УДК 512.542

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП С КОММУТАНТАМИ *B*-ПОДГРУПП

Е. В. ЗУБЕЙ [1)]

[1)]*Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины, ул. Советская, 104, 246007, г. Гомель, Беларусь.*

Конечная ненильпотентная группа называется *B*-группой, если в ее факторгруппе по подгруппе Фраттини все собственные подгруппы нильпотентны. Устанавливается *r*-разрешимость группы, в которой некоторая силовская *r*-подгруппа перестановочна с коммутантами 2-нильпотентных (или 2-замкнутых) *B*-подгрупп четного порядка группы, а также разрешимость группы, у которой коммутанты 2-замкнутых и 2-нильпотентных *B*-подгрупп четного порядка перестановочны.

Ключевые слова: конечная группа; *r*-разрешимая группа; силовская подгруппа; *B*-группа; коммутант; перестановочные подгруппы.

ON THE PERMUTABILITY OF SYLOW SUBGROUPS WITH DERIVED SUBGROUPS OF *B*-SUBGROUPS

E. V. ZUBEI [a]

[a]*Francisk Skorina Gomel State University, 104 Saveckaja Street, Gomel 246007, Belarus.*

A finite non-nilpotent group G is called a B-group if every proper subgroup of the quotient group $G/\Phi(G)$ is nilpotent. We establish the r-solvability of the group in which some Sylow r-subgroup permutes with the derived subgroups of 2-nilpotent (or 2-closed) B-subgroups of even order and the solvability of the group in which the derived subgroups of 2-closed and 2-nilpotent B-subgroups of even order are permutable.

Key words: finite group; *r*-solvable group; Sylow subgroup; *B*-group; the derived subgroup; permutable subgroups.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [1]. Обзоры результатов о свойствах групп Шмидта, существовании подгрупп Шмидта и их некоторых приложениях в теории классов конечных групп приведены в [2; 3].

Одной из первых работ, посвященных перестановочности некоторых подгрупп с подгруппами Шмидта, является статья Я. Г. Берковича и Э. М. Пальчика [4]. Их результаты получили развитие в исследованиях В. Н. Князиной и В. С. Монахова [5–7]. Группы с ограничениями на некоторые подгруппы Шмидта изучались в [8–13].

Образец цитирования:
Зубей ЕВ. О перестановочности силовских подгрупп с коммутантами *B*-подгрупп. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2019;1:
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-3-14

For citation:
Zubei EV. On the permutability of Sylow subgroups with derived subgroups of *B*-subgroups. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2019;1:. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2019-1-3-14

Автор:
Екатерина Владимировна Зубей – аспирантка кафедры алгебры и геометрии факультета математики и технологий программирования. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор В. С. Монахов.

Author:
Ekaterina V. Zubei, postgraduate student at the department of algebra and geometry, faculty of mathematics and programming technologies.
ekaterina.zubey@yandex.ru

Я. Г. Беркович предложил называть B-группой группу, у которой факторгруппа по подгруппе Фраттини является группой Шмидта [14, с. 461]. Начальные свойства B-группы установлены в [15]. Ее строение во многом схоже со строением группы Шмидта: B-группа бипримарна, одна из силовских подгрупп нормальна, а другая – циклическая (см. лемму 1). Но есть и отличия: в группе Шмидта подгруппа Фраттини нормальной силовской подгруппы содержится в центре группы, а в B-группе это свойство нарушается. Примером служит диэдральная группа порядка 18, она является B-группой и не является группой Шмидта.

В настоящей работе устанавливается r-разрешимость группы при условии, что некоторая силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантами 2-нильпотентных (или 2-замкнутых) B-подгрупп четного порядка группы, а также разрешимость группы, у которой коммутанты 2-замкнутых и 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка перестановочны.

Вспомогательные результаты

Все используемые обозначения и определения соответствуют [16; 17].

Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так:

$$G = [A]B.$$

Через $Z(G)$, $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются центр, подгруппа Фиттинга и подгруппа Фраттини группы G соответственно, а через H^G – наименьшая нормальная в G подгруппа, содержащая подгруппу H.

