_1+0,75x_2+0,5x_3+1,39x_4&=1;\\ 0,87x_1+0,92x_2+0,64x_3+0,5x_4&=0. \end{aligned}\right\}$$

6. $$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2-0,1x_3-x_4&=1,68;\\ x_1-10x_2+3x_3-0,621x_4&=0;\\ x_1-0,826x_2+7x_3-x_4&=1,328;\\ x_1-x_2+x_3-6x_4&=4,322. \end{aligned}\right\}$$

7. $$\left.\begin{aligned} 2x_1+0,3261x_2+0,1931x_3-x_4&=1,3412;\\ x_1-9x_2+0,3674x_3+3x_4&=1,9367;\\ x_1+0,6931x_2+4,8652x_3+x_4&=2,3654;\\ x_1-x_2+1,0392x_3-6,9347x_4&=1,9362. \end{aligned}\right\}$$

8. $\left.\begin{aligned} 37x + 91y + 35z &= 391; \\ 91x + 35y + 7z &= 43; \\ 35x + 7y + 7z &= 59. \end{aligned}\right\}$

9. $\left.\begin{aligned} 99x + 35y + 15z &= 181,1; \\ 35x + 15y + 5z &= 64,7; \\ 15x + 5y + 5z &= 24,8. \end{aligned}\right\}$

10. $\left.\begin{aligned} 99x - 35y + 15z &= -66,9; \\ 35x - 15y + 5z &= -24,5; \\ 15x - 5y + 5z &= -4,5. \end{aligned}\right\}$

11. $\left.\begin{aligned} 115x + 27y + 19z &= 100; \\ 27x + 19y + 3z &= 6,2; \\ 19x + 3y + 6z &= 25,6. \end{aligned}\right\}$

12. $\left.\begin{aligned} 115x - 27y + 19z &= -19,3; \\ 27x - 19y + 3z &= -25,3; \\ 19x - 3y + 6z &= -11,9. \end{aligned}\right\}$

13. $\left.\begin{aligned} 980x + 224y + 56z &= -1009,4; \\ 224x + 56y + 14z &= -210,4; \\ 56x + 14y + 67z &= -62,8. \end{aligned}\right\}$

14. $\left.\begin{aligned} 1650x + 316y + 66z &= 530,5; \\ 316x + 66y + 16z &= 110,5; \\ 66x + 16y + 5z &= 26,5. \end{aligned}\right\}$

15. $\left.\begin{aligned} 42,634x + 0,398y + 11,48z &= -50,512; \\ 0,398x + 11,48y + 0,2z &= -0,154; \\ 11,48x + 0,2y + 5z &= -8,02. \end{aligned}\right\}$

16. $$\left.\begin{array}{c} 41,8285x+0,001y+11,52z=53,123;\\ 0,001x+11,25y+0,1z=0,102;\\ 11,25x+0,1y+5z=16,3. \end{array}\right\}$$

17. $$\left.\begin{array}{c} 87,526x-17,576y+18z=20,148;\\ 17,576x-18y+2,6z=28,98;\\ 18x-2,6y+6z=11,4. \end{array}\right\}$$

18. $$\left.\begin{array}{c} 173,343x+14,166y+27,1z=564,453;\\ 141,66x+27,1y+0,6z=-105,893;\\ 27,1x+0,6y+7z=111,89. \end{array}\right\}$$

19. $$\left.\begin{array}{c} 87,526x+17,576y+18z=37,023;\\ 17,576x+18y+2,6z=-5,67;\\ 18x+2,6y+6z=3,2. \end{array}\right\}$$

20. $$\left.\begin{array}{c} 173,343x-14,166y+27,1z=6,071;\\ -141,66x+27,1y-0,6z=125,682;\\ 27,1x-0,6y+7z=48,81. \end{array}\right\}$$

Лабораторная работа № 4
Вычисление определителей. Правило Крамера решения системы линейных алгебраических уравнений

Теоретическая часть

Вычисление определителей

Идея способа Гаусса последовательного исключения неизвестных в системе уравнений может быть перенесена на задачу *вычисления определителей,* и здесь она переходит в способ последовательного понижения порядка n определителя. Рассмотрим схему единственного деления. Пусть дан определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выберем любым способом ведущий элемент первого шага преобразований. Он должен быть отличным от нуля; чтобы избежать сильного разброса в порядках чисел, за него принимают либо наибольший по модулю элемент D, либо наибольший элемент в избранной строке или избранном столбце. Выполняя, если нужно, перестановку строк и столбцов, можно считать, что за ведущий элемент принят a_{11}. Вынося a_{11} из первой строки (первого столбца) за знак D приведем определитель к виду

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь $b_{1i} = \dfrac{a_{1i}}{a_{11}}, i = \overline{2, n}$.

Умножая первую строку последовательно на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ и вычитая из второй, третьей и т.д. строк, получим

$$D = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & a_{22.1} & \ldots & a_{2n.1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2.1} & \ldots & a_{nn.1} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22.1} & a_{23.1} & \ldots & a_{2n.1} \\ a_{32.1} & a_{33.1} & \ldots & a_{3n.1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2.1} & a_{n3.1} & \ldots & a_{nn.1} \end{vmatrix}.$$

Этим мы понизим порядок определителя на единицу и можем перейти ко второму шагу преобразований, применяя к полученному порядку $n-1$ такие же преобразования. Выполняя все n шагов, найдем определитель D как произведение ведущих элементов:

$$D = a_{11} \cdot a_{22.1} \cdot a_{33.1} \ldots a_{nn.n-1}.$$

Можно было бы применить к вычислению определителя идеи метода оптимального исключения неизвестных, но, как легко видеть, в этом случае проделана излишняя, по сравнению с изложенным методом вычислительная работа. Это связано с тем, что в описанных выше преобразованиях таблица элементов, если не понижать порядка определителей, будет приведена к правой треугольной; определитель по этой причине будет вычислен просто, так как он равен произведению диагональных элементов. При применении же метода оптимального исключения таблица будет приведена не к треугольной, а к диагональной, что при вычислении определителя является излишним упрощением.

Правило Крамера [4, 7] решения системы линейных алгебраических уравнений

Если определитель D системы n линейных уравнений с n неизвестными не равен нулю, то система имеет единственное решение. Решение системы получается по формуле: $x_k = \dfrac{D_k}{D}$, где D_k – определитель, полученный из определителя D заменой k-го столбца столбцом свободных членов системы.

Задания к лабораторной работе № 4

4.1. Используя алгоритмические языки программирования, вычислить определители следующих матриц:

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$,

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$,

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

7. $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$,

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.2. Используя алгоритмические языки программирования, решить системы по правилу Крамера:

1. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10;\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2;\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 2;\\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1. \end{aligned}\right\}$$

2. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 3;\\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5;\\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 2;\\ 6x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 = 1. \end{aligned}\right\}$$

3. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1;\\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2;\\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5;\\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 + 4x_4 = -1. \end{aligned}\right\}$$

4. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 3;\\ 2x_1 - x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 6;\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 1;\\ 11x_1 + x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -9. \end{aligned}\right\}$$

5. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15;\\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 8;\\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 0;\\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 17;\\ 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 11. \end{aligned}\right\}$$

6. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 = 1;\\ 2x_2 - x_3 = -1;\\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -5;\\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 6;\\ x_1 - 2x_3 - 2x_5 = 7. \end{aligned}\right\}$$

7. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = 0;\\ x_1 - x_2 + x_4 = 0;\\ 2x_1 + 2x_2 + x_5 = 0;\\ 2x_1 - 2x_2 + x_6 = 1;\\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1;\\ x_1 - x_2 - x_4 - x_6 = 1. \end{aligned}\right\}$$

8. $$\left.\begin{array}{c} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=21; \\ x_1+x_2-x_3-x_4-x_5+x_6=3; \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4-4x_5+5x_6=2; \\ 3x_1-x_2-2x_3+6x_4+x_5-x_6=24; \\ 4x_1+3x_2-8x_3+5x_4-2x_5+x_6=19; \\ 2x_1+x_2+x_3-x_4-3x_5-7x_6=5. \end{array}\right\}$$

Лабораторная работа № 5
Нахождение обратной матрицы. Уточнение обратной матрицы. Решение матричных уравнений

Теоретическая часть

Нахождение обратной матрицы

Пусть дана неособенная матрица

$$A = \left[a_{ij}\right] \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.1}$$

Для нахождения ее обратной матрицы

$$A^{-1} = \left[x_{ij}\right] \tag{5.2}$$

используем основное соотношение

$$AA^{-1} = E, \tag{5.3}$$

где E – единичная матрица.

