МАТЭМАТЫКА

УДК 517.95

А.И. Басик[1], Е.В. Грицук[2]

*[1]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*
*[2]канд. физ.-мат. наук, доц. каф. математического анализа,
дифференциальных уравнений и их приложений
Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина*
e-mail: hightmath@brsu.brest.by

ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОРТОГОНАЛЬНОГО ТИПА В $\mathbb{R}^4$

Проводится исследование задачи типа Римана – Гильберта для эллиптических систем ортогонального типа в неограниченной области специального вида четырехмерного пространства. Получены априорные оценки нормы оператора, соответствующего рассматриваемой задаче. Определено понятие слабого решения задачи типа Римана – Гильберта и указаны достаточные условия его существования.

Введение

В работе рассматривается класс эллиптических систем четырех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка вида

$$\sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + BU = F(x), \tag{1}$$

где A_j – постоянные действительные квадратные матрицы четвертого порядка, B – непрерывная матрица-функция размера 4 × 4, $U = \left(u_1(x), ..., u_4(x)\right)^T$ – искомая дифференцируемая вектор-функция, $F(x)$ – заданная четырехкомпонентная вектор-функция. Напомним, что матрица

$$A(\xi) = \sum_{j=1}^{4} A_j \xi_j \tag{2}$$

называется характеристической матрицей системы (1). Система (1) называется эллиптической, если при любом ненулевом векторе $\xi \in \mathbb{R}^4$ матрица $A(\xi)$ является невырожденной.

Одним из представителей систем вида (1) является система Фьютера. Ее характеристическая матрица имеет вид (при этом $B = 0$ и $F = 0$)

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \xi_1 & -\xi_2 & -\xi_3 & -\xi_4 \\ \xi_2 & \xi_1 & -\xi_4 & \xi_3 \\ \xi_3 & \xi_4 & \xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_4 & -\xi_3 & \xi_2 & \xi_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

эта система является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана.

А.Т. Усс выделил класс четырехмерных аналогов системы Коши – Римана [1] (кратко класс ЧКР-систем). Система (1) при $B = 0$ и $F = 0$ называется четырехмерным аналогом системы Коши – Римана, если каждая компонента произвольного непрерывного дифференцируемого решения этой системы удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. В работе [1] доказан критерий, позволяющий по коэффициентам системы (1) определить ее принадлежность классу ЧКР-систем. Он состоит в следующем. Система (1) является четырехмерным аналогом системы Коши – Римана тогда и только тогда, когда все матрицы A_j ($j = 1,...,4$) являются невырожденными и выполняются равенства

$$A_j A_k^{-1} + A_k A_j^{-1} = 2\delta_{jk} E_4 \qquad \left(j,k = \overline{1,4}\right). \tag{4}$$

Если все матрицы A_k ($k = 1, ...,4$) являются ортогональными (т.е. $A_k^{-1} = A_k^T$), то систему (1) называют нормальной эллиптической системой (по терминологии В.Е. Балабаева [2]) либо системой ортогонального типа (по терминологии В.И. Шевченко [3]).

Остановимся на некоторых результатах, относящихся к краевым задачам для систем вида (1). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая поверхность Ляпунова $\partial\Omega$. Задача отыскания непрерывно дифференцируемого в области Ω решения системы (1), непрерывного по Гельдеру в замыкании области Ω и удовлетворяющего граничным условиям

$$(b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3 + b_{14}u_4)|_{\partial\Omega} = f_1(y),\ (b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + b_{23}u_3 + b_{24}u_4)|_{\partial\Omega} = f_2(y)\ (y \in \partial\Omega). \tag{5}$$

называется задачей Римана – Гильберта. Здесь $b_{ij} : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, j = 1, ..., 4$), $f_1, f_2 : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру на $\partial\Omega$, действительнозначные функции.

М.З. Соломяк [4] показал, что для системы Фьютера (3) и для произвольного (даже псевдодифференциального) граничного оператора (5) краевая задача (1), (5) не является регуляризуемой. Напомним, что задача (1), (5) называется регуляризуемой, если для нее выполнено условие Я.Б. Лопатинского [5]. Это условие представляет собой дополнительное ограничение на матрицу граничного оператора и обеспечивает нетеровость задачи в широком классе гильбертовых пространств.

