УДК 513.82

А.А. Юдов[1], М.А. Кононюк[2]

[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

[2]магистрант каф. алгебры, геометрии и математического моделирования Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина

e-mail: modelmath@brsu.brest.by

КЛАССИФИКАЦИЯ И ИССЛЕДОВАНИЕ РЕДУКТИВНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ СО СТРУКТУРНОЙ ГРУППОЙ – ГРУППОЙ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПЯТИМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Целью исследования является классификация однородных редуктивных пространств с фундаментальной группой – группой Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Изучение геометрии однородных пространств является одной из актуальных проблем современной геометрии. В этом направлении выполняется много исследовательских работ. В Беларуси задачами такого характера занимались Л.К. Тутаев, В.И. Ведерников, А.С. Феденко, И.В. Белько, А.А. Бурдун, В.В. Балащенко, С.Г. Кононов, А.А. Юдов и др. В работе исследуется подгруппа Ли группы Ли движений пятимерного евклидова пространства, классифицируются редуктивные однородные пространства, структурной группой которых является группа Ли движений пятимерного евклидова пространства.

Классифицированы с точностью до изоморфизма все однородные пространства со структурной группой H. Ставится задача среди всех таких однородных пространств выделить редуктивные однородные пространства. В данной главе найдены редуктивные однородные пространства вида H/G_i, где G_i – связные подгруппы Ли группы Ли H вращений пространства R_5. Метод решения задачи состоит в том, что для исследуемого однородного пространства H/G_i рассматриваются соответствующие алгебры Ли $\overline{H}$ и $\overline{G_i}$, затем находятся все n-мерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$, инвариантные относительно $\mathrm{ad}\,\overline{G_i}$. Среди таких пространств находятся дополнительные к $\overline{G_i}$.Эти пространства будут редуктивными дополнениями для однородного пространства H/G_i. Поскольку пространство G/H редуктивно, отсюда будет следовать редуктивность однородного пространства G/G_i. При этом можно показать, что всякое редуктивное однородное пространство G/G_i может быть получено таким образом.

Определение 1. Однородное пространство H/G_i называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли *H* распадается в прямую сумму подпространств:

$$\overline{H} = m + \overline{G_i}, \tag{2}$$

причем подпространство *m* инвариантно относительно $ad\overline{G_i}$, где $ad\overline{G_i}$ – присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G_i}$.

Теорема 1. Однородное пространство G/H является редуктивным.

Доказательство. Алгебра Ли $\overline{G}$ группы Ли *G* имеет базис: $\{i_1 ... i_{15}\}$, а алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли *H* имеет базис: $\{i_6 ... i_{15}\}$. Выбрав в качестве подпространства *m* подпространство с базисом $\{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$, получим представление $\overline{G}$ в виде прямой суммы: $\overline{G} = \overline{H} + m$. Причем подпространство m инвариантно относительно $ad\,\overline{H}$, что и требовалось доказать. $i_1 ... i_{15}$.

Теорема 2. Пусть *F* – подгруппа Ли группы Ли *H*. Однородное пространство *G*/*F* редуктивно тогда и только тогда, когда редуктивно однородное пространство *H*/*F*.

Доказательство. Пусть однородное пространство G/F редуктивно и $\overline{G} = \overline{F} + n$ – соответствующее разложение. Рассмотрим подпространство $l = n \cap \overline{H}$, при этом $\overline{H} = \overline{F} + l$ – прямая сумма. Поскольку $\overline{H} \subset \overline{F} + n \cap \overline{H} = \overline{F} + l.$ И обратно, $\overline{F} + l \subset \overline{H}$, поскольку сумма $\overline{F} + n$ – прямая.

Инвариантность l относительно $ad\overline{F}$ следует из того, что $ad\,\overline{F}(l) \subset ad\,\overline{F}(\overline{H}) \subset \overline{H}$. А также из того, что $ad\,\overline{F}(l) \subset ad\,\overline{F}(n) \subset n$. Отсюда следует: $ad\,\overline{F}(l) \subset l.$

Обратно. Пусть однородное пространство H/F редуктивно, причем $\overline{H}$ равно $\overline{F} + l$ – соответствующее редуктивное разложение.

