УДК 513.82

А.А. Юдов, Е.Е. Гурская

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ С ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППОЙ *G* – ГРУППОЙ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА $^2R_4$.

В работе рассматривается пространство $^2R_4$ – четырехмерное псевдоевклидово пространство нулевой сигнатуры. Исследуются однородные пространства с фундаментальной группой Ли G – группой Ли движений пространства $^2R_4$. Изучается класс таких пространств, имеющих в качестве группы стационарности двумерную подгруппу Ли группы Ли H вращений пространства $^2R_4$. Среди однородных пространств такого вида находятся все редуктивные пространства.

В работе исследуются геометрии однородных пространств. Изучение таких пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько,

А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и другие. Исследованием редуктивных однородных пространств занимались также эстонский геометр Ю. Лумисте [1] и японские геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси [2–3]. Ю. Лумисте показал применимость редуктивных однородных пространств к проблеме расширения связностей на расслоениях с редуктивными однородными слоями. Геометры К. Номидзу и Ш. Кобаяси проводили широкое исследование редуктивных однородных пространств, в частности исследовали свойства инвариантной связности в редуктивных однородных пространствах. В данной работе исследуется специальный класс однородных пространств, фундаментальной группой для которых является группа Ли G движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры – пространства $^2R_4$. Рассматриваются такие однородные пространства, группа стационарности у которых двухмерная. Среди таких пространств находятся все редуктивные однородные пространства, в алгебрах

Ли фундаментальных групп Ли находятся все соответствующие редуктивные

дополнения.

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H стационарности точки пространства ${}^2R_4$ и абелевой группы T_4 параллельных переносов пространства ${}^2R_4$: $G = H \otimes T_4$.

Алгебра Ли $\overline{G}$ является полупрямой суммой алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H и коммутативной алгебры Ли группы Ли: $\overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4$.

Рассмотрим связные подгруппы Ли группы Ли G движений пространства ${}^2R_4$. Все связные подгруппы Ли группы Ли G, с точностью до сопряженности, перечислены в работе [4]. Тем самым классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой G. Необходимо среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной работе найдены все редуктивные однородные пространства вида G/G_i, где G_i – связная двухпараметрическая подгруппа Ли группы Ли H вращений пространства ${}^2R_4$. Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства G/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{G}$ и $\overline{G_i}$, затем находятся все четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $\mathrm{ad}\overline{G_i}$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G_i}$. Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i. Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i.

Определение. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}\,, \qquad (1)$$

причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Для нахождения редуктивных дополнений используем следующий способ.

Пусть a_1, a_2 – базис алгебры Ли $\overline{G_i}$ группы Ли G_i, принадлежащей группе Ли H. Рассмотрим четырехмерное векторное подпространство m алгебры Ли $\overline{H}$, образованное векторами b_1, b_2, b_3, b_4, т.е. $m = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Для этого подпространства m потребуем выполнимость условия инвариантности относительно ada_i, i = 1, 2. Т.е. выполнимость условий:

$$[a_i, b_j] = \alpha_{j1}b_1 + \alpha_{j2}b_2 + \alpha_{j3}b_3 + \alpha_{j4}b_4,\ j = 1, 2, 3, 4;\ i = 1, 2. \qquad (2)$$

Систему (2) будем называть системой инвариантности пространства m или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10} [4], [5] алгебры Ли $\overline{H}$, получим систему инвариантности в виде системы алгебраических уравнений. Пусть например $b_j = \beta_{j5}i_5 + \ldots + \beta_{j10}i_{10}$.Элементарными преобразованиями можно от базиса $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ перейти к базису $\{b'_1, b'_2, b'_3, b'_4\}$ с более простыми коэффициентами $\beta_{jк}$. Для этого придется рассмотреть 20 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены трехмерные пространства $m_1,\ldots,m_p$, инвариантные относительно $ad\overline{G_i}$. Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (1). Такие пространства m_i и будут искомыми редуктивными дополнениями.

