УДК 517.927.21

С. А. Марзан

канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Брестского государственного университета имени А. С. Пушкина

e-mail: marzanserg2@gmail.com

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

Исследована задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения с производной Капуто комплексного порядка. С использованием условий равносильности задачи интегральному уравнению Вольтерра второго рода получены условия существования ее решения в пространстве непрерывно-дифференцируемых функций. С помощью метода приближений Тонелли построена последовательность функций, сходящаяся к решению рассматриваемой задачи Коши.

1. Постановка задачи

Пусть $I_{a+}^{\alpha}g$ и $D_{a+}^{\alpha}y$ – дробные интегралы и производные Римана – Лиувилля комплексного порядка $\alpha \in C$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси:

$$\left(I_{a+}^{\alpha}g\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \tag{1}$$

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-n+\alpha}}, \quad n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, \tag{2}$$

($[\mathrm{Re}(\alpha)]$ – целая часть $\mathrm{Re}(\alpha)$) [1, § 2.2, 2.4].

Формулы целочисленного дифференцирования в большинстве своем допускают обобщение на нецелые порядки дифференцирования, а подстановка в формулы дробного дифференцирования вместо дробных порядков натуральных чисел приводит к известным формулам классического математического анализа.

Ряд свойств интегралов и производных, справедливых для классического анализа, остаются справедливыми и для дробных производных и интегралов. Например, для любой суммируемой функции $\varphi(x)$ и для любого $\alpha \in C, \mathrm{Re}(\alpha) > 0$ выполняется равенство $D_{a+}^{\alpha}I_{a+}^{\alpha}\varphi = \varphi(x)$, т. е. дробная производная от дробного интеграла одного и того же порядка суммируемой функции есть сама функция.

Далее, для функции $f(x) \in L_1(a,b)$, имеющей суммируемую дробную производную $D_{a+}^{\alpha}f$, справедливо равенство

$$I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x-a)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} f_{n-\alpha}^{(n-k-1)}(a),$$

где $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ и $f_{n-\alpha}(x) = I_{a+}^{n-\alpha}f$. В частности, при $0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$

$$I_{a+}^{\alpha}D_{a+}^{\alpha}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha-1}.$$

Если учесть, что для дробной производная порядка α функция $(x-a)^{\alpha-1}$ играет роль константы, то можно говорить, что аналогичное свойство имеет место и в случае интегралов и производных натурального порядка.

В то же время есть и такие свойства дробных интегралов и производных, аналогов которым не существует у производных и интегралов натуральных порядков. Так, дробная производная Римана – Лиувилля имеет существенный недостаток, касающийся ее использования в приложениях, в частности, дробная производная Римана – Лиувилля от константы C не равна нулю:

$$D^{\alpha}_{a+}C = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}C .$$

Обозначим через $\left({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x)$ модифицированную дробную производную, определяемую формулой

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+}\left[f(x) - \sum_{k=o}^{n-1}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right]\right)(x), \tag{3}$$

где $\alpha \in C$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1$ при $\alpha \notin N = \{1,2,...\}$, и $n = \alpha$ при $\alpha \in N$.

Если $\alpha > 0, n-1 < \alpha \le n \quad (n \in N)$ и $y(x) \in C^n[a,b]$ – функция, n раз непрерывно дифференцируемая на $[a,b]$, то при $\alpha \in N$ производная ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}y$ совпадает с обычной производной:

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \left(D^{n}y\right)(x)\left(n \in N; D = \frac{d}{dx}\right), \tag{4}$$

а при $n-1 < \alpha < n$ оператор ${}^{c}D^{\alpha}_{a+}$ представляется в виде композиции оператора дробного интегрирования $I^{n-\alpha}_{a+}$ и оператора дифференцирования D^n:

$$\left({}^{c}D^{\alpha}_{a+}y\right)(x) = \left(I^{n-\alpha}_{a+}D^{n}y\right)(x) \quad \left(n-1 < \alpha < n, n \in N; D = \frac{d}{dx}\right). \tag{5}$$

Конструкция (3) введена итальянским механиком Капуто [2–4], и поэтому выражения (3) и (5) называют дробными производными Капуто порядка $\alpha \in C$ [5; 6; 7, § 2.4.1].

В отличие от дробной производной Римана – Лиувилля, дробная производная Капуто от константы равна нулю:

$${}^{c}D^{\alpha}_{a+}C = 0 .$$

Кроме того, преимуществом определения дробной производной по Капуто является более естественное для практических приложений решение проблемы начальных условий при решении дифференциальных уравнений нецелых порядков.