Перемножая матрицы A и A^{-1}, будем иметь n систем уравнений относительно n^2 неизвестных x_{ij} [6–8]

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{когда } i = j, \\ 0, \text{когда } i \neq j. \end{cases}$$

Полученные n систем линейных уравнений для $j = 1, 2, \dots, n$, имеющих одну и ту же матрицу A и различные свободные члены, одновременно можно решить методом Гаусса.

По-другому, составляют расширенную матрицу $[A\,|E]$, где E – единичная матрица, и с помощью элементарных преобразований строк приводят матрицу к единичной матрице, тогда за вертикальной чертой преобразованной расширенной матрицы получится обратная матрица A^{-1}.

Также обратную матрицу A^{-1} для неособенной матрицы можно найти по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$, где $|A|$ – определитель матрицы, а $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_{ij}$ – алгебраические дополнения для элементов a_{ij} матрицы .

Исправление элементов приближенной обратной матрицы

Пусть имеем неособенную матрицу A и требуется найти обратную матрицу A^{-1}. Положим, что мы получили приближенное значение обратной матрицы $D_0 \approx A^{-1}$. Тогда для улучшения точности можно воспользоваться методом последовательных приближений в специальной форме.

В качестве предварительной меры погрешности используем разность $F_0 =$ $= E - AD_0$. Если $F_0 = 0$, то очевидно, что $D_0 = A^{-1}$, поэтому, если модули элементов матрицы F_0 малы, то матрицы A^{-1} и D_0 близки между собой. Будем строить последовательные приближения по формуле

$$D_k = D_{k-1} + D_{k-1}F_{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \tag{5.4}$$

причем соответствующая погрешность есть $F_k = E - AD_k$.

Оценим быстроту сходимости последовательных приближений:

$$F_1 = E - AD_1 = E - A(D_0 + D_0F_0) = E - AD_0(E + F_0) =$$

$$= E - (E - F_0)(E + F_0) = E - (E - F_0^2) = F_0^2.$$

Аналогично, $F_2 = F_1^2 = F_0^4$, а

$$F_k = F_0^{2^k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \tag{5.5}$$

Докажем, что если

$$||F_0|| \leq q < 1, \tag{5.6}$$

где $||F_0||$ – какая-нибудь каноническая норма матрицы F_0, то процесс итерации (5.1) сходится, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} D_k = A^{-1}$.

Действительно, из формулы (5.5) имеем: $||F_k|| \leq ||F_0||^{2^k} \leq q^{2^k}$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} ||F_k|| = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} F_k = \lim\limits_{k\to\infty}(E - AD_k) = 0$ или $E - A \lim\limits_{k\to\infty} D_k = 0$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} D_k = A^{-1}E = A^{-1}$. Таким образом, утверждение доказано.

Предполагая неравенство (5.6) выполненным, оценим погрешность

$$R_k = ||A^{-1} - D_k|| \leq ||A^{-1}||||E - AD_k|| = ||A^{-1}||||F_k|| \leq ||A^{-1}||q^{2^k}.$$

Так как $AD_0 = E - F_0$, то $A^{-1} = D_0(E - F_0)^{-1} = D_0(E + F_0 + F_0^2 + \dots)$. Отсюда $||A^{-1}|| \leq ||D_0|| \{||E|| + q + q^2 + \dots\} = ||D_0|| \left\{||E|| + \dfrac{q}{1-q}\right\}$.

Для m-нормы или l-нормы имеем $||E|| = 1$, и поэтому $||A^{-1}|| < \dfrac{||D_0||}{1-q}$. Таким образом,

$$||A^{-1} - D_k|| \leq \frac{||D_0||}{1-q}||F_k|| \tag{5.7}$$

или

$$||A^{-1} - D_k|| \le \frac{||D_0||}{1-q} q^{2^k}, \tag{5.8}$$

где норма понимается в смысле m-нормы или l-нормы. Из формулы (5.7) следует, что сходимость процесса (5.4) при $q << 1$ очень быстрая.

На практике процесс уточнения элементов обратной матрицы прекращают, когда обеспечено неравенство $||F_k|| \le \varepsilon$ или $||D_k - D_{k-1}|| \le \varepsilon$, где ε – заданная точность.

Запишем формулы, по которым вычисляется норма матрицы:

а) m – норма $\|B\|_1 = \|B\|_m = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |b_{ij}|$;

б) l – норма $\|B\|_2 = \|B\|_l = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |b_{ij}|$;

в) норма Фробениуса $\|B\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}^2}$.

Нулевой вариант

Пример 1. *Найти обратную матрицу A^{-1} для матрицы*

$$A = \begin{bmatrix} 1,8 & -3,8 & 0,7 & -3,7 \\ 0,7 & 2,1 & -2,6 & -2,8 \\ 7,3 & 8,1 & 1,7 & -4,9 \\ 1,9 & -4,3 & -4,9 & -4,7 \end{bmatrix}.$$

<u>Решение</u>

Составим схему с единственным делением. При этом будем иметь четыре столбца свободных членов (таблица). Заметим, что элементы строк обратной матрицы получаются в обратном порядке.

Таблица 5.1 – Нахождение обратной матрицы.

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
1,8	– 3,8	0,7	–3,7	1	0	0	0	–4,0
0,7	2,1	–2,6	–2,8	0	1	0	0	–1,6
7,3	8,1	1,7	–4,9	0	0	1	0	13,2
1,9	–4,3	–4,9	–4,7	0	0	0	1	–11,0
1	–2,1111	0,3888	-2,0556	0,55556	0	0	0	–2,2222
	3,5777	–2,8722	–1,3611	–0,3889	1	0	0	–0,0444
	23,5111	–1,1389	10,1055	–4,0555	0	1	0	29,4222
	–0,2888	–5,6388	–0,7944	–1,0555	0	0	1	–6,7777
	1	–0,8027	–0,3804	–0,1087	0,2795	0	0	–0,0124
		17,7355	19,0499	–1,5003	–6,5713	1	0	29,7140
		–5,8708	–0,9043	–1,0869	0,0807	0	1	–6,7813
		1	1,0741	–0,0846	–0,3712	0,0564	0	1,6753
			5,4015	–1,5836	–2,0978	0,3310	1	3,0545
1	1	1	1	-0,2932	-0,3884	0,0613	0,1851	0,5654
				0,2303	0,0461	–0,0094	–0,1988	1,0680
				–0,0353	0,1687	0,0157	–0,0892	1,0601
				–0,2112	–0,4600	0,1628	0,2695	0,7626

На основании результатов таблицы получаем:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0,21121 & 0,46003 & 0,16284 & 0,26956 \\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920 \\ 0,23030 & -0,04607 & -0,00944 & -0,19885 \\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513 \end{bmatrix}.$$

Для проверки составим произведение

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1,8 & -3,8 & 0,7 & -3,7 \\ 0,7 & 2,1 & -2,6 & -2,8 \\ 7,3 & 8,1 & 1,7 & -4,9 \\ 1,9 & -4,3 & -4,9 & -4,7 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -0,21121 & 0,46003 & 0,16284 & 0,26956 \\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920 \\ 0,23030 & -0,04607 & -0,00944 & -0,19885 \\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,99997 & 0,00000 & -0,00001 & 0,00000 \\ -0,00025 & 0,99997 & -0,00002 & -0,00039 \\ -0,00808 & -0,01017 & 0,99982 & 0,00009 \\ 0,00000 & 0,00000 & 0,00000 & 1,00048 \end{bmatrix} =$$

$$= E - 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,03 & 0,00 & 0,01 & 0,00 \\ 0,25 & 0,03 & 0,02 & 0,39 \\ 8,08 & 10,17 & 0,18 & -0,09 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,48 \end{bmatrix}.$$

Мы видим, что благодаря округлению обратная матрица получилась не вполне точной. Ниже мы укажем метод исправления элементов приближенной обратной матрицы.