Рассмотрим $n = l + m,$ тогда $\overline{G} = \overline{F} + n$ – сумма прямая. При этом $ad\,\overline{F}(n) = ad\,\overline{F}(l) + ad\,\overline{F}(m) \subset l + m = n.$ Поскольку $ad\,\overline{F}(l) \subset l$ в силу редуктивности однородного пространства $H/F,$ а $ad\,\overline{F}(m) \subset ad\,\overline{H}(m) \subset m$ в силу редуктивности однородного пространства $G/H,$ что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 получаем следующее следствие.

Следствие 1. Классификация однородных пространств G/G_i, $G_i \subset H$ равносильна классификации однородных пространств H/G_i.

В работе производится классификация однородных пространств H/G_i.

Для нахождения редуктивных дополнений используем следующий способ (опишем его на примере нахождения трехмерного векторного подпространства *m*). Пусть a_1, a_2, a_3 – базис алгебры Ли $\overline{G_i}$ группы Ли G_i, принадлежащей группе Ли *H*. Рассмотрим трехмерное векторное подпространство *m* алгебры Ли $\overline{H}$, образованное векторами b_1, b_2, b_3, т.е. *m*=$\{b_1, b_2, b_3\}$. Для этого подпространства *m* потребуем выполнимость условия инвариантности относительно $ad\,a_i$, *i* = 1, 2, 3. Т.е. выполнимость условий:

$$b_j = b_{j6} i_6 + ... + b_{j15} i_{15}$$
$$[a_i, b_j] = a_{j1} b_1 + a_{j2} b_2 + a_{j3} b_3, j = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Систему (3) будем называть системой инвариантности пространства m или просто системой инвариантности. Раскладывая левую и правую части по базису $i_6 ... i_{15}$ алгебры Ли $\overline{H}$, получим систему инвариантности в виде системы алгебраических урав-

нений. Пусть, например, $b_j = b_{j6} i_6 + ... + b_{j15} i_{15}$. Элементарными преобразованиями можно от базиса $\{b_1, b_2, b_3\}$ перейти к базису $\{b'_1, b'_2, b'_3\}$ с более простыми коэффициентами b_{jk}. Для этого придется рассмотреть 210 случаев. При этом система инвариантности упростится. Пусть система инвариантности решена и в итоге получены трехмерные пространства $m_1 ... m_p$, инвариантные относительно $\mathrm{ad}\,\overline{G_i}$. Среди этих пространств нужно выбрать такие, которые удовлетворяют условию (2). Такие пространства m_i и будут искомыми редуктивными дополнениями.

Рассмотрим однородное пространство H / G_7, $G_7 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}$, $a = \{i_6\}$, $\overline{H} = \{i_6 ... i_{15}\}$.

$$1^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & r & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & g & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_6 + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_6 + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_6 + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_6 + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_6 + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{12} + g i_6 + h i_{13} + k_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{4}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим:

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda [a, i_6] + \mu [a, i_{13}] + \nu [a, i_{14}] + \sigma [a, i_{15}] = -i_{10}, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s [a, i_6] + t [a, i_{13}] + p [a, i_{14}] + q [a, i_{15}] = -i_{11}, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r [a, i_6] + \rho [a, i_{13}] + \delta [a, i_{14}] + \omega [a, i_{15}] = -i_{12}, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi [a, i_6] + \varphi [a, i_{13}] + \psi [a, i_{14}] + b [a, i_{15}] = i_7, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c [a, i_6] + d [a, i_{13}] + e [a, i_{14}] + f [a, i_{15}] = i_8, \\ [a, X_6] &= [a, i_{12}] + g [a, i_6] + h [a, i_{13}] + k [a, i_{14}] + m [a, i_{15}] = i_9. \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_6$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 X_1 + \beta_1 X + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{11} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{12} + i_6 (\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi + \omega_1 c + \varepsilon_1 g) + i_{13} (\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ &+ i_{14} (\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15} (\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{6}$$

Сравнивая формулу (6) с первой формулой (5), получим:

$$\delta_1 = -1, \varepsilon = 0, \varphi = 0, \psi = 0, b = 0.$$

Сравнивая формулу (6) со второй формулой (5), получим:

$$\omega_2 = -1, c = 0, d = 0, e = 0, f = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с третьей формулой (5), получим:

$$\varepsilon_3 = -1, g = 0, h = 0, k = 0, m = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с четвёртой формулой (5), получим:

$$\alpha_4 = 1, \lambda = 0, \mu = 0, \nu = 0, \sigma = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с пятой формулой (5), получим:

$$\beta_5 = 1, s = 0, t = 0, p = 0, q = 0.$$

Сравнивая формулу (6) с шестой формулой (5), получим:

$$\gamma_6 = 1, r = 0, q = 0, \delta = 0, \omega = 0.$$

Относительно оператора i_6 инвариантно следующее шестимерное подпространство $\{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}$.