Нахождение редуктивных пространств H/G$_i$

Все трехмерные подгруппы Ли группы Ли H известны [4]. Запишем алгебры Ли для этих подгрупп с помощью базисов: $\overline{G_{14}}$ = {i_5, i_{10}}, $\overline{G_{15}}$ = {i_6, i_9}, $\overline{G_{16}}$ = {i_9, $i_8 - i_{10}$}, $\overline{G_{17}}$ = {i_9, $i_5 - i_7$}, $\overline{G_{18}}$ = {$i_5 - i_7$, $i_8 - i_{10}$}, $\overline{G_{19}}$ = {i_6, $i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$}, $\overline{G_{20}}$ = {$i_6 - i_9$, $i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$}, $\overline{G_{21}}$ = {$i_6 - i_9$, $i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}$}, $\overline{G_{22}}$ = {$i_6 + \lambda i_9$, $i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}$}, $\lambda \neq 0, \pm 1$, $\overline{G_{23}}$ = {$i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$, $i_8 - i_{10} \pm i_6 \pm i_9$}, $\overline{G_{24}}$ = {$i_5 - i_{10}$, $i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$}, $\overline{G_{25}}$ = { $i_6 - i_9 + \lambda(i_5 - i_7)$, $i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$}, $\overline{G_{26}}$ = {$i_5 - i_{10}$, $i_6 - i_9$}.

Рассмотрим подалгебру {i_6}. Будем искать четырехмерные инвариантные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно adi_6. Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1^o. Инвариантные подпространства будем искать в виде: {$i_5 + \lambda i_9 + \mu i_{10}$, $i_6 + \nu i_9 + \sigma i_{10}$, $i_7 - si_9 + ti_{10}$, $i_8 + pi_9 + qi_{10}$}.Система инвариантности запишется в виде: $s\mu + p = 0$, $\sigma s = 0$, $ts = 0$, $\lambda + qs = 0$, $t\mu + q = 0$, $\sigma t = 0$, $t^2 = 1$, $\mu + tq = 0$.

Поскольку, как следует из седьмого уравнения системы инвариантности, $t = \pm 1 \neq 0$, то из третьего и шестого уравнения следует: $s = 0$, $\sigma = 0$. Отсюда: $p = 0$, $\lambda = 0$, $q = \pm \mu$. Инвариантные подпространства запишутся в виде:{$i_5 + \mu i_{10}$, $i_6 + \nu i_{10}$, $i_7 \pm i_{10}$, $i_8 \pm \mu i_{10}$}.

2^o. Инвариантные пространства ищем в виде: {$i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10}$, $i_6 + \nu i_8 + \sigma i_{10}$, $i_7 + si_8 + ti_{10}$, $i_9 + qi_{10}$}. Система инвариантности принимает вид: $\lambda\nu + \sigma s = 0$, $\lambda^2 + \mu s = 1$, $\lambda s + st = 0$, $qs = 0$, $\lambda\mu + t\mu = 0$, $\mu\nu + \sigma t = 0$, $\mu s + t2 = 1$, $qt = 0$.

Предположим, что $q = 0$. Если при этом $\lambda = -t$, то система инвариантности перепишется в виде: $\lambda\nu + \sigma s = 0$, $\lambda^2 + \mu s = 1$, $\mu\nu - \lambda\sigma = 0$. Домножив второе уравнение на μ, третье на λ и вычитая их получим: $\sigma(\mu s + \lambda^2) = 0$. В силу первого уравнения отсюда следует: $\sigma = 0$. Следовательно, $\lambda\nu = 0$, $\mu\nu = 0$. При $\nu \neq 0$ получим $\lambda = 0$, $\mu = 0$, и первое уравнение становится противоречивым. При $\nu = 0$ получаем условие $\lambda = \pm\sqrt{1-\mu s}$ и инвариантные подпространства запишутся в виде: {$i_5 \pm \sqrt{1-\mu s}\, i_8 + \mu i_{10}$, i_6, $i_7 + si_8 \pm \sqrt{1-\mu s}\, i_{10}$, i_9}, $1 - \mu s \geq 0$. Если же выполняется условие $q = 0$, $\lambda \neq -t$, то из третьего и пятого уравнений системы инвариантности получим: $s = 0$, $\mu = 0$. Тогда из первого и седьмого уравнений системы инвариантности следует: $\lambda^2 = 1$, $t^2 = 1$, а из второго и шестого: $\nu = 0$, $\sigma = 0$. Получаем инвариантные подпространства в виде: {$i_5 \pm i_8$, i_6, $i_7 \pm i_{10}$, i_9}. Если же $q \neq 0$, то из четвертого и восьмого уравнений системы инвариантности следует: $s = 0$, $t = 0$. Тогда седьмое уравнение противоречиво.