Пример 2. *Исправить элементы приближенной обратной матрицы, полученной в примере 1.*

Решение

Для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1,8 & -3,8 & 0,7 & -3,7 \\ 0,7 & 2,1 & -2,6 & -2,8 \\ 7,3 & 8,1 & 1,7 & -4,9 \\ 1,9 & -4,3 & -4,9 & -4,7 \end{bmatrix}$$

методом Гаусса получена приближенная обратная матрица

$$A^{-1} \approx D_0 = \begin{bmatrix} -0,21121 & 0,46003 & 0,16284 & 0,26956 \\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920 \\ 0,23030 & -0,04607 & -0,00944 & -0,19885 \\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513 \end{bmatrix},$$

причем

$$AD_0 = E - 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,03 & 0,00 & 0,01 & 0,00 \\ 0,25 & 0,03 & 0,02 & 0,39 \\ 8,08 & 10,17 & 0,18 & -0,09 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,48 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$F_0 = E - AD_0 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,03 & 0,00 & 0,01 & 0,00 \\ 0,25 & 0,03 & 0,02 & 0,39 \\ 8,08 & 10,17 & 0,18 & -0,09 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,48 \end{bmatrix}.$$

Для дальнейшего уточнения элементов матрицы D_0 воспользуемся итерационным процессом

$$D_{k+1} = D_k + D_k F_k, F_k = E - AD_k (k = 0, 1, 2, ...).$$

Так как $q = |F_0|_l = 10^{-3} \cdot (0,03 + 10,17) = 1,02 \cdot 10^{-2} << 1$, то процесс итерации быстро сходится. Имеем

$$D_0F_0 = \begin{bmatrix} -0,21121 & 0,46003 & 0,16284 & 0,26956 \\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920 \\ 0,23030 & -0,04607 & -0,00944 & -0,19885 \\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513 \end{bmatrix} \times$$

$$\times 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,03 & 0,00 & 0,01 & 0,00 \\ 0,25 & 0,03 & 0,02 & 0,39 \\ 8,08 & 10,17 & 0,18 & -0,09 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & -0,48 \end{bmatrix} =$$

$$= 10^{-3} \begin{bmatrix} 1,19 & 1,64 & 0,02 & -0,32 \\ 0,17 & 0,16 & 0,01 & 0,11 \\ -0,06 & -0,09 & 0,00 & 0,11 \\ 0,39 & 0,61 & 0,00 & -0,24 \end{bmatrix}.$$

Отсюда

$$D_1 = D_0 + D_0F_0 = \begin{bmatrix} -0,21121 & 0,46003 & 0,16284 & 0,26956 \\ -0,03533 & 0,16873 & 0,01573 & -0,08920 \\ 0,23030 & -0,04607 & -0,00944 & -0,19885 \\ -0,29316 & -0,38837 & 0,06128 & 0,18513 \end{bmatrix} \times$$

$$\times 10^{-3} \begin{bmatrix} 1,19 & 1,64 & 0,02 & -0,32 \\ 0,17 & 0,16 & 0,01 & 0,11 \\ -0,06 & -0,09 & 0,00 & 0,11 \\ 0,39 & 0,61 & 0,00 & -0,24 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0,21002 & -0,45893 & 0,16286 & 0,26924 \\ -0,03516 & 0,16889 & 0,01574 & -0,08909 \\ 0,23024 & 0,04598 & -0,00944 & -0,19874 \\ 0,29277 & -0,38776 & 0,06128 & 0,18489 \end{bmatrix}.$$

Можно считать $A^{-1} \approx D_1$, так как

$$AD_1 = E - 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$F_1 = E - AD_1 = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

На основании формулы (5.7) для погрешности имеем оценку

$$|A^{-1} - D_1|_l \leq \frac{|D_0|_l}{1-q} |F_1|.$$

Так как $|D_0|_l = 0,46003 + 0,16873 + 0,04607 + 0,38837 < 1,07$ и $|F_1|_l = 10^{-5} \cdot (2+2+4) = 8 \cdot 10^{-5}$, то окончательно имеем:

$$|A^{-1} - D_1|_l \leq \frac{1,07}{1 - 1,02 \cdot 10^{-2}} \cdot 8 \cdot 10^{-5} < 9 \cdot 10^{-5}.$$

Задания к лабораторной работе № 5

5.1. Найти обратные матрицы для следующих матриц и уточнить их итерационным методом с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ (для решения задач составить программы на одном из языков программирования). На каждом шаге считать $|F_n| = |E - AD_n| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} f_{ij}^2}$ и итерационный процесс остановить тогда, когда $|F_n| \le \varepsilon$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\-1&0&1&1\\-1&-1&0&1\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

5.2. Используя алгоритмические языки программирования, решить матричные уравнения вида $AXB=C$:

1. $A=\begin{pmatrix}5&-4\\-8&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$;
2. $A=\begin{pmatrix}-2&3&1\\3&6&2\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&2&3\\1&-2&3\end{pmatrix}$;
3. $A=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\-2&7&2\\3&2&-4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\3&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&4&-3\\-4&0&3\\3&4&0\end{pmatrix}$;
4. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&-3\\-4&1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&2&3\end{pmatrix}$;
5. $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-2&0\\0&-1\\1&2\end{pmatrix}$.

Лабораторная работа № 6
Методы простой итерации и Зейделя решения системы линейных алгебраических уравнений

Теоретическая часть

Покажем, как применяется принцип сжимающих отображений [1, 3, 11, 12] к исследованию сходимости итерационных методов решения систем уравнений. Пусть дана система уравнений специального вида

$$x = Bx + \tilde{b}, \tag{6.1}$$

где

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mm} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \dots \\ \tilde{b}_m \end{bmatrix}.$$

Правую часть уравнения (6.1) обозначим через $\Phi(x)$, где $\Phi(x)$ можно рассматривать как отображение пространства R^m в R^m, где $\forall x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$ ставим в соответствии вектор $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in R^m$, т.е. $y = \Phi(x)$. Тогда координаты вектора y вычисляются по формуле:

$$y_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j + \tilde{b}_i, \; i = \overline{1, m}.$$

Решение уравнения (6.1) сведётся к отысканию неподвижной точки отображения Φ: $\Phi(x) = x$. Для того, чтобы отображение Φ имело бы одну неподвижную точку, нужно чтобы Φ было сжатием. Если Φ – сжатие, то оно имеет в пространстве R^m единственную неподвижную точку x^* и к ней сходится итерационный процесс

$x_{n+1} = \Phi(x_n)$, где $x_0 \in R^m$. Имеем

$$x^{(n+1)} = Bx^{(n)} + \tilde{b}, \tag{6.2}$$

где (6.2) – *метод простой итерации решения СЛАУ* (6.1).

В координатной форме метод (6.2) запишется в виде

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j^{(n)} + \tilde{b}_i, i = \overline{1, m}. \tag{6.3}$$

При каких условиях отображение Φ будет сжимающим. Ответ зависит не только от самого Φ, но и от выбора метрики в пространстве R^m.

1^0. Рассмотрим первую метрику пространства R^m – кубическую.

$$\rho_1(x, x') = \max_{1 \le i \le m} |x_i - x_i'|,$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $x' = (x_1', x_2', ..., x_m')$. Рассмотрим расстояние между их образами $y = \Phi(x)$, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} x_j + \tilde{b}_i$, $y' = \Phi(x')$, $y_i' = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} x_j' + \tilde{b}_i$.

$$\rho_1(\Phi(x), \Phi(x')) = \max_{1 \le i \le m} |y_i - y_i'| = \max_{1 \le i \le m} \left| \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j + \tilde{b}_i - \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j' - \tilde{b}_i \right| =$$

$$= \max_{1 \le i \le m} \left| \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x_j - x_j') \right| \le \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}| \max_{1 \le j \le m} |x_j - x_j'| =$$

$$= \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}| \, \rho_1(x, x').$$

Следовательно,

$$\|B\|_1 = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}| \le q_1 < 1, \tag{6.4}$$

где (6.4) – *максимальная строчная матричная норма.*

2^0. Рассмотрим *октаэдрическую* метрику:

$$\rho_2(x,x') = \sum_{i=1}^{m} |x_i - x'_i|\,, \forall x, x' \in R^m.$$

Аналогично 1^0, получим, что Φ – сжатие, если

$$\|B\|_2 = \max_{1\le j\le m} \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| \le q_2 < 1, \tag{6.5}$$

где (6.5) – *максимальная столбцовая матричная норма.*

3^0. Рассмотрим *сферическую* метрику:

$$\rho_3(x,x') = \left\{ \sum_{i=1}^{m} (x_i - x'_i)^2 \right\}^{1/2}, \forall x, x' \in R^m.$$

Аналогично 1^0, получим, что Φ – сжатие, если

$$\|B\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}^2} \le q_3 < 1, \tag{6.6}$$

где (6.6) – *норма Фробениуса.*

Если выполнено одно из условий (6.4) – (6.6), то отображение Φ является сжатием и по принципу Банаха для него в пространстве R^m существует единственная неподвижная точка $x* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, к которой сходится итерационный процесс (6.2). В результате нами доказана

