

УДК 519.24

*Ж.В. Василенко, Е.И. Мирская*

## **ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА**

Работа связана с тематикой статистического анализа временных рядов и посвящена оцениванию спектральных плотностей стационарных случайных процессов с дискретным временем. В работе исследуется оценка спектральной плотности, построенная по непересекающимся интервалам наблюдений с использованием полиномиальных окон просмотра данных. Описывается применение методов спектрального анализа для исследования температуры воздуха в городе Бресте за период с 01.11.2004 по 30.01.2008.

Современный этап научно-технического прогресса характеризуется новыми подходами в передаче, обработке и использовании информации, которые оказывают влияние на все стороны жизни общества. Под их влиянием происходят коренные преобразования целого ряда научных направлений. В настоящее время значительно расширился круг задач, для решения которых необходимы сведения о температуре воздуха. Исследования в этой области требуются для построения теории климата и общей циркуляции атмосферы, оценки колебаний климата, разработки методов прогноза погоды с учетом трансформации воздушных масс.

Климат любой территории является важным природным ресурсом. Каждый из параметров климата характеризуется постоянной изменчивостью во времени, что осложняет возможность полного использования климата как природного ресурса. До настоящего времени не решен вопрос о причинах изменения климата вследствие их сложности и многообразия, а также совместных действий различных факторов в разных сочетаниях. Очень важно исследовать колебания температуры воздуха, одного из основных факторов формирования климата.

В настоящей работе приведен пример использования методов спектрального анализа временных рядов при исследовании показателей температуры воздуха.

Для проведенного статистического анализа были использованы ежедневные показания температуры воздуха за период с 01.11.2004 по 30.01.2008 в городе Бресте.

Рассмотрим действительный стационарный в широком смысле случайный процесс  $X(t)$ ,  $t \in Z$ , с математическим ожиданием  $m = MX(t) = 0$ ,  $t \in Z$ , ковариационной функцией  $R(\tau) = MX(t + \tau) X(t)$ ,  $\tau \in Z$ , и спектральной плотностью

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\lambda\tau}, \quad (1)$$

$\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$ .

Пусть  $X(0), X(1), \dots, X(T-1)$  –  $T$  последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за процессом  $X(t)$ ,  $t \in Z$ . Предположим, что число наблюдений  $T$  за процессом  $X(t)$ ,  $t \in Z$  представимо в виде:

$$T = r(N-1) + 1, \quad (2)$$

где  $r \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $N \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $N$  намного больше  $r$ , т.е. отрезок наблюдений длины  $T-1$  разбиваем на  $r$  отрезков длины  $N-1$ .

В качестве оценки спектральной плотности рассмотрим статистику вида [1]:

$$I_{N,r}(\lambda) = |d_{N,r}(\lambda)|^2, \quad (3)$$

называемую расширенной периодограммой, где

$$d_{N,r}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_{t=0}^{r(N-1)} Q_{N,r}^2(t)}} \sum_{t=0}^{r(N-1)} Q_{N,r}(t) X(t) e^{-i\lambda t}, \quad (4)$$

$\lambda \in \Pi$ , функция  $Q_{N,r}(t)$  определяется как решение уравнения

$$\sum_{t=0}^{r(N-1)} Q_{N,r}(t) e^{itx} = \left( \sum_{t=0}^{N-1} e^{itx} \right)^r. \quad (5)$$

Были найдены численные значения функции  $Q_{N,r}(t)$ , называемой полиномиальным окном просмотра данных [1], где  $N$  и  $r$  таковы, что удовлетворяют условию (2).

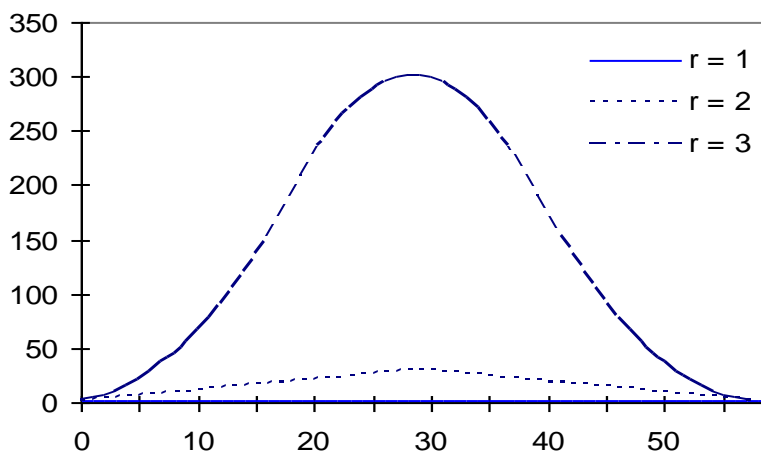


Рисунок 1 – Графики функции  $Q_{N,r}(t)$  для  $N = 60$  и  $r = 1, 2, 3$ .