В.С. Виноградов изучал задачу Римана – Гильберта для эллиптических систем (1) псевдосимметрического типа (т.е. систем, для которых $B = 0$, $A_1 = E_4$ – единичная матрица четвертого порядка, A_2, A_3, A_4 – кососимметрические матрицы). В работе [6] В.С. Виноградовым было установлено, что однородная задача для рассматриваемого класса систем имеет бесконечно много линейно независимых решений. В этом случае нарушение условия Я.Б. Лопатинского краевой задачи (1), (5) вызвано бесконечномерностью пространства решений однородной задачи.

В совместной работе А.И. Басика и А.Т. Усса [7] была доказана нерегуляризуемость произвольной внутренней краевой задачи для систем псевдосимметрического типа в $\mathbb{R}^4$. А.Т. Уссом было показано отсутствие регуляризуемых краевых условий для класса четырехмерных аналогов системы Коши – Римана [1]. Отметим, что класс четырехмерных аналогов систем Коши – Римана имеет непустое пересечение, но не совпадает с классом эллиптических систем псевдосимметрического типа.

Таким образом, для ограниченной односвязной области не существует регуляризуемых внутренних классических краевых задач для рассмотренных классов систем. Тем самым представляет научный интерес вопрос о нахождении «хороших» (корректных или, хотя бы, регуляризуемых) краевых условий для указанных систем уравнений. Аналогичный вопрос рассматривается в работах Б.Б. Ошорова [8; 9].

В настоящей работе указывается корректная постановка краевой задачи типа Римана – Гильберта в неограниченной области специального вида для нормальных эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка в $\mathbb{R}^4$.

Постановка задачи типа Римана – Гильберта

Пусть $h > 0$, через Ω обозначим множество

$$\Omega = \left\{ x = (x_1, x') \in \mathbb{R}^4 \mid 0 < x_1 < h, x' = (x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Пусть далее $B(x)$ – заданная в области Ω непрерывная матрица-функция размера 4×4, $A_1 = E_4$ – единичная матрица четвертого порядка, A_2, A_3, A_4 – постоянные действительные квадратные матрицы четвертого порядка, удовлетворяющие соотношениям

$$A_k A_j^T + A_j A_k^T = 2\delta_{jk} E_4 \left(j, k = \overline{1,4} \right), \tag{6}$$

где δ_{jk} – символ Кронекера, T означает транспонирование.

Определение 1. *Оператор вида*

$$\Lambda : U \to \sum_{j=1}^{4} A_j \frac{\partial U}{\partial x_j} + BU$$

называется оператором ортогонального типа в $\mathbb{R}^4$, *здесь* $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$ *– дифференцируемая вектор-функция.*

Через $C_\Lambda(\Omega)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых вектор-функций $U = (u_1, u_2, u_3, u_4)^T$, удовлетворяющих условиям

$$u_1\big|_{x_1=0} = u_2\big|_{x_2=h} = u_3\big|_{\partial\Omega} = u_4\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7}$$

и интегрируемых в квадрате по Ω вместе со всеми производными до второго порядка включительно. Замыкание $C_\Lambda(\Omega)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ [10] обозначим через $S_\Lambda(\Omega)$. Напомним, что норма и скалярное произведение в пространствах $L_2(\Omega), W_2^1(\Omega)$ задаются формулами:

$$\langle U;V \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{j=1}^{4} u_j v_j dx, \quad \|U\|^2_{L_2(\Omega)} = \langle U;U \rangle_{L_2(\Omega)};$$

$$\langle U;V \rangle_{W_2^1(\Omega)} = \langle U;V \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{4} \left\langle U_{x_j}; V_{x_j} \right\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \|U\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \langle U;U \rangle_{W_2^1(\Omega)}.$$

Определение 2. *Пусть* $F : \Lambda \to \mathbb{R}^4$ *– заданная вектор-функция. Задача типа Римана – Гильберта состоит в отыскании в слое* Ω *решения системы уравнений*

$$\Lambda U = F(x), \tag{8}$$

удовлетворяющего граничным условиям (7). Вектор-функция $U \in S_\Lambda(\Omega)$, удовлетворяющая (8) в пространстве $W_2^1(\Omega)$, называется сильным решением задачи типа Римана – Гильберта.