Теорема 6.1. *Если для матрицы B системы (6.1) выполняется одно из условий: $|B|_l \le q_l < 1$, $l = 1,2,3$, то система линейных алгебраических уравнений вида $x = Bx + \tilde{b}$ имеет единственное решение $x* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$, которое может быть получено как предел последовательности, вычисляемой по формуле (6.2), начиная с произвольного $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_m^{(0)}\right) \in R^m$, причём скорость сходимости процесса (6.2) определяется соотношением $\rho_l\left(x^{(n)}, x^*\right) \le \dfrac{q_l^n}{1-q_l} \cdot \rho_l\left(x^{(1)}, x^{(0)}\right)$.*

Если же мы имеем систему вида $Ax = b$, то преобразуем её: $Ax - b = 0$. Далее умножим на $-\tau$: $-\tau(Ax - b) = 0$ и прибавим к обеим частям уравнения по x : $-\tau(Ax - b) + x = x$. Тогда итерационный процесс (6.2) запишется в виде:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \tau(Ax^{(n)} - b), x^{(n+1)} = (E - \tau A)x^{(n)} + \tau b. \tag{6.7}$$

Обозначим $B = E - \tau A$, следовательно, для сходимости итерационного процесса (6.7) надо, чтобы $|B| = |E - \tau A|$ удовлетворяла условию теоремы.

Замечание 6.1. *Если $A > 0$ (A – положительно определённая, т.е. все её собственные значения $\lambda_i > 0$), то $\tau = 1/|A|$.*

В процессе (6.2) до конца выполнения просчета $n+1$ шага должны сохраняться значения n-го шага. Этого недостатка избавлен *метод Зейделя*, который является модификацией метода простой итерации

$$x_1^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{m} b_{1j} x_j^{(n)} + \tilde{b}_1,$$

$$x_2^{(n+1)} = b_{21} x_1^{(n+1)} + \sum_{j=2}^{m} b_{2j} x_j^{(n)} + \tilde{b}_2, \dots, \tag{6.8}$$

$$x_k^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{k-1} b_{kj} x_j^{(n+1)} + \sum_{j=k}^{m} b_{kj} x_j^{(n)} + \tilde{b}_k.$$

Начало
Содержание
◀ ▶
◀◀ ▶▶
Страница 83 из 114
Назад
На весь экран
Закрыть

Подробнее: $x_k^{(n+1)} = b_{k1}x_1^{(n+1)} + b_{k2}x_2^{(n+1)} + \ldots + b_{kk-1}x_{k-1}^{(n+1)} + b_{kk}x_k^{(n)} + \ldots + b_{km}x_m^{(n)} + \tilde{b}_k$.

Метод Зейделя (6.8) позволяет сразу же использовать при вычислении последних координат вектора $\bar{x}^{(n+1)}$ уже найденные его координаты. Условие сходимости для метода простой итерации и метода Зейделя одинаковы. Области сходимости для этих методов не совпадают, но если они пересекаются или совпадают, метод Зейделя сходится быстрее.

Если СЛАУ (6.1) решается с заданной точностью, то для определения момента останова в методах простой итерации и Зейделя целесообразно использовать правило останова по соседним приближениям (по поправкам). Зададим уровень останова ε и момент останова m определим условиями:

$$\left|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right| > \varepsilon,\ (n < m),\ \left|x^{(m+1)} - x^{(m)}\right| \leq \varepsilon,$$

где, например, $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2}$.

Нулевой вариант

Пример 1. *Решить систему уравнений*

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_1 + 0,3x_2 - 0,4x_3 - 0,7;\\ x_2 &= 0,2x_1 - 0,1x_2 + 0,6x_3 + 0,5;\\ x_3 &= 0,4x_1 + 0,2x_2 - 0,3x_3 - 0,6. \end{aligned}\right\}$$

Решение

Данная система имеет вид, удобный для применения метода итерации. Действительно, так как

$$\sum_{j=1}^{3} |b_{1j}| = 0,1 + 0,3 + 0,4 = 0,8;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |b_{2j}| = 0,2 + 0,1 + 0,64 = 0,9;$$

$$\sum_{j=1}^{3} |b_{3j}| = 0,4 + 0,2 + 0,3 = 0,9;$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{3} |b_{ij}| = 0,9 < 1,$$

условие (6.4) выполнено. Итерационный процесс сходится.

Пользуемся формулами (6.3). В качестве нулевого приближения возьмем свободные члены: $x_1^0 = -0,7$, $x_2^0 = 0,5$, $x_3^0 = -0,6$. Подставляя эти значения в правые части данных уравнений, получаем первое приближение:

$$x_1^1 = 0,1\,(-0,7) + 0,3 \cdot 0,5 - 0,4\,(-0,6) - 0,7 = -0,38,$$
$$x_2^1 = 0,2\,(-0,7) - 0,1 \cdot 0,5 + 0,6\,(-0,6) + 0,5 = -0,05,$$
$$x_3^1 = 0,4\,(-0,7) + 0,2 \cdot 0,5 - 0,3\,(-0,6) - 0,6 = -0,6.$$

Подставив полученные значения x_1^1, x_2^1, x_3^1 в правые части исходных уравнений, найдем второе приближение x_1^2, x_2^2, x_3^2 :

$$x_1^2 = 0,1\,(-0,38) + 0,3\,(-0,05) - 0,4\,(-0,6) - 0,7 = -0,513,$$
$$x_2^2 = 0,2\,(-0,38) - 0,1\,(-0,05) + 0,6\,(-0,6) + 0,5 = 0,069,$$
$$x_3^2 = 0,4\,(-0,38) + 0,2\,(-0,05) - 0,3\,(-0,6) - 0,6 = -0,582.$$

Аналогично находим третье, четвертое и другие приближения. Результаты вычислений сведены в таблицу 6.1.

Таблица 6.1 – Нахождение приближений методом итерации.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	-0,7	0,5	-0,6
1	-0,38	-0,05	-0,6
2	-0,513	0,069	-0,582
3	-0,4978	0,0413	-0,6165
4	-0,49079	0,02641	-0,60591
5	-0,49879	0,07585	-0,60926
6	-0,49548	0,03112	-0,60961
7	-0,49637	0,03203	-0,60909
8	-0,49639	0,03207	-0,60942

Пример 2. *Решить систему уравнений*

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1,75; \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 + = 2,5; \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -0,25. \end{aligned}\right\}$$

Решение

В данном случае выполнено условие, что модуль каждого диагонального коэффициента каждого уравнения больше суммы модулей всех остальных коэффициентов данного уравнения.

Данную систему приведем к виду (6.1), разрешив первое уравнение относительно x_1, второе – относительно x_2, третье – относительно x_3:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = 0,25x_2 - 0,5x_3 + 0,4375; \\ x_2 = 0,2x_1 + 0,6x_3 - 0,5; \\ x_3 = 0,25x_1 + 0,125x_2 + 0,03125. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1)$$

Поскольку

$\sum\limits_{j=1}^{3} |b_{1j}| = 0,25 + 0,5 = 0,75$; $\sum\limits_{j=1}^{3} |b_{2j}| = 0,2 + 0,6 = 0,8$;

$\sum\limits_{j=1}^{3} |b_{3j}| = 0,25 + 0,125 = 0,375$; и $\max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{3} |b_{ij}| = 0,8 < 1$, т.е. выполнено условие (6.4), то процесс итерации сходится.

В качестве нулевого приближения возьмем свободные члены системы: $x_1^0 = 0,4375, x_2^0 = -0,5, x_3^0 = 0,03125$.

Подставив эти значения в правые части уравнений системы (6.1), получим первое приближение:

$$x_1^1 = 0,25 \cdot (-0,5) - 0,5 \cdot 0,03125 + 0,4375 = 0,296875,$$

$$x_2^1 = 0,2 \cdot 0,4375 + 0,6 \cdot 0,03125 - 0,5 = -0,39375,$$

$$x_3^1 = 0,25 \cdot 0,4375 + 0,125 \cdot (-0,5) + 0,03125 = 0,078125.$$

Подставив полученные значения x_1^1, x_2^1, x_3^1 в правые части уравнений (6.1), получим второе приближение и т.д. Результаты вычислений представлены в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Нахождение приближений методом итерации.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,4375	-0,5	0,03125
1	0,296875	-0,39375	0,078125
2	0,3	-0,39375	0,05625
3	0,310937	-0,40625	0,057031
4	0,307402	-0,40359	0,05820
5	0,3075	-0,4036	0,05766
6	0,30777	-0,4039	0,05768
7	0,30768	-0,40384	0,05770
8	0,30769	-0,40384	0,05769

Седьмое и восьмое приближения имеют по три одинаковых десятичных знака. Округляя четвертый знак, получаем:

$$x_1^* = 0,3077, x_2^* = -0,4038, x_3^* = -0,0577.$$

Пример 3. *Методом Зейделя решить систему уравнений примера 2.*

Решение

Результаты вычислений сведены в таблицу 6.3.