Группа G с нормальной силовской p-подгруппой G_p называется p-замкнутой. Если в группе G имеется нормальная подгруппа $G_{p'}$ такая, что $G = \left[G_{p'}\right]G_p$, то группа G называется p-нильпотентной. Если порядок подгруппы H делится на простое число p, то говорят, что H – pd-подгруппа.

Следуя [3], будем использовать обозначение $S_{\langle p,\, q\rangle}$ для группы Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной силовской q-подгруппой. B-группу, у которой $B/\Phi(B)$ является $S_{\langle p,\, q\rangle}$-группой, будем называть $B_{\langle p,\, q\rangle}$-группой. Ясно, что любая $S_{\langle p,\, q\rangle}$-группа является $B_{\langle p,\, q\rangle}$-группой.

Лемма 1 [15, лемма 2.2]. *Пусть B – $B_{\langle p,\, q\rangle}$-группа, P и Q – ее силовские p- и q-подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $B = [P]Q$;

(2) $P \cap \Phi(B) = \Phi(P)$, $P = B'$ и $P/\Phi(P)$ – главный фактор группы B порядка p^m, где m – показатель числа p по модулю q;

(3) $Q = \langle y \rangle$ – циклическая подгруппа и $y^q \in Z(B)$. Кроме того, $\Phi(B) = \Phi(P) \times \langle y^q \rangle$ и $Z(B) \le \Phi(B)$;

(4) если H – нормальная в B подгруппа и $H \ne B$, то H нильпотентна;

(5) если M – максимальная в B подгруппа, то либо M нормальна в B и $M = P \times \langle y^q \rangle$, либо $M = \left[\Phi(P)\right]Q^x$ для некоторого $x \in B$.

Лемма 2 [15, лемма 2.5]. *Пусть U – нормальная в группе V подгруппа и V/U является $B_{\langle p,\, q\rangle}$-группой. Если H – наименьшая в V подгруппа такая, что $HU = V$, то H будет $B_{\langle p,\, q\rangle}$-группой.*

Лемма 3. *Если в группе G нет $B_{\langle p,\, q\rangle}$-подгрупп для всех $q \in \pi(G)$, то группа G p-нильпотентна.*

Доказательство (индукцией по порядку группы). Если H – собственная в G подгруппа, то H удовлетворяет условию леммы и по индукции она p-нильпотентна. Теперь по [16, IV.5.4] группа G либо p-нильпотентна, либо является p-замкнутой группой Шмидта, а следовательно, и B-группой. Последнее исключается условием леммы. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если в группе G нет 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, то группа G 2-замкнута.*

Доказательство. По условию в группе G нет 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка. Поэтому в ней нет и 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка. Значит, группа G 2-замкнута по [18, следствие 3.1]. Лемма доказана.

Обозначим: $S(G)$ – разрешимый радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G; $S_r(G)$ – наибольшая нормальная r-разрешимая подгруппа группы G для простого r.

Далее используется понятие X-перестановочности подгрупп, которое в 2003 г. предложил А. Н. Скиба [19] (см. также [20]). Пусть X – непустое подмножество группы G. Подгруппы A и B называются X-перестановочными, если существует элемент $x \in X$ такой, что $AB^x = B^xA$. Если $X = 1$ – единичная подгруппа, то 1-перестановочные подгруппы – это в точности перестановочные подгруппы. Ясно, что перестановочные подгруппы будут X-перестановочными для любого непустого множества X.

Лемма 5 [20, лемма 2.1]. *Пусть A, B и X – подгруппы группы G, N – нормальная в G подгруппа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A;

(2) если A X-перестановочна с B, то AN/N XN/N-перестановочна с BN/N;

(3) если A X-перестановочна с B и X – нормальная подгруппа группы G, то AX/X перестановочна с BX/X;

(4) если A X-перестановочна с B и $X \le Y \le G$, то A Y-перестановочна с B;

(5) если A X-перестановочна с B и $X \le A$ либо $X \le B$, то A перестановочна с B.

Напомним, что подгруппа, порожденная коммутаторами всех элементов группы G, называется коммутантом группы G и обозначается G'. Таким образом, $G' = \langle [a, b] \mid a, b \in G \rangle$. Нам понадобятся следующие свойства коммутантов.