$$2^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \xi & 0 & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{12} + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{12} + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{12} + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{12} + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{11} + c i_{12} + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_6 + h i_{13} + k_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{7}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{12}] + \mu[a, i_{13}] + \nu[a, i_{14}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{12}] + t[a, i_{13}] + p[a, i_{14}] + q[a, i_{15}] = -i_{11} + s i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{12}] + \rho[a, i_{13}] + \delta[a, i_{14}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12} + r i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{12}] + \varphi[a, i_{13}] + \psi[a, i_{14}] + b[a, i_{15}] = i_7 + \xi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_{11}] + c[a, i_{12}] + d[a, i_{13}] + e[a, i_{14}] + f[a, i_{15}] = i_8 + c i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_6] + h[a, i_{13}] + k[a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_6$:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 X_1+\beta_1 X_2+\gamma_1 X_3+\delta_1 X_4+\omega_1 X_5+\varepsilon_1 X_6=\alpha_1 i_7+\beta_1 i_8+\gamma_1 i_9+\delta_1 i_{10}+\omega_1 i_{11}+\varepsilon_1 i_6+\\&+i_{12}(\alpha_1\lambda+\beta_1 s+\gamma_1 r+\delta_1\xi+\omega_1 c)+i_{13}(\alpha_1\mu+\beta_1 t+\gamma_1\rho+\delta_1\varphi+\omega_1 d+\varepsilon_1 h)+\\&+i_{14}(\alpha_1\nu+\beta_1 p+\gamma_1\delta+\delta_1\psi+\omega_1 e+\varepsilon_1 k)+i_{15}(\alpha_1\sigma+\beta_1 q+\gamma_1\omega+\delta_1 b+\omega_1 f+\varepsilon_1 m).\end{aligned} \tag{9}$$

Сравнивая формулу (9) с первой формулой (8), получим:

$$\delta_1=-1,\sigma=\lambda,-\xi+\lambda r=0,-\varphi+\lambda\rho=0,-\psi+\lambda\delta=0,-b+\lambda\omega=0.$$

Сравнивая формулу (9) со второй формулой (8), получим:

$$\omega_2=-1,\gamma_2=s,-c+sr=0,-d+s\rho=0,-e+s\delta=0,-f+s\omega=0.$$

Сравнивая формулу (9) с третьей формулой (8), получим:

$$\lambda\alpha_1+s\beta_1+r\sigma_1+\xi\delta_1+c\omega_1=-1,\sigma_3=r\Rightarrow r^2=-1.$$

Делаем вывод, что уравнение противоречиво, а это значит, что относительно оператора i_6 нет инвариантных подпространств.

$$3^0\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\lambda&\mu&0&\nu&\sigma\\0&1&0&0&0&s&t&0&p&q\\0&0&1&0&0&r&\rho&0&\delta&\omega\\0&0&0&1&0&\xi&\varphi&0&\psi&b\\0&0&0&0&1&c&d&0&e&f\\0&0&0&0&0&0&0&1&k&m\\i_7&i_8&i_9&i_{10}&i_{11}&i_{12}&i_6&i_{13}&i_{14}&i_{15}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m=\{X_1,X_2,...,X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned}X_1&=i_7+\lambda i_{12}+\mu i_6+\nu i_{14}+\sigma i_{15},\\X_2&=i_8+si_{12}+ti_6+pi_{14}+qi_{15},\\X_3&=i_9+ri_{12}+\rho i_6+\delta i_{14}+\omega i_{15},\\X_4&=i_{10}+\xi i_{12}+\varphi i_6+\psi i_{14}+bi_{15},\\X_5&=i_{11}+ci_{12}+di_6+ei_{14}+fi_{15},\\X_6&=i_{13}+ki_{14}+mi_{15}.\end{aligned} \tag{10}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a=i_6$, получим