С точки зрения приложений одной из наиболее актуальных задач теории дифференциальных уравнений дробного порядка является построение теории их разрешимости в различных функциональных пространствах.

Исследуем проблему существования решения задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто (3) комплексного порядка $\alpha = m + i\theta \; (m \in N, m > 1, \theta \neq 0)$

$$\left({}^{c}D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) = f[x, y(x)] \tag{6}$$

с начальными условиями

$$y^{(j)}(a) = b_j, b_j \in C \; (j = 0, 1, \ldots, m), \tag{7}$$

в пространстве

$$C^{m+i\theta, m}[a,b] = \left\{ y(x) \in C^m[a,b] : {}^{c}D_{a+}^{m+i\theta} y \in C[a,b] \right\},$$

в предположении, что функция $f[x,y] : [a,b] \times R \to R$ такая, что при любом $y \in R$ $f[x,y] \in C[a,b]$:

$$\max_{(x,y) \in [a,b] \times R} \left| f[x,y] \right| = M < \infty . \tag{8}$$

2. Равносильность задачи Коши интегральному уравнению Вольтерра

Используя свойства дробных производных Римана – Лиувилля (1)–(2) в пространстве $C[a,b]$, установим равносильность решения задачи Коши (6)–(7) в пространстве $C^m[a,b]$ и решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{b_j}{j!}(x-a)^j + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int_a^x \frac{f[t, y(t)]}{(x-t)^{1-m-i\theta}} dt . \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha = m + i\theta \; (m \in N, m > 1, \theta \neq 0)$, *а функция* $f[x,y] : [a,b] \times R \to R$ *такова, что при любом* $y \in R$ $f[x,y] \in C[a,b]$ *и выполняется условие* (8). *Функция* $y(x) \in C^m[a,b]$ *является решением задачи Коши* (6) – (7) *тогда и только тогда, когда она является решением интегрального уравнения* (9).

Доказательство. Пусть функция $y(x) \in C^m[a,b]$ *является решением задачи Коши* (6) – (7). Согласно (2) и (3)

$$\left({}^{c}D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a+}^{1-i\theta} \left[y(t) - \sum_{j=0}^{m} \frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j \right] \right)(x) .$$

Т. к. справедливо условие (8), то из равенства (6) следует, что $\left({}^{c}D_{a+}^{m+i\theta} y\right)(x) \in C[a,b]$, и согласно [9, лемма 1]

$$\left(I_{a+}^{1-i\theta} \left[y(t) - \sum_{j=0}^{m} \frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j \right] \right)(x) \in C^{m+1}[a,b] .$$

Применяя [9, лемма 4] к функции

$$g(t) = y(t) - \sum_{j=0}^{m} \frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j ,$$

находим:

$$\left(I_{a+}^{m+i\theta}\,{}^{c}D_{a+}^{m+i\theta}y\right)(x)=\left(I_{a+}^{m+i\theta}D_{a+}^{m+i\theta}\left[y(t)-\sum_{j=0}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^{j}\right]\right)(x)=$$

$$=g(x)-\sum_{j=0}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j}-\sum_{k=1}^{m+1}\frac{y_{1-i\theta}^{(m+1-k)}(a)}{\Gamma(m+i\theta-k+1)}(x-a)^{m+i\theta-k}\,, \tag{10}$$

где

$$y_{1+i\theta}(x)=\left(I_{a+}^{1+i\theta}\left[y(t)-\sum_{j=0}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^{j}\right]\right)(x)\,.$$

Интегрируя по частям последнее выражение, дифференцируя полученное соотношение и используя [9, лемма 3], имеем:

$$y'_{1+i\theta}(x)=\frac{d}{dx}\left(I_{a+}^{2+i\theta}\left[y'(t)-\sum_{j=1}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{(j-1)!}(t-a)^{j-1}\right]\right)(x)=$$

$$=\left(I_{a+}^{1+i\theta}\left[y'(t)-\sum_{j=1}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{(j-1)!}(t-a)^{j-1}\right]\right)(x)\,.$$

Повторяя этот процесс $(m+1-k)$ $(k=0,1,\dots,m)$ раз, приходим к формуле

$$y_{1+i\theta}^{(m+1-k)}(x)=\left(I_{a+}^{1+i\theta}\left[y^{(m+1-k)}(t)-\sum_{j=m+1-k}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{(j-m-1+k)!}(t-a)^{j-m-1+k}\right]\right)(x)\,.$$