3^o. Инвариантные пространства ищем в виде: {$i_5 + \lambda i_8 + \mu i_9$, $i_6 + \nu i_8 + \sigma i_9$, $i_7 + si_8 + ti_9$, $i_9 + i_{10}$}. Система инвариантности принимает вид: $\lambda^2 = 1$, $\lambda\nu = 0$, $\lambda s = 0$, $s = 0$, $\lambda\mu = 0$, $\mu\nu = 0$, $\mu s = 0$, $t = 0$. Отсюда следует, что если $\mu \neq 0$,то $\lambda = 0$. Тогда первое уравнение противоречиво. Если же $\mu = 0$, то, учитывая, что $t = 0$, $s = 0$, $\nu = 0$, $\lambda = \pm 1$, получим инвариантные подпространства в виде: {$i_5 \pm i_8$, $i_6 + \sigma i_9$, i_7, i_{10}}.

4^o. Инвариантные пространства ищем в виде: {$i_5 + \lambda i_7 + \mu i_9$, $i_6 + \nu i_7 + \sigma i_9$, $i_8 + si_9$, i_{10}}.Поскольку $adi_6(i_{10}) = i_7$, то, как нетрудно видеть, этот элемент нельзя получить из образующей системы ни при какой линейной комбинации.

5^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_8,\ i_6 + \nu i_7 + \sigma i_8,\ i_9,\ i_{10}\}$. Как и в предыдущем случае, $adi_6(i_{10}) = i_7$ нельзя получить из образующей системы векторов ни при каких линейных комбинациях.

6^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_6 + \mu i_8,\ i_7 + \nu i_8,\ i_9,\ i_{10}\}$. Система инвариантности принимает вид: $\lambda\mu = 0$, $\lambda\nu = 0$, $\mu^2 = 1$, $\mu\nu = 0$, $\nu = 0$.Если $\lambda \neq 0$, то $\mu = 0$ и третье уравнение противоречиво. При $\lambda = 0$ получим инвариантное пространство в виде: $\{i_5 \pm i_8,\ i_7,\ i_9,\ i_{10}\}$.

В случае 7^o инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_6 + \mu i_{10},\ i_7 + \nu i_{10}, i_8 + \sigma i_{10}, i_9 + s i_{10}\}$.Система инвариантности принимает вид: $\lambda = 0$, $\mu\nu + \sigma = 0$, $\nu^2 = 1$, $\mu + \nu\sigma = 0$, $\nu s = 0$. Таким образом, $\nu = \pm 1$. Отсюда получим: $\sigma = \mp \mu$, $\lambda = 0$, $s = 0$ и инвариантное пространство в виде: $\{i_5 + \mu i_{10},\ i_7 \pm i_{10},\ i_8 \pm \mu i_{10},\ i_9\}$.

8^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9,\ i_7 + \nu i_9, i_8 + \sigma i_9,\ i_{10}\}$. Система инвариантности принимает вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\sigma = 0$. Получим инвариантное пространство в виде: $\{i_5,\ i_7,\ i_8,\ i_{10}\}$.

9^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_6 + \mu i_7,\ i_8,\ i_9,\ i_{10}\}$.
Система инвариантности принимает вид: $\lambda = 0$, $1 = 0$. Система противоречива.

10^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_{10},\ i_7 + \mu\, i_{10},\ i_8 + \nu\, i_{10},\ i_9 + \sigma i_{10}\}$.
Поскольку $adi_6(i_8 + \nu i_{10}) = i_5 + \nu i_7$, то этот вектор нельзя получить из образующих векторов ни при каких линейных комбинациях.