$$\begin{aligned}&[a,X_1]=[a,i_7]+\lambda[a,i_{12}]+\mu[a,i_6]+\nu[a,i_{14}]+\sigma[a,i_{15}]=-i_{10}+\lambda i_9,\\&[a,X_2]=[a,i_8]+s[a,i_{12}]+t[a,i_6]+p[a,i_{14}]+q[a,i_{15}]=-i_{11}+si_9,\\&[a,X_3]=[a,i_9]+r[a,i_{12}]+\rho[a,i_6]+\delta[a,i_{14}]+\omega[a,i_{15}]=-i_{12}+ri_9,\\&[a,X_4]=[a,i_{10}]+\xi[a,i_{12}]+\varphi[a,i_6]+\psi[a,i_{14}]+b[a,i_{15}]=i_7+\xi i_9,\\&[a,X_5]=[a,i_{11}]+c[a,i_{12}]+d[a,i_6]+e[a,i_{14}]+f[a,i_{15}]=i_8+ci_9,\\&[a,X_6]=[a,i_{13}]+k[a,i_{14}]+m[a,i_{15}]=0.\end{aligned} \tag{11}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1,...,X_6$:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 X_1+\beta_1 X_2+\gamma_1 X_3+\delta_1 X_4+\omega_1 X_5+\varepsilon_1 X_6=\alpha_1 i_7+\beta_1 i_8+\gamma_1 i_9+\delta_1 i_{10}+\omega_1 i_{11}+\varepsilon_1 i_{13}+\\&+i_{12}(\alpha_1\lambda+\beta_1 s+\gamma_1 r+\delta_1\xi+\omega_1 c)+i_6(\alpha_1\mu+\beta_1 t+\gamma_1\rho+\delta_1\varphi+\omega_1 d+\varepsilon_1 h)+\\&+i_{14}(\alpha_1\nu+\beta_1 p+\gamma_1\delta+\delta_1\psi+\omega_1 e+\varepsilon_1 k)+i_{15}(\alpha_1\sigma+\beta_1 q+\gamma_1\omega+\delta_1 b+\omega_1 f+\varepsilon_1 m).\end{aligned} \tag{12}$$

Сравнивая формулу (12) с первой формулой (11), получим:

$$\delta_1=-1,\gamma_1=\lambda,-\xi+\lambda r=0,-\varphi+\lambda\rho=0,-\psi+\lambda\delta=0,-b+\lambda\omega=0.$$

Сравнивая формулу (12) со второй формулой (11), получим:

$$\omega_2=-1,\gamma_2=s,-c+sr=0,-d+s\rho=0,-e+s\delta=0,-f+s\omega=0.$$

Сравнивая формулу (12) с третьей формулой (11), получим:

$$\lambda\alpha_3+s\beta_3+r\gamma_3+\xi\delta_3+c\omega_3=-1,\gamma_3=r\Rightarrow r^2=-1.$$

Делаем вывод, что уравнение противоречиво, а это значит, что относительно оператора i_6 нет инвариантных подпространств.

$$4^0\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\lambda&\mu&\nu&0&\sigma\\0&1&0&0&0&s&t&p&0&q\\0&0&1&0&0&r&\rho&\delta&0&\omega\\0&0&0&1&0&\xi&\varphi&\psi&0&b\\0&0&0&0&1&c&d&e&0&f\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&m\\i_7&i_8&i_9&i_{10}&i_{11}&i_{12}&i_6&i_{13}&i_{14}&i_{15}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m=\{X_1,X_2,...,X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned}&X_1=i_7+\lambda i_{12}+\mu i_6+\nu i_{13}+\sigma i_{15},\\&X_2=i_8+si_{12}+ti_6+pi_{13}+qi_{15},\\&X_3=i_9+ri_{12}+\rho i_6+\delta i_{13}+\omega i_{15},\\&X_4=i_{10}+\xi i_{12}+\varphi i_6+\psi i_{13}+bi_{15},\\&X_5=i_{11}+ci_{12}+di_6+ei_{13}+fi_{15},\\&X_6=i_{14}+mi_{15}.\end{aligned} \tag{13}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a=i_6$, получим