Вспомогательные утверждения

Сформулируем и докажем несколько вспомогательных лемм. Здесь и ниже для краткости обозначим $\frac{\partial}{\partial x_j} = \partial_j$.

Лемма 3. *Для каждой вектор-функции $U \in S_\Lambda(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\|U\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{h^2}{2}\|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)}.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $U \in C_{\Lambda(\Omega)}$. При $j \ne 2$ в силу неравенства Коши – Буняковского имеем

$$u_j(x) = \int_0^{x_1} \partial_1 u_j(x)\,dx_1 \le \sqrt{x_1}\sqrt{\int_0^h \left(\partial_1 u_j\right)^2(x)\,dx_1}.$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат и проинтегрируем по переменным x_2, x_3, x_4 от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_j^2(x)\,dx_2dx_3dx_4 \le x_1\int_\Omega \left(\partial_1 u_j\right)^2(x)\,dx = x_1\left\|\partial_1 u_j\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства по x_1 от 0 до h, получим

$$\left\|u_j\right\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega u_j^2(x)\,dx \le \frac{h^2}{2}\left\|\partial_1 u_j\right\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Рассмотрим теперь случай $j = 2$. Так как, очевидно,

$$u_2(x) = -\int_{x_1}^h \partial_1 u_2(x)\,dx_1,$$

то, пользуясь неравенством Коши – Буняковского, имеем:

$$\left|u_2(x)\right| \le \sqrt{\int_{x_1}^h 1dx_1}\sqrt{\int_x^h \partial_1 u_2^2(x)\,dx_1} = \sqrt{h-x_1}\sqrt{\int_{x_1}^h \partial_1 u_2^2(x)\,dx_1}.$$

Возведем обе части полученного неравенства в квадрат

$$u_2^2(x) \le (h-x_1)\int_0^h \left(\partial_1 u_2(x)\right)^2 dx_1,$$

и проинтегрируем по переменным x_2, x_3, x_4 от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} u_2^2(x)dx_2dx_3dx_4 \le (h-x_1)\,\|\,\partial_1 u_2\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Проинтегрировав обе части последнего неравенства по x_1 от 0 до h, получим

$$\|\,u_2\,\|^2_{L_2(\Omega)} \le \left(hx_1 - \frac{x_1^2}{2}\right)\Bigg|_0^h \|\,\partial_1 u_2\,\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{h^2}{2}\,\|\,\partial_1 u_2\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Тогда

$$\|\,U\,\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{4}\|\,u_j\,\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{h^2}{2}\sum_{j=1}^{4}\|\,\partial_1 u_j\,\|^2_{L_2(\Omega)} = \frac{h^2}{2}\,\|\,\partial_1 U\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,.$$

Пусть теперь $U \in S_\Lambda(\Omega)$, тогда существует последовательность $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ функций класса $C_\Lambda(\Omega)$, таких что $\|\,U_n - U\,\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|\,U_n\,\|^2_{L_2(\Omega)} \le \frac{h^2}{2}\,\|\,\partial_1 U_n\,\|^2_{L_2(\Omega)}\,. \tag{9}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\|\,U_n\,\|_{L_2(\Omega)} = \|\,U\,\|_{L_2(\Omega)} \text{ и } \lim_{n\to\infty}\|\,\partial_1 U_n\,\|_{L_2(\Omega)} = \|\,\partial_1 U\,\|_{L_2(\Omega)},$$

то, переходя в неравенстве (9) к пределу при $n \to \infty$, приходим к требуемому неравенству.