11^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_6 + \lambda i_9,\ i_7 + \mu i_9,\ i_8 + \nu\, i_9,\ i_{10}\}$.
Поскольку $adi_6(i_8 + \nu i_9) = i_5$, то этот элемент нельзя получить из образующих векторов ни при каких линейных комбинациях.

12^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_6 + \lambda i_8,\ i_7 + \mu i_8,\ i_9,\ i_{10}\}$. Система инвариантности принимает вид: $\lambda = 0$, $\mu = 0$. Получим инвариантное пространство в виде: $\{i_6,\ i_7,\ i_9,\ i_{10}\}$.

13^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_6 + \lambda i_7,\ i_8,\ i_9,\ i_{10}\}$. Поскольку $adi_6(i_8) = i_5$, то этот элемент нельзя получить из образующих векторов ни при каких линейных комбинациях.

14^o. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_7 + \mu i_{10},\ i_6 + \nu i_7 + \sigma i_{10},\ i_8 + s i_{10},\ i_9 + t i_{10}\}$. Система инвариантности принимает вид: $\lambda = s$, $\mu = 0$, $\nu = 0$, $\sigma = 0$, $t = 0$. Получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 + \lambda i_7,\ i_6,\ i_8 + \lambda i_{10},\ i_9\}$.

15^o. Надо проверить пространство $\{i_7,\ i_8,\ i_9,\ i_{10}\}$, которое не инвариантно, поскольку $adi_6(i_8) = i_5$ нельзя получить из образующих векторов ни при каких линейных комбинациях.

Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 1. Все инвариантные относительно adi_6 четырехмерные подпространства Ли $\overline{H}$ можно записать следующими образующими базисами:
1. $\{i_5 + \mu i_{10},\ i_6 + \nu i_{10},\ i_7 \pm i_{10},\ i_8 \pm \mu\, i_{10}\}$; 2. $\{i_5 \pm \sqrt{1-\mu s}\, i_8 + \mu i_{10},\ i_6,\ i_7 + s i_8 \pm \sqrt{1-\mu s}\, i_{10},\ i_9\}$;
3. $\{i_5 \pm i_8,\ i_6,\ i_7 \pm i_{10},\ i_9\}$; 4. $\{i_5 \pm i_8,\ i_6 + \sigma i_9,\ i_7,\ i_{10}\}$; 5. $\{i_5 \pm i_8,\ i_7,\ i_9,\ i_{10}\}$;
6. $\{i_5 + \mu i_{10},\ i_7 \pm i_{10},\ i_8 \mp \mu i_{10},\ i_9\}$; 7. $\{i_5,\ i_7,\ i_8,\ i_{10}\}$; 8. $\{i_5 + \lambda i_7,\ i_6,\ i_8 + \lambda i_{10},\ i_9\}$; 9. $\{i_6,\ i_7,\ i_9,\ i_{10}\}$.

При помощи преобразования Adh, где $h=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, вектор i_6 переходит в $-i_9$, i_5 в i_5, i_7 в i_8, i_8 в i_7, i_9 в $-i_6$, i_{10} в i_{10}. Следовательно, мы можем найти инвариантные четырехмерные подпространства для adi_9 как образы соответствующих инвариантных пространств для adi_6. Получим следующую теорему.

Теорема 2. Все инвариантные относительно adi_9 четырехмерные подпространства Ли $\overline{H}$ можно записать следующими образующими базисами:
1. $\{i_5 + \mu i_{10}, -i_9 + \nu i_{10}, i_8 \pm i_{10}, i_7 \pm \mu i_{10}\}$; 2. $\{i_5 \pm \sqrt{1-\mu s}\, i_7 + \mu i_{10}, -i_9, i_8 + s i_7 \pm \sqrt{1-\mu s}\, i_{10}, -i_6\}$;
3. $\{i_5 \pm i_7, -i_9, i_8 \pm i_{10}, -i_6\}$; 4. $\{i_5 \pm i_7, -i_9 - \sigma i_6, i_8, i_{10}\}$; 5. $\{i_5 \pm i_7, i_8, -i_6, i_{10}\}$;
6. $\{i_5 + \mu i_{10}, i_8 \pm i_{10}, i_7 \mp \mu i_{10}, -i_6\}$; 7. $\{i_5, i_8, i_7, i_{10}\}$; 8. $\{i_5 + \lambda i_8, -i_9, i_7 + \lambda i_{10}, -i_6\}$; 9. $\{-i_9, i_8, -i_6, i_{10}\}$.