$$\begin{aligned}&[a,X_1]=[a,i_7]+\lambda[a,i_{12}]+\mu[a,i_6]+\nu[a,i_{13}]+\sigma[a,i_{15}]=-i_{10}+\lambda i_9,\\&[a,X_2]=[a,i_8]+s[a,i_{12}]+t[a,i_6]+p[a,i_{13}]+q[a,i_{15}]=-i_{11}+si_9,\\&[a,X_3]=[a,i_9]+r[a,i_{12}]+\rho[a,i_6]+\delta[a,i_{13}]+\omega[a,i_{15}]=-i_{12}+ri_9,\\&[a,X_4]=[a,i_{10}]+\xi[a,i_{12}]+\varphi[a,i_6]+\psi[a,i_{13}]+b[a,i_{15}]=i_7+\xi i_9,\\&[a,X_5]=[a,i_{11}]+c[a,i_{12}]+d[a,i_6]+e[a,i_{13}]+f[a,i_{15}]=i_8+ci_9,\\&[a,X_6]=[a,i_{14}]+m[a,i_{15}]=0.\end{aligned} \tag{14}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1,...,X_6$:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 X_1+\beta_1 X_2+\gamma_1 X_3+\delta_1 X_4+\omega_1 X_5+\varepsilon_1 X_6=\alpha_1 i_7+\beta_1 i_8+\gamma_1 i_9+\delta_1 i_{10}+\omega_1 i_{11}+\varepsilon_1 i_{14}+\\&+i_{12}(\alpha_1\lambda+\beta_1 s+\gamma_1 r+\delta_1\xi+\omega_1 c)+i_6(\alpha_1\mu+\beta_1 t+\gamma_1\rho+\delta_1\varphi+\omega_1 d+\varepsilon_1 h)+\\&+i_{13}(\alpha_1\nu+\beta_1 p+\gamma_1\delta+\delta_1\psi+\omega_1 e)+i_{15}(\alpha_1\sigma+\beta_1 q+\gamma_1\omega+\delta_1 b+\omega_1 f+\varepsilon_1 m).\end{aligned} \tag{15}$$

Сравнивая формулу (15) с первой формулой (14), получим:

$$\delta_1=-1,\gamma_1=\lambda,-\xi+\lambda r=0,-\varphi+\lambda\rho=0,-\psi+\lambda\delta=0,-b+\lambda\omega=0.$$

Сравнивая формулу (15) со второй формулой (14), получим:

$$\omega_2=-1,\gamma_2=s,-c+sr=0,-d+s\rho=0,-e+s\delta=0,-f+s\omega=0.$$

Сравнивая формулу (15) с третьей формулой (14), получим:

$$\lambda\alpha_3+s\beta_3+r\gamma_3+\xi\delta_3+c\omega_3=-1,\gamma_3=r\Rightarrow r^2=-1.$$

Относительно оператора i_6 нет инвариантных подпространств.

$$5^0\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\lambda&\mu&\nu&\sigma&0\\0&1&0&0&0&s&t&p&q&0\\0&0&1&0&0&r&\rho&\delta&\omega&0\\0&0&0&1&0&\xi&\varphi&\psi&b&0\\0&0&0&0&1&c&d&e&f&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\i_7&i_8&i_9&i_{10}&i_{11}&i_{12}&i_6&i_{13}&i_{14}&i_{15}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m=\{X_1,X_2,...,X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned}&X_1=i_7+\lambda i_{12}+\mu i_6+\nu i_{13}+\sigma i_{14},\\&X_2=i_8+si_{12}+ti_6+pi_{13}+qi_{14},\\&X_3=i_9+ri_{12}+\rho i_6+\delta i_{13}+\omega i_{14},\\&X_4=i_{10}+\xi i_{12}+\varphi i_6+\psi i_{13}+bi_{14},\\&X_5=i_{11}+ci_{12}+di_6+ei_{13}+fi_{14},\\&X_6=i_{15}.\end{aligned} \tag{16}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a=i_6$, получим