Лемма 4. *Для каждой вектор функции* $U \in S_\Lambda(\Omega)$ *и для любых натуральных* $l, m = \overline{1,4}$ *таких, что* $l \ne m$, *выполняется равенство:*

$$\langle A_l\partial_l U; A_m\partial_m U\rangle_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Доказательство. Пусть $l \ne m$ и $U \in C_\Lambda(\Omega)$, тогда $\langle A_s U_{x_s}; A_l U_{x_l}\rangle_{L_2(\Omega)}$.

$$\langle A_l\partial_l U; A_m\partial_m U\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \langle A_l\partial_l U; A_m\partial_m U\rangle_{\mathbb{R}^4}dx = \int_\Omega \langle \partial_l U; A_l^T A_m\partial_m U\rangle_{\mathbb{R}^4}dx.$$

Обозначим $A_l^T A_m = C_{lm} = (c_{jk}^{(lm)})_{j,k=1}^4$. Из условий (6) следует, что матрица C_{lm} является кососимметрической, т.е.

$$c_{jk}^{lm} = \begin{cases} 0, \text{если } j \ne k, \\ -c_{jk}^{lm}, \text{если } j = k, \end{cases} \left(j,k=\overline{1,4}\right).$$

Тогда

$$\langle A_l\partial_l U; A_m\partial_m U\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \partial_l U; C_{lm}\partial_m U\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{j,k=1}^{4} c_{jk}^{(lm)}\partial_l u_j\cdot\partial_m u_k\,dx =$$

$$= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant 4}\int_\Omega c_{jk}^{(lm)}\partial_l u_j\cdot\partial_m u_k\,dx + \sum_{1\leqslant k<j\leqslant 4}\int_\Omega c_{jk}^{(lm)}\partial_l u_j\cdot\partial_m u_k\,dx.$$

Во второй сумме сделаем замену индексов (j на k, k на j) и запишем под одним знаком суммы:

$$\langle A_l\partial_l U; A_m\partial_m U\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 4} c_{jk}^{(lm)}(\partial_l u_j\cdot\partial_m u_k - \partial_l u_k\cdot\partial_m u_j)dx.$$

Применив к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$\langle A_l\partial_l U; A_m\partial_m U\rangle_{L_2(\Omega)} = -\int\limits_{\Omega}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 4} c_{jk}^{(lm)}(u_j\cdot\partial_{lm}^2 u_k - u_j\cdot\partial_{lm}^2 u_k)dx +$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 4} c_{jk}^{(lm)}(\nu_l\cdot u_j\cdot\partial_m u_k - \nu_m\cdot u_j\cdot\partial_l u_k)dS =$$
$$=\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 4} c_{jk}^{(lm)}(\nu_l\cdot u_j\cdot\partial_m u_k - \nu_m\cdot u_j\cdot\partial_l u_k)dS,$$

где $\partial_{lm}^2 := \partial_l\partial_m$, $\nu = (\pm 1, 0, 0, 0)$ – вектор единичной внешней нормали к поверхности $\partial\Omega$. Нетрудно видеть, что в силу граничных условий (7) и вида границы области Ω, последний интеграл равен нулю.

Возьмем функцию U из $S_\Lambda(\Omega)$, тогда существует последовательность $(U_n)_{n=1}^\infty$ функций класса $C_\Lambda(\Omega)$ таких, что $\| U_n - U\|_{W_2^1(\Omega)} \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда $\partial_j U_n \to \partial_j U$ в пространстве $L_2(\Omega)$ при $n\to\infty$ ($j=\overline{1,4}$) и по доказаному

$$\langle A_l\partial_l U_n; A_m\partial_m U_n\rangle_{L_2(\Omega)} = 0 \ (n\in\mathbb{N}).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу, получим требуемое.