Лемма 6. *(1) Если $H \le G$, то $H' \le G'$ [17, лемма 4.2].*

(2) Пусть $N \lhd G$. Тогда $(G/N)' = G'N/N$ [17, лемма 4.6].

(3) Если $G = HN$ и $N \lhd G$, то $G'N = H'N$ [17, лемма 5.8].

Лемма 7. *Если подгруппа U группы G перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы группы G, то подгруппа U^x, $x \in G$, также перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы группы G.*

Доказательство. Пусть B – $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппа группы G. Тогда B^x – тоже $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппа группы G и $(B^x)' = (B')^x$ для любого $x \in G$. По условию $U(B')^{x^{-1}} = (B')^{x^{-1}}U$. Тогда $\left(U(B')^{x^{-1}}\right)^x = U^x B' = \left((B')^{x^{-1}}U\right)^x = B'U^x$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Предположим, что в группе G силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы.*

(1) Если $U \le G$, то силовская r-подгруппа из U перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы из U.

(2) Если N – нормальная в G подгруппа, то силовская r-подгруппа из факторгруппы G/N перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы из G/N.

(3) Если $U \le G$ и N – нормальная в U подгруппа, то в U/N силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантом каждой $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы из U/N.

Доказательство. (1) Пусть R_1 – силовская r-подгруппа в U. Тогда существует такая силовская r-подгруппа R в G, что $R_1 \le R$. Пусть S' – коммутант $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы S из U. По условию $RS' = S'R$. По тождеству Дедекинда $U \cap RS' = (U \cap R)S' = R_1S' = S'R \cap U = S'(R \cap U) = S'R_1$.

(2) Пусть R – силовская r-подгруппа группы G. Тогда RN/N – силовская r-подгруппа в G/N. Пусть B/N – $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппа из G/N. По лемме 2 $B = B_1N$, где B_1 – $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппа. По условию $B_1'R = RB_1'$, а так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то $RB_1'N = B_1'NR$. По утверждению (3) леммы 6 $B_1'N = B'N$. Значит,

$$R(B'N) = R(B_1'N) = (B_1'N)R = (B'N)R. \tag{1}$$

По утверждению (2) леммы 6

$$(B/N)' = B'N/N. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем

$$(RN/N)(B/N)' = (RN/N)(B'N/N) = (B'N/N)(RN/N) = (B/N)'(RN/N).$$

(3) Утверждение (3) следует из (1) и (2). Лемма доказана.

Замечание 1. Если в условии леммы 8 вместо $B_{\langle p, q\rangle}$-подгруппы рассмотреть $S_{\langle p, q\rangle}$-подгруппу, то аналог утверждения (1) будет выполняться, а (2) и (3) – нарушаться.

Признаки *r*-разрешимости группы

Теорема 1. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G $S_r(G)$-перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r-разрешима.*

Доказательство (индукцией по порядку группы). Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если факторгруппа G/X не содержит 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, то она 2-замкнута по лемме 4, а значит, разрешима. В этом случае группа G r-разрешима и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка B/X.

Пусть R – силовская r-подгруппа группы G, тогда RX/X – силовская r-подгруппа в G/X. По лемме 2 минимальное добавление L к X в B является 2-нильпотентной B-подгруппой четного порядка. Если L содержится в X, то $B = XL$ тоже содержится в X и $B/X = 1$, т. е. получено противоречие. Следовательно, L не содержится в X.

По условию R X-перестановочна с L'. По утверждению (3) леммы 5 RX/X перестановочна с $L'X/X$. Используя лемму 6, получаем

$$(RX/X)(B/X)' = (RX/X)(B'X/X) = (RX/X)(L'X/X) =$$

$$= (L'X/X)(RX/X) = (B'X/X)(RX/X) = (B/X)'(RX/X).$$

Следовательно, RX/X перестановочна с коммутантом $(B/X)' = L'X/X$ 2-нильпотентной B-подгруппы четного порядка B/X и условия теоремы наследуются факторгруппой G/X. По индукции факторгруппа G/X r-разрешима, а значит, r-разрешима и группа G.