$$\begin{aligned}&[a,X_1]=[a,i_7]+\lambda[a,i_{12}]+\mu[a,i_6]+\nu[a,i_{13}]+\sigma[a,i_{14}]=-i_{10}+\lambda i_9,\\&[a,X_2]=[a,i_8]+s[a,i_{12}]+t[a,i_6]+p[a,i_{13}]+q[a,i_{14}]=-i_{11}+si_9,\\&[a,X_3]=[a,i_9]+r[a,i_{12}]+\rho[a,i_6]+\delta[a,i_{13}]+\omega[a,i_{14}]=-i_{12}+ri_9,\\&[a,X_4]=[a,i_{10}]+\xi[a,i_{12}]+\varphi[a,i_6]+\psi[a,i_{13}]+b[a,i_{14}]=i_7+\xi i_9,\\&[a,X_5]=[a,i_{11}]+c[a,i_{12}]+d[a,i_6]+e[a,i_{13}]+f[a,i_{14}]=i_8+ci_9,\\&[a,X_6]=[a,i_{15}]=0.\end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1,...,X_6$:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 X_1+\beta_1 X_2+\gamma_1 X_3+\delta_1 X_4+\omega_1 X_5+\varepsilon_1 X_6=\alpha_1 i_7+\beta_1 i_8+\gamma_1 i_9+\delta_1 i_{10}+\omega_1 i_{11}+\varepsilon_1 i_{15}+\\&+i_{12}(\alpha_1\lambda+\beta_1 s+\gamma_1 r+\delta_1\xi+\omega_1 c)+i_6(\alpha_1\mu+\beta_1 t+\gamma_1\rho+\delta_1\varphi+\omega_1 d+\varepsilon_1 h)+\\&+i_{13}(\alpha_1\nu+\beta_1 p+\gamma_1\delta+\delta_1\psi+\omega_1 e)+i_{14}(\alpha_1\sigma+\beta_1 q+\gamma_1\omega+\delta_1 b+\omega_1 f).\end{aligned} \tag{18}$$

Сравнивая формулу (18) с первой формулой (17), получим:

$$\delta_1 = -1, \gamma_1 = \lambda, -\xi + \lambda r = 0, -\varphi + \lambda\rho = 0, -\psi + \lambda\delta = 0, -b + \lambda\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (18) со второй формулой (17), получим:

$$\omega_2 = -1, \gamma_2 = s, -c + sr = 0, -d + s\rho = 0, -e + s\delta = 0, -f + s\omega = 0.$$

Относительно оператора i_6 нет инвариантных подпространств.

$$6^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \mu & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & t & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & 0 & \rho & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 0 & \varphi & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_{13} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_{13} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_{13} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_{13} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_{13} + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_6 + h i_{13} + k_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{19}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{11}] + \mu[a, i_{13}] + \nu[a, i_{14}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{11}] + t[a, i_{13}] + p[a, i_{14}] + q[a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{11}] + \rho[a, i_{13}] + \delta[a, i_{14}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{11}] + \varphi[a, i_{13}] + \psi[a, i_{14}] + b[a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d[a, i_{13}] + e[a, i_{14}] + f[a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_6] + h[a, i_{13}] + k[a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_6$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_6 + i_{11}(\alpha_1\lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1\xi) + i_{13}(\alpha_1\mu + \beta_1 t + \gamma_1\rho + \delta_1\varphi + \omega_1 d + \varepsilon_1 h) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1\nu + \beta_1 p + \gamma_1\delta + \delta_1\psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1\sigma + \beta_1 q + \gamma_1\omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{21}$$

Сравнивая формулу (21) с первой формулой (20), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (21) со второй формулой (20), получим:

$$\lambda\alpha_2 + s\beta_2 + r\gamma_2 + \xi\delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора i_6 нет инвариантных подпространств.

$$7^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{22}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{11}] + \mu[a, i_6] + \nu[a, i_{14}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{11}] + t[a, i_6] + p[a, i_{14}] + q[a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{11}] + \rho[a, i_6] + \delta[a, i_{14}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{11}] + \varphi[a, i_6] + \psi[a, i_{14}] + b[a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d[a, i_6] + e[a, i_{14}] + f[a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k[a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_6$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{13} + i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e + \varepsilon_1 k) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{24}$$

Сравнивая формулу (24) с первой формулой (23), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (24) со второй формулой (23), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s\beta_2 + r\gamma_2 + \xi\delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора i_6 инвариантных подпространств нет.

$$8^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & 0 & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & 0 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & \psi & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{13} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{25}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{11}] + \mu[a, i_6] + \nu[a, i_{13}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{11}] + t[a, i_6] + p[a, i_{13}] + q[a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{11}] + \rho[a, i_6] + \delta[a, i_{13}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{11}] + \varphi[a, i_6] + \psi[a, i_{13}] + b[a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d[a, i_6] + e[a, i_{13}] + f[a, i_{15}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_6$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{14} + i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{13}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{27}$$

Сравнивая формулу (27) с первой формулой (26), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (27) со второй формулой (26), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s\beta_2 + r\gamma_2 + \xi\delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора i_6 инвариантных подпространств нет.