Таблица 6.3 – Нахождение приближений методом Зейделя.

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0	0	0,03
1	0,4225	-0,39750	0,08719
2	0,29453	-0,38878	0,05628
3	0,31216	-0,40380	0,05881
4	0,30714	-0,40329	0,05762
5	0,30787	-0,40385	0,05774
6	0,30767	-0,40382	0,05769
7	0,30770	-0,40384	0,05769

В качестве начального приближения возьмем $x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, x_3^0 = 0,03$. Подставляя эти значения в правую часть первого уравнения системы (A), получаем первое приближение для x_1^1: $x_1^1 = 0,4225$. Это значение x_1^1 используем для нахождения первого приближения x_1^2: $x_1^2 = -0,39750$, которое применяется при вычислении x_1^3: $x_1^3 = 0,08719$. Аналогично находятся последующие приближения.

Следовательно, $x_1^* = 0,3077, x_2^* = -0,4038, x_3^* = 0,0577$.

Задания к лабораторной работе № 6

6.1. Используя алгоритмические языки программирования, с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ методом простой итерации решить системы уравнений:

1. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0,3x_1 - 0,1x_2 + 0,5x_3 + 1,4; \\ x_2 &= 0,6x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 - 2,3; \\ x_3 &= 0,5x_1 - 0,2x_2 + 0,2x_3 - 0,8. \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0,124x_1 - 0,376x_2 + 0,228x_3 + 0,875; \\ x_2 &= 0,572x_1 + 0,116x_2 - 0,164x_3 - 0,235; \\ x_3 &= 0,384x_1 - 0,104x_2 + 0,126x_3 + 0,525. \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0,025x_1 + 0,074x_2 - 0,567x_3 + 0,124; \\ x_2 &= 0,735x_1 - 0,015x_2 + 0,105x_3 - 0,824; \\ x_3 &= 0,328x_1 + 0,126x_2 - 0,208x_3 + 0,056. \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0,015x_1 - 0,128x_2 + 0,673x_3 - 0,026; \\ x_2 &= 0,514x_1 + 0,026x_2 - 0,321x_3 + 0,125; \\ x_3 &= 0,425x_1 - 0,208x_2 + 0,116x_3 - 0,048. \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0,1x_1 + 0,2x_2 - 0,3x_3 + 0,2x_4 - 0,4; \\ x_2 &= 0,2x_1 + 0,3x_2 - 0,1x_3 - 0,1x_4 + 0,2; \\ x_3 &= 0,3x_1 - 0,2x_2 + 0,1x_3 + 0,2x_4 - 0,1; \\ x_4 &= 0,4x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 0,2x_4 + 0,3. \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} x_1 &= 0,05x_1 - 0,15x_2 + 0,25x_3 - 0,12x_4 + 0,15; \\ x_2 &= 0,34x_1 + 0,06x_2 - 0,14x_3 - 0,22x_4 - 0,08; \\ x_3 &= 0,18x_1 0,26x_2 - 0,04x_3 + 0,32x_4 + 0,12; \\ x_4 &= 0,24x_1 + 0,16x_2 + 0,18x_3 - 0,26x_4 + 0,36. \end{aligned}\right\}$

$$7.\quad \left.\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3&=-1;\\ 4x_1-x_2+6x_3&=4;\\ 3x_1+3x_2+5x_3&=2.\end{aligned}\right\}$$

$$8.\quad \left.\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3&=1,75;\\ 6x_1-4x_2-x_3&=1,65;\\ 7x_1-2x_2+4x_3&=1,95.\end{aligned}\right\}$$

6.2. Используя алгоритмические языки программирования, с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$ методом Зейделя решить системы уравнений:

$$9.\quad \left.\begin{aligned} 8x_1+2x_2-x_3&=2,35;\\ x_1+10x_2+5x_3&=1,40;\\ 2x_1-x_2-4x_3&=1,75.\end{aligned}\right\}$$

$$10.\quad \left.\begin{aligned} x_1+2x_2-3x_3&=1;\\ 4x_1-x_2+6x_3&=4;\\ 3x_1+3x_2+5x_3&=2.\end{aligned}\right\}$$

$$11.\quad \left.\begin{aligned} 5x_1+x_2-2x_3+x_4&=0,25;\\ 2x_1-6x_2+x_3-2x_4-x&=-2,40;\\ 3x_1+2x_2-8x_3+2x_4&=-1,85;\\ 2x_1-4x_2+3x_3-10x_4&=-6,90.\end{aligned}\right\}$$

$$12.\quad \left.\begin{aligned} 6x_1+2x_2-x_3-2x_4&=0,3;\\ 2x_1+16x_2+3x_3+4x_4-x&=6,4;\\ 2x_1-2x_2-10x_3+4x_4&=-2,8;\\ x_1-3x_2+2x_3-8x_4&=-3,2.\end{aligned}\right\}$$

$$13.\quad \left.\begin{aligned} 11,48x+5y&=-8,02;\\ 42,634x+11,48y&=-50,512.\end{aligned}\right\}$$

14. $$\left.\begin{aligned} 11,25x + 5y &= 16,3; \\ 41,8285x + 11,25y &= 53,123. \end{aligned}\right\}$$

15. $$\left.\begin{aligned} 99x - 35y + 15z &= -66,9; \\ 7x - 3y + z &= -4,9; \\ 3x - y + z &= 0,9. \end{aligned}\right\}$$

16. $$\left.\begin{aligned} 99x - 35y + 15z &= 181,11; \\ 35x + 15y + 5z &= 64,7; \\ 15x + 5y + 5z &= 24,8. \end{aligned}\right\}$$

17. $$\left.\begin{aligned} 42,634x + 0,398y + 11,48z &= -50,512; \\ 0,398x + 11,4y + 0,25z &= -0,154; \\ 11,48x + 0,2y + 5z &= -8,02. \end{aligned}\right\}$$

18. $$\left.\begin{aligned} 41,8285x - 0,001y + 11,25z &= 53,123; \\ 0,001x + 11,25y + 0,1z &= 0,102; \\ 11,25x + 0,1y + 5z &= 16,3. \end{aligned}\right\}$$

Лабораторная работа № 7
Метод сопряженных градиентов решения системы линейных алгебраических уравнений

Теоретическая часть

В простейшем случае легко установить связь между СЛАУ $Ax = b$ и абстрактным дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} + Ay(t) = b \tag{7.1}$$

с начальным условием $y(0) = x^{(0)}$, где t – абстрактная скалярная переменная: $t \in [0, \infty)$, а A и b те же, что и в уравнении $Ax = b$.

Пусть постоянный вектор x и переменный $y = y(t)$ – решения задач $Ax = b$ и (7.1) соответственно. Введем вектор $z(t) = x - y(t)$ и, учитывая, что $\frac{dz}{dt} = -\frac{dy}{dt}$ и $z(0) = x - y(0) = x - x^{(0)}$, получим, что решение (7.1) $z(t) = e^{-At}z(0)$.

Будем считать: $t_{k+1} = t_k + \tau_k$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ и τ_k – шаг (параметр). При $t = t_k$ уравнение (7.1) принимает вид:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t = t_k} = -Ay(t_k) + b. \tag{7.2}$$

Теперь ясно, что, полагая $x^{(k)} = y(t_k)$ и $y(t_0) = y(0) = x^{(0)}$, (7.2) можно приближенно заменить равенством:

$$\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} = -Ax^{(k)} + b, \tag{7.3}$$

которое можно рассматривать как явный итерационный процесс. Его называют *двухслойным (одношаговым) итерационным методом* или *методом Ричардсона.*

Более общий вид семейство двухслойных итерационных методов примет, если в (7.3) ввести невырожденный матричный параметр B_k:

$$B_k \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} = -Ax^{(k)} + b. \tag{7.4}$$

Различные конкретные итерационные процессы решения СЛАУ $Ax = b$ получаются из (7.4) фиксированием матриц B_k и скаляров τ_k. При этом, если B_k и τ_k не зависят от k, т.е. одни и те же на каждой итерации, то (7.4) определяет стационарный метод, иначе – нестационарный. В общем случае, кроме $B_k = E$, (7.4) – неявный метод.