Осуществляя замену $t=a+s(x-a)$, получаем при $k=1,\dots,m+1$:

$$y_{1+i\theta}^{(m+1-k)}(x)=\frac{(x-a)^{1+i\theta}}{\Gamma(1+i\theta)}\int_{0}^{1}(1-s)^{i\theta}\Big(y^{(m+1-k)}\left[a+s(x-a)\right]-$$

$$-\sum_{j=m+1-k}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{(j-m-1+k)!}\left[s(x-a)\right]^{j-m-1+k}\Big)ds\,.$$

Т. к. $y^{(m+1-k)}(x)\in C[a,b]$, то из последнего равенства следует, что $y_{1+i\theta}^{(m+1-k)}(a)=0$ $(k=1,\dots,m+1)$, и тогда (10) принимает вид

$$\left(I_{a+}^{m+i\theta}\,{}^{c}D_{a+}^{m+i\theta}y\right)(x)=y(x)-\sum_{j=1}^{m}\frac{y^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^{j}\,. \tag{11}$$

Применяя к обеим частям уравнения (9) оператор $I_{a+}^{m+i\theta}$, учитывая (11) и начальные условия (7), находим, что $y(x)\in C^{m}[a,b]$ является решением интегрального уравнения (9).

Пусть теперь $y(x)\in C^{m}[a,b]$ – решение интегрального уравнения (9). Покажем, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям (7).

Дифференцируем обе части равенства (7) и, учитывая [9, лемма 3], имеем для $k=1,\dots,m$:

$$y^{(k)}(x)=\sum_{j=k}^{m}\frac{b_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k}+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta-k)}\int_a^x\frac{f[t,y(t)]}{(x-t)^{1-m-i\theta+k}}dt\,. \quad (12)$$

Осуществляя замену переменной $t=a+s(x-a)$ в интегралах (9) и (12), находим при $k=0,\dots,m$:

$$y^{(k)}(x)=\sum_{j=k}^{m}\frac{b_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k}+\frac{(x-a)^{m+i\theta-k}}{\Gamma(m+i\theta-k)}\int_0^1\frac{f[a+s(x-a),y(a+s(x-a))]}{(1-s)^{1-m-i\theta+k}}ds\,.$$

Переходя к пределу при $x\to a+0$ и учитывая непрерывность функции f, получаем равенства (7).

Применяя оператор $D_{a+}^{m+i\theta}$ к обеим частям уравнения (9), учитывая начальные условия (7) и [9, лемма 3], получим дифференциальное уравнение (6), что и завершает доказательство теоремы.

3. Условия разрешимости задачи Коши

Теорема 2. *Пусть функция* $f[x,y]:[a,b]\times R\to R$ *такова, что при любом* $y\in R$ $f[x,y]\in C[a,b]$ *и выполняются следующие условия:*

$$\left|f[x,y]\right|\le L\big(d+|y|\big)\big(x\in[a,b],y\in R\big), \quad (13)$$

где $L>0,d>0$ *– некоторые постоянные,*

$$AL<1,\ A=\frac{(b-a)^m}{m\cdot\left|\Gamma(m+i\theta)\right|}\,. \quad (14)$$

Тогда задача Коши (6) – (7) *имеет по крайней мере одно решение в пространстве* $C^{m+i\theta,m}[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность уравнений

$$y_0\big(t,b_0,...,b_m\big)=\sum_{j=0}^{m}\frac{b_j}{j!}(t-a)^j\ ,$$

$$y_n(x)=y_0\big(x,b_0,...,b_m\big)+\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^x(x-t)^{m+i\theta-1}f\left[t,y_n\left(t-\frac{b-a}{n}\right)\right]dt\,, \quad (15)$$

причем

$$y_n(x)=y_0\big(x,b_0,...,b_m\big)\text{ при }-\frac{b-a}{n}\le x\le a\ \ \big(n\in N\big). \quad (16)$$

Очевидно, что при каждом $n\in N$ уравнение (11) имеет единственное решение $y_n(x)\in C[a,b]$. Это решение называется n-м приближением Тонелли уравнения (9). Покажем, что при сделанных предположениях последовательность приближений Тонелли $y_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна в пространстве $C[a,b]$.

Обозначим

$$h = \sup_{-(b-a)\le x\le (b-a)} \|y_0(x,b_0,...,b_m)\|_C \tag{17}$$

и зафиксируем $n \in N$. Если $a \le x \le \dfrac{b-a}{n}$, то, используя (17), свойства оператора дробного интегрирования Римана – Лиувилля (1) в пространстве $C[a,b]$ ([9]) и условие (13), имеем:

$$\|y_n(x)\|_C \le h + A\left\| f\left(x, y_n\left(x - \frac{b-a}{n}\right)\right)\right\|_C \le h + AL\left(d + \left\|y_n\left(x-\frac{b-a}{n}\right)\right\|_C\right)$$