$$9^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \mu & \nu & \sigma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & 0 & t & p & q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & 0 & \rho & \delta & \omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & \varphi & \psi & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & d & e & f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_6 + \nu i_{13} + \sigma i_{14}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_6 + p i_{13} + q i_{14}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_6 + \psi i_{13} + b i_{14}, \\ X_5 &= i_{12} + d i_6 + e i_{13} + f i_{14}, \\ X_6 &= i_{15}. \end{aligned} \tag{28}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{11}] + \mu[a, i_6] + \nu[a, i_{13}] + \sigma[a, i_{14}] = -i_{10} + \lambda i_8, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{11}] + t[a, i_6] + p[a, i_{13}] + q[a, i_{14}] = -i_{11} + s i_8, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{11}] + \rho[a, i_6] + \delta[a, i_{13}] + \omega[a, i_{14}] = -i_{12} + r i_8, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{11}] + \varphi[a, i_6] + \psi[a, i_{13}] + b[a, i_{14}] = i_7 + \xi i_8, \\ [a, X_5] &= [a, i_{12}] + d[a, i_6] + e[a, i_{13}] + f[a, i_{14}] = i_9, \\ [a, X_6] &= [a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_6$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_{12} + \\ &+ \varepsilon_1 i_{15} + i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_6(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi + \omega_1 d) + \\ &+ i_{13}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{14}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f). \end{aligned} \tag{30}$$

Сравнивая формулу (30) с первой формулой (29), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, -\xi + \lambda s = 0, -\varphi + \lambda t = 0, -\psi + \lambda p = 0, -b + \lambda q = 0.$$

Сравнивая формулу (30) со второй формулой (29), получим:

$$\lambda \alpha_2 + s\beta_2 + r\gamma_2 + \xi\delta_2 = -1, \beta_2 = s \Rightarrow s^2 = -1.$$

Относительно оператора i_6 нет инвариантных подпространств.

$$10^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 & 0 & \nu & \sigma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & s & t & 0 & 0 & p & q \\ 0 & 0 & 1 & 0 & r & \rho & 0 & 0 & \delta & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \xi & \varphi & 0 & 0 & \psi & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & k & m \\ i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} & i_{11} & i_{12} & i_6 & i_{13} & i_{14} & i_{15} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, редуктивное дополнение $m = \{X_1, X_2, ..., X_6\}$ задается векторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= i_7 + \lambda i_{11} + \mu i_{12} + \nu i_{14} + \sigma i_{15}, \\ X_2 &= i_8 + s i_{11} + t i_{12} + p i_{14} + q i_{15}, \\ X_3 &= i_9 + r i_{11} + \rho i_{12} + \delta i_{14} + \omega i_{15}, \\ X_4 &= i_{10} + \xi i_{11} + \varphi i_{12} + \psi i_{14} + b i_{15}, \\ X_5 &= i_6 + e i_{14} + f i_{15}, \\ X_6 &= i_{13} + k_{14} + m i_{15}. \end{aligned} \tag{31}$$

Используя таблицу коммутаторов и обозначая $a = i_6$, получим

$$\begin{aligned} [a, X_1] &= [a, i_7] + \lambda[a, i_{11}] + \mu[a, i_{12}] + \nu[a, i_{14}] + \sigma[a, i_{15}] = -i_{10} + \lambda i_8 + \mu i_9, \\ [a, X_2] &= [a, i_8] + s[a, i_{11}] + t[a, i_{12}] + p[a, i_{14}] + q[a, i_{15}] = -i_{11} + s i_8 + t i_9, \\ [a, X_3] &= [a, i_9] + r[a, i_{11}] + \rho[a, i_{12}] + \delta[a, i_{14}] + \omega[a, i_{15}] = -i_{12} + r i_8 + \rho i_9, \\ [a, X_4] &= [a, i_{10}] + \xi[a, i_{11}] + \varphi[a, i_{12}] + \psi[a, i_{14}] + b[a, i_{15}] = i_7 + \xi i_8 + \varphi i_9, \\ [a, X_5] &= [a, i_6] + e[a, i_{14}] + f[a, i_{15}] = 0, \\ [a, X_6] &= [a, i_{13}] + k[a, i_{14}] + m[a, i_{15}] = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Рассмотрим линейную комбинацию векторов $X_1, ..., X_6$:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2 + \gamma_1 X_3 + \delta_1 X_4 + \omega_1 X_5 + \varepsilon_1 X_6 = \alpha_1 i_7 + \beta_1 i_8 + \gamma_1 i_9 + \delta_1 i_{10} + \omega_1 i_6 + \varepsilon_1 i_{13} + \\ &+ i_{11}(\alpha_1 \lambda + \beta_1 s + \gamma_1 r + \delta_1 \xi) + i_{12}(\alpha_1 \mu + \beta_1 t + \gamma_1 \rho + \delta_1 \varphi) + \\ &+ i_{14}(\alpha_1 \nu + \beta_1 p + \gamma_1 \delta + \delta_1 \psi + \omega_1 e) + i_{15}(\alpha_1 \sigma + \beta_1 q + \gamma_1 \omega + \delta_1 b + \omega_1 f + \varepsilon_1 m). \end{aligned} \tag{33}$$