Теперь предположим, что $S_r(G) = 1$, и надо доказать следующее утверждение: если силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-нильпотентных B-подгрупп четного порядка, то группа G r-разрешима. Докажем это утверждение индукцией по порядку группы G. Пусть U – собственная подгруппа группы G. По утверждению (1) леммы 8 в подгруппе U силовская r-подгруппа перестановочна с коммутантом каждой 2-нильпотентной B-подгруппы четного порядка. Значит, условия утверждения выполняются для собственной подгруппы U из группы G. Следовательно, по индукции подгруппа U r-разрешима.

Пусть R – силовская r-подгруппа и D – 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка группы G. По лемме 7 $R^x D' = D' R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме Кегеля [16, VI.4.10] имеем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит, группа G непростая.

Рассмотрим факторгруппу G/N, $N \neq 1$. Тогда RN/N – силовская r-подгруппа в G/N. Пусть B/N – 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка из G/N. Используя утверждение (2) леммы 8, получим $(RN/N)(B/N)' = (B/N)'(RN/N)$. По индукции G/N r-разрешима, следовательно, G r-разрешима. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если некоторая силовская r-подгруппа группы G $S_r(G)$-перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка, не содержащимися в $S_r(G)$, то группа G r-разрешима.*

Доказательство. Применим индукцию к порядку группы G. Предположим, что $X = S_r(G) \neq 1$. Если в факторгруппе G/X нет 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка, то она 2-нильпотентна по лемме 3, а значит, разрешима. В этом случае группа G r-разрешима и утверждение верно. Следовательно, в факторгруппе G/X содержится 2-замкнутая B-подгруппа четного порядка B/X. Далее, повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1, заменив в нем только 2-нильпотентность B-подгруппы на 2-замкнутость, получаем, что группа G r-разрешима.

Теперь предположим, что $S_r(G) = 1$, и надо доказать следующее утверждение: если силовская r-подгруппа группы G перестановочна со всеми коммутантами 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка, то группа G r-разрешима. Доказательство проведем индукцией по порядку группы G. Пусть U – собственная подгруппа группы G. Тогда по утверждению (1) леммы 8 силовская r-подгруппа из U перестановочна с коммутантами 2-замкнутых B-подгрупп четного порядка из U. По индукции подгруппа U r-разрешима.

Пусть R – силовская r-подгруппа и D – 2-замкнутая B-подгруппа четного порядка группы G. По лемме 7 $R^x D' = D' R^x$ для любого $x \in G$. Тогда по лемме Кегеля [16, VI.4.10] получаем, что либо $R^G \neq G$, либо $(D')^G \neq G$. Значит, группа G непростая. Рассмотрим факторгруппу G/N, $1 \neq N \triangleleft G$. По утверждению (2) леммы 8 силовская RN/N r-подгруппа перестановочна с коммутантом 2-замкнутой B-подгруппы четного порядка из G/N. Тогда по индукции подгруппа G/N r-разрешима. Следовательно, группа G r-разрешима. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если в группе G коммутант каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-замкнутой B-подгруппы четного порядка $S(G)$-перестановочен с коммутантом каждой не содержащейся в $S(G)$ 2-нильпотентной B-подгруппы четного порядка, то группа G разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию к порядку группы G. Пусть N – нормальная в G подгруппа, U/N и V/N – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B-подгруппы четного порядка из G/N, не содержащиеся в $S(G/N)$. По лемме 2 $U = U_1N$ и $V = V_1N$, где U_1 и V_1 – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B-подгруппы четного порядка соответственно. Если $U_1 \le S(G)$, то $U/N = U_1N/N \le S(G/N)$. Получено противоречие. Поэтому $U_1 \not\le S(G)$, аналогично $V_1 \not\le S(G)$.

По условию $U_1'V_1' = V_1'U_1'$. Так как нормальная подгруппа перестановочна с любой подгруппой, то

$$(U_1'N)(V_1'N) = (V_1'N)(U_1'N).$$

По лемме 6 $U_1'N = U'N$ и $V_1'N = V'N$, поэтому $(U'N)(V'N) = (V'N)(U'N)$. Также по лемме 6

$$(U/N)'(V/N)' = (V/N)'(U/N)'.$$

Таким образом, условия теоремы выполняются для факторгруппы G/N. Если $N \neq 1$, то по индукции G/N разрешима. Поэтому надо считать, что $S(G) = 1$.