По исходным данным строилась статистика вида (3).

Предположим, что число наблюдений  $T$  за процессом  $X(t)$ ,  $t \in Z$  представимо в виде:

$$T = L[r(N-1) + 1],$$

где  $r \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $N \in \{1, 2, \dots\}$ ,  $L$  – число непересекающихся интервалов разбиения, содержащих по  $r(N-1)$  наблюдению, каждое из которых, в свою очередь, разбиваем на  $r$  отрезков длины  $N$  ( $L$  не зависит от  $T$ ). На  $l$ -м интервале, состоящем из наблюдений

$X(l[r(N-1) + 1])$ ,  $X(l[r(N-1) + 1] + 1)$ , ...,  $X((l+1)[r(N-1) + 1] - 1)$ ,  $l = 0, L-1$ , построим расширенное конечное преобразование Фурье этих наблюдений:

$$d_{N,r}(\lambda, l) = \frac{I}{\sqrt{2\pi \sum_{t=l[r(N-I)+I]}^{(l+I)[r(N-I)+I]-I} Q_{N,r}^2(t-l[r(N-I)+I])}} \times \\ \times \sum_{t=l[r(N-I)+I]}^{(l+I)[r(N-I)+I]-I} Q_{N,r}(t-l[r(N-I)+I]) X(t) e^{-i\lambda t}, \quad (6)$$

где  $l = \overline{0, L-1}$ ,  $\lambda \in \Pi$ ,  $Q_{N,r}(t)$  – полиномиальные окна просмотра данных.

Построим на  $l$ -м интервале,  $l = \overline{0, L-1}$ , статистику вида:

$$I_{N,r}(\lambda, l) = |d_{N,r}(\lambda, l)|^2, \quad (7)$$

$l = \overline{0, L-1}$ ,  $\lambda \in \Pi$ , называемую расширенной периодограммой, где  $d_{N,r}(\lambda, l)$  задается соотношением (6).

В качестве оценки спектральной плотности  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$ , рассмотрим статистику вида [2]:

$$\hat{f}_{N,r}(\lambda) = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} I_{N,r}(\lambda, l), \quad (8)$$

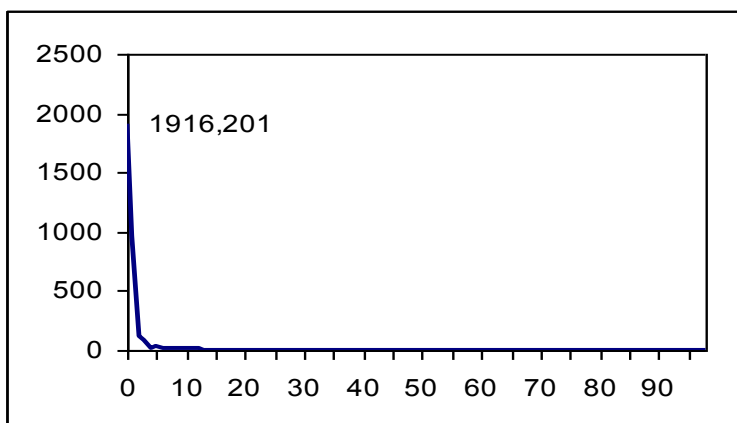
$\lambda \in \Pi$ , построенную путем осреднения расширенных периодограмм по  $L$  непересекающимся интервалам наблюдений. Оценка (8) исследована в работах [2–4].

Для анализа с помощью построенной оценки рассмотрены следующие ряды:

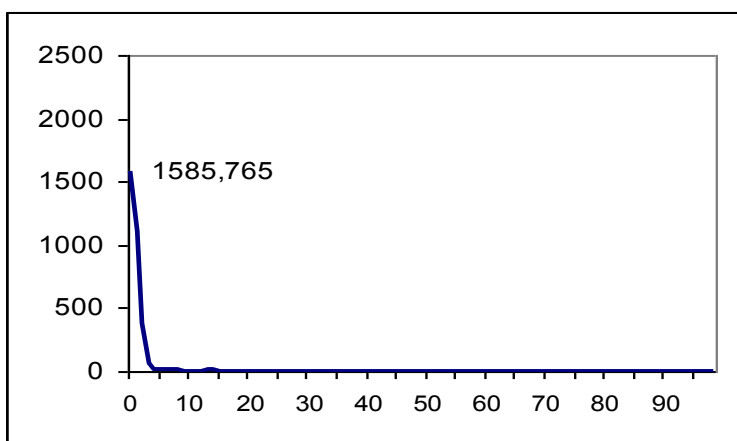
Ряд 1, состоящий из значений температуры воздуха за период с 2004 по 2008 год, причем количество наблюдений было разбито на 12 непересекающихся интервалов,  $r = 1$ . График оценки спектральной плотности (8) для данных ряда 1 приведен на рисунке 2.