Сравнивая формулу (33) с первой формулой (32), получим:

$$\delta_1 = -1, \beta_1 = \lambda, \gamma_1 = \mu, -\xi + \lambda s + \mu r = 0, -\varphi + \lambda t + \mu\rho = 0, -\psi + \lambda p + \mu\delta = 0, -b + \lambda q + \mu\omega = 0.$$

Сравнивая формулу (33) со второй формулой (32), получим:

$$\lambda\alpha_2 + s\beta_2 + r\gamma_2 + \xi\delta_2 = -1, \beta_2 = s, \gamma_2 = t, \Rightarrow s^2 + rt = -1.$$

Инвариантных подпространств относительно оператора i_6 нет.

Вычисляя редуктивные дополнения подалгебры $\{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}$, получаем теорему.

Теорема 3. Относительно оператора i_6 инвариантны следующие подпространства:

$\{i_7, i_8, i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}$,

$\{i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14}\}$,

$\{i_7 + \lambda i_9, i_8 - s i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12}\}$,

$\{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12} \}$,

$\{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{15}, i_{12} \}$,

$\{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12} \}$,

$\{ i_8 + \nu i_6, i_9 + p i_6, i_{11}, i_{12} \}$,

$\{ i_7, i_9, i_{10}, i_{12} \}$,

$\{ i_7 + \lambda i_9, i_8, i_{11}, i_{12} \}$,

$\{ i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10}, i_{11}, i_{12} \}$,

$\{ i_8 + \mu i_9, i_{11}, i_{12} \}$,

$\{ i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9, i_{10} + \lambda i_{11}, i_{12} \}$,

$\{ i_7 + \lambda i_8 + \mu i_9 + i_{10}, i_{11}, i_{12} \}$.

Теорема 4. Среди пространств, полученных в теореме 3 относительно оператора i_7, инвариантны следующие подпространства:

$$\{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12} \},\ \{ i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14} \}.$$

Теорема 5. Среди пространств, полученных в теореме 3 относительно оператора i_{10}, инвариантны следующие подпространства:

$$\{ i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14} \},\ \{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12} \},$$

$$\{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{14}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{14}, i_{12} \}, \{ i_8 + \mu i_9, i_{11}, i_{12} \}.$$

Теорема 6. Относительно оператора i_{15} инвариантны все подпространства из теоремы 3.3, кроме следующих подпространств:

$$\{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{14} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{14} - \omega i_{15}, i_{12} \},$$

$$\{ i_7 + \lambda i_8, i_9, i_{10} + \rho i_6 + \delta i_{13} + \omega i_{15}, i_{11} - \rho i_6 - \delta i_{13} - \omega i_{15}, i_{12} \}.$$

Теорема 7. Однородное пространство H / G_7 является редуктивным, редуктивным дополнением для этого пространства является подпространство:

$$\{ i_8, i_9, i_{11}, i_{12}, i_{13}, i_{14} \}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копп, В. Г. О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств / В. Г. Копп // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1966. – № 1. – С. 13–22.

2. Хелгасон, С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства / С. Хелгасон. – М. : Мир, 1964. – 538 с.

3. Юдов, А. А. Классификация одномерных подмногообразий пространства Минковского, имеющих касательную мнимоевклидова и евклидова типа / А. А. Юдов, Н. С. Ковалик // Вестн. Брест. ун-та. Сер. 4, Физика. Математика. – 2013. – № 1. – С. 106–115.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 10.10.2018

Yudov A.A., Kononyuk M.A. **Classification and Study of Reductive Homogeneous Spaces with a Structural Group – the Lie Group of Motions of a Five-Dimensional Euclidean Space**

The aim of the study is to classify homogeneous reductive spaces with a fundamental group – the Lie group of motions of a five-dimensional Euclidean space.