Априорные оценки нормы эллиптического оператора ортогонального типа в $\mathbb{R}^4$

Теорема 5. *Пусть* $C = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{h}\right\}$, *матрица* $B(x)$ *непрерывна в слое* $\bar{\Omega}$, *и существует число* $\delta\in[0, (\sqrt{2}-1)C]$ *такое, что для любой* $U\in S_\Lambda(\Omega)$ *выполняется*

$$\| BU\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \delta\| U\|_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда существуют положительные числа α *и* β *такие, что для любой вектор-функции* $U\in S_\Lambda(\Omega)$ *выполняется неравенство*

$$\alpha\| U\|_{W_1^2(\Omega)} \leqslant \|\Lambda U\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \beta\| U\|_{W_1^2(\Omega)}. \quad (10)$$

Доказательство. Через Λ_0 обозначим старшую часть оператора Λ. Согласно лемме 4, получим

$$\|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^4 \langle A_j\partial_j U; A_j\partial_j U\rangle_{L_2(\Omega)} + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 4}\langle A_j\partial_j U; A_k\partial_j U\rangle_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \sum_{j=1}^4 \|\partial_j U\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant \| U\|_{W_2^1(\Omega)}^2.$$

Используя утверждение леммы 3, получим

$$\|\Lambda_0 U\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{j=2}^4 \|\partial_j U\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^4 \|\partial_j U\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|\partial_1 U\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\| \partial_j U \|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{h^2}\| U \|^2_{L_2(\Omega)} \geq C^2 \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} .$$

Оценим сверху модуль скалярного произведения $\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}$:

$$|\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| \leq \| \Lambda_0 U \|^2_{L_2(\Omega)} + \delta \| U \|_{L_2(\Omega)} \| \Lambda_0 U \|_{L_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} + \delta \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} = (1+\delta) \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} .$$

Далее

$$\| \Lambda U \|^2_{L_2(\Omega)} = \langle \Lambda U; \Lambda_0 U + BU \rangle_{L_2(\Omega)} =$$
$$= \langle \Lambda U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \Lambda_0 U; BU \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle BU; BU \rangle_{L_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq (1+\delta) \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} + \delta \| \Lambda_0 U \|_{L_2(\Omega)} \| U \|_{L_2(\Omega)} + \delta^2 \| U \|^2_{L_2(\Omega)} \leq$$
$$\leq (1+2\delta+\delta^2) \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)},$$

т.е.

$$\| \Lambda U \|_{L_2(\Omega)} \leq (1+\delta) \| U \|_{W_2^1(\Omega)} .$$

Таким образом, можно положить $\beta = 1+\delta$.

Оценим снизу модуль скалярного произведения $\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}$:

$$|\langle \Lambda U, \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| = |\langle \Lambda_0 U + BU; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| =$$
$$= |\langle \Lambda_0 U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle BU; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| \geq$$
$$\geq \| \Lambda_0 U \|^2_{L_2(\Omega)} - |\langle BU; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| \geq$$
$$\geq \| \Lambda_0 U \|^2_{L_2(\Omega)} - \| BU \|_{L_2(\Omega)} \| \Lambda_0 U \|_{L_2(\Omega)} \geq$$
$$\geq \| \Lambda_0 U \|^2_{L_2(\Omega)} - \delta \| U \|_{L_2(\Omega)} \| \Lambda_0 U \|_{L_2(\Omega)} \geq$$
$$\geq \| \Lambda_0 U \|^2_{L_2(\Omega)} - \delta C \| U \|_{L_2(\Omega)} \| U \|_{W_2^1(\Omega)} \geq$$
$$\geq C^2 \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} - \delta C \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} = (C^2 - \delta C) \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} .$$

Тогда

$$\| \Lambda U \|^2_{L_2(\Omega)} = \left| \langle \Lambda U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \Lambda_0 U; BU \rangle_{L_2(\Omega)} + \| BU \|^2_{L_2(\Omega)} \right| \geq$$
$$\geq |\langle \Lambda U; \Lambda_0 U \rangle_{L_2(\Omega)}| - \left| \langle \Lambda_0 U; BU \rangle_{L_2(\Omega)} \right| - \| BU \|^2_{L_2(\Omega)} \geq$$
$$\geq (C^2 - \delta C) \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} - \delta C \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} - \delta^2 \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} \geq$$
$$\geq \left(C^2 - 2\delta C - \delta^2 \right) \| U \|^2_{W_2^1(\Omega)} .$$

Следовательно, можно положить $\alpha^2 = C^2 - 2\delta C - \delta^2$. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет установить единственность сильного решения однородной задачи типа Римана – Гильберта.