и, следовательно, в силу (17)

$$\|y_n(x)\|_C \le dAL + h(1 + AL). \tag{18}$$

Далее, если $\dfrac{b-a}{m} \le x \le \dfrac{2(b-a)}{m}$, то, используя (17) и (18), получим:

$$\|y_n(x)\|_C \le h + AL\left(d + \left\|y_n\left(x-\frac{b-a}{n}\right)\right\|_C\right) \le d\left(AL + A^2L^2\right) + h\left(1 + AL + A^2L^2\right).$$

Аналогичным образом оценим приближения Тонелли $y_n(x)$ на каждом промежутке $i\dfrac{b-a}{n} \le x \le (i+1)\dfrac{b-a}{n}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$:

$$\|y_n(x)\|_C \le d\left(AL + (AL)^2 + ... + (AL)^i\right) + h\left(1 + AL + ... + (AL)^i\right).$$

Следовательно, при всех $a \le x \le b$

$$\|y_n(x)\|_C \le d\left(AL + (AL)^2 + ... + (AL)^n + ...\right) + h\left(1 + AL + ... + (AL)^n + ...\right).$$

Согласно условию (10), ряды в правой части предыдущего равенства сходятся, и

$$\|y_n(x)\|_C \le \frac{dAL + h}{1 - AL}, \ \forall x \in [a,b]. \tag{19}$$

Из неравенства (19) следует равномерная ограниченность приближений Тонелли $y_n(x)$ в пространстве $C[a,b]$.

Покажем теперь, что эта последовательность равностепенно непрерывна в пространстве $C[a,b]$. Пусть $\Delta x > 0$; $x + \Delta x \in [a,b]$. Используя (15) и условие (13), имеем:

$$\|y_n(x+\Delta x) - y_n(x)\|_C \le$$

$$\le \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|}\left\|\int_a^x \left[(x+\Delta x - t)^{m+i\theta-1} - (x-t)^{m+i\theta-1}\right] f\left[t, y_n\left(t - \frac{b-a}{n}\right)\right]dt\right\|_C +$$

$$+ \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|}\left\|\int_x^{x+\Delta x} (x+\Delta x - t)^{m+i\theta-1} f\left[t, y_n\left(t - \frac{b-a}{n}\right)\right]dt\right\|_C \le$$

$$\le \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|}\left\| f\left[t, y_n\left(t-\frac{b-a}{n}\right)\right]\right\|_C \times$$

$$\times\left[\int_a^x\left|(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}-(x-t)^{m+i\theta-1}\right|dt+\int_x^{x+\Delta x}\left|(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}\right|dt\right]\le$$

$$\le \frac{1}{|\Gamma(m+i\theta)|}\left(d+\left\|y_n\left(t+\frac{b-a}{n}\right)\right\|_C\right)\times$$

$$\times\left[\int_a^x\left|(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}-(x-t)^{m+i\theta-1}\right|dt+\int_x^{x+\Delta x}\left|(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}\right|dt\right].$$

Используя формулу Лагранжа, имеем:

$$\left|(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}-(x-t)^{m+i\theta-1}\right|\le|m+i\theta-1|(x-t+\xi\Delta x)^{m-2}\Delta x,\ 0<\xi<1. \qquad (20)$$

Т. к. $m\in N$, $m\ge 2$, то из неравенства $x-t+\xi\Delta x\le x-t+\Delta x$ следует, что

$$(x-t+\xi\Delta x)^{m-2}\le(x-t+\Delta x)^{m-2},$$

и из (20) получаем неравенство:

$$\left|(x+\Delta x-t)^{m+i\theta-1}-(x-t)^{m+i\theta-1}\right|\le|m+i\theta-1|(x-t+\Delta x)^{m-2}\Delta x.$$

Тогда

$$\|y_n(x+\Delta x)-y_n(x)\|_C\le$$

$$\le\frac{L}{\Gamma(m+i\theta)}\left(d+\|y_n(x)\|_C\right)\left(|m+i\theta-1|\Delta x\frac{(b-a+\Delta x)^{m-1}-(\Delta x)^{m-1}}{m-1}+\frac{(\Delta x)^m}{m}\right). \qquad (21)$$

Т. к. последовательность приближений Тонелли $y_n(x)$ равномерно ограничена в пространстве $C[a,b]$, учитывая (20) и (21), получаем равностепенную непрерывность в $C[a,b]$.