Рассматривая аналогично оператор adi_5 приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Относительно adi_5 инвариантны только следующие четырехмерные пространства алгебры Ли $\overline{H}$:
1. $\{i_6, i_7, i_8, i_9\}$;
2. $\{i_6 + \mu i_9, i_7 - \frac{1}{\mu} i_8, i_5, i_{10}\}$;
3. $\{i_6 \pm \sqrt{-1-\nu\mu}\, i_8 + \mu i_9, i_7 + \nu i_8 \mp \sqrt{-1-\nu\mu}\, i_9, i_5, i_{10}\}$, $-1 - \nu\mu \geq 0$;
4. $\{i_6 + \lambda i_7, i_7 + \lambda i_9, i_5, i_{10}\}$;
5. $\{i_7, i_5, i_8, i_9\}$.

В пространстве ${}^2R_4$ существует принцип двойственности, при котором имеется следующее соответствие между векторами: $i_5 \to i_{10}$, $i_{10} \to i_5$, $i_7 \to i_8$, $i_8 \to i_7$, $i_6 \to i_6$, $i_9 \to i_9$. На основании этого принципа из предыдущей теоремы получим следующую теорему.

Теорема 4. Относительно adi_{10} инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:
1. $\{i_6, i_8, i_7, i_9\}$;
2. $\{i_6 + \mu i_9, i_8 - \frac{1}{\mu} i_7, i_{10}, i_5\}$;
3. $\{i_6 \pm \sqrt{-1-\nu\mu}\, i_7 + \mu i_9, i_8 + \nu i_7 \mp \sqrt{-1-\nu\mu}\, i_9, i_{10}, i_5\}$, $-1 - \nu\mu \geq 0$;
4. $\{i_6 + \lambda i_8, i_8 + \lambda i_9, i_{10}, i_5\}$;
5. $\{i_8, i_{10}, i_7, i_9\}$.

Решая аналогично системы инвариантности получим следующие теоремы.

Теорема 5. Относительно $ad(i_5 - i_7)$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:
1. $\{i_6 + \lambda i_7 \pm \sqrt{\lambda\sigma}\, i_{10}, i_9 \pm \sqrt{\lambda\sigma}\, i_7 + \sigma i_{10}, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$, $\lambda\sigma \geq 0$; ,
2. $\{i_6, i_9 + \sigma i_{10}, i_5 - i_7, i_8 - i_{10}\}$;
3. $\{i_6, i_5 - i_7, i_8, i_{10}\}$;
4. $\{i_6 + \lambda i_9, i_5 - \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_7 - \frac{1}{\lambda} i_{10}, i_8 - i_{10}\}$, $\lambda \neq 0$;
5. $\{i_9, i_5, i_7, i_8 - i_{10}\}$.

Теорема 6. Относительно $ad(i_6 - i_9)$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:
1. $\{i_5 + \lambda i_6 + \mu i_9, i_7 + \nu i_6 + \gamma i_9, i_8 - \nu i_6 + \sigma i_9, i_{10} - \lambda i_6 - \mu i_9\}$;
2. $\{i_5 + i_{10}, i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_9, i_8 - \nu i_{10} - \sigma i_9, i_6 + p i_9\}$;
3. $\{i_5 - i_{10} + \mu i_9, i_7 \pm i_{10} + \sigma i_9, i_8 \pm i_{10} - (\sigma \pm \mu) i_9, i_6 + p i_9\}$;
4. $\{i_5 + i_{10}, i_7 + \nu i_{10} + \sigma i_9, i_8 - \nu i_{10} - \sigma i_9, i_9\}$;
5. $\{i_5 - i_{10} + \mu i_9, i_7 \pm i_{10} + \sigma i_9, i_8 \pm i_{10} - (\sigma \pm \mu) i_9, i_9\}$;
6. $\{i_5 + \mu i_6, i_7 + i_8, i_{10} - \mu i_6, i_9\}$;
7. $\{i_5 \pm i_{10}, i_7 \pm i_8, i_6, i_9\}$;
8. $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_6, i_9\}$;
9. $\{i_5 - i_{10}, i_7 + i_8 \pm 2i_{10}, i_6, i_9\}$;