Ряд 2, состоящий из значений температуры воздуха за период с 2004 по 2008 год, причем количество наблюдений было разбито на 12 непересекающихся интервалов,  $r = 2$ . График оценки спектральной плотности (8) для данных ряда 2 приведен на рисунке 3.

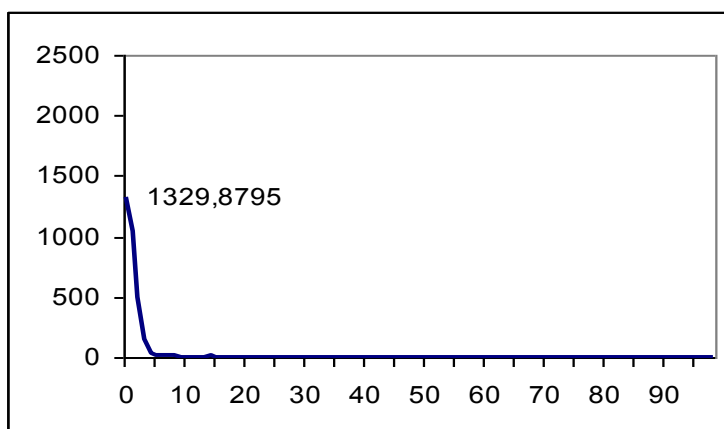
Ряд 3, состоящий из значений температуры воздуха за период с 2004 по 2008 год, причем количество наблюдений было разбито на 12 непересекающихся интервалов,  $r = 3$ . График оценки спектральной плотности (8) для данных ряда 3 приведен на рисунке 4.



**Рисунок 2 – График оценки спектральной плотности (8), построенной по 1186 наблюдениям, 12 непересекающимся отрезкам наблюдений за температурой воздуха в г. Бресте для параметра  $r = 1$**



**Рисунок 3 – График оценки спектральной плотности (8), построенной по 1186 наблюдениям, 12 непересекающимся отрезкам наблюдений за температурой воздуха в г. Бресте для параметра  $r = 2$**



**Рисунок 4 – График оценки спектральной плотности (8), построенной по 1186 наблюдениям, 12 непересекающимся отрезкам наблюдений за температурой воздуха в г. Бресте для параметра  $r = 3$**

Из полученных графиков можно сделать следующий вывод. Значение оценки спектральной плотности вида (8), построенной путем осреднения расширенных периодограмм по непересекающимся интервалам наблюдений, уменьшается с увеличением значения параметра  $g$ .

Численные результаты были получены с использованием приложения, написанного на языке программирования C++, а также систем компьютерной математики Mathematica и Maple, которые отличаются высокой эффективностью решения численных задач и хорошими возможностями символьной (аналитической) математики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко, Ж. В. Некоторые свойства полиномиальных оценок спектральной плотности / Ж. В. Василенко, Н. Н. Труш // Вестник БГУ. Сер.1. Физ. Мат. Мех. – 2004. – № 3. – С. 108–110.
2. Василенко, Ж. В. Асимптотические свойства оценки спектральной плотности, построенной по непересекающимся интервалам наблюдений / Ж. В. Василенко // Вестник БГУ. Сер.1. Физ. Мат. Мех. – 2005. – № 2. – С. 62–65.
3. Василенко, Ж. В. Оценивание спектральных плотностей по пересекающимся интервалам наблюдений / Ж. В. Василенко, Н. Н. Труш // Весці нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 4. – С. 51–54.
4. Mirskaya, E. I. The investigation of the moments of the smoothed spectral densities estimates / E. I. Mirskaya, J. V. Vasilenko // Computer Algebra Systems in Teaching and Research : 4-th International Workshop, Siedlce, Poland, January 31 – February 3, 2007 : Proceedings, Wydawnictwo Akademii Podlaskiej, 2007. – P. 224–228.

#### ***J.V. Vasilenko, E.I. Mirskaja. The Usage of the Methods of Spectral Analysis for Investigating Air Temperatures***

The article deals with the topic of statistical analysis of the time series and is devoted to the problem of evaluating spectral density stationary stochastic processes with the discrete time. The article gives an overview of estimation of spectral density based on non overlapping intervals observations with the help of polynomial windows of viewing the data. The article describes the usage of the methods of spectral analysis for investigating the air temperatures in Brest from 01.11.2004 to 30.01.2008.