Докажем, что группа G непростая. Пусть $H = [H_2]H_{2'}$ – 2-замкнутая B-подгруппа четного порядка и $D = [D_{2'}]D_2$ – 2-нильпотентная B-подгруппа четного порядка группы G. По условию $H_2D_{2'} = D_{2'}H_2$ и подгруппа $H_2D_{2'}$ разрешима как бипримарная группа. По лемме 7 $H_2D_{2'}^x = D_{2'}^xH_2$ для любого $x \in G$, в частности $G \neq H_2D_{2'}$. По лемме Кегеля [16, VI.4.10] получаем, что либо $H_2^G \neq G$, либо $D_{2'}^G \neq G$. Значит, группа G непростая.

Рассмотрим собственную подгруппу Y группы G. Пусть T и S – 2-замкнутая и 2-нильпотентная B-подгруппы четного порядка из Y соответственно. По условию $S'T' = T'S'$. Следовательно, для собственной подгруппы Y условия теоремы выполняются и по индукции Y разрешима.

Так как группа G непростая, то в ней существует отличная от единицы собственная нормальная подгруппа N. Подгруппа N и факторгруппа G/N разрешимы. Следовательно, группа G разрешима. Теорема доказана.

Замечание 2. Согласно теореме В. П. Буриченко [21], для любой группы X существует группа G и ее абелева нормальная подгруппа N такая, что $G/N \simeq X$ и все подгруппы простых порядков и порядка 4 из G содержатся в подгруппе N. Так как в коммутанте каждой подгруппы Шмидта все неединичные элементы имеют простые порядки и порядок 4, то в группе G из теоремы В. П. Буриченко коммутанты всех подгрупп Шмидта содержатся в подгруппе N. В частности, в G коммутанты 2-нильпотентных и 2-замкнутых подгрупп Шмидта четного порядка перестановочны. Поэтому в теоремах 1–3 заменить B-подгруппу на подгруппу Шмидта нельзя.

Библиографические ссылки

1. Шмидт ОЮ. Группы, все подгруппы которых специальные. *Математический сборник.* 1924;31(3–4):366–372.
2. Кузенный НФ, Левищенко СС. Конечные группы Шмидта и их обобщения. *Український математичний журнал.* 1991;43(7–8):963–968.
3. Монахов ВС. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения. В: *Труды Украинского математического конгресса: сборник трудов.* Киев: Институт математики НАН Украины; 2002. с. 81–90.
4. Беркович ЯГ, Пальчик ЭМ. О перестановочности подгрупп конечной группы. *Сибирский математический журнал.* 1967;8(4):741–753.
5. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2010;16(3):130–139.
6. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2011;17(4):126–133.
7. Княгина ВН, Монахов ВС. О перестановочности *n*-максимальных подгрупп с подгруппами Шмидта. *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2012;18(3):125–130.
8. Монахов ВС. О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта. *Математические заметки.* 1995;58(5):717–722.
9. Княгина ВН, Монахов ВС. О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта. *Сибирский математический журнал.* 2004;45(6):1316–1322.
10. Княгина ВН, Монахов ВС. Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта. *Алгебра и логика.* 2007;46(4):448–458.
11. Ведерников ВА. Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта. *Алгебра и логика.* 2007;46(6):669–687.
12. Kniahina VN, Monakhov VS. Finite groups with Hall Schmidt subgroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen.* 2012;81(3–4):341–350.
13. Al-Sharo KhA, Skiba AN. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups. *Communications in Algebra.* 2017;45(10):4158–4165. DOI: 10.1080/00927872.2016.1236938.