Рассматриваются также трехслойные (двухшаговые) итерацион-ные методы, связывающие не два, а три соседних приближения: $x^{(k+1)}, x^{(k)}, x^{(k-1)}$.

Другой большой класс методов итерационного решения СЛАУ $Ax = b$ – это так называемые *методы вариационного типа*. К ним относятся методы минимальных невязок, минимальных поправок, сопряженных градиентов, наискорейшего спуска и т.д. Хорошего понимания таких методов можно достигнуть лишь с привлечением теории оптимизации, ибо решение СЛАУ здесь подменяется решением эквивалентной экстремальной задачи. А именно, пусть $Ax = b$ – нормальная и имеет единственное решение, где – положительно определённая симметричная матрица. Образуем квадратичный функционал:

$$\Phi(x) = (Ax, x) - 2(b, x) + c, \tag{7.5}$$

где $c \in R$. Задача решения нормальной системы $Ax = b$ и задача минимизации функционала (7.5) эквивалентны ($\Phi'(x) \sim Ax - b$).

Нетрудно показать, что если $Ax = b$ имеет единственное решение x^*, то $\Phi(x^*) = \min\limits_{x \in R^n} \Phi(x)$. Теперь можно применить различные методы численной минимизации функционала $\Phi(x)$(в конечном итоге, функции n переменных $x_1, ..., x_n$).

Если $\Phi(x) = f(x_1, ..., x_n)$, *то* $grad\Phi = \Phi'(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ *– матрица-строка Якоби.*

Одним из наиболее популярных и хорошо разработанных методов такого типа является метод сопряженных градиентов (МСГ).

Приведем без вывода алгоритм МСГ, но сначала фигурирующим в нем переменным придадим следующий оптимизационный смысл:
$x^{(k)}$ – k-е приближение к искомому решению $x*$,
$\xi^{(k)}$ – невязка k-го приближения, играющего роль антиградиента функции $\Phi(x)$,
$p^{(k)}$ – направление минимизации $\Phi(x)$ в точке $x^{(k)}$,
α_k – коэффициент, обеспечивающий минимум $\Phi(x)$ в направлении вектора $p^{(k)}$,
$-\beta_k$ – коэффициент при $p^{(k)}$ в формуле для вычисления направления $p^{(k+1)}$, обеспечивающий A-сопряженность векторов $p^{(k)}$ и $p^{(k+1)}$,
$q^{(k)}$ – вспомогательный вектор.
Алгоритм МСГ: [3, 11, 18]

Шаг 1.1. Зададим $x^{(0)}$ и $\varepsilon > 0$ – допустимый уровень абсолютных погрешностей.

Шаг 1.2. Вычислим $\xi^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ (невязка $x^{(0)}$).

Шаг 1.3. Положим $p^{(0)} = \xi^{(0)}$.

Шаг 2.1. Вычислим $q^{(k)} = Ap^{(k)}(k = 0, 1, 2, ...)$.

Шаг 2.2. Вычислим $\alpha_k = \frac{(\xi^{(k)}, p^{(k)})}{(q^{(k)}, p^{(k)})}$(шаговый множитель).

Шаг 2.3. Вычислим $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)}$.

Шаг 2.4. Вычислим

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} - \alpha_k q^{(k)} \left(= b - Ax^{(k+1)} = b - Ax^{(k)} - A\alpha_k p^{(k)}\right).$$

Шаг 2.5. Проверка выполнения неравенства $\left\|\xi^{(k+1)}\right\|_2 \leq \varepsilon$, если «да», то вывод результата ($\|\cdot\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$ – евклидова норма).

Шаг 3.1. Вычислим скаляр $\beta_k = \dfrac{(\xi^{(k+1)}, q^{(k)})}{(p^{(k)}, q^{(k)})}$.

Шаг 3.2. Вычислим вектор

$$p^{(k+1)} = \xi^{(k+1)} - \beta_k p^{(k)}$$

(новое направление минимизации).

Шаг 3.3. Положить $k = k + 1$ и вернуться к шагу 2.1.

Нулевой вариант

Пример 1. *Дана* $Ax = b$, *где* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$. *Пусть известно, что* $x^* = [1; 1; -1]^T$, *примем за* $\varepsilon = 0,05$.

<u>Решение</u>

Примем $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, тогда $\xi^{(0)} := b - Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $p^{(0)} := \xi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $q^{(0)} := Ap^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\alpha_0 := \dfrac{(\xi^{(0)}, p^{(0)})}{(q^{(0)}, p^{(0)})} = \dfrac{1}{2}$, $x^{(1)} := x^{(0)} + \alpha_0 p^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\xi^{(1)} = \xi^{(0)} - \alpha_0 q^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix}$. Очевидно $\left|\xi^{(1)}\right|_2 > \varepsilon$.

Тогда $\beta_0 := \dfrac{(\xi^{(1)}, q^{(0)})}{(q^{(0)}, p^{(0)})} = -\dfrac{5}{36}$, $p^{(1)} = \xi^{(1)} - \beta_0 p^{(0)} = \dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 41 \\ 10 \\ 8 \end{bmatrix}$, $q^{(1)} := Ap^{(1)} = \dfrac{1}{36}\begin{bmatrix} 90 \\ 2 \\ 47 \end{bmatrix}$, $\alpha_1 = \dfrac{(\xi^{(1)}, p^{(1)})}{(q^{(1)}, p^{(1)})} = \dfrac{90}{227} \approx 0,3965$, $x^{(2)} = x^{(1)} + \alpha_1 p^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,9515 \\ 1,1101 \\ -0,9119 \end{bmatrix}$, $\xi^{(2)} = \xi^{(1)} - \alpha_1 q^{(1)} \approx \begin{bmatrix} 0,0088 \\ -0,0220 \\ -0,0176 \end{bmatrix}$. Так как $\left|\xi^{(2)}\right|_\eta \le \varepsilon = 0,05$, то $x^{(2)}$ – искомое решение $Ax = b$ с точностью ε.

Задания к лабораторной работе № 7

7.1. Используя алгоритмические языки программирования, с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ методом сопряженных градиентов решить системы уравнений:

1. $$\left.\begin{aligned} 0,40x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 &= 0; \\ x_1 + 0,40x_2 + 0,35x_3 &= 1; \\ 0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,40x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

2. $$\left.\begin{aligned} 0,50x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 &= 0; \\ x_1 + 0,50x_2 + 0,35x_3 &= 1; \\ 0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,50x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

3. $$\left.\begin{aligned} 0,70x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 &= 0; \\ x_1 + 0,70x_2 + 0,35x_3 &= 1; \\ 0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,70x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

4. $$\left.\begin{aligned} 0,7x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 + 2x_4 &= 1; \\ x_1 + 0,7x_2 + 0,35x_3 + 1.24x_4 &= 0; \\ 0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,7x_3 + 1,39x_4 &= 1; \\ 0,87x_1 + 0,92x_2 + 0,64x_3 + 0,7x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

5. $$\left.\begin{aligned} 0,5x_1 + 0,21x_2 + 1,28x_3 + 2x_4 &= 1; \\ x_1 + 0,5x_2 + 0,35x_3 + 1,24x_4 &= 0; \\ 0,52x_1 + 0,75x_2 + 0,5x_3 + 1,39x_4 &= 1; \\ 0,87x_1 + 0,92x_2 + 0,64x_3 + 0,5x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

6. $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 0,1x_3 - x_4 &= 1,68; \\ x_1 - 10x_2 + 3x_3 - 0,621x_4 &= 0; \\ x_1 - 0,826x_2 + 7x_3 - x_4 &= 1,328; \\ x_1 - x_2 + x_3 - 6x_4 &= 4,322. \end{aligned}\right\}$$

$$7.\quad \left.\begin{aligned} 2x_1 + 0{,}3261x_2 + 0{,}1931x_3 - x_4 &= 1{,}3412;\\ x_1 - 9x_2 + 0{,}3674x_3 + 3x_4 &= 1{,}9367;\\ x_1 + 0{,}6931x_2 + 4{,}8652x_3 + x_4 &= 2{,}3654;\\ x_1 - x_2 + 1{,}0392x_3 - 6{,}9347x_4 &= 1{,}9362. \end{aligned}\right\}$$

$$8.\quad \left.\begin{aligned} 37x + 91y + 35z &= 391;\\ 91x + 35y + 7z &= 43;\\ 35x + 7y + 7z &= 59. \end{aligned}\right\}$$

$$9.\quad \left.\begin{aligned} 99x + 35y + 15z &= 181{,}1;\\ 35x + 15y + 5z &= 64{,}7;\\ 15x + 5y + 5z &= 24{,}8. \end{aligned}\right\}$$

$$10.\quad \left.\begin{aligned} 99x - 35y + 15z &= -66{,}9;\\ 35x - 15y + 5z &= -24{,}5;\\ 15x - 5y + 5z &= -4{,}5. \end{aligned}\right\}$$

$$11.\quad \left.\begin{aligned} 115x + 27y + 19z &= 100;\\ 27x + 19y + 3z &= 6{,}2;\\ 19x + 3y + 6z &= 25{,}6. \end{aligned}\right\}$$

$$12.\quad \left.\begin{aligned} 115x - 27y + 19z &= -19{,}3;\\ 27x - 19y + 3z &= -25{,}3;\\ 19x - 3y + 6z &= -11{,}9. \end{aligned}\right\}$$

