УДК 517.9

**Ал.Н. СЕНДЕР**
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

# ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Важнейшей составляющей частью любого вида человеческой деятельности является принятие решений в условиях вероятностной неопределенности. Сложность выбора того или иного решения зависит от степени определенности возможных исходов или последствий. Существуют ситуации, в которых можно более или менее точно оценить вероятность наступления исходов для каждого решения. В этих случаях говорят о принятии решений в условиях риска. Но гораздо чаще невозможно даже приблизительно указать вероятность того или иного результата, что связано с недостаточной информированностью о внешних обстоятельствах, в которых приходится принимать решение. Эта неопределенность порождается множеством различных факторов, таких как экономическая ситуация в стране, уровень инфляции, курсы валют, рыночная конъюнктура, политические отношения, состояние погоды, стихийные обстоятельства и т.п. В этом случае речь идет о принятии решений в условиях вероятностной неопределенности.

Математическая модель ситуации, в которой принятие решений зависит от объективных обстоятельств, называется игрой с природой. Подобные модели изучает такой раздел математики, как «Теория игр с природой» («Теория принятия решений»). Она служит для выработки рекомендаций по рациональному образу действий в условиях риска и неопределенности, вызванной не зависящими от нас причинами. Игру с природой можно определить как парную игру, в которой сознательный игрок $A$, заинтересованный в наиболее выгодном для него исходе игры, выступает против участника, совершенно безразличного к результату – природы $\Pi$. Очевидно, что при решении игр с природой достаточно найти наилучшие рекомендации только для игрока $A$, потому как природа в рекомендациях не нуждается, развиваясь в соответствии с определенными законами независимо от того, удобно это человеку или нет.

Пусть игрок $A$ располагает $m$ возможными стратегиями, которые обозначим $A_1,\ldots,A_n$, тогда как природа $\Pi$ может принимать одно из $n$ своих состояний $\Pi_1,\ldots,\Pi_n$.

Предполагается обычно, что игрок $A$ в состоянии оценить результаты выбора им каждой из своих стратегий $A_i$, $i=\overline{1,m}$, при каждом состоянии природы $П_j$, $j=\overline{1,n}$, количественно выражающиеся действительными числами $a_{ij}$. Эти числа называются выигрышами игрока $A$.

В таком случае игра может быть задана матрицей $P=[a_{ij}]_{m\times n}$, называемой платежной матрицей (или матрицей игры).

Таблица – Матрица игры

| $П_j$ / $A_i$ | $П_1$ | ... | $П_n$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | $a_{11}$ | ... | $a_{1n}$ |
| ... | ... | ... | ... |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | ... | $a_{mn}$ |

Если в платежной матрице элементы $k$-й строки не меньше соответствующих элементов $s$-й строки, т.е. $a_{kj} \ge a_{sj}$ $(j=\overline{1,n})$, то говорят, что стратегия $A_k$ *доминирует* над стратегией $A_s$. Частным случаем доминирования стратегий является дублирование стратегий, когда $a_{kj} = a_{sj}$ $(j=\overline{1,n})$. Исключение из платежной матрицы доминируемых стратегий (ими игрокам пользоваться заведомо невыгодно) позволяет уменьшить ее размерность, а это упрощает решение игры. Отбрасывать же те или иные состояния природы нельзя, поскольку она может реализовать любое свое состояние независимо от того, выгодно оно игроку $A$ или нет.

После упрощения платежной матрицы иногда выгодно перейти от нее к матрице рисков, которая позволит более четко выявить преимущество одной стратегии по сравнению с другой при данном состоянии природы.

Риском $r_{ij}$ игрока $A$, когда он пользуется чистой стратегией $A_i$ при состоянии $П_j$ природы, называется разность между максимальным выигрышем $\max a_{ij}$, который он мог бы получить, достоверно зная, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем $a_{ij}$, который он получит, используя стратегию $A_i$, не зная, какое из состояний $П_j$ природа реализует.

Таким образом, элементы $r_{ij}$ матрицы рисков определяются по формуле:

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \ge 0, \qquad (1)$$

где $\beta_j$ – максимально возможный выигрыш игрока $A$ при состоянии $r_{ij}$ (максимальный элемент $j$-го столбца платежной матрицы).

Учитывая специфику игр с природой, при поиске оптимальных решений обращаются к различным критериям, дающим некоторую логическую схему принятия решения. В условиях риска, т.е. когда известны вероятности $q_j$ состояний природы, можно использовать критерии Байеса и Лапласа. При принятии решений в условиях неопределенности – критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

**1. Критерии Байеса**

Этот критерий используется в предположении, что вероятности $q_j$ состояний природы $П_j$ известны. В качестве показателя эффективности чистой стратегии $A_j$ используется средневзвешенный выигрыш при стратегии $A_j$ с весами $q_1,\ldots,q_n$, т.е. величина

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \ \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad (2)$$

Оптимальной по *Байесу* чистой стратегией является стратегия с максимальным показателем эффективности. Цена игры в этом случае определяется по формуле:

$$b = \max_{1\le i\le m} b_i = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j. \qquad (3)$$

Аналогично можно найти оптимальную по *Байесу* стратегию, используя формулу

$$R_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \ \left(i = \overline{1,m}\right) \qquad (4)$$

и матрицу рисков. В этом случае средний риск следует минимизировать. Однако следует заметить, что стратегия, максимизирующая средний выигрыш, совпадает со стратегией, минимизирующей средний риск.