10. $\{i_5 \pm i_7,\ i_8 \pm i_{10},\ i_6,\ i_9\}$;
11. $\{i_5 + \mu i_9,\ i_7 + i_8,\ i_{10} - \mu i_9,\ i_6 + ti_9\}$.

Теорема 7. Относительно $ad(i_5 - i_{10})$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_5 + \lambda i_5 + \mu i_{10},\ i_9 - \lambda i_5 - \mu i_{10},\ i_7 - pi_5 - qi_{10},\ i_8 + pi_5 + qi_{10}\}$;
2. $\{i_6 + \mu i_{10},\ i_9 - \mu i_{10},\ i_7 - i_8,\ i_5 + pi_{10}\}$;
3. $\{i_6 + \lambda i_8 + \mu i_{10},\ i_9 - \lambda i_8 - \mu i_{10},\ i_7 - i_8,\ i_5 + pi_{10}\}$;
4. $\{i_6 + \mu i_5,\ i_9 - \mu i_5,\ i_7 - i_8,\ i_{10}\}$;
5. $\{i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5,\ i_9 - \lambda i_8 - \mu i_5,\ i_7 - i_8,\ i_{10}\}$;
6. $\{i_5 \pm i_9,\ i_7 \pm i_8,\ i_5,\ i_{10}\}$;
7. $\{i_6 + i_9,\ i_7 + \nu i_{10},\ i_8 + \nu i_{10},\ i_5 + si_{10}\}$;
8. $\{i_6 + i_9,\ i_7 + \nu i_5,\ i_8 + \nu i_5,\ i_{10}\}$.

Теорема 8. Относительно $ad(i_6 - pi_9)$, $p \neq 0$ и $p \neq -1$, инвариантны только следующие подпространства Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_5,\ i_7,\ i_8,\ i_{10}\}$;
2. $\{i_5 - i_{10},\ i_7 \pm i_{10},\ i_8 \pm i_{10},\ i_6 + qi_9\}$;
3. $\{i_5 + i_{10},\ i_7 \pm i_{10},\ i_8 \mp i_{10},\ i_6 + qi_9\}$;
4. $\{i_5 - i_{10},\ i_7 \pm i_{10},\ i_8 \pm i_{10},\ i_9\}$;
5. $\{i_5 + i_{10},\ i_7 \pm i_{10},\ i_8 \mp i_{10},\ i_9\}$;
6. $\{i_5 \pm i_8,\ i_7 \pm i_{10},\ i_6,\ i_9\}$;
7. $\{i_5 \pm i_{10},\ i_7 \pm i_8,\ i_6,\ i_9\}$;
8. $\{i_5 \pm i_7,\ i_8 \pm i_{10},\ i_6,\ i_9\}$.

Теорема 9. Относительно $ad(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10})$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_6 + \lambda i_5 - \lambda i_{10},\ i_9 - \nu i_5 - \nu i_{10},\ i_7 + si_5 - (1 + s)i_{10},\ i_8 - (1 + s)i_5 + si_{10}\}$;
2. $\{i_6 + \lambda i_5 + \mu i_{10},\ i_9 + \lambda i_5 + \mu i_{10},\ i_8 + si_5 + ti_{10},\ i_8 - (1 + s)i_5 - (1 + t)i_{10}\}$;
3. $\{i_6 + \lambda i_8 - \lambda i_{10},\ i_9 + \nu i_8 - \nu i_{10},\ i_7 + i_8 - 2i_{10},\ i_5 - i_{10}\}$;
4. $\{i_6 + \lambda i_8 + \mu i_{10},\ i_9 + \lambda i_8 + \mu i_{10},\ i_7 + i_8 + ti_{10},\ i_5 - (1 + t)i_{10}\}$;
5. $\{i_6 + \lambda i_8 + \mu i_5,\ i_9 + \lambda i_8 + \mu i_5,\ i_7 + i_8 - i_{10},\ i_{10}\}$;
6. $\{i_6 - i_9,\ i_7 + i_8,\ i_5,\ i_{10}\}$;
7. $\{i_6 + i_9,\ i_7 - i_{10},\ i_8 - i_{10},\ i_5 - i_{10}\}$;
8. $\{i_6 - i_9,\ i_7 + \nu i_{10},\ i_8 + \sigma i_{10},\ i_5 + (1 + \nu + \sigma)i_{10}\}$;
9. $\{i_6,\ i_7 - i_{10},\ i_8 - i_{10},\ i_5 - i_{10}\}$.