Лабораторная работа № 8
Метод квадратного корня решения систем уравнений

Теоретическая часть

Теорема 8.1 (разложение Холецкого). *Если $A = A^*$ и главные миноры A отличны от нуля, то существует разложение $A = C^*DC$, где C – верхняя треугольная матрица, D – диагональная матрица.*

Метод квадратного корня [1, 3, 4, 8, 16] применяется, если матрица системы *симметрическая*, т.е. когда $a_{ij} = a_{ji}, i, j = \overline{1, n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

В нашем случае, если A симметрическая, то $A = C^T DC$, где

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, c_{ii} > 0, i = \overline{1, n},$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}, d_{ii} = \pm 1, i = \overline{1, n}.$$

Тогда вместо системы

$$Ax = b \tag{8.1}$$

мы будем решать систему
$$C^T DCx = b. \tag{8.2}$$

Пусть $C^T D = T$, тогда $TCx = b$ и получим систему
$$\begin{cases} Cx = y, \\ Ty = b. \end{cases} \tag{8.3}$$

Решение системы (8.1) свелось к решению системы (8.3) с верхней треугольной матрицей C и нижней треугольной матрицей T (следовательно, это ускоряет процесс нахождения x методом Гаусса). Итак, имеем
$$T = C^T D = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} c_{11}d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12}d_{11} & c_{22}d_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n}d_{11} & c_{2n}d_{22} & \dots & c_{nn}d_{nn} \end{bmatrix}.$$
Так как $A = TC$, то для того чтобы найти элемент a_{ij}, надо i-ю строку матрицы T умножить на j-й столбец матрицы C:
$$a_{ij} = \begin{bmatrix} c_{1i}d_{11} & c_{2i}d_{22} & \dots & c_{ii}d_{ii} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \dots \\ c_{jj} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если $i \le j$, получим

$$a_{ij} = c_{1i}d_{11}c_{1j} + c_{2i}d_{22}c_{2j} + \ldots + c_{ii}d_{ii}c_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} c_{ki}c_{kj}d_{kk}. \qquad (8.4)$$

1. При $i = 1, j = 1$ из (8.4) имеем $a_{11} = c_{11}^2 d_{11}$, $d_{11} = sign\,(a_{11})$, $c_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$.

2. При $i = 1, j = \overline{2,n}$ из (8.4) имеем $a_{1j} = c_{11}c_{1j}d_{11}$ (c_{11},d_{11}– найдены, a_{1j} – известны), поэтому

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{c_{11}d_{11}}, j = \overline{2,n}.$$

Итак, нашли первую строку матрицы C.

3. При $i = j$ из (8.4) $a_{ii} = c_{1i}^2 d_{11} + c_{2i}^2 d_{22} + \ldots + c_{ii}^2 d_{ii}$, отсюда $c_{ii}^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ki}^2 d_{kk}$,

$$d_{ii} = \text{sign}\left(a_{ii} - \sum_{k}^{i-1} c_{ki}^2 d_{kk}\right), c_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ki}^2 d_{kk}}$$

(у нас по условию $c_{ii} > 0$).

4. Из последнего слагаемого формулы (8.4):

$$c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ki}d_{kk}c_{kj}}{c_{ii}d_{ii}}, i \ne j.$$

Таким образом, мы последовательно находим все строки матрицы C. Эти все полученные формулы для случая $i \le j$, а при $i > j$ $c_{ij} = 0$.

Из формул видно, что матрица C получилась треугольного вида, а поскольку матрица $T = C^T D$, то матрица T тоже будет треугольного вида. Таким образом, решение системы вида $Ax = b$ мы свели к решению системы с треугольными матрицами: $\begin{cases} Ty = b, \\ Cx = y. \end{cases}$

Определение 8.1. *Квадратная матрица называется положительно определенной ($A > 0$) если $\forall x \in R^n, x \neq 0$ $(Ax, x) > 0$.*

В случае реализации метода квадратного корня для матрицы $A > 0$ имеем $d_{ii} = 1$, т.е. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. Тогда наши формулы упростятся, так как будут отсутствовать d_{ii} $(A = C^T C)$.

Итак, вычисляется матрица $C : c_{11} = \sqrt{|a_{11}|}, c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{c_{11}}, \dots,$ тогда

$$T = C^T D = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} = C^T.$$

Сначала решается система $Ty = b$, т.е. $C^T y = b$: $y_1 = \dfrac{b_1}{c_{11}}$, в общем, имеем равенство

$$y_i = \frac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} c_{ki} y_k}{c_{ii}}, \; i > 1.$$

Затем решаем $Cx = y$: $x_n = \dfrac{y_n}{c_{nn}}$ и получим ее решения

$$x_i = \frac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k}{c_{ii}}, \; i < n.$$

Контроль за ходом вычислений здесь такой же, как и в методе Гаусса (так как две системы решаются методом Гаусса).

Задания к лабораторной работе № 8

Используя алгоритмические языки программирования, методом квадратного корня решить СЛАУ:

1. $$\left.\begin{array}{c} 37x + 91y + 35z = 391; \\ 91x + 35y + 7z = 43; \\ 35x + 7y + 7z = 59. \end{array}\right\}$$

2. $$\left.\begin{array}{c} 99x + 35y + 15z = 181,1; \\ 35x + 15y + 5z = 64,7; \\ 15x + 5y + 5z = 24,8. \end{array}\right\}$$

3. $$\left.\begin{array}{c} 115x + 27y + 19z = 100; \\ 27x + 19y + 3z = 6,2; \\ 19x + 3y + 6z = 25,6. \end{array}\right\}$$

4. $$\left.\begin{array}{c} 980x + 224y + 56z = -1009,4; \\ 224x + 56y + 14z = -210,4; \\ 56x + 14y + 67z = -62,8. \end{array}\right\}$$

5. $$\left.\begin{array}{c} 1650x + 316y + 66z = 530,5; \\ 316x + 66y + 16z = 110,5; \\ 66x + 16y + 5z = 26,5. \end{array}\right\}$$

6. $$\left.\begin{array}{c} 42,634x + 0,398y + 11,48z = -50,512; \\ 0,398x + 11,48y + 0,2z = -0,154; \\ 11,48x + 0,2y + 5z = -8,02. \end{array}\right\}$$

7. $$\left.\begin{aligned} 41,8285x + 0,001y + 11,52z = 53,123;\\ 0,001x + 11,25y + 0,1z = 0,102;\\ 11,25x + 0,1y + 5z = 16,3. \end{aligned}\right\}$$

8. $$\left.\begin{aligned} 173,343x + 14,166y + 27,1z = 564,453;\\ 141,66x + 27,1y + 0,6z = -105,893;\\ 27,1x + 0,6y + 7z = 111,89. \end{aligned}\right\}$$

Лабораторная работа № 9
Степенной метод нахождения наибольшего по абсолютной величине собственного значения и соответствующего ему собственного вектора

Теоретическая часть

Рассмотрим метод решения частичных проблем собственных значений [11,13,17]. Пусть известно, что у $A \in M_n(R)$ есть ровно n линейно независимых собственных векторов: $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{bmatrix}, \dots, x_n = \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \dots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$. Пусть нумерация этих векторов отвечает упорядочению соответствующих им собственных значений по убыванию модулей (где первое из неравенств строгое):

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|. \tag{9.1}$$

Ставим задачу приближённого вычисления наибольшего по модулю собственного числа λ_1 и соответствующего ему собственного вектора x_1 матрицы A.

Возьмем произвольный $y^{(0)} \neq \bar{0}$ и запишем его разложение по базису из собственных векторов $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$y^{(0)} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

и пусть $c_1 \neq 0$. Далее $y^{(1)} = Ay^{(0)} = c_1 Ax_1 + c_2 Ax_2 + \dots + c_n Ax_n$.