**2. Критерий Лапласа**

Если игрок $A$ не располагает объективной информацией об вероятностях $q_j$ состояний природы и считает в равной мере правдоподобными все состояния, то их вероятности полагают одинаковыми и равными $1/n$. Этот прием называют принципом недостаточного основания *Лапласа*.

Отсюда вытекает и критерий *Лапласа*, в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия, обеспечивающая максимальный средний выигрыш игрока $A$ при равенстве всех вероятностей.

В этом случае показатели эффективности каждой чистой стратегии рассчитываются по формуле:

$$l_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad (5)$$

а цена игры равна

$$l = \max_{1 \le i \le m} l_i = \max_{1 \le i \le m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \qquad (6)$$

При использовании критериев *Байеса* и *Лапласа* предполагается, что ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами: 1) вероятности появления состояний $П_j$ известны и не зависят от времени; 2) решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз; 3) для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск. При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск практически исключён.

**3. Критерий Вальда**

В случае, если вероятности состояний природы неизвестны и нет возможности получить о них какую-либо статистическую информацию, при определении оптимального решения можно использовать критерий *Вальда*.

Критерий *Вальда* является критерием крайнего пессимизма, так как здесь игрок $A$ исходит из предположения, что природа $П$ действует против него наихудшим образом, т.е. реализует такие состояния $П_j$, при которых величина его выигрыша принимает наименьшее значение.

Показатели эффективности каждой чистой стратегии рассчитываются по формуле:

$$w_i = \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad (7)$$

Оптимальной по критерию *Вальда* считается та чистая стратегия, показатель эффективности которой будет максимальным, т.е. обеспечивается максимин

$$w = \max_{1 \le i \le n} w_i = \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le n} a_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad (8)$$

Критерий *Вальда* часто также называют максиминным критерием.

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется.

Применение критерия *Вальда* бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, следующая: 1) о возможности появления внешних состояний $П_j$ ничего не известно; 2) приходится считаться с появлением различных внешних состояний $П_j$; 3) решение реализуется только один раз; 4) необходимо исключить какой бы то ни было риск.

**4. Критерий Сэвиджа**

Критерий *Сэвиджа*, как и критерий *Вальда*, является критерием крайнего пессимизма, ибо и здесь игрок $A$ исходит из предположения, что природа реализует самые неблагоприятные для него состояния. Критерий

*Сэвиджа* рекомендует выбирать в качестве оптимальной ту чистую стратегию, при которой минимизируется величина максимального риска.

Таким образом, показатель эффективности определяется как величина максимального риска:

$$s_i = \max_{1 \le j \le n} r_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{9}$$

А цена игры равна

$$s = \min_{1 \le i \le n} s_i = \min_{1 \le i \le n} \max_{1 \le j \le n} r_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \tag{10}$$

При использовании критерия *Сэвиджа* ситуация, в которой принимается решение, должна удовлетворять тем же условиям, что и при применении критерия *Вальда*.

**5. Критерий Гурвица**

Занять более уравновешенную позицию, которая находится где-то между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма, предлагает критерий *Гурвица*. Его также часто называют критерием пессимизма-оптимизма.

В области чистых стратегий показатель эффективности определяется из условия:

$$g_i = \gamma \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\gamma) \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \quad \left(i = \overline{1,m},\ \ 0 \le \gamma \le 1\right). \tag{11}$$

Оптимальной по *Гурвицу* считается та чистая стратегия, показатель эффективности которой принимает наибольшее значение

$$g = \max_{1 \le i \le m} g_i = \max_{1 \le i \le m} \left\{ \gamma \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\gamma) \max_{1 \le j \le n} a_{ij} \right\},\ 0 \le \gamma \le 1. \tag{12}$$

Параметр $\gamma$ выбирается из субъективных соображений, потому что на практике очень трудно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Чаще всего $\gamma$ полагают равным 0,5.

При $\gamma = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий *Вальда* (крайнего пессимизма).

При $\gamma = 0$ – в критерий крайнего оптимизма, или критерий «азартного игрока», делающего ставку на то, что исход игры будет для него самым благоприятным:

$$g = \max_{1 \le i \le m} g_i = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} a_{ij}. \tag{13}$$

При $0 < \gamma < 1$ получается нечто среднее между точкой зрения крайнего оптимизма и крайнего пессимизма.

Критерий Гурвица применяется в случае, когда: 1) о вероятностях появления состояния $П_j$ ничего не известно; 2) с появлением состояния $П_j$ необходимо считаться; 3) реализуется только малое количество решений; 4) допускается некоторый риск.