На основании принципа двойственности из теоремы 5 получим следующую теорему.

Теорема 10. Относительно $ad(i_8 - i_{10})$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{i_6 + \lambda i_8 \pm \sqrt{\lambda\sigma}\, i_5,\ i_9 \pm \sqrt{\lambda\sigma}\, i_8 + \sigma i_5,\ i_{10} - i_8,\ i_7 - i_5\}$, $\lambda\sigma \geq 0$;
2. $\{i_6,\ i_9 + \sigma i_5,\ i_{10} - i_8,\ i_7 - i_5\}$;
3. $\{i_6,\ i_{10} - i_8,\ i_7,\ i_5\}$;
4. $\{i_6 + \lambda i_9,\ i_{10} - \frac{1}{\lambda} i_5,\ i_8 - \frac{1}{\lambda} i_5,\ i_7 - i_5\}$, $\lambda \neq 0$;
5. $\{i_9,\ i_{10},\ i_8,\ i_7 - i_5\}$.

Из теоремы 9 следует, что все четырехмерные подпространства, инвариантные относительно $ad(i_5 - i_7 - i_8 + i_{10})$, содержат вектор $i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$, находящийся в $\overline{G_{19}}$, $\overline{G_{20}}$, $\overline{G_{23}}$, $\overline{G_{24}}$, $\overline{G_{25}}$. Следовательно, эти пространства не являются дополнительными для подалгебр Л и: $\overline{G_{19}}$, $\overline{G_{20}}$, $\overline{G_{23}}$, $\overline{G_{24}}$, $\overline{G_{25}}$. Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 11. Однородные пространства H/G_{19}, H/G_{20}, H/G_{23}, H/G_{24}, H/G_{25} не являются редуктивными.

При помощи преобразования Adg_3 вектор $i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}$ переходит в вектор $i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}$. Оператор Adg_3 действует на элементы базиса алгебры Ли следующим образом:
$i_5 \to i_5$, $i_{10} \to -i_{10}$, $i_7 \to i_7$, $i_8 \to -i_8$, $i_6 \to -i_6$, $i_9 \to i_9$. Поэтому из теоремы 9 получим следующую теорему:

Теорема 12. Относительно $ad(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10})$ инвариантны только следующие четырехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$:

1. $\{-i_6 + \lambda i_5 + \lambda i_{10}, i_9 - \nu i_5 + \nu i_{10}, i_7 + si_5 + (1 + s)i_{10}, -i_8 - (1 + s)i_5 - si_{10}\}$;
2. $\{-i_6 + \lambda i_5 - \mu i_{10}, i_9 + \lambda i_5 - \mu i_{10}, -i_8 + si_5 - ti_{10}, -i_8 - (1 + s)i_5 + (1 + t)i_{10}\}$;
3. $\{-i_6 - \lambda i_8 + \lambda i_{10}, i_9 - \nu i_8 + \nu i_{10}, i_7 - i_8 + 2i_{10}, i_5 + i_{10}\}$;
4. $\{-i_6 - \lambda i_8 - \mu i_{10}, i_9 - \lambda i_8 - \mu i_{10}, i_7 - i_8 - ti_{10}, i_5 + (1 + t)i_{10}\}$;
5. $\{-i_6 - \lambda i_8 + \mu i_5, i_9 - \lambda i_8 + \mu i_5, i_7 - i_8 + i_{10}, -i_{10}\}$;
6. $\{-i_6 - i_9, i_7 - i_8, i_5, - i_{10}\}$;
7. $\{-i_6 + i_9, i_7 + i_{10}, -i_8 + i_{10}, i_5 + i_{10}\}$;
8. $\{-i_6 - i_9, i_7 - \nu i_{10}, -i_8 - \sigma i_{10}, i_5 - (1 + \nu + \sigma)i_{10}\}$;
9. $\{- i_6, i_7 + i_{10}, -i_8 + i_{10}, i_5 + i_{10}\}$.