Так как (λ_i, x_i) – собственные пары матрицы A, то имеем $y^{(1)} = c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 + \dots + c_n\lambda_n x_n$, тогда

$$y^{(2)} = Ay^{(1)} = A^2 y^{(0)} = c_1\lambda_1^2 x_1 + c_2\lambda_2^2 x_2 + \dots + c_n\lambda_n^2 x_n.$$

Очевидно, k-ая итерация вектора $y^{(0)}$ с помощью матрицы A дает вектор

$$y^{(k)} = Ay^{(k-1)} = A^k y^{(0)} = c_1\lambda_1^k x_1 + c_2\lambda_2^k x_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k x_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{(k)} = A^k y^{(0)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k)} \\ y_2^{(k)} \\ \dots \\ y_n^{(k)} \end{bmatrix} = c_1\lambda_1^k \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \dots \\ x_{1n} \end{bmatrix} + \cdots + c_n\lambda_n^k \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{n2} \\ \dots \\ x_{nn} \end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}} = \frac{c_1\lambda_1^k x_{1i} + c_2\lambda_2^k x_{2i} + \ldots + c_n\lambda_n^k x_{ni}}{c_1\lambda_1^{k-1} x_{1i} + c_2\lambda_2^{k-1} x_{2i} + \ldots + c_n\lambda_n^{k-1} x_{ni}} = \left\{ \frac{: c_1\lambda_1^{k-1} x_{1i}}{: c_1\lambda_1^{k-1} x_{1i}} \right\} =$$

$$= \lambda_1 \frac{1 + \dfrac{c_2}{c_1}\cdot\dfrac{x_{2i}}{x_{1i}}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \ldots + \dfrac{c_n}{c_1}\cdot\dfrac{x_{ni}}{x_{1i}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k}{1 + \dfrac{c_2}{c_1}\cdot\dfrac{x_{2i}}{x_{1i}}\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{k-1} + \ldots + \dfrac{c_n}{c_1}\cdot\dfrac{x_{ni}}{x_{1i}}\left(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{k-1}}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}} = \lambda_1$ для $\forall i = \overline{1,n}$, при котором $x_{1i} \neq 0$. Представляя вектор $y^{(k)}$ на основе (9.2) в виде

$$y^{(k)} = c_1\lambda_1^k \left[x_1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 + \cdots + \frac{c_n}{c_1}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n \right],$$

можно сделать вывод, что в силу $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right|^k \underset{\substack{k\to\infty \\ (i\neq 1)}}{\to} 0$ в последнем выражении для $y^{(k)}$ начнёт доминировать первое слагаемое.

Это означает, что вектор $y^{(k)}$ от итерации к итерации будет давать все более хорошие приближения к собственному вектору x_1 с точностью до скалярного множителя $c_1\lambda_1^k$.

Таким образом, приведенный метод нахождения «старшей» собственной пары матрицы называется *степенным методом.*

Как только установятся несколько первых цифр во всех этих отношениях (что выясняется проверкой выполнения приближённых равенств: $\dfrac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}} \approx \dfrac{y_i^{(k-1)}}{y_i^{(k-2)}}$), так можно считать, что найдено наибольшее по модулю собственное число с точностью, определяемой последним установившимся в отношениях знаком после запятой, и соответствующий ему собственный вектор, за который принимается последний полученный вектор $y^{(k)}$.

Замечание 9.1. *Поскольку в процессе вычислений за счет множителя* λ_1^k *при* $k \to \infty$ *может произойти либо превышение допустимых для используемого ПЭВМ чисел, если* $|\lambda_1^k| > 1$, *либо пропадание значащих цифр полученных векторов* $y^{(k)}$, *если* $|\lambda_1^k| < 1$, *то целесообразно вводить в итерационный процесс нормирование найденных векторов* $y^{(k)}$.

Модификация степенного метода: находим

$$A, A^2, \ldots, A^{2k}, \ldots; y^{(2k)} = A^{2k}y^{(0)};\ \lambda_1 \approx \frac{tr A^{2k+1}}{tr A^{2k}}.$$

Практическая часть

Нулевой вариант

Приведем алгоритм степенного метод нахождения наибольшего по абсолютной величине собственного значения и соответствующего ему собственного вектора:

1. Берем $y^{(0)} \neq \overrightarrow{0}$, $\varepsilon = 0,1$.

2. Находим $y^{(1)} = Ay^{(0)}$, $y^{(2)} = Ay^{(1)}$.

3. Вычисляем $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\dfrac{y_i^{(2)}}{y_i^{(1)}} - \dfrac{y_i^{(1)}}{y_i^{(0)}}\right|$.

4. Если $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\dfrac{y_i^{(2)}}{y_i^{(1)}} - \dfrac{y_i^{(1)}}{y_i^{(0)}}\right| < \varepsilon$, то $\lambda_1 = \max\left|\dfrac{y_i^{(2)}}{y_i^{(1)}}\right|$ – наибольшее по абсолютной величине собственное значение.

5. Если же нет, то находим $y^{(3)} = Ay^{(2)}$ и вычисляем $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\dfrac{y_i^{(3)}}{y_i^{(2)}} - \dfrac{y_i^{(2)}}{y_i^{(1)}}\right|$.

6. Если $\max\limits_{1\le i\le n}\left|\dfrac{y_i^{(3)}}{y_i^{(2)}} - \dfrac{y_i^{(2)}}{y_i^{(1)}}\right| < \varepsilon$, то $\lambda_1 = \max\limits_{1\le i\le n}\left|\dfrac{y_i^{(3)}}{y_i^{(2)}}\right|$. Если же нет, то находим $y^{(4)} = Ay^{(3)}$ и т.д.

Собственный вектор будет $y^{(k)}$, где $\lambda_1 = \lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{1\le i\le n}\left|\dfrac{y_i^{(k)}}{y_i^{(k-1)}}\right|$.

Задания к лабораторной работе № 9

Используя алгоритмические языки программирования, с точностью до $\varepsilon = 10^{-4}$ степенным методом найти наибольшее по абсолютной величине собственное значение и соответствующий ему собственный вектор:

$$1)\ \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix};\ 3)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4)\ \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};\ 5)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ 6)\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix};$$

$$7)\ \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix};\ 8)\ \begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix};\ 9)\ \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$10)\ \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix};\ 11)\ \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix};\ 12)\ \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix};$$

$$13)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix};\ 14)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 15 \\ 4 & 16 & 36 \end{pmatrix}.$$

Тесты

Тест по дисциплине "Вычислительные методы алгебры"

Список используемой литературы

[1] Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : Бином, 2006. – 354 с.

[2] Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков. – М. : Высш. шк., 2000. – 190 с.

[3] Вержбицкий, В. М. Основы численных методов : учебник для вузов / В. М. Вержбицкий. – М. : Наука, 2002. – 452 с.

[4] Воеводин, В. В. Вычислительные основы линейной алгебры / В. В. Воеводин. – М. : Наука, 1977. – 286 с.

[5] Вычислительная математика и программирование : учеб. пособие : в 2 ч. / Л. И. Богута [и др.]. – Л. : Изд-во ЛГПИ им. Герцена, 1973. – Ч. 1. – 82 с.

[6] Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1988. – 552 с.

[7] Годунов, С. К. Решение систем линейных уравнений / С. К. Годунов. – Новосибирск : Наука, 1980. – 177 с.

[8] Голуб, Дж. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун. – М. : Мир, 1999. – 548 с.

[9] Гусак, А. А. Элементы методов вычислений : учеб. пособие / А. А. Гусак. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. – 166 с.

[10] Иванова, Т. П. Программирование и вычислительная математика / Т. П. Иванова, Г. В. Пухова. – М. : Просвещение, 1978. – 320 с.

[11] Калиткин, Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

[12] Крылов, В. И. Вычислительные методы высшей математики : в 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – Минск : Выш. шк., 1972. – Т. 1. – 387 с.

[13] Парлетт, Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Б. Парлетт. – М. : Мир, 1983. – 384 с.

[14] Самарский, А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

[15] Стренг, Г. Линейная алгебра и ее применение / Г. Стренг. – М. : Мир, 1980. – 454 с.

[16] Тыртышников, Е. Е. Методы численного анализа / Е. Е. Тыртышников. – М. : Академия, 2007. – 320 с.

[17] Уилкинсон, Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. – М. : Наука, 1970. – 564 с.

[18] Фаддеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. – СПб. : Лань, 2009. – 736 с.