Теорема 6. *Задача типа Римана – Гильберта* (8) *имеет не более одного сильного решения.*

Для доказательства достаточно показать, что однородная задача (8) имеет только нулевое решение. Пусть $\Lambda U = 0$. Тогда из неравенства (10) следует, что $\| U \|_{W_1^2(\Omega)} = 0$ и, значит, $U = 0$. Что и требовалось доказать.

Слабое решение задачи типа Римана – Гильберта

Для произвольных четырехкомпонентных вектор-функций $U \in S_\Lambda(\Omega)$, $V \in C^\infty(\bar\Omega)$ рассмотрим выражение $\langle \Lambda_0 U, V\rangle_{L_2(\Omega)}$. Интегрируя по частям, получаем равенство

$$\langle \Lambda_0 U, V\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \left\langle \sum_{j=1}^4 A_j \partial_j U, V \right\rangle_{\mathbb{R}^4} dx =$$

$$= -\int_\Omega \left\langle U, \sum_{j=1}^4 A_j^T \partial_j V \right\rangle_{\mathbb{R}^4} dx + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^4 \langle U, A_j^T V\rangle_{\mathbb{R}^4} \nu_j dS =$$

$$= -\int_\Omega \left\langle U, \sum_{j=1}^4 A_j^T \partial_j V \right\rangle_{\mathbb{R}^4} dx + \int_{\partial\Omega} \langle U, V\rangle_{\mathbb{R}^4} \nu_1 dS.$$

Если вектор-функция V дополнительно удовлетворяет граничным условиям

$$v_1\big|_{x_1=h} = v_2\big|_{x_1=0} = v_3\big|_{\partial\Omega} = v_4\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{11}$$

то

$$\langle \Lambda_0 U, V\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle U, \Lambda_0^* V\rangle_{L_2(\Omega)}, \tag{12}$$

где

$$\Lambda_0^* := -\sum_{j=1}^4 A_j^T \partial_j = -A_1\partial_1 + \sum_{j=2}^4 A_j \partial_j.$$

Оператор $\Lambda^* := \Lambda_0^* + B^T$ назовем формально сопряженным оператору Λ.

Через $C_{\Lambda^*}(\Omega)$ обозначим класс бесконечно дифференцируемых вектор-функций $V = (v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x))^{\mathrm{T}}$, удовлетворяющих условиям (11) и интегрируемых в квадрате по Ω вместе со всеми производными до второго порядка включительно. Замыкание $C_{\Lambda^*}(\Omega)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$ обозначим через $S_{\Lambda^*}(\Omega)$.

В силу принципа продолжения тождеств [11, с. 100], равенство (12) выполняется для всех $U \in S_\Lambda(\Omega)$ и $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$.

Пусть $U \in C_\Lambda$ – решение задачи типа Римана – Гильберта. Умножим скалярно обе части уравнения (8) на произвольную функцию $V \in C_{\Lambda^*}(\Omega)$, тога

$$\langle \Lambda U; V\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle F; V\rangle_{L_2(\Omega)},$$
$$\langle U; \Lambda^* V\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle F; V\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

По непрерывности последнее тождество продолжается на функции $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$. Следуя С.Л. Соболеву [12], сформулируем определение слабого решения задачи типа Римана – Гильберта.