14. Berkovich Y, Janko Z. *Groups of Prime Power Order. Volume 3.* Berlin: Walter de Gruyter; 2011.
15. Князина ВН. О произведении *B*-группы и примарной группы. *Проблемы физики, математики и техники.* 2017;3(32): 52–57.
16. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin: Springer-Verlag; 1967. DOI: 10.1007/978-3-642-64981-3.
17. Монахов ВС. *Введение в теорию конечных групп и их классов.* Минск: Вышэйшая школа; 2006.
18. Монахов ВС. О подгруппах Шмидта конечных групп. *Вопросы алгебры.* 1998;13:153–171.
19. Скиба АН. *H*-permutable subgroups. *Известия Гомельского государственного университета.* 2003;4:37–39.
20. Guo W, Shum KP, Skiba AN. *X*-semipermutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra.* 2007;315(1):31–41. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.06.002.
21. Буриченко ВП. О группах, элементы малых порядков которых порождают малую подгруппу. *Математические заметки.* 2012;92(3):361–367. DOI: 10.4213/mzm8972.

References

1. Shmidt O Ju. [Groups, whose all subgroups are special]. *Matematicheskii sbornik.* 1924;31(3–4):366–372. Russian.
2. Kuzennyi N F, Levishhenko SS. Schmidt's finite groups and their generalizations. *Ukraïns'kyj matematychnyj zhurnal.* 1991; 43(7–8):963–968. Russian.
3. Monakhov VS. [The Schmidt subgroups, its existence, and some of their classes]. In: *Trudy Ukrainskogo matematicheskogo kongressa: sbornik trudov.* Kiev: Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine; 2002. p. 81–90. Russian.
4. Berkovich YaG, Pal'chik JeM. [On the commutability of subgroups of afinite group]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal.* 1967; 8(4):741–753. Russian.
5. Knyagina VN, Monakhov VS. On permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2010;16(3):130–139. Russian.
6. Knyagina VN, Monakhov VS. On the permutability of maximal subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2011;17(4):126–133. Russian.
7. Knyagina VN, Monakhov VS. On the permutability of *n*-maximal subgroups with Schmidt subgroups. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki Ural'skogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk*. 2012;18(3):125–130. Russian.
8. Monakhov VS. [Finite groups with a given set of Schmidt subgroups]. *Matematicheskie zametki.* 1995;58(5):717–722. Russian.
9. Kniahina VN, Monakhov VS. [Finite groups with subnormal Schmidt subgroups]. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*. 2004; 45(6):1316–1322. Russian.
10. Kniahina VN, Monakhov VS. [Finite groups with seminormal Schmidt subgroups]. *Algebra i logika.* 2007;46(4):448–458. Russian.
11. Vedernikov VA. [Finite groups with subnormal Schmidt subgroups]. *Algebra i logika.* 2007;46(6):669–687. Russian.
12. Kniahina VN, Monakhov VS. Finite groups with Hall Schmidt subgroups. *Publicationes Mathematicae Debrecen.* 2012;81(3–4): 341–350.
13. Al-Sharo KhA, Skiba AN. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups. *Communications in Algebra.* 2017;45(10): 4158–4165. DOI: 10.1080/00927872.2016.1236938.
14. Berkovich Y, Janko Z. *Groups of Prime Power Order. Volume 3.* Berlin: Walter de Gruyter; 2011.
15. Kniahina VN. On the product of a *B*-group and a primary group. *Problems of Physics, Mathematics and Technics*. 2017;3(32): 52–57. Russian.
16. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin: Springer-Verlag; 1967. DOI: 10.1007/978-3-642-64981-3.
17. Monakhov VS. *Vvedenie v teoriju konechnyh grupp i ih klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vyshjejshaja shkola; 2006. Russian.
18. Monakhov VS. [On Schmidt subgroups of finite groups]. *Voprosy algebry*. 1998;13:153–171. Russian.
19. Skiba AN. *H*-permutable subgroups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta.* 2003;4:37–39.
20. Guo W, Shum KP, Skiba AN. *X*-semipermutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra.* 2007;315(1):31–41. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2007.06.002.
21. Burichenko VP. [On groups whose small- order elements generate a small subgroup]. *Matematicheskie zametki.* 2012;92(3): 361–367. DOI: 10.4213/mzm8972.

Статья поступила в редколлегию 27.08.2018.
Received by editorial board 27.08.2018.