По теореме Арцела – Асколи [10, с. 167] для всех $x\in[a,b]$ последовательность $y_n(x)$ предкомпактна в $C[a,b]$. Поэтому из последовательности $y_n(x)$ можно выбрать подпоследовательность $y_{n_k}(x)$, сходящуюся к $y_*(x)\in C[a,b]$. При этом последовательность $y_{n_k}\left(x-(n_k)^{-1}(b-a)\right)$ также сходится к $y_*(x)\in C[a,b]$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Ay(x)=\frac{1}{\Gamma(m+i\theta)}\int_a^x(x-t)^{m+i\theta-1}f[t,y(t)]dt$$

и покажем его непрерывность как оператора из пространства $C[a,b]$ в пространство $C[a,b]$. В самом деле, если последовательность функций $y_n(x)\in C[a,b]$ сходится к функции $y(x)\in C[a,b]$, то в силу непрерывности при каждом $x\in[a,b]$ функции

$f[x, y(x)]$, последовательность функций $f[x, y_n(x)]$ при всех $x \in [a, b]$ сходится к функции $f[x, y(x)]$. С другой стороны, в силу справедливости неравенства

$$\left|f[x, y_n(x)]\right| \le L\left(d + |y_n|\right)$$

и ограниченности последовательности $y_n(x)$ в $C[a, b]$, следует:

$$\left\|f\left[x, y_n(x)\right]\right\|_C \le LK\,,\ n \in N\,,$$

где $K > 0$ – некоторая постоянная. Поэтому возможен предельный переход под знаком интеграла в равенствах

$$Ay_n(x) = \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int\limits_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f[t, y_n(t)]dt,$$

при каждом $x \in [a,b]$: $Ay(x) = \lim\limits_{n\to\infty} Ay_n(x)$. В частности, возможен предельный переход в равенствах

$$y_n(x) = y_0\left(x, b_0, ..., b_m\right) + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int\limits_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f\left[t, y_n\left(t - \frac{b-a}{n}\right)\right]dt\,,\ n \in N\,,$$

откуда вытекает, что

$$y_*(x) = y_0\left(x, b_0, ..., b_m\right) + \frac{1}{\Gamma(m+i\theta)} \int\limits_a^x (x-t)^{m+i\theta-1} f[t, y_*(t)]dt.$$

Последнее равенство означает, что функция $y_*(x)$ удовлетворяет уравнению (9).

Подставляя $y_*(x)$ в уравнение (9) и последовательно дифференцируя полученное тождество m раз, используя свойства дробных производных и интегралов Римана – Лиувилля в пространстве $C[a,b]$ ([9]), заключаем, что $y_*(x)$ является решением задачи Коши (6)–(7) в пространстве $C^m[a, b]$, при этом ${}^cD_{a+}^{m+i\theta} y_* \in C[a,b]$, что и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 687 с.
2. Caputo, M. Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent / M. Caputo // Geophis. J. Astronom. Soc. – 1967. – Vol. 13. – P. 529–539.
3. Caputo, M. Elasticita e Dissipation. Bologna / M. Caputo. – Zanichelli, 1969.
4. Caputo, M. Linear models of dissipation in an elastic solids / M. Caputo, F. Mainardi // Riv. Nuovo Cimento. – 1971. – Vol. 1. – P. 161–196.
5. Mainardi, F. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / F. Mainardi. – Viena : Springer. – 1997. – P. 291–348.

6. Gorenflo, R. Fractional calculus: integral and differential equation of fractional order. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics / R. Gorenflo, F. Mainard // Viena : Springer, 1997. – P. 223–276.
7. El-Sayed, A. M. A. Fractional differential equations / A. M. A. El-Sayed // Kyungpook Math. J. – 1988. – Vol. 28, nr. 2. – P. 122.
8. Марзан, С. А. Нелинейное дифференциальное уравнение дробного порядка с дробной производной Капуто в пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан // Тр. Ин-та математики. – 2004. – Т. 12, № 2. – С. 99–103.
9. Марзан, С. А. Основные свойства дробных интегралов и производных Римана – Луивилля в весовом пространстве непрерывных функций / С. А. Марзан, И. В. Мороз // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике : сб. ст. респ. науч.-практ. конф., Брест, 24–25 апр. 2018 г. / Брест. гос. ун-т им. А. С. Пушкина ; под ред. А. И. Басика. – Брест : БрГУ, 2018.
10. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск : БГУ, 2003. – 430 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 13.04.2020

Marzan S. A. **Solvability of the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Equation with a Complex Order Caputo Derivative**

The Cauchy problem for a nonlinear differential equation with a complex order Caputo derivative is investigated. Using the conditions of equivalence of the problem to the Volterra integral equation of the second kind, conditions for the existence of its solution in the space of continuously differentiable functions are obtained. Using the Tonelli approximation method, a sequence of functions is constructed that converges to the solution of the Cauchy problem under consideration.