Определение 7. *Функция $U \in L_2(\Omega)$ называется слабым решением задачи типа Римана – Гильберта, если для любой $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$ имеет место равенство*

$$\langle F, V\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle U, \Lambda^* V\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема 8. *Пусть* $C = \min\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{h}\right\}$, *матрица* $B(x)$ *непрерывна в слое* $\overline{\Omega}$ *и существует число* $\delta \in \left[0, \left(\sqrt{2}-1\right)C\right]$, *такое, что для любой* $U \in S_\Lambda(\Omega)$ *выполняется*

$$\|BU\|_{L_2(\Omega)} \le \delta \|U\|_{L_2(\Omega)}. \tag{13}$$

Тогда для любой $F \in L_2(\mathbf{\Omega})$ *существует слабое решение задачи типа Римана – Гильберта.*

Доказательство. Анализ доказательств лемм 3, 4 и теоремы 5 позволяет перенести все полученные результаты для оператора Λ на оператор Λ^*, в частности существование числа $\alpha > 0$, такого, что для любой $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\alpha \|V\|_{W_1^2(\Omega)} \le \left\|\Lambda^* V\right\|_{L_2(\Omega)}. \tag{14}$$

Для фиксированной функции $F(x) \in L_2(\mathbf{\Omega})$ и произвольной функции $V \in S_{\Lambda^*}(\Omega)$ рассмотрим функционал $\left\langle F, V\right\rangle_{L_2(\Omega)}$. Пользуясь неравенствами Коши-Буняковского и (14), получим

$$\left|\left\langle F, V\right\rangle_{L_2(\Omega)}\right| \le \|F\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|V\|_{L_2(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha}\|F\|_{L_2(\Omega)} \cdot \left\|\Lambda^* V\right\|_{L_2(\Omega)},$$

т.е. функционал $\left\langle F, V\right\rangle_{L_2(\Omega)}$ является линейным ограниченным функционалом по $\Lambda^* V$ на некотором подпространстве пространства $L_2(\mathbf{\Omega})$. По теореме Хана – Банаха этот функционал продолжается на все пространство [11, с. 210]. Тогда по теореме Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве, найдется функция $U(x) \in L_2(\mathbf{\Omega})$ такая, что имеет место равенство

$$\left\langle F, V\right\rangle_{L_2(\Omega)} = \left\langle U, \Lambda^* V\right\rangle_{L_2(\Omega)}.$$

Существование слабого решения задачи типа Римана – Гильберта (8) доказано.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Усс, А. Т. Гомотопическая классификация трех- и четырехмерных аналогов системы Коши – Римана / А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 8. – С. 1118–1125.

2. Балабаев, В. Е. Нормальные эллиптические системы первого порядка / В. Е. Балабаев // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 1. – С. 71–83.

3. Шевченко, В. И. Гомотопическая классификация краевых задач Гильберта для голоморфного вектора / В. И. Шевченко // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 201, № 5. – С. 1067–1069.

4. Соломяк, М. З. О линейных эллиптических системах первого порядка / М. З. Соломяк // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 150, № 1. – С. 48–51.

5. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

6. Виноградов, В. С. Граничная задача для псевдосимметрических систем / В. С. Виноградов // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 161–163.

7. Басик, А. И. О краевых задачах для эллиптических псевдосимметрических систем первого порядка в R^4 / А. И. Басик, А. Т. Усс // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 38, № 3. – С. 410–412.

8. Ошоров, Б. Б. Об одном четырехмерном аналоге системы уравнений Коши – Римана / Б. Б. Ошоров // Неклас. уравнения мат. физики. – 2007. – С. 212–220.

9. Ошоров, Б. Б. Задачи Римана – Гильберта и Пуанкаре с разрывными условиями для некоторых модельных систем уравнений в частных производных / Б. Б. Ошоров // Дифференц. уравнения. – 2011. – № 5. – С. 696–704.

10. Михлин, С. Г. Линейные уравнения с частными производными : учеб. пособие для мех.-мат. и физ. специальностей вузов / С. Г. Михлин. – М. : Высш. шк., 1977. – 431 с.

11. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2003. – 430 с.

12. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – М. : Наука, 1988. – 336 с.

Рукапіс паступіў у рэдакцыю 22.10.2018

Basik A.I., Gritsuk E.V. **The Riemann – Hilbert Type Boundary Value Problem for Orthogonal Elliptic Systems in** R^4

The class of elliptic systems of four differential equations of the first order with four variables orthogonal type is considered in this paper. The questions of existence and uniqueness of the solution of Riemann-Hilbert type boundary value problem are studied for this class of systems in the unbounded special domain.