Из теоремы 12 следует, что все четырехмерные подпространства, инвариантные относительно $ad(i_5 - i_7 + i_8 - i_{10})$, содержат вектор $i_5 - i_7 + i_8 - i_{10}$, находящийся в $\overline{G_{21}}$, $\overline{G_{22}}$. Следовательно, эти пространства не являются дополнительными для подалгебр Ли: $\overline{G_{21}}$, $\overline{G_{22}}$. Таким образом, получается

Теорема 13. Однородные пространства H/G_{21}, H/G_{22} не являются редуктивными.

Подведем итоги исследований в виде следующей теоремы.

Теорема 14. Однородные пространства H/G_{14}, H/G_{15}, H/G_{26} являются редуктивными. Все редуктивные дополнения для алгебр Ли имеют вид:

1. для $\overline{G_{14}}$ редуктивное дополнение $\{i_6, i_7, i_8, i_9\}$;
2. для $\overline{G_{15}}$ редуктивное дополнение $\{i_5, i_7, i_8, i_{10}\}$;
3. для $\overline{G_{26}}$ редуктивное дополнение $\{i_6+i_9, i_7, i_8, i_5+i_{10}\}$.

Однородные пространства H/G_i, где *i* принимает значения от 16 до 25, не являются редуктивными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лумисте, Ю. Связности в главных расслоениях / Ю. Лумисте // I респ. конф. математиков Белоруссии : науч. тр. – Минск, 1965. – С. 247–258.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 1. – 343 с.

3. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – 413 с.

4. Юдов, А. А. Подгруппы группы движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры / А. А. Юдов // Вестник Белорусского ун-та. Сер. I. – 1977. – № 1. – С. 16–21.

5. Троцюк, С. А. О редуктивных однородных пространствах, связанных с группой движений пространства ${}^2R_4$ / С. А. Троцюк // Информационные технологии управления в экономике – 2005 : материалы респ. науч.–практ. конф., Брест, 24–26 мая

2005 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. С. А. Тузика ; редкол. : В. Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2005. – С. 83–85.

6. Гурская Е. Е., Юдов А. А. Исследование редуктивных однородных пространств с фундаментальной группой — группой движений пространства $^2R_4$, имеющих двухмерные группы стационарности / Е. Е. Гурская // Информационные технологии управления в экономике – 2006 : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 25–26 апреля 2006 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. С. А. Тузика ; редкол. : В. Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2006. – С. 120–123.

7. Гурская, Е. Е. О редуктивных дополнениях двумерных подалгебр Ли алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли Н вращений пространства $^2R_4$ / Е. Е. Гурская, А. А. Юдов // Информационные технологии управления в экономике – 2005 : материалы респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 мая 2005 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. С. А. Тузика ; редкол. : В. Я. Асанович [и др.]. – Брест, 2005. – С. 73.

A. Yudov, H. Gurskaya. **Investigation of the Homogenous Spaces with Fundamental Group *G* – Group of Motions of Space $^2R_4$**

The space $^2R_4$ – 4–dimensional pseudoeuclidous space of the zero signature is considered in the article. Homogenous spaces with fundamental group Lee *G* – group Lee of motions space $^2R_4$ are dealt with. The class of such spaces, having as a group of stability a 2–dimensional subgroup Lee of group Lee *H* of rotations of space $^2R_4$ is investigated. Among homogeneous spaces of such kind there are all reductive homogeneous spaces.